

CHAPITRE 11

Introduction au calcul différentiel

I don't think that everyone should become a mathematician, but I do believe that many students don't give mathematics a real chance.

The beauty of mathematics only shows itself to more patient followers.

MARYAM MIRZAKHANI

Mathématicienne iranienne ayant reçu la médaille Fields en 2014

1 Rappels : dérivation des fonctions d'une variable réelle

1.1 Définition du nombre dérivé et interprétation géométrique

DÉFINITION (RAPPEL)

nombre dérivé, fonction dérivée

Soient un intervalle I , une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel a .

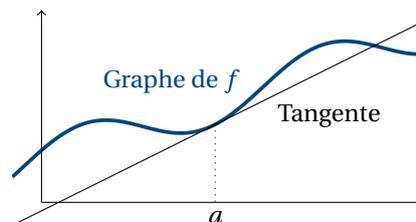
- f est **dérivable en a** si le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a . Si cette dernière existe, elle est unique et notée $f'(a)$.
- f est **dérivable sur I** si elle est dérivable pour tout réel de I . Ainsi, on définit la fonction dérivée par

$$f' : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ a & \mapsto f'(a). \end{cases}$$

- Graphiquement, f est dérivable en a s'il existe une tangente à la courbe. L'équation de la tangente est alors

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- Le terme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le taux d'accroissement de f entre a et x .



1.2 Les théorèmes

THÉORÈME

développement limité à l'ordre 1

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) La fonction f est dérivable en a et $\lambda = f'(a)$.
- ii) f admet un développement limité à l'ordre 1 en a .
C'est-à-dire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + o_a(x - a)$.

Remarque. On peut réécrire le développement limité sous la forme : il existe une fonction ε définie sur un voisinage \mathcal{V} de 0 telle que pour tout $h \in \mathcal{V}$,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

THÉORÈME

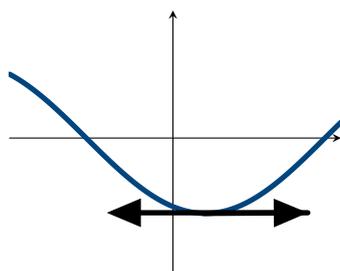
extremum - condition nécessaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

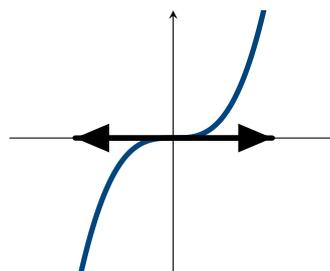
- Si**
- f admet un extremum local en a .
 - f est dérivable en a .
 - a n'est pas un des bords de I ,
- alors** $f'(a) = 0$.

Vocabulaire. On dit que a est un point critique de f lorsque $f'(a) = 0$.

Remarque. La réciproque est fautive : tout point critique ne donne pas un extremum. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ en 0 fournit un contre-exemple.



Point critique et minimum



Point critique sans extremum

2

Dérivées partielles et gradient

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on considère $g_{k,a}$ définie par

$$g_{k,a} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n). \end{cases}$$

L'application $g_{k,a}$ est la k -ième application partielle de f en a . C'est une fonction d'une variable réelle, on peut donc utiliser les définitions et résultats de la section précédente.

DÉFINITION

dérivée partielle

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

On dit que la fonction f admet une **dérivée partielle d'ordre k en a** si l'application partielle $g_{k,a}$ est dérivable en a_k . On note alors $\partial_k f(a)$ le nombre dérivé $g'_{k,a}(a_k)$. Autrement dit, la limite suivante existe et

$$\partial_k f(a) = \lim_{t \rightarrow a_k} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a)}{t - a_k}.$$

Remarque. Si f admet pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, une dérivée partielle en a , on peut définir la i -ème dérivée partielle par

$$\partial_i f : a \in \mathbb{R}^n \mapsto \partial_i f(a).$$

C'est encore une fonction de n variables réelles.

