CHAPITRE 8

Lois à densité usuelles

J'étais alors en proie à la mathématique.
Temps sombre ! enfant ému du frisson poétique,
Pauvre oiseau qui heurtais du crâne mes barreaux,
On me livrait tout vif aux chiffres, noirs bourreaux ; [...]
On me tordait depuis les ailes jusqu'au bec,
Sur l'affreux chevalet des X et des Y ; [...]

VICTOR HUGO, *Les Contemplations*, 1856

Ce chapitre liste les différentes lois usuelles au programme et précise les différentes propriétés à connaître.

1 Lois uniformes continues

Définition, espérance et variance

DÉFINITION — **lois uniformes continues**

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$.
On dit que X *suit la* **loi uniforme continue** *sur l'intervalle* $[a;b]$, *noté* $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a;b])$, *si* X *a pour densité*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. Le facteur $\frac{1}{b-a}$ est imposé par le fait qu'une densité est toujours d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$.

PROPOSITION — **fonction de répartition et espérance d'une loi uniforme**

Soit X *une variable aléatoire suivant une loi uniforme* $\mathscr{U}([a;b])$. *La fonction de répartition de* X *est*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$$

De plus, X *admet une espérance et une variance avec*

$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Preuve. Considérons f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si} \quad t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

- Si $x < a$, alors pour tout $t \in]-\infty; x]$, $f(t) = 0$. Par conséquent, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.
- Si $x \in [a;b]$, alors
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} 1\,dt = \frac{1}{b-a}\left[\,t\,\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$
- Si $x > b$, alors
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

La densité est une fonction continue par morceaux qui s'annule en dehors d'un segment, on a donc convergence absolue de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt$. X admet une espérance et

$$\mathbf{E}(X) = \int_a^b t f(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Pour la variance :

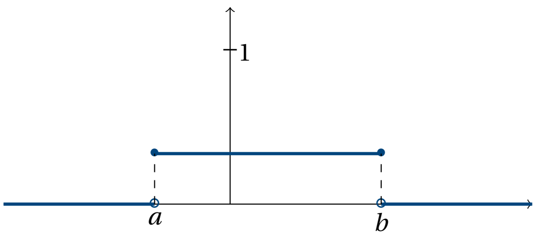
$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) = \int_a^b (t-\mathbf{E}(X))^2 f(t)\,dt &= \frac{1}{b+a}\int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

■

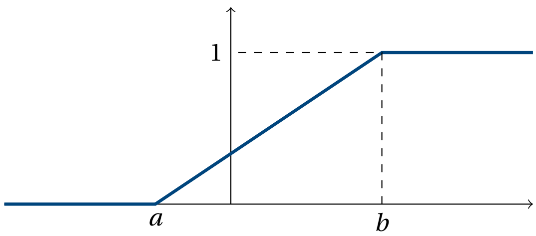
Remarques.

- Autrement dit, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$, alors pour tous $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, on a $\mathbf{P}\Big([X \in [c;d]\,]\Big) = \dfrac{d-c}{b-a}$.
En particulier, X est presque sûrement à valeurs dans $[a;b]$.
- Comme X est une variable aléatoire bornée, X admet des moments à tout ordres.

Les graphes



Une densité de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$



La fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$

Exemples de modélisation

Souvent lorsque qu'on ne précise pas, un tirage *au hasard* correspond à une loi uniforme.
Par exemple, choisir un nombre réel *au hasard* dans $[0;1]$ signifie choisir un nombre suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$.

Exercice 1

✦ À partir de 8 heures, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt donné. Ils passent donc à 8h00, 8h15, 8h30, etc... Un usager se présente à cet arrêt entre 8h00 et 8h30. On suppose que l'heure exacte de son arrivée est une variable aléatoire X de loi uniforme sur cette période.

1. Quelle est la probabilité que l'usager doive attendre moins de cinq minutes ? Plus de dix minutes ?
2. On note T le temps d'attente du bus (en minutes).
   a) Déterminer F_T, la fonction de répartition de T.
   b) En déduire la loi de T. En moyenne, combien de temps attend l'usager ?

p. 16

Transformation affine et lois uniformes

Soient $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Notons $Y = (b-a)X + a$ et F_X, F_Y les fonctions de répartition de X et Y. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(t) = \mathbf{P}\Big(\big[Y \leqslant t\big]\Big) = \mathbf{P}\Big(\big[(b-a)X + a \leqslant t\big]\Big) = \mathbf{P}\left(\left[X \leqslant \frac{t-a}{b-a}\right]\right) = F_X\left(\frac{t-a}{b-a}\right).$$

