DS 2- sujet A

THÈMES : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES, VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1, u_n \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$.

- **Étude de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$**

1. **a)** Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
b) Démontrer que $\ell \in [0,1[$.

2. Soit $q \in [0,1[$. Montrer que si à partir d'un certain rang n_0, on a $u_n \leqslant q$, alors $\ell = 0$.

3. Que peut-on dire de ℓ si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ?

- On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec :
  - X_0 est constante et égale à 1,
  - X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1,
  - pour tout $n \geqslant 1, X_n$ suit une loi de Bernoulli de telle sorte que :

$$\mathbf{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1}=1]) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1]) = u_{n+1}.$$

4. **a)** Démontrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}([X_n = 1]) = p_n.$$

b) En déduire l'espérance $\mathbf{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

5. Justifier que les deux variables aléatoires X_n et X_{n+1} ne sont indépendantes que pour l'entier $n = 0$.

- **Cas particulier**
  On suppose que $\ell = 0$.

6. Soient deux entiers naturels non nuls m et n tels que $m < n$.
Comparer les évènements $[X_m = 0] \cap [X_{m+1} = 1] \cap \ldots \cap [X_n = 1]$ et $[X_m = 0] \cap [X_{m+1} = 1]$. En déduire que la probabilité de l'évènement $[X_m = 0] \cap [X_{m+1} = 1] \cap \ldots \cap [X_n = 1]$ est nulle.

7. **a)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1]\right) = p_n$.
b) En déduire la probabilité de l'évènement $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [X_n = 1]$.

8. On définit les variables aléatoires Y et Z par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \begin{cases} \operatorname{Max}\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) = 1\} \text{ s'il existe} \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Z(\omega) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega) \text{ si la série converge} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}.$$

Démontrer que $\mathbf{P}([Y \neq Z]) = 0$. Que peut-on en conclure pour l'évènement $[Y = Z]$?

Exercice 2 : fonctions de plusieurs variables

- **Préliminaires**

  On définit $\varphi : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$.

9. Donner les variations de φ. Tracer son graphe

10. Discuter en fonction de $y \in \mathbb{R}$, le nombre d'antécédents de y par φ.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n, g_n et h_n sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-{x_i}^2}\right),$$

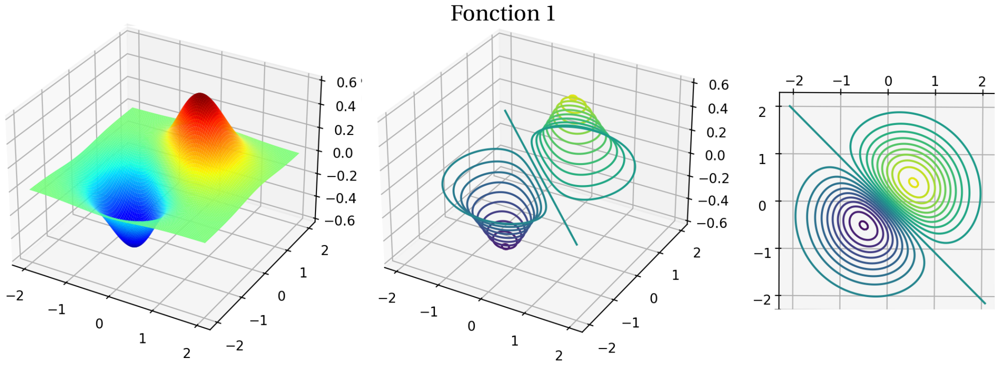
$$g_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2 \mathrm{e}^{-{x_i}^2} \quad \text{et} \quad h_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-{x_i}^2}\right).$$

- **Étude dans le cas où $n = 2$**

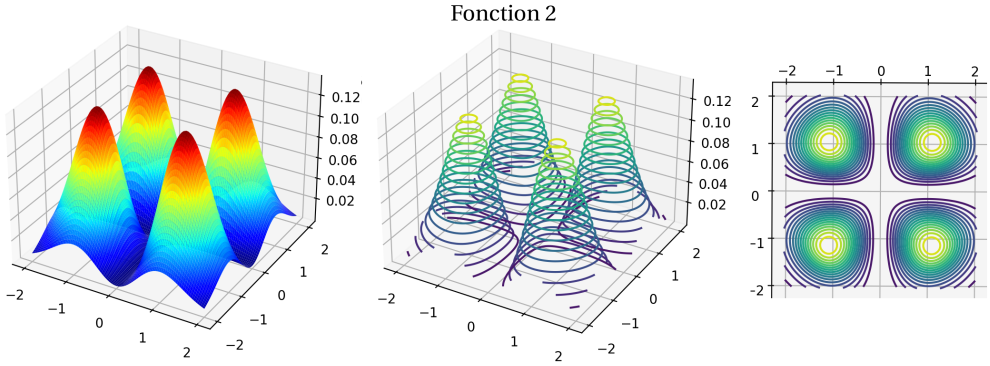
11. Exprimer $f_2(x_1, x_2)$ et $g_2(x_1, x_2)$ à l'aide de la fonction φ et de x_1 et x_2.

12. Parmi les trois surfaces suivantes avec leurs courbes de niveau, reconnaître les surfaces de f_2, g_2 et h_2. Expliquer.

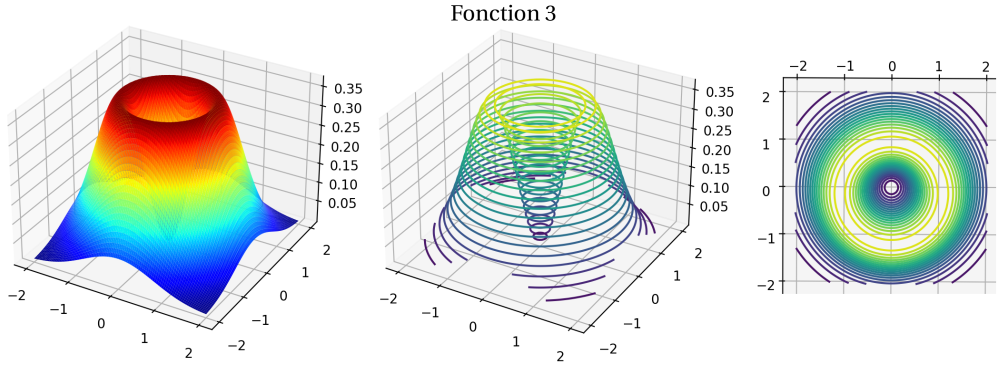
Fonction 1



Fonction 2



Fonction 3



Étude de f_2

13. Déterminer un réel α tel que pour tout $\mathrm{K} \in [0; \alpha]$ la ligne de niveau $\mathscr{L}_{\mathrm{K}}$ de hauteur K pour la fonction f_2 est non vide? La tracer dans ce cas. *On reprendra l'expression obtenue à la question 11.*

14. Justifier que f_2 admet un maximum et un minimum. Les déterminer.

Étude de g_2

15. À l'aide de la question 11, vérifier que g_2 admet un minimum et un maximum.

- **Étude dans le cas où $n \geqslant 2$**

16. **a)** Exprimer $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ et $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ à l'aide de la fonction φ et des réels x_i.
b) Généraliser les questions précédentes pour donner les maxima et minima des fonctions f_n et g_n.

Problème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = \left(1, x, \ldots, x^n\right)$ la base canonique de E. On note, pour tout polynôme P de E, on définit le polynôme $\varphi(\mathrm{P})$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(\mathrm{P})(x) = \frac{1}{n} x(1-x)\mathrm{P}'(x) + x\mathrm{P}(x).$$

Partie I : Étude d'un endomorphisme de polynômes

17. Calculer $\varphi\left(x^n\right)$.

18. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $\mathrm{P}_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$.

19. Vérifier que pour tout k de $[\![0, n]\!]$, P_k est vecteur propre de φ pour une valeur propre λ_k à préciser.

20. Montrer que la famille $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages. Par convention, on pose : $\mathrm{Y}_0 = 0$.
On note, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon. On pourra remarquer que, en particulier, $\mathrm{Z}_1 = 1$.

21. Reconnaitre la loi de Z_2. Vérifier que son espérance vaut $1 - 1/n$.

22. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Donner, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, la valeur de $\mathbf{P}_{[\mathrm{Y}_k = j]}\left([\mathrm{Z}_{k+1} = 1]\right)$. En déduire

$$\mathbf{P}\left([\mathrm{Z}_{k+1} = 1]\right) = 1 - \frac{1}{n}\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}_k\right).$$

23. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
a) Justifier que $\mathrm{Y}_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \mathrm{Z}_j$.
b) À l'aide de la question 22, établir que $\mathbf{P}\left([\mathrm{Z}_{k+1} = 1]\right) = 1 - \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{k} \mathbf{P}\left(\left[\mathrm{Z}_j = 1\right]\right)$.

24. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbf{P}\left([\mathrm{Z}_k = 1]\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.

25. **a)** Déterminer l'espérance de Y_k en fonction de k et n.
b) Préciser la limite de cette espérance pour k fixé et $n \to +\infty$.

- *Fonctions génératrices*

On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par

$$\mathrm{G}_k(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}\left([\mathrm{Y}_k = i]\right) x^i.$$

26. Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.

27. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$\mathbf{P}\left([\mathrm{Y}_{k+1} = i]\right) = \frac{i}{n}\mathbf{P}\left([\mathrm{Y}_k = i]\right) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)\mathbf{P}\left([\mathrm{Y}_k = i-1]\right).$$

28. Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1}(x) = \frac{1}{n} x(1-x) G'_k(x) + x G_k(x).$$

29. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_k = \varphi^k (G_0).$$

- *Application au calcul de l'espérance de* Y_k

30. Pour tout k de $\mathbb{N}$, préciser $G_k(1)$, puis comparer $G'_k(1)$ et $\mathbf{E}(Y_k)$.

31. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbf{E}\left(Y_{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbf{E}\left(Y_k\right) + 1.$$

32. Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $\mathbf{E}\left(Y_k\right)$ obtenue en question 25.a).

- *Application au calcul de la loi de* Y_k
  On rappelle que les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ sont définis à la question 21 par : pour tout j de $[\![0, n]\!]$, $\quad P_j(x) = x^j (1-x)^{n-j}$.

33. Vérifier que $G_0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$.

34. Montrer, pour tout j de $[\![0, n]\!]$:

$$P_j(x) = \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} x^i.$$

35. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_k(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} {\lambda_j}^k (-1)^{i-j} \right) x^i$$

où les réels λ_j sont définis à la question 19.

36. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0, n]\!]$:

$$\mathbf{P}\left(\left[Y_k = i\right]\right) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$

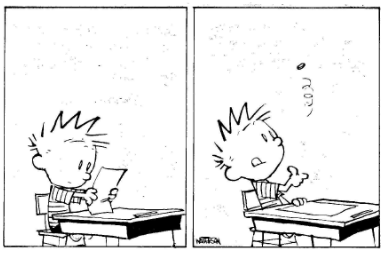
- *Espérance conditionnelle*
  Soit N une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ indépendante de toutes les variables $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. On pose alors $S = Y_N$, c'est-à-dire

$$\forall, \omega \in \Omega \qquad S(\omega) = Y_{N(\omega)}.$$

37. Rappeler la formule de l'espérance totale en précisant bien les hypothèses.

38. En utilisant le système complet d'événements $(N = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, démontrer que

$$\mathbf{E}(S) = n\left(1 + e^{-\lambda/n}\right).$$



Calvin et Hobbes

Bonus Parmi les mathématiciennes et mathématiciens suivants, qui a eu le prix Nobel de Mathématiques?

→ Hugo Duminil-Copin, → Andreï Kolmogorov , → Maryna Viazovska, → Maryam Mirzakhani.

– FIN –

DS 2- sujet *

THÈMES : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES, VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.