Exemple. Soit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 3x^2y + zy \in \mathbb{R}$. Pour obtenir la première dérivée partielle, « tout se passe comme-ci » y et z sont des constantes et on dérive par rapport à x , il vient pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\partial_1 f(x, y, z) = 3 \cdot 2xy = 6xy$.

Notation. On peut rencontrer la notation $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ pour désigner $\partial_1 f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ pour désigner $\partial_2 f(a)$, etc.

Exercice 1



◇ Préciser les dérivées partielles des fonctions définies sur \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 suivantes.

$$f(x, y) = x^2 \exp(xy), \quad g(x, y) = \ln\left(1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad h(x, y) = \sin(x)^2 + \cos(y)^2,$$

p. 17

$$i(x, y, z) = x^2 y^2 z^2, \quad j(x, y, z) = \arctan(xyz).$$

On pourra utiliser les symétries pour simplifier certains calculs.

! Attention. La notion de dérivée pour une fonction de plusieurs variables n'existe pas, elle est remplacée par la notion de gradient.

DÉFINITION

gradient

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f admet une i -ème dérivée partielle en a . On définit le **gradient** de f en a , noté $\nabla f(a)$, par le vecteur de \mathbb{R}^n

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)).$$

Exemple. En reprenant la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 3x^2y + zy \in \mathbb{R}$, les dérivées partielles existent et

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \nabla f(x, y, z) = (6xy, 3x^2 + z, y).$$

Remarque. Lorsque $n = 1$, on a simplement $\nabla f(a) = (f'(a))$. Ainsi, le gradient généralise la notion de dérivée d'une fonction d'une variable réelle.

3

Fonctions de classe \mathcal{C}^1

3.1

Définitions, exemples et règles de calculs

DÉFINITION

fonctions de classe \mathcal{C}^1

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est de **classe** \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n si pour toutes les dérivées partielles existent et sont continues sur \mathbb{R}^n .

Exemple. Les dérivées partielles d'une fonction polynomiale sont encore des fonctions polynomiales, elles sont donc continues sur \mathbb{R}^n . Ainsi, les fonctions polynomiales sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n .

! Attention. La condition \mathcal{C}^1 est une condition plus restrictive que la simple existence des dérivées partielles.

PROPOSITIONlinéarité, produit et quotient de fonctions \mathcal{C}^1

Soient f, g deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n . Alors :

- Pour tout réel λ , λf est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n .
- La somme $f + g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n .
- Le produit $f \cdot g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n .
- Si de plus, la fonction g ne s'annule pas sur \mathbb{R}^n , alors f/g est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n .

Résultat admis.

Exemple. Toute fonction rationnelle définie sur \mathbb{R}^n est de classe \mathcal{C}^1 . Pour rappel, une fonction est dite rationnelle si elle peut s'écrire comme le quotient de deux fonctions polynomiales.

PROPOSITIONcomposition de fonctions \mathcal{C}^1

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une partie I de \mathbb{R} et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si** | \rightarrow Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in I$.
 \rightarrow La fonction de plusieurs variables f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n .
 \rightarrow La fonction d'une variable φ est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Alors la composée $\varphi \circ f$ est bien définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n .

Résultat admis.

Exemple. Justifions que $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \ln(1 + x^2 + y^2)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

\rightarrow Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1 + x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_*^+$.

\rightarrow $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + x^2 + y^2$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 en tant que fonction polynomiale.

\rightarrow La fonction logarithme $\ln : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_*^+ .

Par composition, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

De plus, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x$ est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Par produit, la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

3.2 Développement limité d'ordre 1

Rappelons la définition de la norme euclidienne et du produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

$$\forall x = (x_i) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_i) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Dans la suite, pour une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la notation $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ signifie que ε est continue en $0_{\mathbb{R}^n}$ avec $\varepsilon(0_{\mathbb{R}^n}) = 0$. C'est-à-dire

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_*^+, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\|h\| \leq \alpha \Rightarrow \|\varepsilon(h)\| \leq \eta \right).$$

Donnons maintenant la généralisation du développement limité aux fonctions de plusieurs variables.

THÉORÈME

développement limité d'ordre 1

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n .