Par dérivation, une densité par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_Y(t) = \frac{1}{b-a} f_X\left(\frac{t-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{si } t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnaît la densité de la loi $\mathscr{U}([a;b])$. Comme la densité caractérise la loi, retenons que :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{X suit une loi uniforme sur } [0;1] \\ \text{si et seulement si} \\ Y = (b-a)X + a \text{ suit une loi uniforme sur } [a;b]. \end{array}}$$

Remarque. De manière un peu artificielle, on aurait pu retrouver le calcul de l'espérance d'une loi uniforme $\mathscr{U}([a;b])$ à partir de l'espérance d'une loi uniforme $\mathscr{U}([0;1])$. En effet, si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$, alors on vérifie que $1-X$ suit aussi une loi uniforme sur $[0;1]$. Même loi implique même espérance et $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(1-X) = 1 - \mathbf{E}(X)$. D'où $\mathbf{E}(X) = 1/2$. Ensuite, pour $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([a;b])$, on écrit

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}\big((b-a)X + a\big) = (b-a)\mathbf{E}(X) + a = (b-a)\cdot\frac{1}{2} + a = \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 2

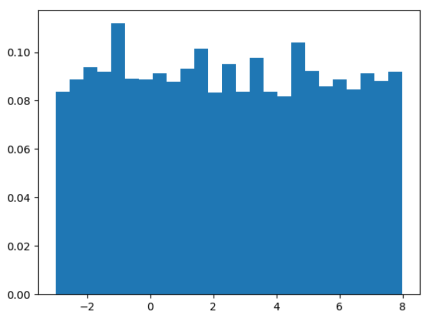
✧ **Vrai ou faux ?** Si $U \hookrightarrow \mathscr{U}([-1;1])$, alors U et $-$U ont même loi. p. 16

Simulation

La commande `rd.random()` permet de tirer un nombre pris « au hasard » dans $[0;1]$. Cette commande permet donc de simuler une loi uniforme sur $[0;1]$. À l'aide de la transformation affine décrite précédemment, on peut simuler toutes les lois uniformes continues. Voici un code possible.

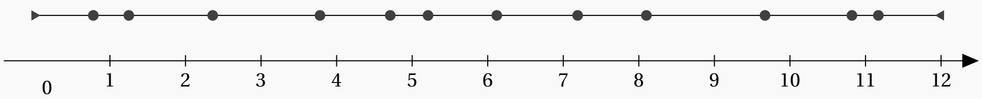
Editeur

```python
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def Simulation(a,b):
    X=np.random.rand(5000)
    Y=(b-a)*X+a
    plt.hist(Y, 25, density=True)
    # Création de l'histogramme
    plt.show()

# test :
Simulation(-2,8)
```

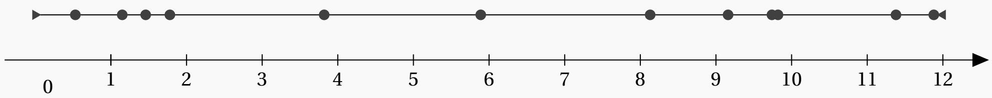


La « loi » des séries **Le saviez-vous**

L'homme simule très mal le hasard. Inconsciemment, il introduit une certaine forme de régularité. Par exemple, s'il essaye de simuler une centaine de lancers de pile ou face, on constate qu'en général, ce dernier alterne trop souvent entre le pile et le face afin d'avoir toujours, à peu près, la même proportion de pile et de face.
Autre exemple, si on demande à quelqu'un de placer 12 points « au hasard » sur une droite, la réponse ressemblera sûrement à cela :



La même expérience avec Python en utilisant une loi uniforme sur $[0;12]$ donne plutôt :



Dans le premier cas, il y a un point pour chaque intervalle $[i;i+1]$ (avec $i \in \{0;1;2:\cdots;11\}$) alors que les points se regroupent plus facilement dans le second cas. Or, la probabilité d'avoir un point dans chaque intervalle est extrêmement faible :

$$p = \frac{12!}{12^{12}} \simeq 0,005\%.$$

Maintenant si dans l'année, on assiste à trois accidents d'avions dans le même mois, on s'étonnera, on cherchera même une causalité, on parlera de la « loi des séries » alors que ce n'est simplement qu'un événement hautement probable. La « loi des séries » n'existe tout simplement pas, c'est plutôt l'expression de notre incapacité à simuler correctement le hasard.