Exercice : fonctions de plusieurs variables

- *Rappel.*
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ avec égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

  On définit la fonction $\varphi : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les fonctions f_n, g_n et h_n sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f_n(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-{x_i}^2}\right),$$

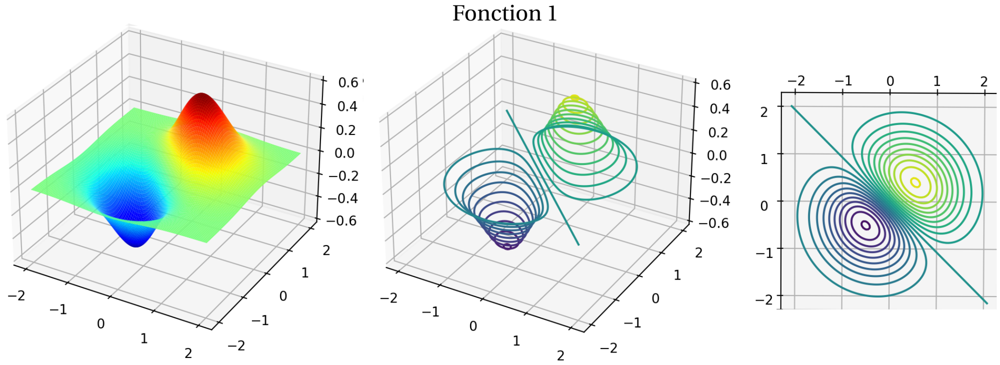
$$g_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} {x_i}^2 \mathrm{e}^{-{x_i}^2} \quad \text{et} \quad h_n(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-{x_i}^2}\right).$$

- **Étude dans le cas où** $n = 2$

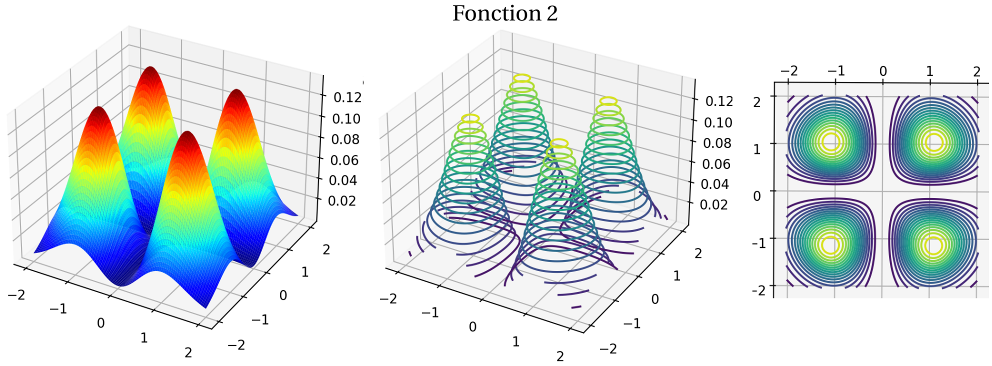
1. Exprimer $f_2(x_1, x_2)$ et $g_2(x_1, x_2)$ à l'aide de la fonction φ et de x_1 et x_2.

2. Parmi les trois surfaces suivantes avec leurs courbes de niveau, reconnaître les surfaces de f_2, g_2 et h_2. Expliquer.

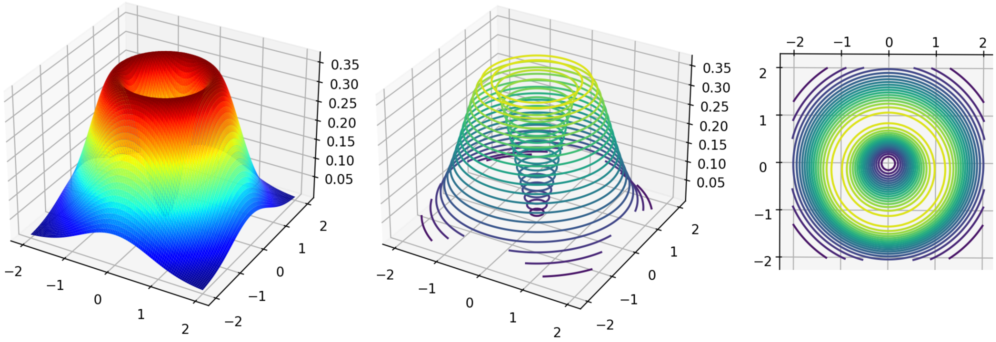
Fonction 1



Fonction 2



Fonction 3



3. Pour quelles valeurs de $K \in \mathbb{R}$ la ligne de niveau $\mathscr{L}_K$ de hauteur K pour la fonction f_2 est non vide ? La tracer dans ce cas.

- **Étude dans le cas où** $n \geqslant 2$

4. **a)** Exprimer $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ et $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ à l'aide de la fonction φ et des réels x_i.

b) En déduire les maxima et minima des fonctions f_n et g_n.

5. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$|h_n(x)| \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|\,\mathrm{e}^{-\|x\|^2}.$$

Préciser le cas d'égalité.

6. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $h_n(-x) = -h_n(x)$. Conclure en donnant les extrema de h_n.

Problème I

- *Rappels :*
  - *Si n est un entier naturel non nul, et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles quelconques, mutuellement indépendantes, alors, pour tout entier p de $[\![1; n-1]\!]$ et pour toutes fonctions réelles continues φ_1 et φ_2, les variables aléatoires $\varphi_1(X_1, \ldots, X_p)$ et $\varphi_2(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.*
  - *Si X et Y sont des v.a indépendantes admettant une espérance, alors XY admet une espérance, et $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.*
  - *Inégalité de Markov. Soit Z une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance. Alors*

$$\forall a \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}(Z \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}(Z)}{a}.$$

Préliminaires

Dans cette question, on désigne par Y une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on pose $p_n = \mathbf{P}(Y = n)$.

- *Nouvelle expression de l'espérance*

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer le nombre réel $E_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(Y > k)$ à l'aide de n et des sommes $\sum_{i=1}^{n} i p_i$, $\sum_{i=n+1}^{+\infty} p_i$.

8. On suppose que Y admet une espérance $\mathbf{E}(Y)$.
Prouver que $E_n \leqslant \mathbf{E}(Y)$. En déduire la convergence de la suite $(E_n)_n$.

9. On suppose que la suite $(E_n)_n$ converge.

a) Prouver que : $\quad p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n \leqslant E_n$.

b) En déduire que Y admet une espérance.

10. Sous l'une de ces hypothèses équivalentes, établir que :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y > k).$$

- *Application*

11. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer les équivalences : X admet une espérance si et seulement si $\lfloor X \rfloor$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbf{P}(X \geqslant k)$ converge. Dans le cas de convergence, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k) \leqslant \mathbf{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant k).$$

Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$. On dit que la variable aléatoire X est α-sous-gaussienne si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{E}(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On définit de plus pour tout réel t, la fonction cosinus hyperbolique par :

$$\mathrm{ch}(t) = \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}.$$

12. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

En déduire que
$$\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

13. Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

- *Le cas borné*

14. Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée [1]. Montrer que X est l-sous-gaussienne.

15. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

- *Somme de variables sous-gaussiennes*

16. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α sous-gaussiennes, et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} {\mu_i}^2 = 1$. Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

- *Inégalité d'Orlicz*

17. Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$:

$$\mathbf{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).$$

b) En déduire que

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

On pourra regarder le minimum de la fonction $t \mapsto \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$.

18. Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$. Utiliser la question précédente pour justifier que tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$.

19. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

1. C'est-à-dire d'espérance nulle.

20. **a)** En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, justifier que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 1.$$

b) En prenant $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et en prouvant l'inégalité $1+2\zeta(2) \leqslant 5$, justifier que si X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne, on a l'inégalité d'Orlicz :

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leqslant 5.$$

Problème II

Le but du problème est l'étude d'une suite de tirages de boules dans une urne, ce qui fait l'objet de la seconde partie. La première partie permet d'obtenir quelques résultats préliminaires d'algèbre. Dans tout le problème, on désigne par N un nombre entier naturel non nul et par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N. On considère l'application linéaire φ qui, à tout élément P de E, associe le polynôme Q défini sur $\mathbb{R}$ par

$$Q(x) = xP(x) - \frac{1}{N}\left(x^2 - 1\right)P'(x).$$

Partie I

- *Étude de l'application* φ

21. **a)** Pour tout $j \in [\![0;N]\!]$, calculer $\varphi\left(x^j\right)$.

b) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

22. On considère la base canonique $\mathscr{B} = \left(1, x, \dots, x^N\right)$ de E. Écrire la matrice M associée à φ dans cette base.

- *Base de polynômes propres pour* φ

On considère la famille $\mathscr{B}' = \left(Q_0, Q_1, \dots, Q_N\right)$ des éléments de E définis par :

$$Q_k(x) = (x-1)^{N-k}(x+1)^k.$$

23. Montrer que chaque Q_k est vecteur propre de φ pour la valeur propre $\lambda_k = -1 + 2k/N$.

24. Montrer que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de E. Écrire la matrice M′ associée à φ dans la base $\mathscr{B}'$.

- *Calcul des limites des suites* $\left(M^{2n}\right)$ *et* $\left(M^{2n+1}\right)$

On appelle limite d'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices carrées de $\mathscr{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ la matrice carrée L de $\mathscr{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ dont les éléments sont les limites (si elles existent) des éléments de M_n, lorsque n tend vers $+\infty$. On admet que, dans ces conditions, pour tout couple $(P,Q) \in \mathscr{M}_{N+1}(\mathbb{R})^2$, la suite $(PM_nQ)_n$ a pour limite PLQ.

25. Pour tout nombre entier naturel j tel que $j \leqslant N$, on définit les coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q_j(x) = \sum_{i=0}^{N} a_{i,j} x^i \quad \text{et} \quad x^j = \sum_{i=0}^{N} b_{i,j} Q_i(x).$$

Déterminer les éléments $a_{i,0}$ et $a_{i,N}$ pour $0 \leqslant i \leqslant N$, et les éléments $b_{0,j}$ et $b_{N,j}$ pour $0 \leqslant j \leqslant N$.

26. On note respectivement P et Q les matrices de passage de la base $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.
Quels sont les lignes ou colonnes ainsi connues de P et de Q ?

27. **a)** Justifier les convergences vers des matrices diagonales :

$$(M')^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{diag}(1,0,\dots,0,1) \quad \text{et} \quad (M')^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{diag}(-1,0,\dots,0,1).$$

b) Exprimer M en fonction de M′, P et Q.

c) En déduire (sans expliciter davantage les matrices P et Q) les limites des suites $\left(M^{2n}\right)$ et $\left(M^{2n+1}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II : Application à l'étude de tirages dans urne bicolore

On suppose désormais que $N \geqslant 3$. Une urne contient r boules rouges et b boules blanches avec $r+b=N$. On procède à des tirages de la manière décrite ci-après :

- lorsqu'on obtient une boule rouge, celle ci est retirée de l'urne et remplacée par une boule blanche avant de passer au tirage suivant.
- lorsqu'on obtient une boule blanche, celle ci est retirée de l'urne et remplacée par une boule rouge avant de passer au tirage suivant.

Soit n un nombre entier naturel. On note X_n la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules rouges contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage (c'est à dire lorsque la $n^{\text{ième}}$ boule a été tirée puis remplacée selon la procédure décrite). En particulier, $X_0 = r$. Pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$p(n,k) = \mathbf{P}(X_n = k).$$

Ainsi :

$$\begin{cases} p(n,k) & = 0 \quad \text{si } k > N \\ p(0,k) & = 1 \quad \text{si } k = r \\ p(0,k) & = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

On convient de poser : $\quad p(n,-1) = 0$

On désigne par $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{V}(X_n)$ l'espérance et la variance de X_n. On se propose de calculer par deux méthodes ces deux valeurs typiques, puis d'étudier le comportement asymptotique de $p(n,k)$.

28. On suppose dans cette question que n est non nul. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout nombre entier naturel k :

$$N p(n,k) = (N-k+1)\,p(n-1,k-1) + (k+1)\,p(n-1,k+1) \qquad (\bullet)$$

- *Calcul de l'espérance et de la variance à l'aide de polynômes*

Pour tout nombre entier naturel n, soit G_n le polynôme défini par :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{N} p(n,k)x^k.$$

On suppose désormais que n est non nul.

29. Établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad G_n = \varphi(G_{n-1}) \qquad (\bullet\bullet)$$

30. Montrer que :

$$G_n'(1) = \mathbf{E}(X_n).$$

31. En dérivant $(\bullet\bullet)$, former une relation entre $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_{n-1})$.

32. En déduire que $\mathbf{E}(X_n) = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \left(r - \frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}$.

33. Montrer que :

$$G_n''(1) = \mathbf{E}\left(X_n^{\,2}\right) - \mathbf{E}(X_n).$$

On pose : $\quad a_n = \mathbf{E}\left(X_n^{\,2}\right) - N\mathbf{E}(X_n).$

34. En dérivant deux fois $(\bullet\bullet)$, vérifier que

$$a_n = \left(1 - \frac{4}{N}\right) a_{n-1} + 1 - N.$$

35. En déduire $\mathbf{V}(X_n)$ et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

- *Calcul de l'espérance et de la variance à l'aide de matrices*

On considère la matrice à $N+1$ lignes et une colonne :

$$U_n = \begin{bmatrix} p(n,0) \\ p(n,1) \\ \vdots \\ p(n,N) \end{bmatrix}.$$

36. Prouver que :

$$U_n = MU_{n-1}$$

où M est la matrice définie dans la question 22.