Alors pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, f admet en a un **unique développement limité à l'ordre 1**.

C'est-à-dire, il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour $h \in \mathbb{R}^n$,

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Exercice 2



Donner le développement limité de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \ln(1 + x^2 + y^2)$ en $(2, 1)$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$ en tout point $a \in \mathbb{R}^n$. p. 17

Remarques.

- On peut reformuler :
 → Avec les dérivées partielles :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^n \partial_k f(a) \cdot h_k + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{où} \quad \begin{cases} h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \\ \nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)). \end{cases}$$

→ Avec le changement de variable $x = a + h$: $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n (x_k - a_k) \partial_k f(a) + \|x - a\| \varepsilon(x - a)$.

- L'existence de dérivées partielles ne suffit pas à assurer l'existence d'un développement limité. On peut montrer qu'elle n'assure même pas la continuité de l'application.

Exercice 3



◆◆ **Preuve de l'unicité du développement limité**

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une forme linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

p. 17

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $L(x) = \langle \nabla f(a), x \rangle$.

Application. Par les opérations élémentaires sur les fonctions continues, le développement limité permet de justifier que toute fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n est continue sur \mathbb{R}^n .

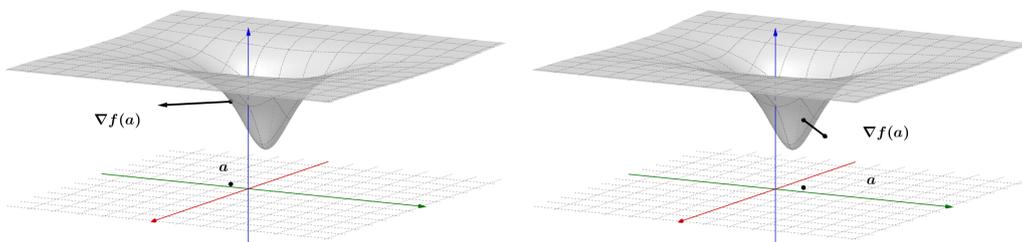
3.3 Interprétations géométriques

Le gradient donne la direction de plus grande pente

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Supposons de plus que $\nabla f(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. D'après le développement limité d'ordre 1, $f(a+h) - f(a) \simeq \langle \nabla f(a), h \rangle$ lorsque h est « proche » de 0. Or, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\langle \nabla f(a), h \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \cdot \|h\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs h et $\nabla f(a)$ sont colinéaires. Autrement dit, la variation $|f(a+h) - f(a)|$ est « localement » maximale lorsque le vecteur h est colinéaire au gradient $\nabla f(a)$. On dit que $\nabla f(a)$ donne la direction de plus grande pente (et dirigé dans le sens des pentes croissantes).



Le plan tangent

Si f admet un gradient en $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, les dérivées partielles existent et l'application

$$T : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) (x_i - a_i)$$

est une fonction affine. Le graphe associé est alors un hyperplan affine (ou simplement un plan pour $n = 2$) qui passe par le point $(a, f(a))$. Le développement limité s'écrit alors

$$\underbrace{f(x)}_{\text{"surface"}} = \underbrace{T(x-a)}_{\text{"hyperplan"}} + \underbrace{\|x-a\| \cdot \varepsilon(x-a)}_{\text{"terme d'erreur"}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x-a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

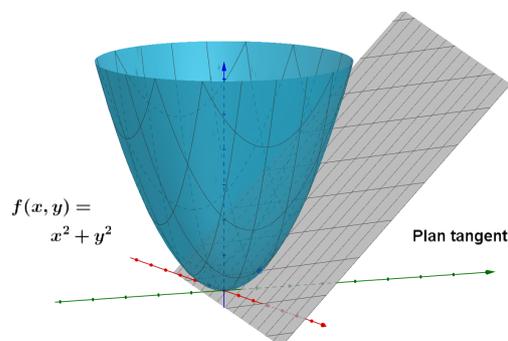
Plus x se rapproche du point a , plus l'hyperplan affine épouse la forme de la surface de f . On peut montrer que T donne la « meilleure approximation affine » de f au voisinage de a .