Exercice 3

✦ Expliquer le calcul de $p = (12!)/12^{12}$. *(facultatif).* p. 16

2 Lois exponentielles

Définition, espérance et variance

DÉFINITION **lois exponentielles**

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *une variable aléatoire à densité sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.
On dit que X *suit la* ***loi exponentielle*** *de paramètre* λ*, notée* $\mathscr{E}(\lambda)$*, si* X *a pour densité*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. La fonction f_X est bien une densité de probabilité. Elle est positive, continue sauf en 0 avec pour tout $A \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_{-\infty}^{A} f_X(t)\,dt = \int_0^A f_X(t)\,dt = \int_0^A \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^A = 1 - e^{-\lambda A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \quad \text{puis} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1.$$

PROPOSITION — **fonction de répartition et espérance d'une loi exponentielle**

Soit X *une variable aléatoire suivant une loi exponentielle* $\mathscr{E}(\lambda)$. *La fonction de répartition de* X *est*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

De plus, X *admet une espérance et une variance avec*

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}_*^-$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$

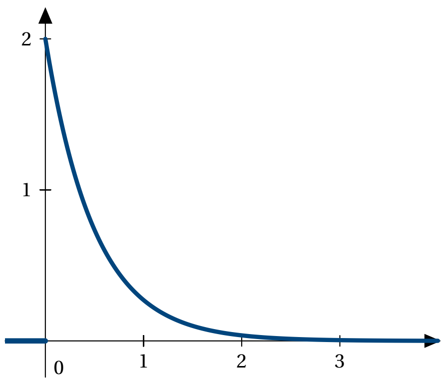
Pour $x \in \mathbb{R}^+$ $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x f_X(t)\,dt = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Par comparaison aux intégrales de Riemann, on prouve la convergence absolue. Calculons l'espérance à l'aide d'une intégration par parties (toutes les fonctions considérées sont de classes $\mathscr{C}^1$). Soit $A \in \mathbb{R}_*^+$,

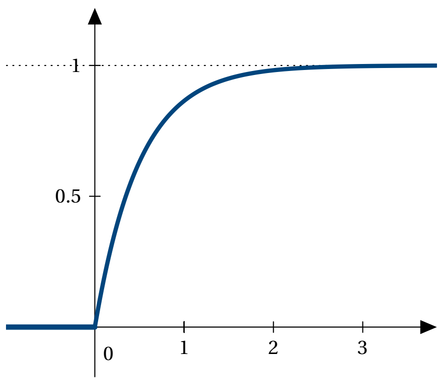
$$\int_0^A t f_X(t)\,dt = \lambda \int_0^A t e^{-\lambda t}\,dt = \left[-t e^{-\lambda t}\right]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda t}\,dt = A e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda A}\right).$$

On conclut par passage à la limite $A \to +\infty$.
Le calcul de la variance se fait par la formule de Koenig-Huygens. On pourra refaire l'exercice 5 pour les détails. ∎

Les graphes



Une densité de $X \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$



La fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$

Exemples de modélisation

On montre à l'exercice 19 que si X suit une loi exponentielle, alors la variable $Y = \lfloor X \rfloor + 1$ suit une loi géométrique. La loi exponentielle est « la version continue » de la loi exponentielle. Il n'est donc pas surprenant que la loi exponentielle soit, comme la loi géométrique, une loi sans mémoire.

PROPOSITION — **loi sans mémoire**

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.
Alors X *est une* ***variable aléatoire sans mémoire****. C'est-à-dire :*

$$\forall s, t \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbf{P}\big([X > t]\big) = \mathbf{P}_{[X>s]}\big([X > s + t]\big).$$

Exercice 4

✦ ✎ Prouver cette proposition.
Dans un second temps, voir exercice 21 p. 14 pour l'étude de la réciproque.

p. 17

Remarque. On parle aussi de propriété de *non vieillissement*.
Plus généralement, la loi exponentielle intervient dans les processus continus sans mémoire comme le temps d'émission d'un électron, le temps de vie d'un composant électronique, ...

Exemple. Si X est la variable aléatoire égale au temps de vie d'une particule atomique en millions d'années, alors $\mathbf{P}\big([\mathrm{X} > 4]\big)$ représente la probabilité que la particule existe encore après 4 millions d'années.
A priori, une particule ne subit pas l'effet du temps, la probabilité que la particule existe au bout de 5 millions d'années sachant qu'elle existe depuis 1 million est égale à la probabilité que la particule existe après 4 millions d'années. Autrement dit,

$$\mathbf{P}\big([\mathrm{X} > 4]\big) = \mathbf{P}_{[\mathrm{X}>1]}\big([\mathrm{X} > 1 + 4]\big).$$

Plus généralement, X suit une loi sans mémoire.