On considère les trois matrices à une ligne et $N+1$ colonnes :

$$J = [1,1,\dots,1], \quad K_1 = [0,1,\dots,N] \quad \text{et} \quad K_2 = \left[0^2, 1^2, \dots, N^2\right].$$

37. Calculer le produit $K_1 M$ en fonction de K_1 et de J. Vérifier que :

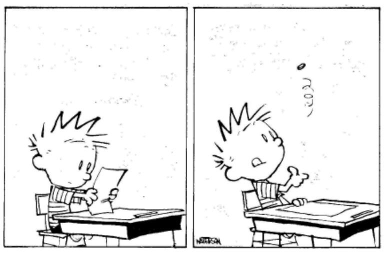
$$\mathbf{E}(X_n) = K_1 U_n.$$

Retrouver ainsi la relation entre $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{E}(X_{n-1})$ établie dans la question 31.

38. Calculer le produit $(K_2 - NK_1)M$ en fonction de $K_2 - NK_1$ et de J. Retrouver ainsi la relation entre a_n et a_{n-1} établie dans la question 34.

- *Étude de la distribution asymptotique de* (X_n)

39. En utilisant les résultats de la fin de la première partie, déterminer selon la parité de r les limites des suites $\big(p(2n,k)\big)_n$ et de $\big(p(2n+1,k)\big)_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.



Calvin et Hobbes

Bonus Parmi les mathématiciennes et mathématiciens suivants, qui a eu le prix Nobel de Mathématiques ?

$\rightharpoonup$ Hugo Duminil-Copin, $\rightharpoonup$ Andreï Kolmogorov , $\rightharpoonup$ Maryna Viazovska, $\rightharpoonup$ Maryam Mirzakhani.

– FIN –

DS 2A - solution

Problème A

1.a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite $\left(u_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, il vient $p_n > 0$, donc la suite $\left(p_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. De plus, la suite $\left(u_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ étant strictement inférieure à 1,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1} < 1.$$

On en déduit que $p_{n+1} < p_n$, puis la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. D'après le théorème de convergence monotone, la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1.b) D'après la question précédente, la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et strictement décroissante donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 < p_n < p_1 = u_1$$

Par passage à la limite, il vient

$$0 \leqslant \ell \leqslant u_1 < 1.$$

D'où le résultat.

> On rappelle que l'on a bien
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 < p_n < 1$$
>
> mais par passage à la limite, les inégalités deviennent larges $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

2. Pour un entier $n \geqslant n_0$

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{k=0}^{n_0-1} u_k \times \prod_{k=n_0}^{n} \underbrace{u_k}_{\leqslant q}$$

$$0 < p_n \leqslant \prod_{k=0}^{n_0-1} u_k \times \underbrace{q^{n-n_0+1}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Par le théorème d'encadrement,

$$p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 = \ell.$$

3. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leqslant u_1 \in \{0;1\}.$$

D'après la question précédente avec les valeurs $q = u_1$, on a la convergence de la suite vers 0.

4.a) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la propriété :

$$\mathscr{P}(n): \quad \mathbf{P}\left(X_n = 1\right) = p_n$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

→ *Initialisation.* $\mathscr{P}(0)$ est vraie car X_0 est constante et égale à 1 et $p_0 = u_0 = 1$.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements

$$\left([X_n = 0], [X_n = 1]\right).$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(X_{n+1} = 1\right) \\
&= \mathbf{P}\left((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = 0)\right) + \mathbf{P}\left((X_{n+1} = 1) \cap (X_n = 1)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(X_n = 0\right) \times \mathbf{P}_{(X_n=0)}\left(X_{n+1} = 1\right) + \mathbf{P}\left(X_n = 1\right) \times \mathbf{P}_{(X_n=1)}\left(X_{n+1} = 1\right) \\
&= \left(1 - p_n\right) \times 0 + p_n \times u_{n+1} = p_{n+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée si $\mathscr{P}(n)$ l'est.

→ *Conclusion :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}\left(X_n = 1\right) = p_n.$$

4.b) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, la variable aléatoire X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On sait alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{E}\left(X_n\right) = p_n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que les variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes si, et seulement si,

$$\forall (i,j) \in \{0,1\}^2$$

$$\mathbf{P}\left((X_n = i) \cap \left(X_{n+1} = j\right)\right) = \mathbf{P}\left(X_n = i\right) \times \mathbf{P}\left(X_{n+1} = j\right)$$

→ Supposons tout d'abord qu'elles sont indépendantes. Alors

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 1)\right) \\
=&\mathbf{P}\left(X_n = 1\right) \times \mathbf{P}_{(X_n=1)}\left(X_{n+1} = 1\right) \\
=&p_n \times u_{n+1} = p_{n+1}.
\end{aligned}$$

Or

$$\mathbf{P}\left(X_n = 1\right) \times \mathbf{P}\left(X_{n+1} = 1\right) = p_n \times p_{n+1}$$

Puisque $p_{n+1} > 0$ (question 1), on en déduit que $p_n = 1$, puis que $n = 0$.

→ Réciproquement, supposons que $n = 0$. On sait que X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1. Par définition, $(X_0 = 1)$ est l'événement certain (de probabilité 1), donc, pour tout $i \in \{0,1\}$,

$$(X_0 = 1) \cap (X_1 = i) = (X_1 = i).$$

Soit $i \in \{0,1\}$. Il vient

$$\mathbf{P}\left((X_0 = 1) \cap (X_1 = i)\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = i\right)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{P}\left(X_0 = 1\right) \times \mathbf{P}\left(X_1 = i\right) = 1 \times \mathbf{P}\left(X_1 = i\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = i\right)$$

De même, $(X_0=0)$ est l'événement impossible (de probabilité 0), donc, pour tout élément $i \in \{0,1\}$, $(X_0=0)\cap(X_1=i)\subset(X_0=0)=\varnothing$. Soit $i\in\{0,1\}$. Il vient

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left((X_0=0)\cap(X_1=i)\right)\leqslant \mathbf{P}(\varnothing)=0\\ \text{et}\quad &\mathbf{P}(X_0=0)\times\mathbf{P}(X_1=i)=0\times\mathbf{P}(X_1=i)=0\end{aligned}$$

Par définition, les variables aléatoires X_0 et X_1 sont indépendantes. Ce qui conclut.

6. On a l'inclusion

$$[X_m=0]\cap[X_{m+1}=1]\cap\cdots\cap[X_n=1]\subset[X_m=0]\cap[X_{m+1}=1]$$

donc par croissance de la probabilité P

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left([X_m=0]\cap[X_{m+1}=1]\cap\cdots\cap[X_n=1]\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}\left([X_m=0]\cap[X_{m+1}=1]\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}(X_m=0)\times\underbrace{\mathbf{P}_{(X_m=0)}(X_{m+1}=1)}_{=0 \text{ car } m\geqslant 1}\end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbf{P}\left((X_m=0)\cap(X_{m+1}=1)\cap\cdots\cap(X_n=1)\right)=0.$$

7.a) Montrons, par récurrence sur $i\in[\![0;n]\!]$, que la propriété

$$\mathscr{P}(i):\quad \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k=1)\right)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=i}^{n}(X_k=1)\right)$$

est vraie pour tout $i\in[\![0;n]\!]$.

⟶ *Initialisation.* $\mathscr{P}(0)$ est directement vérifiée.

⟶ *Hérédité.* Soit $i\in[\![0;n]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(i)$ vraie. Appliquons la formule des probabilités totales en utilisant le système complet d'événements $\left([X_i=0],[X_i=1]\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=i+1}^{n}(X_k=1)\right)&=\underbrace{\mathbf{P}\left((X_i=0)\cap\bigcap_{k=i+1}^{n}(X_k=1)\right)}_{=0 \text{ d'après la question 6}}\\ &\quad+\mathbf{P}\left((X_i=1)\cap\bigcap_{k=i+1}^{n}(X_k=1)\right)\\ &=\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=i}^{n}(X_k=1)\right)\end{aligned}$$

donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=i+1}^{n}(X_k=1)\right)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k=1)\right)$$

par hypothèse de récurrence. $\mathscr{P}(i+1)$ est vérifiée.

⟶ *Conclusion.* La propriété $\mathscr{P}(i)$ est donc vraie pour tout $i\in[\![0;n]\!]$. En particulier, lorsque $i=n$, il vient

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k=1)\right)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n}(X_k=1)\right)=\mathbf{P}(X_n=1)=p_n.$$

Ce qui conclut.

7.b) La suite d'événements

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k=1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est décroissante pour l'inclusion. Par le théorème de convergence monotone dans la version probabiliste

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k=1)\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathbf{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(X_k=1)\right).$$

D'après la question précédente et par hypothèse sur ℓ, il vient

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}(X_k=1)\right)=\lim_{n\to+\infty}p_n=\ell=0.$$

8. Soient $\omega\in\Omega$ et $k\in\mathbb{N}$. Par définition,

$$\begin{aligned}Y(\omega)=k&\iff \operatorname{Max}\{n\in\mathbb{N}\mid X_n(\omega)=1\}=k\\ &\iff X_k(\omega)=1\quad\text{et}\quad\forall i\geqslant k+1\quad X_i(\omega)=0\end{aligned}$$

⟶ Si $k=0$,

$$(Y=0)=(X_0=1)\cap\bigcap_{i\geqslant1}(X_i=0)$$

⟶ Si $k=1$,

$$(Y=1)=(X_1=1)\cap\bigcap_{i\geqslant2}(X_i=0)=(X_0=1)\cap(X_1=1)\cap\bigcap_{i\geqslant2}(X_i=0)$$

puisque la variable aléatoire X_0 est constante et égale à 1 (et que l'événement $[X_0=1]$ est donc certain).

⟶ Si $k\geqslant2$. Distinguons deux cas suivant que l'on ait $X_0=\cdots=X_k=1$ ou bien que $X_k=1$ et il existe $j\in[\![1;k-1]\!]$ tel que $X_j=\mathbf{0}$. Il vient

$$\begin{aligned}(Y=k)&=\left(X_k=1\right)\cap\bigcap_{i\geqslant k+1}(X_i=0)\\ &=\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left(X_j=1\right)\cap\bigcap_{i\geqslant k+1}(X_i=0)\right)\\ &\quad\cup\left(\bigcup_{j=1}^{k-1}\left(X_j=0\right)\cap\left(X_k=1\right)\cap\bigcap_{i>k+1}(X_i=0)\right)\end{aligned}$$

L'union est disjointe, donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=k)&=\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left(X_j=1\right)\cap\bigcap_{i\geqslant k+1}(X_i=0)\right)\\ &\quad+\underbrace{\mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^{k-1}\left(X_j=0\right)\cap\left(X_k=1\right)\cap\bigcap_{i\geqslant k+1}(X_i=0)\right)}_{=0}\\ &=\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left(X_j=1\right)\cap\bigcap_{i\geqslant k+1}(X_i=0)\right)\end{aligned}$$

La deuxième probabilité est nulle puisqu'on a l'inclusion d'événements

$$\left(\bigcup_{j=1}^{k-1}\left(X_j=0\right)\cap\left(X_k=1\right)\cap\bigcap_{i\geqslant k+1}(X_i=0)\right)\subset\bigcup_{j=1}^{k-1}\left(\left(X_j=0\right)\cap\left(X_{j+1}=1\right)\right)$$

à laquelle on peut appliquer la question 6 puisque $j\geqslant1$.