Exemple. Illustrons la situation avec la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $a = (0.1, 0.5)$. L'équation du plan affine est

$$z = f(a) + \partial_1 f(a)(x - 0.1) + \partial_2 f(a)(y - 0.5).$$

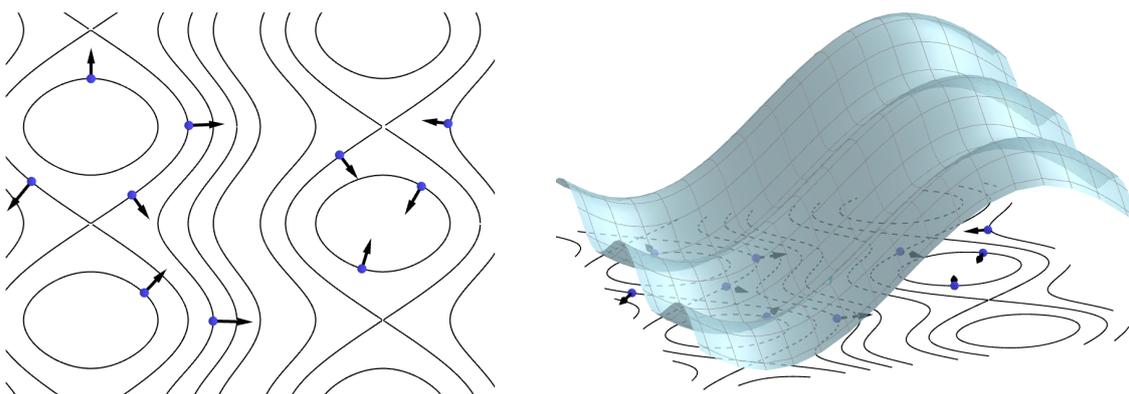
À l'instar de la droite tangente pour une fonction d'une variable réelle, on obtient ici un plan tangent à la surface.

Notons aussi que le gradient est nul si et seulement si le plan est horizontal.



Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau

Commençons par un exemple. On a tracé ci-dessous quelques lignes de niveau de la fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 4 \sin(x/3) + \cos(y) + 5$ ainsi que quelques gradients $\nabla f(a)$ pour différentes valeurs de a .



On constate que le gradient $\nabla f(a)$ est systématiquement orthogonal à la tangente à la ligne de niveau en a .

Prouvons le cas général.

Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On pose

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)). \end{cases}$$

Comme γ_1 et γ_2 sont de classe \mathcal{C}^1 , on dit que γ est de classe \mathcal{C}^1 , et on pose $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2)$. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 4

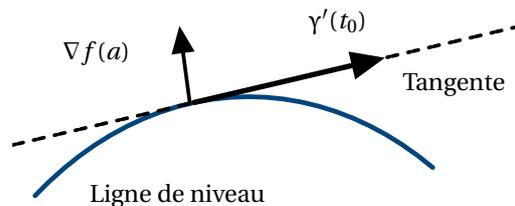


◆◆◆ Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $a = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^2$. Dans la suite o_{t_0} désigne une fonction continue en 0 et de limite nulle en 0.

1. Montrer que $\gamma(t) - \gamma(t_0) = (t - t_0)\gamma'(t_0) + o_{t_0}(t - t_0)$.
2. Démontrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $f(\gamma(t)) = f(a) + \langle \nabla f(a), \gamma'(t_0) \rangle (t - t_0) + o_{t_0}(t - t_0)$ et en déduire que $(f \circ \gamma)'(t_0) = \langle \nabla f(a), \gamma'(t_0) \rangle$.
3. Posons $K = f(a)$ de sorte que $a \in \mathcal{L}_K = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = K\}$. On suppose de plus que γ est à valeurs dans \mathcal{L}_K , c'est-à-dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \in \mathcal{L}_K$. Montrer que

$$\nabla f(a) \perp \gamma'(t_0).$$

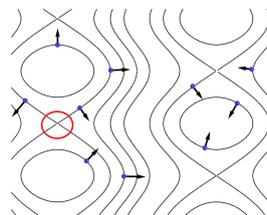
Comme γ est à valeurs dans \mathcal{L}_K , le vecteur $\gamma'(t_0)$ est un vecteur tangent à la ligne de niveau \mathcal{L}_K . On montre donc ici que le gradient de f en a est orthogonal à tout vecteur tangent (en a) à \mathcal{L}_K .