Transformation linéaire et lois exponentielles

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$ et $\mathrm{Y} = \frac{1}{\lambda}\mathrm{X}$. On a vu la relation entre les fonctions de répartition :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{F_Y}(t) = \mathrm{F_X}(\lambda t) \quad \Rightarrow \quad f_{\mathrm{Y}}(t) = \lambda\, f_{\mathrm{X}}(\lambda t) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Retenons :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{X suit une loi exponentielle de paramètre 1} \\ \text{si et seulement si} \\ \mathrm{Y} = \frac{1}{\lambda}\mathrm{X} \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } \lambda. \end{array}}$$

Exercice 5

✦ **Moments de la loi exponentielle**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. **a)** Justifier que I_n est convergente et donner une relation simple entre I_{n+1} et I_n.
   b) En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Conclure en justifiant que la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ admet un moment à tout ordre et retrouver les expressions de l'espérance et la variance.

p. 17

Simulation

Exercice 6

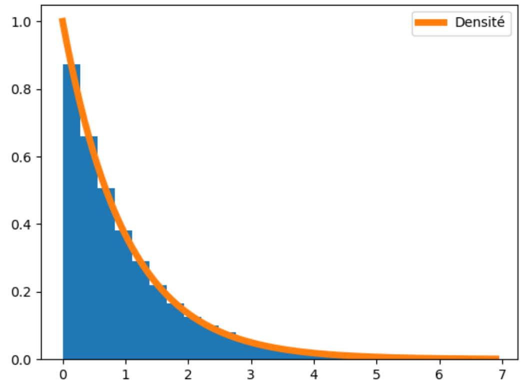
✦ ✎ **Simulation de la loi exponentielle par la méthode d'inversion**

1. Soient $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$ et $\mathrm{X} = -\ln(\mathrm{U})$. Donner la loi de X.
2. Compléter le programme ci-dessous qui prend en argument λ et simule une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

p. 17

Editeur

```python
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def Simulation(Lda):
    U=np.random.rand(50000)
    L= .....
    plt.hist(L, 25, density=True)
    # Création de l'histogramme
    x=np.linspace(0,max(L),200)
    y= ... # pour la densité
    plt.plot(x,y,linewidth=5,label="Densité")
    plt.legend()
    plt.show()
```



3 Lois γ

Avant de donner la définition, reprenons un exercice classique sur la définition et les propriétés de la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 7

✦ ✎ **Propriétés de la loi Γ**

1. Justifier que Γ est une application bien posée sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. **a)** Préciser $\Gamma(1)$.
   b) En utilisant l'intégrale de Gauss, démontrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
3. **a)** Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   b) En déduire que que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

p. 17

Définition, espérance et variance

DÉFINITION — **lois γ**

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *une variable à densité sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *et* $\nu \in \mathbb{R}_*^+$.
On dit que X *suit une **loi** γ **de paramètre** ν, noté* $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$, *si* X *a pour densité*

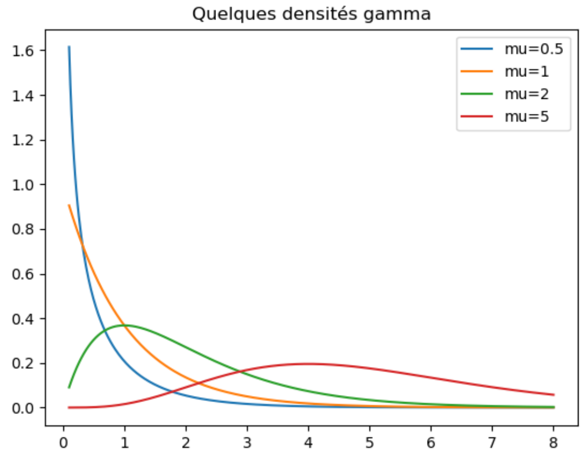
$$f_\nu : t \mapsto \begin{cases} 0 & si\ t \leqslant 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} & si\ t > 0. \end{cases}$$

Remarques.
• Le facteur $1/\Gamma(\nu)$ permet justement de s'assurer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(t) \, \mathrm{d}t$ vaut bien 1 pour avoir une densité.
• La loi $\gamma(1)$ n'est autre que la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$ qui s'utilise pour modéliser des durées de vie sans vieillissement.

Les graphes

Ci-dessous, le tracé avec Python de quelques densités pour différentes valeurs du paramètre ν. Noter l'utilisation de la bibliothèque **SciPy** qui permet, entre autre, d'importer des fonctions de référence (dans notre cas, la fonction Γ).

```
import scipy.special as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.clf()

X=np.linspace(0.1,8,400)
for mu in [0.5, 1, 2,5] :
    Gamma=sp.gamma(mu)
    Y=X**(mu-1)*np.exp(-X)/Gamma

    plt.plot(X,Y)
plt.legend(['mu=0.5', 'mu=1', 'mu=2','mu=5'])
plt.title('Quelques densités gamma')
plt.show()
```