- En résumé, pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(Y=k)=\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left(X_j=1\right)\cap\bigcap_{i\geqslant k+1}(X_i=0)\right).$$

• Il reste à traiter le cas $[Y = -1]$. Comme $(X_0 = 1)$ est l'événement certain, remarquons que cet événement correspond à deux cas :

→ Soit tous les X_i sont égaux à 1 (pour $i \in \mathbb{N}$) ;

→ Soit on peut trouver un $k \geqslant 2$ tel que $X_{k-1} = 0$, $X_k = 1$ et, pour tout $i \geqslant k$ tel que $X_i = 1$, il existe un $j \geqslant i+1$ tel que $X_j = 1$. Ceci s'écrit

$$\begin{aligned}
&[Y = -1]\\
&= \bigcap_{i=0}^{+\infty}(X_i = 1) \cup \bigcup_{k=2}^{+\infty}\left((X_{k-1} = 0) \cap (X_k = 1) \cap \bigcap_{i=k}^{+\infty}\left(\bigcup_{j=i+1}^{+\infty}\left(X_j = 1\right)\right)\right)\\
&\subset \bigcap_{i=0}^{+\infty}(X_i = 1) \cup \bigcup_{k=2}^{+\infty}\left((X_{k-1} = 0) \cap (X_k = 1)\right)
\end{aligned}$$

Ces unions étant disjointes, il vient

$$\mathbf{P}(Y = -1) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty}(X_i = 1)\right) + \sum_{k=2}^{+\infty}\mathbf{P}\left((X_{k-1} = 0) \cap (X_k = 1)\right)$$

La première probabilité est nulle. Finalement,

$$\mathbf{P}(Y = -1) = 0.$$

Appliquons à présent la formule des probabilités totales en utilisant le système complet d'événements $([Y = k])_{k \in \{-1\} \cup \mathbb{N}}$ pour calculer $\mathbf{P}(Y \neq Z)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(Y \neq Z)\\
&= \sum_{k=-1}^{+\infty}\mathbf{P}((Y = k) \cap (Y \neq Z))\\
&= \mathbf{P}((Y = -1) \cap (Y \neq Z)) + \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}((Y = k) \cap (Z \neq k))\\
&= \mathbf{P}((Y = -1) \cap (Y \neq Z))\\
&\quad + \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left(X_j = 1\right) \cap \bigcap_{i \geqslant k+1}(X_i = 0) \cap \left((Z = +\infty) \cup \left(\sum_{i=1}^{+\infty}X_i \neq k\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Comme l'union est disjointe, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \neq Z) &= \underbrace{\mathbf{P}((Y = -1) \cap (Y \neq Z))}_{\leqslant \mathbf{P}(Y=-1)=0}\\
&+ \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left(X_j = 1\right) \cap \bigcap_{i \geqslant k+1}(X_i = 0) \cap (Z = +\infty)\right)}_{=0}\\
&+ \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k}\left(X_j = 1\right) \cap \bigcap_{i \geqslant k+1}(X_i = 0) \cap \left(\sum_{i=1}^{+\infty}X_i \neq k\right)\right)}_{=0}
\end{aligned}$$

Les probabilités apparaissant dans la première somme sont nulles car dans ce cas on a, pour tout $\omega \in \Omega$, $X_i(\omega) = 0$ pour $i \geqslant k+1$, ce qui implique que la série $\sum X_i(\omega)$ est finie, donc convergente, ce qui contredit $Z(\omega) = +\infty$. Quant à celles de la deuxième somme, elles sont également nulles car on peut calculer

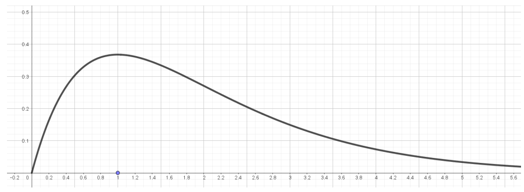
$$\sum_{i=1}^{+\infty}X_i = \sum_{i=1}^{k}X_i = k$$

$$\mathbf{P}(Y \neq Z) = 0$$

Comme $(Y \neq Z)$ et $(Y = Z)$ sont des événements contraires, il vient l'égalité complémentaire $\mathbf{P}(Y = Z) = 1$, c'est-à-dire l'événement $(Y = Z)$ est presque sûr.

---

9. Vérifier par une étude de fonction que φ admet un maximum atteint en 1 et valant $\varphi(1) = e^{-1}$.



10. Soit $y \in \mathbb{R}$. Par lecture graphique et par le théorème de la bijection pour la justification théorique :

→ Si $y \notin [0; e^{-1}]$, y n'a aucun antécédent par φ.

→ Si $y \in \{0; e^{-1}\}$, y admet un unique antécédent.

→ Si $y \in]0; e^{-1}[$, y admet deux antécédents.

11. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f_2(x_1, x_2) &= (x_1^2 + x_2^2)e^{-x_1^2 - x_2^2} = \varphi(x_1^2 + x_2^2)\\
g_2(x_1, x_2) &= x_1^2 e^{-x_1^2} \cdot x_2^2 e^{-x_2^2} = \varphi(x_1^2) \cdot \varphi(x_2^2).
\end{aligned}$$

12. • Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, la norme euclidienne de x. On constate alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \qquad f_2(x) = \varphi\left(\|x\|^2\right).$$

En particulier, si x et y ont même norme, ils ont même image par f_2. Comme la norme représente la distance à l'origine, f_2 correspond à la troisième fonction.

• Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$g_2(x) = \varphi(x_1^2) \cdot \varphi(x_2^2) \geqslant 0.$$

Comme la fonction 1 prend des valeurs négatives, on peut conclure que g_2 correspond à la seconde fonction. Notons aussi que

$$g_2((\pm x_1, \pm x_2)) = g_2(x_1, x_2).$$

Dit autrement, les quatre points

$$(x_1, x_2), \quad (-x_1, x_2), \quad (x_1, -x_2), \quad (-x_1, -x_2)$$

ont même image par g_2. La surface est symétrique par rapport aux plans verticaux (Oxz) et (Oyz). Seule la seconde fonction vérifie cette condition.

• Enfin, h_2 correspond bien à la première fonction car c'est la seule avec un changement de signe.

En résumé

$$\begin{aligned}
f_2 &\leftrightarrow \text{Fonction 3}\\
g_2 &\leftrightarrow \text{Fonction 2}\\
h_2 &\leftrightarrow \text{Fonction 1}
\end{aligned}$$

13. Soit $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$x \in \mathscr{L}_\mathrm{K} \iff f_2(x) = \varphi(\|x\|^2) = \mathrm{K}.$$

En reprenant la question 10 :

→ Si $\mathrm{K} \notin [0; \mathrm{e}^{-1}]$, il n'y a pas d'antécédent par φ. La ligne de niveau est vide.

→ Si $\mathrm{K} = 0$, K admet 0 comme unique antécédent par φ. Il vient

$$x \in \mathscr{L}_\mathrm{K} \iff \|x\|^2 = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

La ligne de niveau est réduit à un point $\{(0,0)\}$.

→ Si $\mathrm{K} = \mathrm{e}^{-1}$, K admet 1 comme unique antécédent par φ. Il vient

$$x \in \mathscr{L}_\mathrm{K} \iff \|x\|^2 = 1 \iff \|x\| = 1.$$

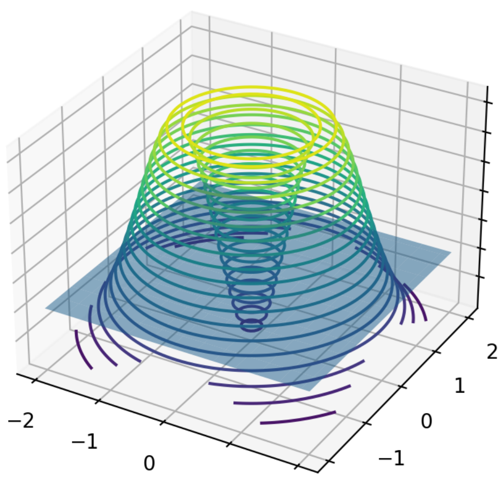
La ligne de niveau correspond au cercle de centre l'origine et de rayon 1.

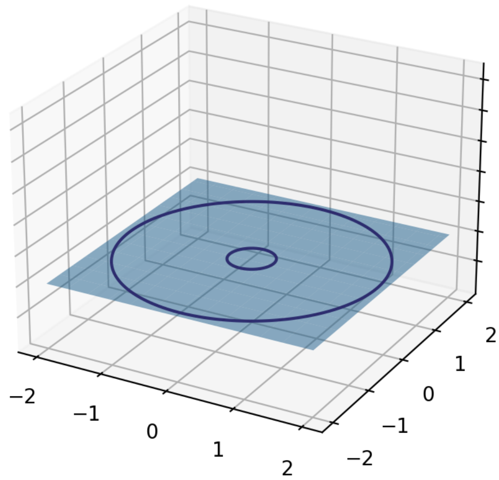
→ Si $y \in]0; \mathrm{e}^{-1}[$, y admet deux antécédents. Si on note α, β ces deux réels positifs.

$$x \in \mathscr{L}_\mathrm{K} \iff \|x\|^2 = \alpha \quad \text{ou} \quad \|x\|^2 = \beta.$$

La ligne de niveau correspond a deux cercles concentriques (centrés en l'origine) et de rayons respectifs $\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt{\beta}$.

Illustrations avec $\mathrm{K} = 0.1$





14. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$

$$0 = \varphi(0) \leqslant \varphi(\|x\|^2) \leqslant \varphi(1) = \mathrm{e}^{-1}.$$

Si x_0 est un vecteur de norme 1, on obtient

$$0 = f_2((0,0)) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) = \mathrm{e}^{-1}.$$

La fonction f_2 admet 0 comme minimum et e^{-1} comme maximum.

15. On vu que pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$g_2(x_1, x_2) = \varphi(x_1^2) \cdot \varphi(x_2^2).$$

D'où l'encadrement

$$0 = \varphi(0)^2 \leqslant g_2(x_1, x_2) \leqslant \varphi(1)^2 = \mathrm{e}^{-2}.$$

Notons que

$$g_2((0,0)) = 0 \quad \text{et} \quad g_2\big((1,1)\big) = \mathrm{e}^{-2}.$$

Dit autrement, g_2 admet 0 comme minimum atteint en $(0,0)$ et e^{-2} comme maximum atteint en $(1,1)$.

Noter que ces conclusions sont bien en accord avec les surfaces proposées. Toute réponse incohérente avec les surfaces sera sanctionnée.

16.a) On a

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \varphi\left(\|x\|^2\right) \text{ où } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \varphi\left(x_i^2\right).$$

16.b) L'étude de la fonction φ donne

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 0 = \varphi(0) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(1) = \mathrm{e}^{-1}.$$

→ *Étude de f_n*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|x\|^2 \in \mathbb{R}^+$ et

$$0 \leqslant \varphi\left(\|x\|^2\right) \leqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

Comme $\varphi\left(0_{\mathbb{R}^n}\right) = 0$ et $\varphi\left(e_1\right) = \mathrm{e}^{-1}$ avec $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \underbrace{f\left(0_{\mathbb{R}^n}\right)}_{=0} \leqslant f_n(x) \leqslant \underbrace{f_n\left(e_1\right)}_{=\mathrm{e}^{-1}}.$$

Dès lors, f_n admet respectivement 0 et e^{-1} comme minimum et maximum.

→ *Étude de g_n*
Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$0 \leqslant \varphi\left({x_i}^2\right) \leqslant e^{-1}.$$

Par produit,

$$0 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \varphi\left({x_i}^2\right) \leqslant e^{-n}.$$

Or $g_n\left(0_{\mathbb{R}^n}\right) = 0$ et $g_n(X) = e^{-n}$ où $X = (1, 1, \dots, 1)$. D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \underbrace{g_n\left(0_{\mathbb{R}^n}\right)}_{=0} \leqslant g_n(x) \leqslant \underbrace{g_n(x)}_{=e^{-n}}$$

Dès lors, g_n admet 0 et e^{-n} respectivement comme minimum et maximum.

---

17. Vérifier que $\varphi(x^n) = x^n$.

18. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\varphi(\lambda P + Q)(x) \\
&= \frac{1}{n}x(1-x)(\lambda P + Q)'(x) + x(\lambda P + Q)(x) \\
&= \frac{1}{n}x(1-x)\left(\lambda P'(x) + Q'(x)\right) + x(\lambda P(x) + Q(x)) \\
&= \lambda\left(\frac{1}{n}x(1-x)P'(x) + xP(x)\right) + \left(\frac{1}{n}x(1-x)Q'(x) + xQ(x)\right) \\
&= \lambda\varphi(P)(x) + \varphi(Q)(x).
\end{aligned}$$

Il vient

$$\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).$$

L'application φ est donc bien linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}[x]$.

• Justifions maintenant l'espace d'arrivée se limite à $\mathbb{R}_n[x]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$, il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tels que

$$P(x) = \alpha x^n + Q(x).$$

Notons que par les règles de calcul sur le degré

$$\deg(Q'') \leqslant \deg(Q) - 2 \quad \text{puis} \quad \deg\varphi(Q) \leqslant \deg Q + 1 \leqslant n.$$

Ensuite par linéarité de φ et la question précédente

$$\varphi(P) = \alpha\varphi(x^n) + \varphi(Q) = \alpha x^n + \varphi(Q)$$

qui est donc bien de degré au plus n.

> La vérification du second point a été trop souvent oubliée alors qu'elle est la partie la plus intéressante de la question. Attention.

En conclusion, φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

19. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$P'_k = kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}.$$

Il vient $\varphi\left(P_k\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}x(1-x)\left(kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\right) \\
&\quad + x^{k+1}(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k+1} - \frac{n-k}{n}x^{k+1}(1-x)^{n-k} + x^{k+1}(1-x)^{n-k} \\
&= \frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}(x+1-x) = \frac{k}{n}P_k.
\end{aligned}$$

Comme $P_k \neq 0$, P_k est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_k = k/n$.