Exercice 5



◆ Que dire du gradient au niveau d'un croisement?



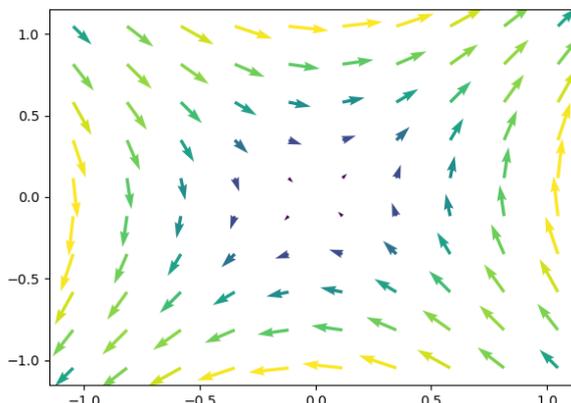
p. 18

Tracé des vecteurs gradients avec Python

Pour le tracé de champs de vecteurs, on peut utiliser la commande `quiver`.

Editeur

```
x = np.linspace(-np.pi/3, np.pi/3, 10)
y = np.linspace(-np.pi/3, np.pi/3, 10)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = np.sin(X*Y)
dx = Y*np.cos(X*Y)
# expression de la première dérivée partielle
dy = X*np.cos(X*Y)
# expression de la seconde
color_array = np.sqrt((dx)**2+(dy)**2)
# Pour que la couleur dépende
# de la norme du gradient
fig, ax = plt.subplots(figsize=(7,7))
ax.quiver(X,Y,dx,dy,color_array)
plt.show()
```

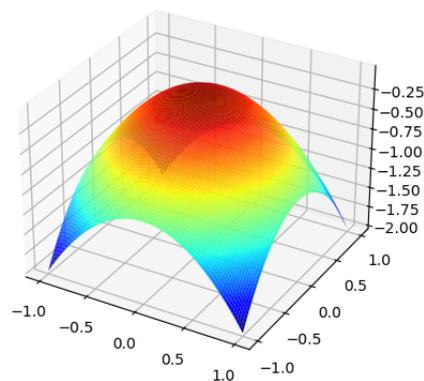
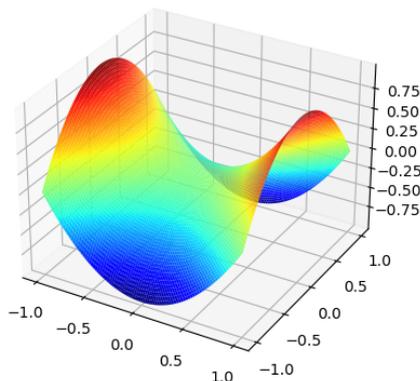
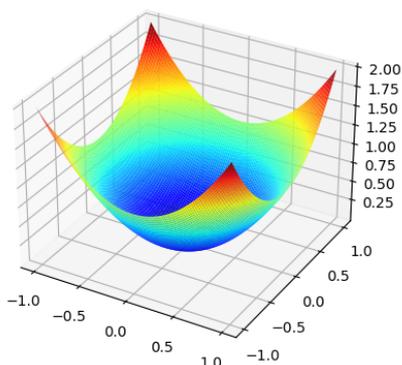