PROPOSITION — **espérance et variance d'une loi γ**

Si X est une variable aléatoire suivant une loi $\gamma(\nu)$ alors X admet une espérance et une variance avec

$$\mathbf{E}(X) = \nu \quad \textit{et} \quad \mathbf{V}(X) = \nu.$$

Preuve. D'après les résultats sur la fonction Γ obtenus à l'exercice précédent, l'intégrale généralisée est convergente

$$\Gamma(\nu+1) = \int_0^{+\infty} x^\nu e^{-x}\, dx = \int_0^{+\infty} x \cdot x^{\nu-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\nu(x)\, dx$$

où f_ν est la densité de la loi $\gamma(\nu)$ donnée dans la définition. Il y a convergence absolue, l'espérance existe et

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\nu(x)\, dx = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)} = \nu.$$

De même, on vérifie que X^2 admet un moment d'ordre 2 et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\nu(x)\, dx = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{+\infty} x^{\nu+1} e^{-x}\, dx \\ &= \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu)} = \frac{\Gamma(\nu+2)}{\Gamma(\nu+1)} \cdot \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)} = (\nu+1)\nu.\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig-Huygens

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2 = (\nu+1)\nu - \nu^2 = \nu.$$

■

4 Lois normales

Définition, espérance et variance

DÉFINITION — **lois normales**

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$.
*On dit que X suit la **loi normale** de paramètres μ, σ, noté $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, si X a pour densité*

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_{\mu,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Remarques.

- Notons que $f_{\mu,\sigma}$ est bien une densité puisque la fonction est positive, continue sur $\mathbb{R}$ et

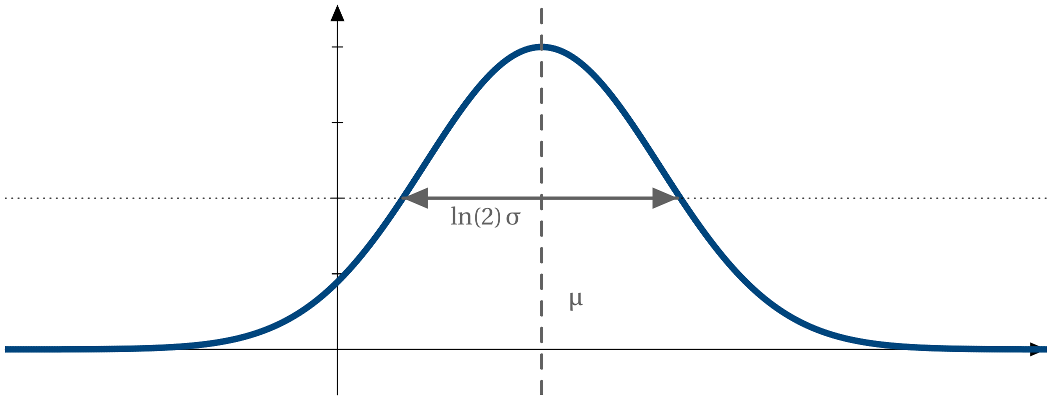
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}t = \sigma\sqrt{2\pi}.$$

En effet, par le changement de variable affine de classe $\mathscr{C}^1$, $u = (t-\mu)/(\sqrt{2}\sigma)$, on retrouve la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u^2\right) \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

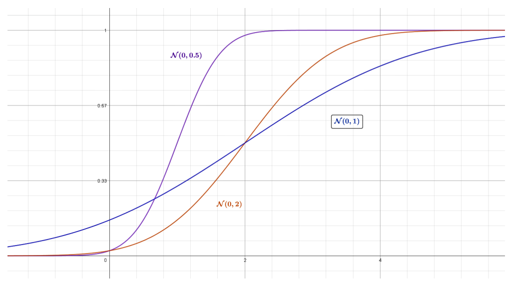
- Dans la suite, $\mathscr{N}(0;1)$ désigne la **loi normale centrée réduite**. La densité est $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

Les graphes

Ci-dessous, l'allure en cloche de la courbe de la densité $f_{\mu,\sigma}$ de la loi normale. Plus σ est proche de 0^+, plus le pic est étroit.

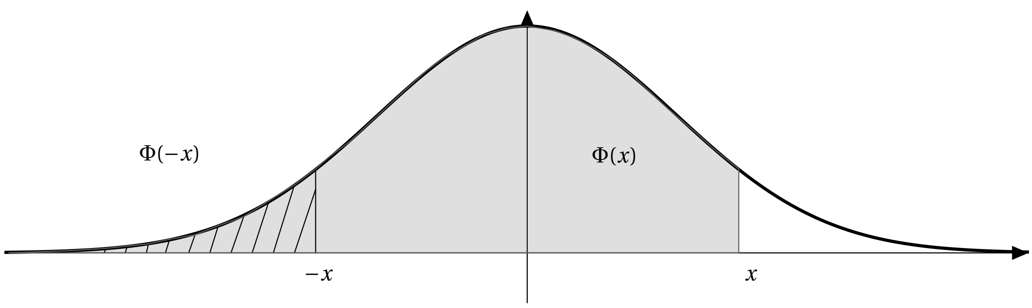


Remarque. Il est d'usage de noter Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On démontre qu'il n'existe pas d'expression avec les fonctions usuelles de Φ.
Toutefois, on montre à l'exercice 16 page 12 comment tracer l'allure de la fonction de répartition en approximant $\Phi(t)$.