20. Les vecteurs P_k sont associés à des valeurs propres distinctes, ils forment donc une famille libre. Comme il y $n+1 = \dim\mathbb{R}_n[x]$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[x]$, ils forment une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
La matrice dans cette base est diagonale, elle vaut

$$\operatorname{diag}\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right).$$

> Attention, la famille des vecteurs P_k n'est pas échelonnée en degré, tous les polynômes sont de degré n.

21. La variable Z_2 prend la valeur 0 si et seulement si les deux premiers tirages ont donné deux fois le même numéro. Sinon la variable prend la valeur 1. On a donc une loi de Bernoulli. Précisons son paramètre.
Notons les événements

- → A_i, le premier tirage donne le numéro i ;
- → B_i, le second tirage donne le numéro i.

Ainsi

$$[Z_2 = 0] = \bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i \cap B_i\right).$$

L'union étant disjointe et les événements A_i et B_i indépendants, il vient :

$$\mathbf{P}(Z_2 = 0) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_i \cap B_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}\left(A_i\right)\cdot\mathbf{P}\left(B_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Puis

$$\mathbf{P}\left(Z_2 = 1\right) = 1 - \mathbf{P}\left(Z_2 = 0\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Ainsi, Z_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \frac{1}{n}$. Son espérance est son paramètre.

22. Si l'événement $\left[Y_k = j\right]$ est réalisé, les k premiers tirages ont fait apparaître j boules différentes. Donc pour que le $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage donne une nouvelle boule, il faut que celle-ci soit tirée parmi les $n - j$ boules qui ne sont pas apparues précédemment. Ainsi

$$\mathbf{P}_{[Y_k = j]}\left(Z_{k+1} = 1\right) = \frac{n-j}{n} = 1 - \frac{j}{n}.$$

Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([Y_k = j])_{j\in[\![1,k]\!]}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(Z_{k+1}=1\right) &= \sum_{j=1}^{k}\mathbf{P}\left(Y_k=j\right)\mathbf{P}_{[Y_k=j]}\left(Z_{k+1}=1\right)\\ &= \sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{j}{n}\right)\mathbf{P}\left(Y_k=j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{k}\mathbf{P}\left(Y_k=j\right)-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} j\mathbf{P}\left(Y_k=j\right)\\ \mathbf{P}\left(Z_{k+1}=1\right) &= 1-\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(Y_k\right)\end{aligned}$$

23.a) La somme $\sum_{i=1}^{k} Z_i$ correspond au nombre de fois où l'on a obtenu une boule qui n'était pas sortie précédemment parmi les k premiers tirages. Cela correspond au nombre de boules différentes apparues lors des k premiers tirages. Par définition de Y_k

$$Y_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i.$$

23.b) Par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(Y_k) = \sum_{i=1}^{k}\mathbf{E}(Z_i).$$

Or Z_k ne prend que deux valeurs possibles 0 ou 1. Cette variable suit une loi de Bernoulli. Son espérance est son paramètre

$$\mathbf{E}(Z_k) = \mathbf{P}(Z_k = 1).$$

Finalement

$$\mathbf{P}\left(Z_{k+1}=1\right) = 1-\frac{1}{n}\mathbf{E}\left(Y_j\right) = 1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathbf{E}\left(Z_j\right) = 1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathbf{P}\left(Z_j=1\right).$$

24. Montrons par récurrence forte que la propriété

$$\mathbf{P}\left([Z_k=1]\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

→ *Initialisation.* La propriété $\mathscr{P}(1)$ est claire puisque Z_1 est constante égale à 1.

→ *Hérédité.* Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Supposons les propriétés $\mathscr{P}(1)$, …, $\mathscr{P}(k)$ vraies et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$. En utilisant la question précédente

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(Z_{k+1}=1\right) &= 1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{P}\left(Z_j=1\right)\\ &= 1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{j-1} = 1-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i}\\ &= 1-\frac{1}{n}\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)} = 1-\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}\right)\\ \mathbf{P}\left(Z_{k+1}=1\right) &= \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vérifiée.

→ *Conclusion.* Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Noter bien ici la subtilité de la récurrence forte et non de la simple récurrence.

25.a) En reprenant la question 22

$$\mathbf{E}\left(Y_k\right) = n - n\mathbf{P}\left(Z_{k+1}=1\right) = n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}\right).$$

25.b) Rappelons que pour $\alpha\in\mathbb{R}$

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x + o_0(x).$$

Comme $1/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k} = 1-\frac{k}{n}+o_0\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que

$$\mathbf{E}\left(Y_k\right) = k + o_0(1).$$

La suite des espérances tend vers k lorsque $n\to+\infty$.

26. Puisque Y_0 et que Y_1 sont presque surement certaines égale à 0 et 1 respectivement, on a

$$G_0 = \mathbf{P}(Y_0=0) = 1$$

et
$$G_1 = \mathbf{P}(Y_1=1)\,X = X.$$

De plus

$$\begin{aligned}G_2(x) &= \mathbf{P}(Y_2=1)\,x + \mathbf{P}(Y_2=2)\,x^2\\ &= \mathrm{P}(Y_2=1)\,x + (1-\mathbf{P}(Y_2=1))\,x^2\\ G_2(x) &= \frac{1}{n}x + \frac{n-1}{n}x^2.\end{aligned}$$

27. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([Y_k=j])_{j\in[\![1,k]\!]}$

$$\mathbf{P}\left(Y_{k+1}=i\right) = \sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}\left([Y_{k+1}=i]\cap[Y_k=j]\right)$$

Or pour $j\notin\{i,i-1\}$, $\mathbf{P}\left([Y_{k+1}=i]\cap[Y_k=j]\right)=0$. On en déduit en revenant aux probabilités conditionnelles

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(Y_{k+1}=i)\\ &= \mathbf{P}\left(Y_k=i\right)\mathbf{P}_{[Y_k=i]}\left(Y_{k+1}=i\right)+\mathbf{P}\left(Y_k=i-1\right)\mathbf{P}_{[Y_k=i-1]}\left(Y_k=i\right)\\ &= \frac{i}{n}\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)+\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\mathbf{P}\left(Y_k=i-1\right).\end{aligned}$$

28. En reprenant le résultat de la question précédente

$$\begin{aligned}
&G_{k+1}(x)\\
&=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}\left(Y_{k+1}=i\right)x^i\\
&=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)+\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\mathbf{P}\left(Y_k=i-1\right)\right)x^i\\
&=\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)x^i+\sum_{i=1}^{n+1}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\mathbf{P}\left(Y_k=i-1\right)x^i\\
&=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}i\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)x^i+\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i}{n}\right)\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)x^{i+1}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}i\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)x^i+x\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)x^i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}i\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)x^{i+1}\\
&=\frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n}i\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)x^{i-1}+xG_k(x)-\frac{X^2}{n}\sum_{i=1}^{n}i\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)x^{i-1}\\
&=\frac{1}{n}x(1-x)\sum_{i=1}^{n}i\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)x^{i-1}+xG_k(x)\\
&=\frac{1}{n}x(1-x)G_k'(x)+xG_k(x).
\end{aligned}$$

29. La question précédente donne

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad G_{k+1}=\varphi\left(G_k\right).$$

On obtient alors le résultat demandé par récurrence.

30. Comme $([Y_k=i])_{i\in[\![0;n]\!]}$ est un système complet d'événements, on a en particulier

$$G_k(1)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)\times 1^k=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)=1.$$

La fonction G_k est polynomiale donc dérivable avec pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$G_k'(x)=\sum_{i=1}^{n}i\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)x^{i-1}.$$

D'où

$$G_k'(1)=\sum_{i=1}^{n}i\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)=\sum_{i=0}^{n}i\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)=\mathbf{E}\left(Y_k\right).$$

31. On a, en dérivant la relation obtenue à la question 28

$$G_{k+1}'(x)=\frac{1}{n}x(1-x)G_k''(x)+\frac{1}{n}(1-x)G_k'(x)-\frac{1}{n}xG_k'(x)+G_k(x)+xG_k'(x).$$

En évaluant en 1

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(Y_{k+1}\right)&=G_{k+1}'(1)\\
&=-\frac{1}{n}G_k'(1)+G_k(1)+G_k'(1)\\
&=\left(1-\frac{1}{n}\right)G_k'(1)+1\\
\mathbf{E}\left(Y_{k+1}\right)&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbf{E}\left(Y_k\right)+1.
\end{aligned}$$

32. On reconnaît une suite arithmético-géométrique ... (calculs).

33. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}=(x+(1-x))^n=1^n=G_0.$$

34. D'après la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned}
P_j(x)&=x^j(1-x)^{n-j}\\
&=x^j\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-x)^k\\
&=x^j\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}x^{i-j}\\
P_j(x)&=\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}x^i.
\end{aligned}$$

35. Comme P_j étant un vecteur propre de φ pour la valeur propre $\lambda_j=\frac{j}{n}$, on en déduit que pour tout entier k

$$\varphi^k\left(P_j\right)=\lambda_j{}^kP_j.$$

En reprenant les questions 29, 33 et 34

$$\begin{aligned}
G_k&=\varphi^k(G_0)\\
&=\varphi^k\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j\right)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\varphi^k\left(P_j\right)\\
&=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\lambda_j{}^kP_j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\lambda_j{}^k\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}x^i\\
&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{j}{n}\binom{i-j}{n-j}\lambda_j{}^k(-1)^{i-j}x^i.
\end{aligned}$$

36. D'une part

$$G_k(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{j}{n}\binom{i-j}{n-j}\lambda_j{}^k(-1)^{i-j}x^i,$$

d'autre part

$$G_k(x)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}\left([Y_k=i]\right)x^i.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(Y_k=i\right)&=\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k(-1)^{i-j}\\
&=\sum_{j=0}^{i}\frac{n!}{j!(n-j)!}\,\frac{(n-j)!}{(i-j)!(n-i)!}\left(\frac{j}{n}\right)^k(-1)^{i-j}\\
&=\sum_{j=0}^{i}\frac{n!}{i!(n-i)!}\,\frac{i!}{j!(i-j)!}\left(\frac{j}{n}\right)^k(-1)^{i-j}\\
&=\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k.
\end{aligned}$$

37. Cours.

38. Vérifions les 3 hypothèses de la formule de l'espérance totale :

- La famille $([N=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

- Pour $k \in \mathbb{N}$, l'espérance conditionnelle existe bien puisqu'elle se résume à l'espérance de Y_k

$$\mathbf{E}(S|N=k) = \mathbf{E}(Y_k|N=k) = \mathbf{E}(Y_k)$$

par indépendance de N et Y_k.
- Comme S est à valeurs positives, la convergence de la série

$$\sum \mathbf{P}(N=k)\mathbf{E}(S|N=k)$$

suffit pour appliquer la formule. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N=k)\mathbf{E}(S|N=k) &= \mathbf{P}(N=k)\mathbf{E}(Y_k) \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right) \\ &= ne^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^k}{k!}-\frac{\left(1-1/n)\lambda\right)^k}{k!}\right).\end{aligned}$$

Par combinaison linéaire de deux séries exponentielles, la série $\sum \mathbf{P}(N=k)\mathbf{E}(S|N=k)$ converge bien.

Donc par application de la formule de l'espérance totale, S admet une espérance et

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(N=k)\mathbf{E}(S|N=k).$$

On pose le calcul

$$\mathbf{E}(S) = ne^{-\lambda}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(1-1/n)\lambda\right)^k}{k!}\Big).$$

C'est-à-dire

$$\mathbf{E}(S) = ne^{-\lambda}\left(e^{\lambda}+e^{\lambda(1-1/n)}\right) = n\left(1+e^{-\frac{\lambda}{n}}\right).$$

Bonus C'est un piège grossier, il n'existe pas de prix Nobel de mathématiques !

DS 2* - solution

1. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)\mathrm{e}^{-x_1^2 - x_2^2} = \varphi(x_1^2 + x_2^2)$$
$$g_2(x_1, x_2) = x_1^2\mathrm{e}^{-x_1^2} \cdot x_2^2\mathrm{e}^{-x_2^2} = \varphi(x_1^2) \cdot \varphi(x_2^2).$$

2. • Pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, la norme euclidienne de x. On constate alors que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2, \qquad f_2(x) = \varphi\big(\|x\|^2\big).$$

En particulier, si x et y ont même norme, ils ont même image par f_2. Comme la norme représente la distance à l'origine, f_2 correspond à la troisième fonction.

• Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$g_2(x) = \varphi(x_1^2) \cdot \varphi(x_2^2) \geqslant 0.$$

Comme la fonction 1 prend des valeurs négatives, on peut conclure que g_2 correspond à la seconde fonction. Notons aussi que

$$g_2((\pm x_1, \pm x_2)) = g_2(x_1, x_2).$$

Dit autrement, les quatre points

$$(x_1, x_2), \quad (-x_1, x_2), \quad (x_1, -x_2), \quad (-x_1, -x_2)$$

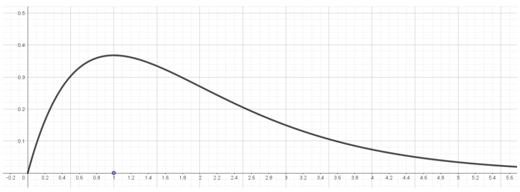
ont même image par g_2. La surface est symétrique par rapport aux plans verticaux $(\mathrm{O}xz)$ et $(\mathrm{O}yz)$. Seule la seconde fonction vérifie cette condition.

• Enfin, h_2 correspond bien à la première fonction car c'est la seule avec un changement de signe.

En résumé

$$\begin{array}{ccc} f_2 & \leftrightarrow & \text{Fonction 3} \\ g_2 & \leftrightarrow & \text{Fonction 2} \\ h_2 & \leftrightarrow & \text{Fonction 1} \end{array}$$

3. Vérifier par une étude de fonction que φ admet un maximum atteint en 1 et valant $\varphi(1) = \mathrm{e}^{-1}$.



Soit $y \in \mathbb{R}$. Par lecture graphique et par le théorème de la bijection pour la justification théorique :
→ Si $y \notin [0; \mathrm{e}^{-1}]$, y n'a aucun antécédent par φ.

→ Si $y \in \{0; \mathrm{e}^{-1}\}$, y admet un unique antécédent.

→ Si $y \in]0; \mathrm{e}^{-1}[$, y admet deux antécédents.
Soit $\mathrm{K} \in \mathbb{R}$. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$x \in \mathscr{L}_{\mathrm{K}} \iff f_2(x) = \varphi(\|x\|^2) = \mathrm{K}.$$

Ainsi
→ Si $\mathrm{K} \notin [0; \mathrm{e}^{-1}]$, il n'y a pas d'antécédent par φ. La ligne de niveau est vide

→ Si $\mathrm{K} = 0$, K admet 0 comme unique antécédent par φ. Il vient

$$x \in \mathscr{L}_{\mathrm{K}} \iff \|x\|^2 = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

La ligne de niveau est réduit à un point.

→ Si $\mathrm{K} = \mathrm{e}^{-1}$, K admet 1 comme unique antécédent par φ. Il vient

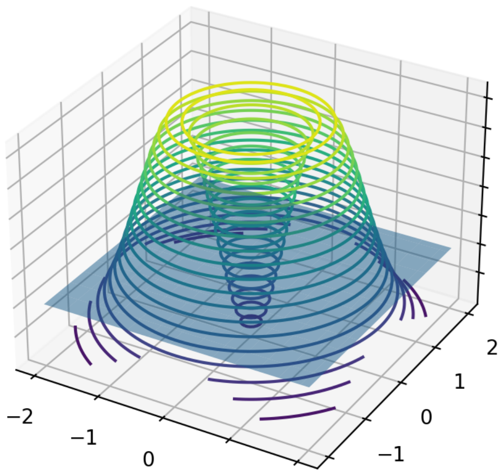
$$x \in \mathscr{L}_{\mathrm{K}} \iff \|x\|^2 = 1 \iff \|x\| = 1.$$

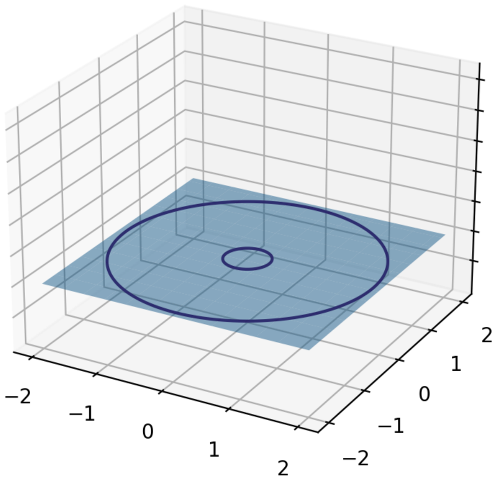
La ligne de niveau correspond au cercle de centre l'origine et de rayon 1.

→ Si $y \in]0; \mathrm{e}^{-1}[$, y admet deux antécédents. Si on les note α, β ces deux réels positifs.

$$x \in \mathscr{L}_{\mathrm{K}} \iff \|x\|^2 = \alpha \quad \text{ou} \quad \|x\|^2 = \beta.$$

La ligne de niveau correspond a deux cercles concentriques (centrées à l'origine) et de rayons respectifs $\sqrt{\alpha}$ et $\sqrt{\beta}$.
Illustrations avec $\mathrm{K} = 0.1$





4.a) On a

$$f_n(x_1,\dots,x_n)=\varphi\left(\|x\|^2\right) \text{ où } \|x\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$$
$$g_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^n \varphi\left(x_i^2\right).$$

4.b) L'étude de la fonction φ donne

$$\forall\, t\in\mathbb{R}^+,\quad 0=\varphi(0)\leqslant\varphi(t)\leqslant\varphi(1)=e^{-1}.$$

→ *Étude de f_n*
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\|x\|^2\in\mathbb{R}^+$ et

$$0\leqslant\varphi\left(\|x\|^2\right)\leqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

Comme $\varphi\left(0_{\mathbb{R}^n}\right)=0$ et $\varphi(e_1)=\mathrm{e}^{-1}$ avec $e_1=(1,0,\dots,0)$. On obtient

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^n,\quad \underbrace{f\left(0_{\mathbb{R}^n}\right)}_{=0}\leqslant f_n(x)\leqslant \underbrace{f_n(e_1)}_{=\mathrm{e}^{-1}}.$$

Dès lors, f_n admet respectivement 0 et e^{-1} comme minimum et maximum.

→ *Étude de g_n*
Soit $x\in\mathbb{R}^n$. Pour tout $i\in[\![1;n]\!]$,

$$0\leqslant\varphi\left({x_i}^2\right)\leqslant\mathrm{e}^{-1}.$$

Par produit,

$$0\leqslant\prod_{i=1}^n\varphi\left({x_i}^2\right)\leqslant\mathrm{e}^{-n}.$$

Or $g_n\left(0_{\mathbb{R}^n}\right)=0$ et $g_n(\mathrm{X})=\mathrm{e}^{-n}$ où $\mathrm{X}=(1,1,\dots,1)$. D'où

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^n$$
$$\underbrace{g_n\left(0_{\mathbb{R}^n}\right)}_{=0}\leqslant g_n(x)\leqslant\underbrace{g_n(x)}_{=\mathrm{e}^{-n}}$$

Dès lors, g_n admet 0 et e^{-n} respectivement comme minimum et maximum.

Il faut bien marquer que le maximum et le minimum sont atteints pour les distinguer de simples majorants ou minorants.

5. Soit $x\in\mathbb{R}^n$. En reprenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz entre x et $y=(1,\dots,1)$, on obtient

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i\right|\leqslant\|y\|\,\|x\|=\sqrt{n}\,\|x\|.$$

On en déduit que

$$|h_n(x)|\leqslant\sqrt{n}\,\|x\|\prod_{i=1}^n\mathrm{e}^{-{x_i}^2}\leqslant\sqrt{n}\,\|x\|\,\mathrm{e}^{-\|x\|^2}.$$

Il y a égalité si et si seulement si x et y sont colinéaires. Il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$(x_1,\dots,x_n)=x=\lambda y=(\lambda,\dots,\lambda).$$

Dit autrement, il y a égalité si et seulement si toutes les composantes de x sont identiques.

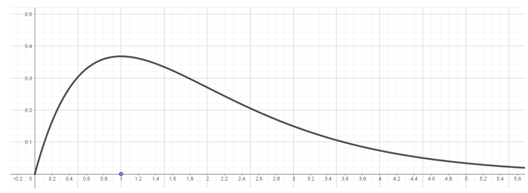
6. Soit $x\in\mathbb{R}^n$,

$$h_n(-x)=h_n(-x_1,\dots,-x_n)=\left(\sum_{i=1}^n -x_i\right)\left(\prod_{i=1}^n\mathrm{e}^{-(-x_i)^2}\right)$$
$$-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\prod_{i=1}^n\mathrm{e}^{-{x_i}^2}\right)=-h_n(x).$$

Une rapide étude de la fonction

$$\psi: t\in\mathbb{R}^+\longmapsto t\mathrm{e}^{-t^2}.$$

donne un maximum atteint en $\alpha=\sqrt{2}/2$ et valant $\psi(\alpha)=\sqrt{2}/2\mathrm{e}^{-1/2}$.



On a donc

$$\forall\, t\in\mathbb{R}^+,\qquad \psi(t)\leqslant\psi(\alpha).$$

On en déduit que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$

$$|h_n(x)|\leqslant\sqrt{n}\psi(\|x\|)\leqslant\sqrt{n}\psi(\alpha).$$

Dans le cas particulier du vecteur $x_\alpha=(\alpha/n,\dots,\alpha/n)$ dont toutes les composantes sont identiques et de norme α, on a les égalités

$$h_n(x_\alpha)=\sqrt{n}\psi(\|x_\alpha\|)=\sqrt{n}\psi(\alpha).$$

En utilisant la remarque préliminaire, on a

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^n,\qquad h_n(-x_\alpha)=-h_n(x_\alpha)\leqslant h_n(x)\leqslant h_n(x_\alpha).$$

Ce qui établit le fait que h_n admet un minimum et un maximum valant $\pm h_n(x_\alpha)=\pm\sqrt{2n}/2\mathrm{e}^{-1/2}$.

---

7. Notons que pour tout $k\in\mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(\mathrm{Y}>k)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathrm{Y}=k)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}p_i.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k+1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathrm{Y}=k) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k+1}^{+\infty} p_i \\
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllllllll}
= p_1 & + & p_2 & + & \cdots & p_n & + & \cdots & (k=0)\\
 & + & p_2 & + & \cdots & p_n & + & \cdots & (k=1)\\
 & & & & \ddots & \vdots & + & \ddots & \vdots\\
 & & & & & p_n & + & \cdots & (k=n)
\end{array}$$

On constate alors que

$$\mathrm{E}_n = \sum_{i=1}^{n} i p_i + (n+1)\sum_{i=n+1}^{+\infty} p_i = \sum_{i=0}^{n} i p_i + (n+1)\sum_{i=n+1}^{+\infty} p_i$$

8. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} i p_i = \mathbf{E}(\mathrm{Y}) - \sum_{i=n+1}^{+\infty} i p_i.$$

On en déduit que

$$\mathrm{E}_n = \mathbf{E}(\mathrm{Y}) - \underbrace{\sum_{i=n+1}^{+\infty} \overbrace{\big(i-(n+1)\big)}^{\geqslant 0} p_i}_{\geqslant 0} \leqslant \mathbf{E}(\mathrm{Y}).$$

De plus la suite $(\mathrm{E}_n)_n$ est croissante. D'après le théorème de convergence monotone, la suite $(\mathrm{E}_n)_n$ est donc convergente.

9.a) On a directement

$$\mathrm{E}_n = \sum_{i=1}^{n} i p_i + n\underbrace{\sum_{i=n+1}^{+\infty} p_i}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{i=1}^{n} i p_i.$$

9.b) La suite $(\mathrm{E}_n)_n$ est convergente, elle est donc majorée. Soit M un majorant. D'après la question précédente

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i p_i \leqslant \mathrm{E}_n \leqslant \mathrm{M}.$$

De plus, la suite de terme général $\sum_{i=1}^{n} i p_i$ est croissante. Par le théorème de convergence monotone, la suite de terme général $\sum_{i=1}^{n} i p_i$ est donc convergente. Dit autrement, la série $\sum i p_i$ est convergente. Comme les termes de la série sont positifs, la convergence est même absolue. Par définition, Y admet une espérance.

10. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\mathrm{E}_n - \sum_{i=1}^{n} i p_i\right| = n\sum_{i=n+1}^{+\infty} p_i \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} i p_i.$$

On reconnaît à droite le reste de la série convergente $\sum i p_i$, on sait alors que

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} i p_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par passage à la limite (toutes les quantités sont convergentes), on obtient

$$\left|\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}_n - \sum_{i=1}^{+\infty} i p_i\right| \leqslant 0.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{E}_n = \mathbf{E}(\mathrm{Y})$. Ce qui conclut.