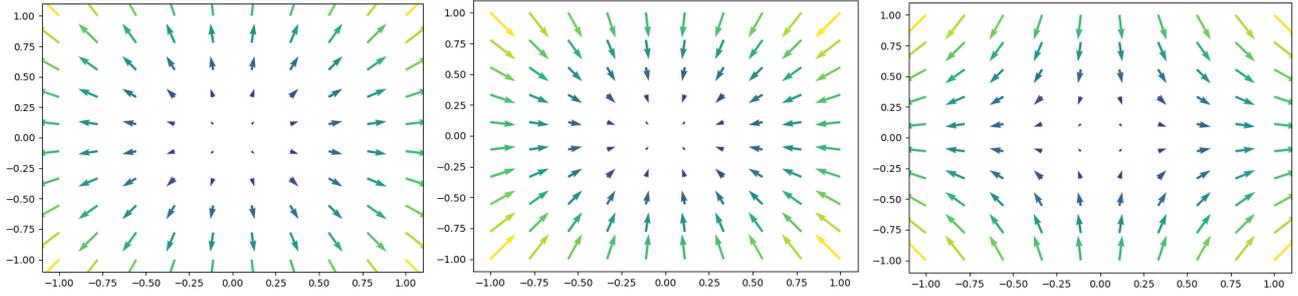
Exercice 6



◆ Associer à chaque surface ci-dessous, la représentation des gradients.

p. 18

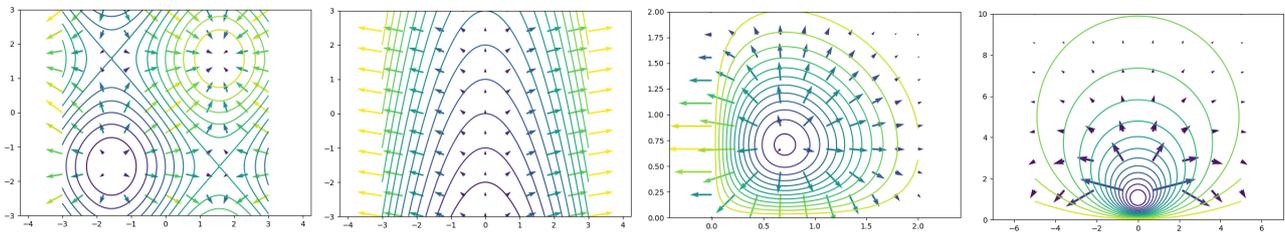




Remarque. En rajoutant, les lignes de niveaux, on peut de nouveau vérifier l'orthogonalité du gradient avec les lignes de niveau. Voici une succession d'exemples avec les fonctions. (Attention, il faut bien rendre les axes orthonormés).

- $f(x, y) = 4 \sin(x) + 3 \sin(y)$ sur $[-3; 3]^2$.
- $f(x, y) = x^2 + y$ sur $[-3; 3]^2$.

- $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$ sur $[0; 2]^2$.
- $f(x, y) = -\frac{3 \cdot y}{1+x^2+y^2}$ sur $[-5, 5] \times [0; 10]$.



3.4 Dérivées directionnelles

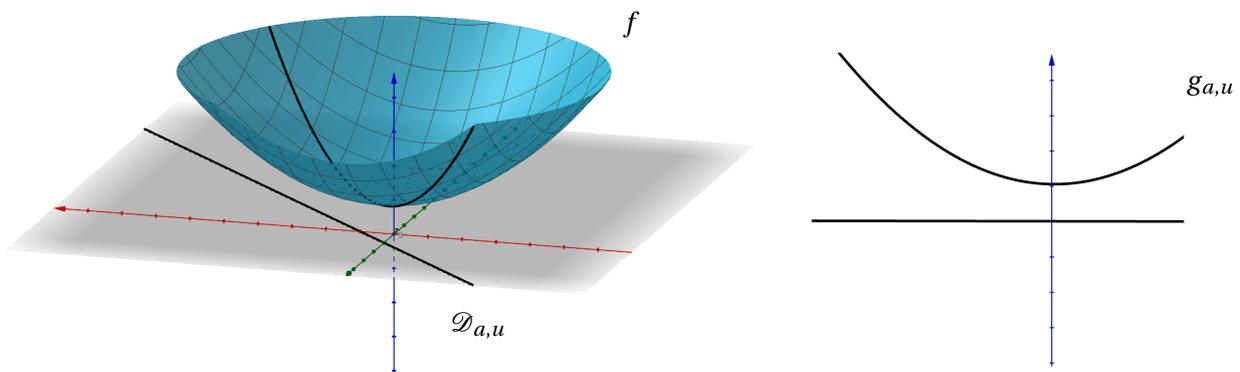
Soient $a, u \in \mathbb{R}^n$, avec u non nul. La droite affine passant par a et de direction u est l'ensemble