Retenons les relations suivantes : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \quad \text{et} \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}.}$

Preuve. On prouve la première relation par changement de variable. Cette relation se comprend surtout sur le graphe de la densité de la loi normale centrée réduite.
L'aire sous la courbe est 1 (puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$). Par conséquent, l'aire sous la courbe en blanc plus l'aire grisée (égale à $\Phi(x)$) vaut 1. Or la densité est une fonction paire, l'aire de la partie hachurée (égale à $\Phi(-x)$) vaut l'aire de la partie en blanc. On a bien $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$.



- La seconde relation s'obtient simplement en prenant $x = 0$.

Transformation affine et lois normales

PROPOSITION **loi normale et transformation affine**

Soient $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Si X *suit une loi normale* $\mathcal{N}(0;1)$.

Alors *la variable aléatoire* $Y = \sigma X + \mu$ *suit une loi normale* $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.

Plus généralement, toute transformation affine d'une loi normale est encore une loi normale.

Preuve. On a $f_X : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}/(\sqrt{2\pi})$. De nouveau, partons de la relation obtenue au chapitre précédent

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_Y(t) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On reconnaît l'expression d'une densité d'une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Comme la densité caractérise la loi, on a prouvé la proposition. ■

Remarque. Retenons aussi la réciproque, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, nous verrons que l'on retrouve la variable aléatoire centrée réduite via

$$\boxed{X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1).}$$

Méthode

Comment approximer $\mathbf{P}\big([X \in [a,b]\,]\big)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ à partir de Φ ?

Calculons $\mathbf{P}([-1 \leqslant X \leqslant 3])$ avec $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1;4)$. L'idée est d'introduire la variable aléatoire centrée réduite $X^* = (X-1)/2$,

$$\mathbf{P}([-1 \leqslant X \leqslant 3]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{-1-1}{2} \leqslant \frac{X-1}{2} \leqslant \frac{3-1}{2}\right]\right) = \mathbf{P}\big([-1 \leqslant X^* \leqslant 1]\big).$$

Or, $X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$. On introduit la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite

$$\mathbf{P}\big([-1 \leqslant X \leqslant 3]\big) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - \big(1-\Phi(1)\big) = 2\Phi(1) - 1.$$

On peut maintenant utiliser Python, ou les tables de Φ, on trouve $\Phi(1) \simeq 0.8413$.
En conclusion, $\mathbf{P}([-1 \leqslant X \leqslant 3]) \simeq 0.6827$.

Exercice 8

✧ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(2;9)$. Approximer $\mathbf{P}\big([X \leqslant -1] \cup [X \geqslant 5]\big)$ à l'aide de $\Phi(1) \simeq 0.8413$. p. 18

Espérance et variance

PROPOSITION **espérance et variance d'une loi normale**

Si X *est une variable aléatoire suivant une loi normale* $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, *alors* X *admet une espérance et une variance avec*

$$\mathbf{E}(X) = \mu \quad \textit{et} \quad \mathbf{V}(X) = \sigma^2.$$

Preuve. Commençons par le cas de la loi normale centrée réduite. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. À l'aide des croissances comparées

$$t^2 f_X(t) = \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, on justifie la convergence absolue, X admet un moment d'ordre 2 et donc une espérance et une variance. Or la densité f_X est paire, $t \in \mathbb{R} \mapsto t f_X(t)$ est impaire et

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt = 0.$$

De plus, procédons par intégrations par parties. Les fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-t f_X'(t) = f_X(t)$

$$\mathbf{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X'(t)\,dt = -\left[t f_X(t)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1.$$

- *Cas général.*

On a vu que si $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, alors

$$Y^* = \frac{Y-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1).$$

Par linéarité de l'espérance et des propriétés de la variance par transformation affine

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}\left(\sigma Y^* + \mu\right) = \sigma \mathbf{E}\left(Y^*\right) + \mu = \mu$$
$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\left(\sigma Y^* + \mu\right) = \sigma^2 \mathbf{V}\left(Y^*\right) = \sigma^2.$$

D'où le résultat. ■

Modélisation

Nous verrons l'importance de la loi normale grâce au théorème limite central au chapitre Convergences des variables aléatoires.

