TD complément

Thème : Lois à densité

Exercice

- *Construction de la variable* X.
  On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \dfrac{2}{\pi\left(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}\right)}$.

1. **a)** Soit la fonction g définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par : $\forall \theta \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[, \quad g(\theta) = \ln\big(\tan(\theta)\big)$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée.

b) En déduire grâce au changement de variable $t = g(\theta)$ que f est une densité de probabilité.
On note dans toute la suite X une variable aléatoire admettant une densité égale à f.

c) Que dire de l'espérance de X ?

- *Préliminaires au calcul de la variance de* X.

2. Soit p un entier naturel non nul.

a) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre p. Calculer l'espérance $\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^2\right)$.

b) On note $\mathrm{J}_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$. Déduire de la question précédente la convergence et la valeur de J_p.

c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-pt}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t$ converge, puis que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-pt}}{1+\mathrm{e}^{-2t}}\,\mathrm{d}t \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- *Variance de* X *à l'aide d'une série.*

3. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2t}} = (-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-2(n+1)t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{e}^{-2kt}.$$

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-(2n+3)t}}{1+\mathrm{e}^{-2t}} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{e}^{-(2k+1)t}\right].$$

c) Montrer finalement que X admet une variance et que

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

d) Proposer une méthode pour approximer la variance de X à l'aide de python.

Éléments de solution

1.a) La fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers $]0, +\infty[$.
La fonction logarithme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \frac{1+\tan^2(\theta)}{\tan(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)\tan(\theta)} \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)\sin(\theta)} = \frac{2}{\sin(2\theta)} \end{aligned}$$

1.b) Vérifions la définition.

- La fonction f est positive.
- Par quotient, f est continue sur $\mathbb{R}$.
- Soient a, $b \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_a^b \frac{1}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variable $t = g(\theta)$, $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]0, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. Dans un premier temps, $\mathrm{e}^t = \tan\theta$, $\mathrm{e}^{-t} = 1/\mathrm{e}^t = 1/\tan(\theta)$ et

$$f(t) = \frac{2}{\pi\big(\tan(\theta) + 1/\tan(\theta)\big)}.$$

Dans un second temps

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = g'(\theta) = \frac{\tan'(\theta)}{\tan(\theta)}.$$

Sachant que $\tan'(\theta) = 1 + \tan(\theta)^2$, il vient :

$$\mathrm{d}t = \frac{1+\tan(\theta)^2}{\tan(\theta)}\,\mathrm{d}\theta;$$

puis en posant $\alpha = g^{-1}(a)$, $\beta = g^{-1}(b)$,

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{1+\tan^2(\theta)}{\tan(\theta)\left(\tan(\theta) + \frac{1}{\tan(\theta)}\right)}\mathrm{d}\theta.$$

L'intégrande se simplifie

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta 1\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}(\beta - \alpha).$$

Or :
⇀ Quand a tend vers $-\infty$, α tend vers 0 ;
⇀ Quand b tend vers $+\infty$, β tend vers $\frac{\pi}{2}$.
On en déduit la convergence et l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Finalement, f est une densité de probabilité.

1.c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(-t) = \frac{2}{\pi\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t\right)} = f(t).$$

Donc f est paire.
La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

est généralisée en $\pm\infty$. Or par les croissance comparées :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2|tf(t)| = 0.$$

C'est-à-dire

$$|tf(t)| = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par le critère de négligeabilité sachant que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ sont convergentes, l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$$

est absolument convergente. L'espérance de X existe.
Or par imparité de $t \mapsto tf(t)$,

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 0.$$

2.a) Comme Y suit une loi exponentielle de paramètre p, on sait que Y admet une espérance et une variance avec

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathrm{Y}) = \frac{1}{p^2}.$$

Or par la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbf{V}(\mathrm{Y}) = \mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^2\right) - \mathbf{E}(\mathrm{Y})^2,$$

d'où
$$\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^2\right) = \frac{2}{p^2}.$$