11. Par définition de la partie entière

$$0 \leqslant \lfloor \mathrm{X} \rfloor \leqslant \mathrm{X} \leqslant \lfloor \mathrm{X} \rfloor + 1.$$

Précisons que $\lfloor \mathrm{X} \rfloor$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ puisque $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$.
Justifions par double implication que X admet une espérance si et seulement si $\lfloor \mathrm{X} \rfloor$ admet une espérance.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si X admet une espérance, alors l'inégalité $0 \leqslant \lfloor \mathrm{X} \rfloor \leqslant \mathrm{X}$ entraine par le théorème de domination, l'existence d'une espérance pour $\lfloor \mathrm{X} \rfloor$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\lfloor \mathrm{X} \rfloor$ admet une espérance, alors $\lfloor \mathrm{X} \rfloor + 1$ admet aussi une espérance et l'inégalité

$$0 \leqslant \mathrm{X} < \lfloor \mathrm{X} \rfloor + 1$$

justifie maintenant par le théorème de domination l'existence de l'espérance de X.

- Notons que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$[\mathrm{X} \geqslant k] = [\lfloor \mathrm{X} \rfloor \geqslant k].$$

À l'aide du préliminaire, $\lfloor \mathrm{X} \rfloor$ admet une espérance si seulement si la série

$$\sum \mathbf{P}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor > k) = \sum \mathbf{P}(\mathrm{X} > k)$$

converge (absolument).

- Dans le cas de convergence, on a

$$\mathbf{E}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X} \geqslant k).$$

Par croissance de l'espérance, on obtient

$$\mathbf{E}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor) \leqslant \mathbf{E}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor) \leqslant \mathbf{E}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor + 1) = \mathbf{E}(\lfloor \mathrm{X} \rfloor) + 1,$$

ce qui donne finalement

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X} \geqslant k) \leqslant \mathbf{E}(\mathrm{X}) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(\mathrm{X} \geqslant k).$$

12. Le développement en série de la fonction exponentielle donne pour tout réel t

$$\exp(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^i}{i!}$$

$$\exp(-t) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{t^i}{i!}.$$

On obtient le premier résultat en effectuant la demi-somme de ces deux relations.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^n}{n!}\,\frac{2^n}{(n+1)\ldots(2n)}.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2^n}{(n+1)\dots(2n)} = \left(\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{2}{n+2}\right)\dots\left(\frac{2}{2n}\right) \leqslant 1 \times \dots \times 1 = 1$$

avec égalité si $n = 0$, donc pour $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

13. On pose $\lambda = \frac{1+x}{2}$, alors $\lambda \in [0,1]$ grâce à $x \in [-1,1]$. La fonction exp étant convexe, donc

$$\exp(tx) = \exp(\lambda t + (1-\lambda)(-t)) \leqslant$$

$$\lambda \exp(t) + (1-\lambda)\exp(-t) = \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

14. La variable X est bornée par 1, donc $-1 \leqslant X \leqslant 1$ ce qui permet d'appliquer l'inégalité précédente

$$\exp(tX) \leqslant \frac{1+X}{2}\exp(t) + \frac{1-X}{2}\exp(-t)$$

L'espérance est croissante et linéaire, donc

$$\mathbf{E}(\exp(tX)) \leqslant \exp(t)\mathbf{E}\left(\frac{1+X}{2}\right) + \exp(-t)\mathbf{E}\left(\frac{1-X}{2}\right).$$

La variable X est centrée, donc $\mathbf{E}(X) = 0$. Il vient

$$\mathbf{E}\left(\frac{1+X}{2}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{1-X}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

donc

$$\mathbf{E}(\exp(tX)) \leqslant \frac{\exp(t)+\exp(-t)}{2} = \mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Finalement, la variable X est 1-sous-gaussienne.

15. Soit X une variable aléatoire bornée par α et centrée, alors $Y = \frac{1}{\alpha}X$ est une variable aléatoire bornée par 1 et centrée par linéarité de l'espérance, ce qui entraine par la question précédente que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{E}(\exp(uY)) \leqslant \exp\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Avec le choix $u = t\alpha$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{E}(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

c'est à dire X est α-sous-gaussienne.

16. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right)\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^n \mu_i tX_i\right)\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n \exp\left(t\mu_i X_i\right)\right).$$

Les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes, donc aussi pour les variables aléatoires $\exp(t\mu_1X_1),\dots,\exp(t\mu_nX_n)$, donc

$$\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^n \exp\left(t\mu_i X_i\right)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\exp\left(t\mu_i X_i\right)\right).$$

Sachant que chaque X_i est $\alpha-$ sous-gaussienne, on obtient pour tout $i \in [\![1;n]\!]$

$$\exp\left(t\mu_i X_i\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2\mu_i^2 t^2}{2}\right).$$

Ce qui donne avec $\sum_{i=1}^n {\mu_i}^2 = 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\exp\left(t\sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right)\right) &\leqslant \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\alpha^2\mu_i^2 t^2}{2}\right)\\ &\leqslant \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha^2\mu_i^2 t^2}{2}\right)\\ &\leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

17.a) Pour tout réel $t > 0$, on a l'égalité par stricte croissance de l'exponentielle

$$[X \geqslant \lambda] = [\exp(tX) \geqslant \exp(t\lambda)].$$

Puis par croissance de la probabilité

$$\mathbf{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \mathbf{P}(\exp(tX) \geqslant \exp(t\lambda)).$$

Appliquons l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $\exp(tX)$

$$\mathbf{P}(X \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathbf{E}(\exp(tX))}{\exp(t\lambda)} \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2 - \lambda t}{2}\right)$$

car X est α-sous-gaussienne.

17.b) L'événement $[|X| \geqslant \lambda]$ s'écrit comme réunion disjointe de deux événements

$$[|X| \geqslant \lambda] = [X \geqslant \lambda] \cup [X \leqslant -\lambda] = [X \geqslant \lambda] \cup [-X \geqslant \lambda].$$

or si X est $\alpha-$ sous-gaussienne, alors $-X$ l'est aussi, donc

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right).$$

• L'étude de la fonction $t \mapsto \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - \lambda t\right)$ montre que cette fonction est minorée et atteint son minimum en $t_0 = \frac{\lambda}{\alpha^2}$.
En prenant $t = t_0$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\mathbf{P}(|X| \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t_0^2}{2} - \lambda t_0\right) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

18. Pour $\beta > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left[\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right) \geqslant k\right] = \left[\frac{\beta^2X^2}{2} \geqslant \ln(k)\right] = \left[|X| \geqslant \frac{\sqrt{2\ln(k)}}{\beta}\right].$$

Donc

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right) \geqslant k\right) = \mathbf{P}\left(|X| \geqslant \frac{\sqrt{2\ln(k)}}{\beta}\right)$$

et puisque X est $\alpha-$ sous-gaussienne on a l'inégalité de la question précédente qui s'écrit

$$\mathbf{P}\left(|X| \geqslant \frac{\sqrt{2\ln(k)}}{\beta}\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\ln(k)}{\alpha^2\beta^2}\right).$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2} \geqslant k\right)\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\ln(k)}{\alpha^2\beta^2}\right) = 2\exp\left(\ln\left(k^{-\frac{1}{\alpha^2\beta^2}}\right)\right) = 2k^{-\eta}$$

19. Si $\alpha\beta < 1$, alors $\eta > 1$, donc la série de Riemann $\sum k^{-\eta}$ converge. Par le critère de comparaison, on obtient la convergence de la série

$$\sum \mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right) \geqslant k\right).$$

En reprenant le préliminaire, cela assure l'existence de l'espérance pour la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right)$ et on a aussi la majoration

$$\mathbf{E}\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 1 + 2\zeta(\eta).$$

20.a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto 1/t^2$ sur $\mathbb{R}_*^+$, pour tout $t \in [k; k+1]$

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Par croissance de l'intégrale

$$\frac{1}{(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Puis par la relation de Chasles, pour $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = 1 - \frac{1}{N+1} \leqslant 1.$$

Par passage à la limite (la série de Riemann est convergente)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant 1.$$

On obtient le résultat demandé par le changement d'indice $n \leftarrow k+1$.

20.b) Pour $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\eta = 2$, et $\frac{\beta^2}{2} = \frac{1}{4\alpha^2}$. Avec l'inégalité précédente $1 + 2\zeta(2) \leqslant 5$, on obtient

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leqslant 5.$$

Adapté de HEC 87 maths 1

21.a) Vérifier que pour tout $j \in [\![1;N]\!]$

$$\varphi(1) = x \quad \text{et} \quad \varphi\left(x^j\right) = \frac{j}{N}x^{j-1} + \left(1 - \frac{j}{N}\right)x^{j+1}.$$

Notons que $\varphi\left(x^N\right) = x^{N-1}$.

21.b) Par linéarité de la dérivation, justifions que φ est linéaire.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, P, Q \in E$$

$$\begin{aligned}
&\varphi(\lambda P + Q)(x)\\
&= x(\lambda P + Q)(x) - \frac{1}{N}\left(x^2 - 1\right)(\lambda P + Q)'(x)\\
&= \lambda\left(xP(x) - \frac{1}{N}\left(x^2-1\right)P'(x)\right) + \left(xQ(x) - \frac{1}{N}\left(x^2-1\right)Q'(x)\right)\\
&= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).
\end{aligned}$$

On a vu que

$$\forall k \in [\![0;N]\!], \qquad \varphi\left(x^k\right) \in E$$

Comme $\left(x^k\right)_{k\in[\![0;N]\!]}$ est une base de E, on en déduit par linéarité que l'image de φ est incluse dans E :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) \in E.$$

En conclusion, φ est un endomorphisme de E.

| Question particulièrement mal traitée, attention.

22. D'après les calculs précédents, la matrice est tridiagonale En dehors des diagonales juste au-dessus et juste en-dessous de la diagonale principale, les coefficients sont nuls. Plus précisément, la matrice dans cette base est

$$\begin{bmatrix}
0 & 1/N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
1 & 0 & 2/N & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 1-1/N & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1-2/N & 0 & N/N\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1/N & 0
\end{bmatrix}.$$

23. On a pour $k \in [\![1,N]\!]$

$$\begin{aligned}
&\varphi(Q_k)\\
=&xQ_k(x) - \frac{1}{N}(x-1)(x+1)Q_k'(x)\\
=&xQ_k(x)\\
&-\frac{1}{N}(x-1)(x+1)\left((N-k)(x-1)^{N-k-1}(x+1)^k + k(x-1)^{N-k}(x-1)^{k-1}\right)\\
=&xQ_k(x) - \frac{N-k}{N}(x-1)^{N-k}(x+1)^{k+1} - \frac{k}{N}(x-1)^{N-k+1}(x+1)^k\\
=&xQ_k(x) - \frac{N-k}{N}(x+1)Q_k(x) - \frac{k}{N}(x-1)Q_k(x)\\
=&\left(x - \left(1 - \frac{k}{N}\right)(x+1) - \frac{k}{N}(x-1)\right)Q_k(x)\\
=&\left(\frac{2k}{N} - 1\right)Q_k(x)
\end{aligned}$$

Comme $Q_k(x) \neq 0$, ce dernier est bien vecteur propre de φ pour la valeur propre

$$\lambda_k = \frac{2k}{N} - 1.$$

Noter un abus de notation pour $k = 0$ et $k = N$ dans les puissances $k(x-1)^{k-1}$ et $(N-k)(x-1)^{N-k-1}$.

> Attention, la famille des vecteurs Q_k n'est pas échelonnée en degré, tous les polynômes sont de degré N.