Les lois normales sont utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques. Les mathématiques financières en font une large utilisation (parfois abusive). Citons, par exemple, le modèle de Black-Scholes pour l'évolution d'une action en bourse.

Lien vers une vidéo de la chaîne ScienceEtonnante:
La formule qui a radicalement transformé la finance mondiale [Black-Scholes]

Simulation

Remarque. Nous verrons par la suite quelques méthodes pour simuler les lois normales.

- La méthode de rejet améliorée.
- La méthode de Box-Muller.
- Par approximation à l'aide de 12 lois uniformes.

Exercices

Exercice 9. ✦ Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathscr{N}(\mu;\sigma^2)$. Calculer l'espérance de X^2.

≫ Solution p. 18

Exercice 10. ✦✦ **Lien entre la loi uniforme continue et la disrcète.**
Si $U \hookrightarrow \mathscr{U}(]0;1[)$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$, quelle est la loi de $Y = \lfloor (b-a+1)U \rfloor + a$?

≫ Solution p. 18

Exercice 11. ✦ **Un exemple détaillé**
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1;1])$.

1. On pose pour tout $t \in]-1;1[$, $g(t) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.

- **a)** Justifier que g est une bijection de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.
- **b)** Donner une expression simple de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier que g^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner la dérivée.
- **c)** On définit la variable $T = g(X)$.
  - i) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = F_X\big(g^{-1}(x)\big)$.
  - ii) En déduire que T est une variable aléatoire à densité. *On précisera une densité.*

2.
- **a)** Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.
- **b)** Faire de même avec $V = X^2$.

≫ Solution p. 19

Exercice 12. ✦ Soient $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0;4)$ et $Y = |X|$.

1. Justifier que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité.

2. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

≫ Solution p. 20

Exercice 13. ✦ Soient X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, bornée ainsi que sa dérivée.

1. Justifier que les variables $Xg(X)$ et $g'(X)$ admettent des espérances.

2. Établir l'égalité $\mathbf{E}\big(Xg(X)\big) = \mathbf{E}\big(g'(X)\big)$.

3. En déduire la valeur des moments de X.

≫ Solution p. 20

Exercice 14. ✦ Soit X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

1. Donner la loi de $Y = |X|$. Préciser son espérance et sa variance

2. Trouver la fonction de répartition de $Z = \frac{X+|X|}{2}$. La variable Z est-elle à densité ?

≫ Solution p. 20

Exercice 15. ✦✦ ✎ **Moments de la loi normale**

1. Justifier l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}\,dx$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = (n+1)I_n$.

3. Vérifier que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

4. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = 2^p p!.$$

5. Conclure en donnant les moments de la loi normale centrée réduite à tout ordre.

≫ Solution p. 21

Exercice 16. **Tracé de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite**
Dans la suite, Φ désigne la fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite.

1. ✧ *Premières propriétés*

   a) Préciser les variations de Φ et donner les limites en $\pm\infty$ de Φ.

   b) Vérifier pour tout réel x, $\quad \Phi(x)-\frac{1}{2}=-\left(\Phi(-x)-\frac{1}{2}\right)$ et $\Phi(0)=\dfrac{1}{2}$.

   c) Justifier le développement limité en 0 : $\quad \Phi(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}x+o_0(x)$.

   d) En utilisant les résultats précédents, tracer l'allure de la courbe représentative de Φ.

2. ✦✦ *Tracé avec Python* *D'après ESCP ORAUX 1999*

   a) Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Montrer que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}\leqslant\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}.$$

   En déduire que
$$\left|\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t-\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}\right|\leqslant\frac{x}{n}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

   b) Quelle inégalité doit vérifier n pour trouver une valeur approchée de $\Phi(x)$ à 10^{-6} près ?

   c) Proposer, en langage Python, une fonction **I(f, a, b, n)** qui prend en entrée une fonction f à valeurs réelles, deux réels a et b et un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ calculée avec n rectangles.

   d) En déduire une nouvelle fonction qui renvoie une approximation de $\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$, puis de $\Phi(x)$.

≫ Solution p. 21

Exercice 17. ✦✦✦ **Tracé de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite**

1. Soit $x\in\mathbb{R}^+$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}\leqslant\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}.$$

   En déduire que
$$\left|\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t-\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}\right|\leqslant\frac{x}{n}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

   Dans la suite, on note Φ, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2. En déduire une inégalité sur n afin d'avoir une valeur approchée de $\Phi(x)$ à 10^{-4} près ?
3. Proposer, en langage Python, une fonction `I(f, a, b, n)` qui prend en entrée une fonction f à valeurs réelles, deux réels a et b et un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ calculée avec n rectangles.
4. En déduire une fonction qui renvoie une approximation de $\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$, puis de $\Phi(x)$.
5. Donner un programme qui trace le graphe de Φ sur $[-5;5]$.