2.b) Comme Y^2 admet une espérance, et qu'une densité de Y est

$$t \mapsto \begin{cases} p\mathrm{e}^{-pt} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors par le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^2\right) = p\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

converge. Ainsi J_p existe et

$$\mathrm{J}_p = \frac{2}{p^3}.$$

2.c) La fonction

$$h : t \mapsto \begin{cases} \frac{t^2 e^{-pt}}{1+e^{-2t}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$. De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 \leqslant \frac{t^2 e^{-pt}}{1+e^{-2t}} \leqslant t^2 e^{-pt}.$$

Or, on vient justement de vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-pt}\,dt$ était convergente. Par le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-pt}}{1+e^{-2t}}\,dt$$

est donc convergente. Puis par croissance l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-pt}}{1+e^{-2t}}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}\,dt.$$

Or

$$J_p = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt}\,dt = \frac{2}{p^3} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut sur l'existence et le calcul de la limite par le théorème d'encadrement.

3.a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

La somme $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt}$ est une somme géométrique de raison $-e^{-2t}$ et de premier terme 1. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-2kt} &= \frac{1-(-1)^{n+1}e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-2kt}.\end{aligned}$$

3.b) Notons que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{2}{\pi\left(e^t + e^{-t}\right)} = \frac{2e^{-t}}{\pi\left(1+e^{-2t}\right)}.$$

D'après la question précédente,

$$f(t) = \frac{2e^{-t}}{\pi}\left((-1)^{n+1}\frac{e^{-2(n+1)t}}{1+e^{-2t}} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-2kt}\right).$$

3.c) Remarquons que

$$t^2 f(t) = \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\frac{t^2 e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^2 e^{-(2k+1)t}\right].$$

Or les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-(2k+1)t}\,dt$$

sont convergentes d'après les questions précédentes. On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$

est convergente. Puis par parité, on a la convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$

Elle même absolument convergente puisque l'intégrande est positive. Par le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance. D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Or on a vu que $\mathbf{E}(X) = 0$ et

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt.$$

De plus

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} t^2 f(t)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^2 e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k J_{2k+1}\right].\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbf{V}(X) = \frac{4}{\pi}\left[(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^2 e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt + \sum_{k=0}^{n}\frac{2(-1)^k}{(2k+1)^3}\right].$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ avec

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2 e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on a

$$\mathbf{V}(X) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

3.d) *Méthode 1.*

La première idée est d'utiliser la formule précédente et d'approximer $\mathbf{V}(X)$ par une somme partielle. Pour « N assez grand »

$$\mathbf{V}(X) \simeq \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Un code possible est alors :

```
import numpy as np


# Méthode 1
N=500
V=0
E=1 # pour le changement de signe
for k in range(N):
    V+=E/(2*k+1)**3
    E=-E
print(V*8/np.pi)
```

Méthode 2. Via la méthode d'inversion
En reprenant le calcul de la question 4.b), on peut expliciter la onction de répartition de X par

$$\mathrm{F}(x) = \frac{2}{\pi} g^{-1}(x).$$

On vérifie que la variable

$$\mathrm{Z} = g\Big(\frac{2}{\pi}\mathrm{U}\Big) \quad \text{avec} \quad \mathrm{U} \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1[)$$

a la même loi que X ce qui permet de simuler la variable X par :

```
import numpy.random as rd

def g(theta):
    return np.log(np.tan(theta))

def simuX():
    u=rd.random()
    return g(u*np.pi/2)
```

Ensuite, en remarquant que $\mathbf{V}(\mathrm{X}) = \mathbf{E}(\mathrm{X}^2)$, on peut approximer la variance par la moyenne empirique d'un échantillon formée à partir de X^2. Par exemple :

```
N=50000
X=rd.exponential(1,N)
Y1=np.zeros(N)
Y2=np.zeros(N)
for iter in range(N):

    Y2[iter]=simuX()**2
print(np.mean(Y2))
```

Les résultats :

```
2.4674010989991113

2.4833811210379535
```