24. Comme les vecteurs Q_k correspondent à des valeurs propres distinctes, ils forment une famille libre. Or il y a $\dim E$ vecteurs. L famille $\mathscr{B}'$ est donc bien une base de E. La matrice M' est diagonale avec

$$M' = \operatorname{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N).$$

On a par la formule du binôme de Newton.

$$Q_0(x) = (x-1)^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (-1)^{N-i} x^i$$
$$Q_N(x) = (x+1)^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} x^i$$

par unicité des coefficients d'un polynôme

$$\forall i \in [\![0;N]\!] \quad a_{i,0} = (-1)^{N-i}\binom{N}{i}$$
$$a_{i,N} = \binom{N}{i}.$$

Soit $j \in [\![0;N]\!]$

$$\begin{aligned} x^j &= \sum_{i=0}^{N} b_{ij} Q_j(x) = \sum_{i=0}^{N} b_{ij}(x-1)^{N-j}(x+1)^j \\ &= b_{0j}(x-1)^N + \sum_{i=1}^{N-1} b_{ij}(x-1)^{N-i}(x+1)^i + b_{Nj}(x+1)^N \\ x^j &= b_{0j}(x-1)^N + (x+1)(x-1)R(x) + b_{Nj}(x+1)^N \end{aligned}$$

où $R(x)$ est un polynôme. En évaluant respectivement en 1 et -1 , on obtient

$$1 = b_{Nj}2^N \quad \text{et} \quad (-1)^j = b_{0j}(-2)^N$$

Soit $\qquad b_{Nj} = \dfrac{1}{2^N} \quad$ et $\quad b_{0j} = \dfrac{(-1)^{N-j}}{2^N}.$

- La première colonne de P est donnée par

$$[a_{i,0}]_{i\in[\![0;N]\!]} = \left[\binom{N}{i}(-1)^{N-i}\right]_{i\in[\![0;N]\!]}$$

La dernière colonne de P

$$[a_{i,N}]_{i\in[\![0;N]\!]} = \left[\binom{N}{i}\right]_{i\in[\![0;N]\!]}$$

La première ligne de Q est

$$[b_{0,j}]_{j\in[\![0;N]\!]} = \left[2^{-N}(-1)^{N-j}\right]_{j\in[\![0;N]\!]}$$

et la dernière ligne de Q

$$\left[b_{N,j}\right]_{j\in[\![0;N]\!]} = \left[2^{-N}\right]_{j\in[\![0;N]\!]}.$$

27.a) On rappelle que

$$\begin{aligned} M' &= \operatorname{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N) \\ &= \operatorname{diag}(-1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}, 1). \end{aligned}$$

Avec pour tout $k \in [\![1;N-1]\!]$, $\lambda_k \in]-1;1[$. Comme M' est diagonale, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(M')^n = \operatorname{diag}\left((-1)^n, \lambda_1^n, \ldots, \lambda_{N-1}^n, 1^n\right)$$

En particulier

$$(M')^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{diag}(1,0,\ldots,0,1)$$
$$(M')^{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{diag}(-1,0,\ldots,0,1).$$

27.b) On sait par la formule de changement de bases que

$$M' = QMP \quad \text{avec} \quad Q^{-1} = P$$

27.c) D'après le résultat admis

$$\begin{aligned} M^{2n} &= (PMQ)^{2n} = \left(PMP^{-1}\right)^{2n} \\ &= \left(PM^{2n}P^{-1}\right) \quad \text{par récurrence} \\ &= PM^{2n}Q \\ M^{2n} &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P\operatorname{diag}(1,0,\ldots,0,1)Q \end{aligned}$$

De même $\left(M^{2n+1}\right)_n$ admet une limite avec

$$M^{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P\operatorname{diag}(-1,0,0\ldots,0,1)Q.$$

28. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\left([X_{n-i} = i]\right)_{i\in[\![1;N]\!]}$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{i=0}^{N} \mathbf{P}(X_{n-1} = i)\,\mathbf{P}_{[X_{n-1}=i]}(X_n = k).$$

Or à chaque étape, on retire rajoute une boule rouge, donc

$$\mathbf{P}_{[X_{n-1}=i]}(X_n = k) = 0 \quad \text{si } i \notin \{k-1, k+1\}.$$

De plus

$$\mathbf{P}_{[X_{n-1}=k-1]}(X_n = k) = \frac{N-(k-1)}{N}$$

car sachant $[X_{n-1} = k-1]$ réalisé, on a $N-(k-1)$ boules vertes sur N boules. De même

$$\mathbf{P}_{[X_{n-1}=k+1]}(X_n = k) = \frac{k+1}{N}$$

car il y a $k+1$ boules rouges sur N si $[x_{n-1} = k+1]$ est réalisé. La formule s'en déduit en multipliant par N.
Noter qu'il n'y a pas de problème pour $k = 1$ avec la convention $p(n,-1) = 0$.

29. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons que

$$\begin{aligned} G'_{n-1}(x) &= \sum_{k=1}^{N} kp(n-1,k)x^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)p(n-1,k+1)x^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} (k+1)p(n-1,k+1)x^k - (N+1)\underbrace{p(n-1,N+1)}_{=0}x^N. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
x^2 G'_{n-1}(x) &= \sum_{k=1}^{N} k p(n-1,k) x^{k+1} \\
&= \sum_{k=2}^{N+1} (k-1) p(n-1,k-1) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} (k-1) p(n-1,k-1) x^k + N p(n-1,N) x^{N+1}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x G_{n-1}(x) &= \sum_{k=0}^{N} p(n-1,k) x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} p(n-1,k-1) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} p(n-1,k-1) x^k + p(n-1,N) x^{N+1}
\end{aligned}$$

Par somme

$$\begin{aligned}
&x G_{n-1}(x) - \frac{1}{N}\left(x^2-1\right) G'_{n-1}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{N} x^k \left(p(n-1,k-1) - \frac{1}{N}(k-1) p(n-1,k-1) + \frac{1}{N}(k+1) p(n-1,k+1) \right) \\
&+ p(n-1,N) x^{N+1} - \frac{1}{N}\left(N p(n-1,N) x^{N+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N} x^k \left(\frac{N-k+1}{N} p(n-1,k-1) + \frac{k+1}{N} p(n-1,k+1) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{N} p(n,k) x^k \quad \text{d'après } (*)
\end{aligned}$$

D'où $\qquad G_n(x) = \left(\varphi \circ G_{n-1}\right)(x).$

30. La fonction G_n est dérivable car polynomiale avec

$$G'_n(x) = \sum_{k=1}^{N} p(n,k) \cdot k x^{k-1}$$

D'où

$$\begin{aligned}
G'_n(1) &= \sum_{k=1}^{N} p(n,k) k = \sum_{k=0}^{N} p(x_n = k)\, k \\
&= \mathbf{E}(X_N).
\end{aligned}$$

31. On a par dérivation

$$\begin{aligned}
G'_n(x) =& G_{n-1}(x) + x G'_{n-1}(x) - \frac{1}{N} 2x G'_{n-1}(x) \\
& - \frac{1}{N}\left(x^2-1\right) G''_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

En évaluant en 1

$$\underbrace{G'_n(1)}_{=\mathbf{E}(X_n)} = \underbrace{G_{n-1}(1)}_{=1} + \underbrace{G'_{n-1}(1)}_{=\mathbf{E}(X_{n-1})} - \frac{1}{N} 2 \underbrace{G'_{n-1}(1)}_{=\mathbf{E}(X_{n-1})}.$$

Il vient

$$\mathbf{E}(X_n) = 1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right) \mathbf{E}(X_{n-1}).$$

On évitera d'utiliser le théorème de dérivation des composées. L'application φ' n'a pas de sens, φ est un endomorphisme.

32. On reconnaît une suite arithmético-géométrique, le résultat s'en déduit par la méthode usuelle.

33. On a

$$G''_n(x) = \sum_{k=2}^{N} k(k-1) p(n,k) x^{k-2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
G''_n(1) &= \sum_{k=2}^{N} k(k-1) p(n,k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} k(k-1) p(n,k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} k^2 p(n,k) - \sum_{k=0}^{N} k p(n,k) \\
G''_n(1) &= \mathbf{E}\left(X_n^2\right) - \mathbf{E}(X_n).
\end{aligned}$$

34. Calcul...

35. De nouveau, on reconnaît une suite arithmético-gémétrique et

$$\begin{aligned}
a_0 &= r^2 - Nr \\
a_n &= \left(-\frac{4}{N} + 1\right)^n \left(a_0 - \frac{N(1-N)}{4}\right) + \frac{N(1-N)}{4}.
\end{aligned}$$

Comme $1 - \frac{4}{N} \in]-1;1[$

$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{N(1-N)}{4}.$$

Par la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(X_n) &= \mathbf{E}\left(X_n^2\right) - \mathbf{E}(X_n)^2 \\
&= a_n + N\mathbf{E}(X_n) - \mathbf{E}(X_n)^2 \\
\mathbf{V}(X_n) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{N(1-N)}{4} + N \cdot \frac{N}{2} - \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N}{4}.
\end{aligned}$$

36. C'est la traduction matricielle de $(\star)$. En effet les coefficients de G_n et resp. G_{n-1} dans la base canonique sont donnés par U_n et U_{n-1}. De plus M est la matrice de φ dans la base canonique.

37. On obtient

$$K_1 M = J + \left(1 - \frac{2}{N}\right) K_1.$$

De plus

$$\begin{aligned}
K_1 U_n &= [0, 1, \ldots, N] \begin{bmatrix} p(n,0) \\ \vdots \\ p(n,N) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{N} k p(n,k) = \mathbf{E}(X_n).
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_n) &= K_1 U_n = K_1 M U_{n-1} \\
&= \left(J + \left(1 - \frac{2}{N}\right) K_1\right) U_{n-1} \\
&= J U_{n-1} + \left(1 - \frac{2}{N}\right) K_1 U_{n-1}.
\end{aligned}$$

Or $K_1 U_{n-1} = \mathbf{E}(X_{n-1})$ et par le fait que $([X_n = k])_{k\in[\![0;N]\!]}$ est un système complet d'événements

$$1 = \sum_{k=0}^{N} \mathbf{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{N} p(n+k).$$

D'où $JU_{n-1} = 1$. Le résultat s'en déduit.

38. Vérifier que

$$(K_2 - NK_1)\,M = \left(1 - \frac{4}{N}\right)\left(K_2 - NK_J\right) + (1-N)J.$$

Or on a aussi

$$a_n = \mathbf{E}\left({X_n}^2\right) - N\mathbf{E}(X_n) = (K_2 - NK_1)\,U_n.$$

D'où

$$\begin{aligned} a_n &= (K_2 - NK_1)\,U_n \\ &= (K_2 - NK_1)\,MU_{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{4}{N}\right)(K_2 - NK_1)\,U_{n-1} + (1-N)JU_{n-1} \\ a_n &= \left(1 - \frac{4}{N}\right) a_{n-1} + (1-N). \end{aligned}$$

Ce qui est bien la relation obtenue à la question 34.

39. On a vu à la question 27 que

$$M^{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P\,\mathrm{diag}(1,0,\ldots,0,1)Q.$$

Explicitons cette limite

$$P\,\mathrm{diag}(1,0,\ldots,0,1) = \left[C_0, 0, \ldots, 0, C_N\right]$$

où C_0 et C_n désignent respectivement la dernière et première colonne de P. Puis

$$P\,\mathrm{diag}(1,0,\ldots,0,1)Q =$$

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & 0 & \cdots & 0 & a_{0,N} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{N,0} & 0 & \cdots & 0 & a_{N,N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{0,0} & \cdots & b_{0,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N,0} & \cdots & b_{N,N} \end{bmatrix}.$$

Le coefficient en position (i,j) est alors (attention au décalage d'indice)

$$\begin{aligned} &a_{i-1,0}b_{0,j-1} + a_{i-1,N}b_{N,j-1} \\ =&\binom{N}{i-1}(-1)^{N-i+1}2^{-N}(-1)^{N-j+1} + \binom{N}{i-1}2^{-N} \\ =&\frac{1}{2^N}\binom{N}{i-1}\left(1 + (-1)^{i+j}\right). \end{aligned}$$

De même, on montre que le coefficient en position (i,j) de $P\,\mathrm{diag}(-1,0,\cdots,0,1)Q$ est

$$\frac{1}{2^N}\binom{N}{i-1}\left(1 - (-1)^{i+j}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, à l'aide de la question 36, on a par récurrence

$$U_{2n} = M^{2n}U_0.$$

On a vu que la suite de matrices $\left(M^{2n}\right)_n$ admet une limite, donc $(U_{2n})_n$ aussi avec

$$\lim_{n\to+\infty} U_{2n} = \left(\lim_{n\to+\infty} M^{2n}\right)\cdot U_0.$$

Comme

$$U_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec 1 en $(r+1)$-ième position, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} p(2n,k) = \binom{N}{k}\frac{1}{2^N}\left(1 + (-1)^{r+k}\right).$$

De même

$$\lim_{n\to+\infty} p(2n+1,k) = \binom{N}{k}\frac{1}{2^N}\left(1 - (-1)^{r+k}\right).$$

Bonus C'est un piège grossier, il n'existe pas de prix Nobel de mathématiques!

Exercice Bonus

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: Un ascenseur dessert n étages d'un immeuble. A chaque voyage, le nombre de personnes qui montent dans cet ascenseur au rez-de-chaussée est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
On émet les hypothèses suivantes :

- aucun arrêt n'est du à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez-de-chaussée,
- chaque personne choisit son étage d'arrivée au hasard et indépendamment des autres passagers.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par S_k la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur lorsque celui-ci contient k passagers au départ et par S la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts effectués par l'ascenseur.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer $S_k(\Omega)$, puis montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall j \in S_{k+1}(\Omega), \qquad \mathbf{P}\left(S_{k+1}=j\right)=\frac{j}{n}\mathbf{P}\left(S_k=j\right)+\frac{n-j+1}{n}\mathbf{P}\left(S_k=j-1\right).$$
2. En déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{E}\left(S_{k+1}\right)=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbf{E}\left(S_k\right).$$
3. Donner une expression de $\mathbf{E}\left(S_k\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Rappeler la formule de l'espérance totale en précisant bien les hypothèses.
5. En déduire $\mathbf{E}(S)$.