Exercice 18. ✦✦ ✎ On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer grâce à une intégration par partie, puis un encadrement d'intégrale, que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}\leqslant 1-\Phi(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

2. En déduire un équivalent de $1-\Phi(x)$ quand $x\to+\infty$.

≫ Solution p. 22

Exercice 19. ✦✦ ✎ **Simulation d'une géométrique à partir de la loi exponentielle**

Soit $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $\mathrm{Y}=\lfloor\mathrm{X}\rfloor+1$.

1. Montrer $\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathcal{G}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)$.
2. En déduire un programme qui simule une loi géométrique de paramètre p à partir de la loi exponentielle.

≫ Solution p. 23

Exercice 20. ✦✦ Soit X, une variable aléatoire dont f est une densité paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la densité f.

≫ Solution p. 23

Exercice 21. ✦✦✦ **Loi sans mémoire**

1. *Préliminaires*
   Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, non nulle et vérifiant
$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x)\cdot f(y).$$
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
   b) i) Exprimer $f(n)$ où $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de n et $f(1)$. En déduire $f(n)$, où $n \in \mathbb{Z}$.
      ii) Déterminer ensuite une expression de $f(p/q)$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.
   c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite de $\lfloor nx \rfloor / n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   d) En déduire $f(x)$, où $x \in \mathbb{R}$, en fonction de $f(1)$.
2. a) Montrer que toute v.a. X de loi exponentielle vérifie la relation :
$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbf{P}_{[X>y]}(X > x+y) = \mathbf{P}(X > x).$$
   b) Réciproquement, soit X une v.a. à densité définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation précédente et telle que sa fonction de répartition F soit nulle sur $]-\infty, 0]$.
      i) Montrer que s'il existe $x_0 > 0$ tel que $\mathbf{P}(X > x_0) = 0$, alors pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbf{P}(X > x) = 0$.
      ii) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}(X > x) \neq 0$. Montrer que X suit une loi exponentielle.

≫ Solution p. 24

Autres lois classiques

Voici une sélection de quelques lois classiques qui peuvent être étudiés aux concours.

- Loi de Pareto.
- Loi de Cauchy.
- Loi de Rayleigh.
- Loi de Weibull.
- Loi de Laplace.
- Loi de Erlang.
- Loi du χ^2.
- Loi log-normale.

Exercice 22. ✦ **Loi du χ^2**

Soit X une variable de loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X. On pose $Y = \frac{1}{2}X^2$.

1. Exprimer la fonction de répartition F de Y à l'aide de Φ.
2. En déduire que Y est une variable à densité, et déterminer une densité de Y.

≫ Solution p. 25

Exercice 23. ✦✦ Utiliser la méthode d'inversion pour réaliser une simulation d'une loi exponentielle de paramètre 1. Comparer l'espérance de $X^{\alpha-1}$ et $\Gamma(\alpha)$. En déduire une valeur approchée de $\Gamma(\alpha)$.

Exercice 24. ✦✦ *d'après EDHEC 2015, exercice 2*

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.
On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

1. a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y.
   b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.
   c) Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.

2. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

   a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du.$$

   b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

On considère, dans la suite, une variable aléatoire Z de densité g et on note G sa fonction de répartition.

3. a) On pose $T = \sqrt{2Z}$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y,

   b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.

4. Écrire une commande python permettant de simuler la variable aléatoire Z.

5. On considère les commandes Python suivantes :

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
n=5000
w=rd.exponential(1,n)
s=0
for i in range(n):
    s+=w[i]**(3/2)
s=s/(n*np.pi**(1/2))
```

   a) En remarquant que $x^2 g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x}$, montrer que s contient une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 g(x)\,dx$, pour peu que l'on entre une valeur de n assez grande.

   b) On admet que $\mathbf{E}(X^4) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus ?

Exercice 25. ✦✦ *d'après EDHEC 2018*

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $Y = \sqrt{X}$.

1. On rappelle qu'en Python, `rd.exponential(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre `a`. Écrire une (ou des) commande(s) Python permettant de simuler Y.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

   b) En déduire une densité f_Y de Y.

3. a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

   b) En déduire que Y a une espérance et donner sa valeur.

4. On pose $U = 1 - e^{-X/2}$.

   a) Vérifier que $U(\Omega) = [0, 1[$.

   b) Déterminer la fonction de répartition F_U de U et reconnaître la loi de U.

   c) Exprimer X en fonction de U, puis en déduire une simulation Python de Y utilisant uniquement la commande `rd.rand`.