$$\mathcal{D}_{a,u} = \{a + t \cdot u \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Afin de ramener le problème à une fonction d'une seule variable, on peut restreindre l'étude de la fonction f à la droite $\mathcal{D}_{a,u}$. On pose donc

$$g_{a,u}: t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + t \cdot u) \in \mathbb{R}.$$

Ci-dessous, un exemple de surface représentative d'une fonction de deux variables et une partie de la courbe d'une fonction $g_{a,u}$ à droite.



THÉORÈME

gradient et dérivée directionnelle

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et $a, u \in \mathbb{R}^n$ avec u , non nul. Alors la fonction

$$g_{a,u} : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + t \cdot u) \in \mathbb{R}$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'_{a,u}(t) = \langle \nabla f(a + tu), u \rangle.$$

En particulier

$$g'_{a,u}(0) = \langle u, \nabla f(a) \rangle = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i f(a).$$

Preuve. Soit $t \in \mathbb{R}$, justifions la dérivabilité de $g_{a,u}$ en t en revenant à la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement. Soit $s \in \mathbb{R}$ avec $s \neq t$.

$$\begin{aligned} \frac{g(s) - g(t)}{s - t} &= \frac{f(a + su) - f(a + tu)}{s - t} \\ &= \frac{f(a + tu + h) - f(a + tu)}{s - t} && \text{où on pose } h = (s - t) \cdot u \\ &= \frac{\langle h, \nabla f(a + tu) \rangle + \|h\| \varepsilon(h)}{s - t} && \text{par le développement limité de } f. \end{aligned}$$

Or $\|h\| = |s - t| \cdot \|u\|$, et $\frac{h}{s - t} = u$. Pour $s > t$

$$\frac{g(s) - g(t)}{s - t} = \langle u, \nabla f(a + tu) \rangle + \|u\| \varepsilon(h).$$

Lorsque $s \rightarrow t^+$, $h \rightarrow 0$ et $\|u\| \varepsilon(h) \rightarrow 0$. Ainsi

$$\frac{g(s) - g(t)}{s - t} \xrightarrow{s \rightarrow t^+} \langle u, \nabla f(a + tu) \rangle.$$

Il en va de même pour $s < t$. Finalement, $g_{a,u}$ est dérivable en t avec $g'_{a,u}(t) = \langle u, \nabla f(a + tu) \rangle$. À partir de cette expression, on justifie le caractère \mathcal{C}^1 de $g_{a,u}$ par les opérations élémentaires.

La dernière égalité s'obtient dans le cas $t = 0$. ■

Remarques.

- Si on précise les dérivées partielles, on obtient

$$g'_{a,u}(t) = \sum_{i=1}^n u_i \partial_i f(a + tu) \quad \text{où } u = (u_1, \dots, u_n).$$

- Lorsque u est de norme 1, $g'_{a,u}(0)$ représente **la dérivée directionnelle de f au point a** dans la direction (et de sens) de u .
- Lorsqu'on considère un vecteur $u = e_k$ de la base canonique de \mathbb{R}^n (et $t = 0$), on retrouve l'expression de la k -ième dérivée partielle $\partial_k f(a)$. En effet :

$$g'_{a,e_k}(0) = \langle e_k, \nabla f(a) \rangle = \partial_k f(a).$$

4

Optimisation : condition d'ordre 1

La théorie économique classique fait l'hypothèse fondamentale que les agents économiques (les producteurs, les investisseurs, les consommateurs..) ont un comportement rationnel. En pratique, cela signifie que les agents cherchent à maximiser/minimiser certaines fonctions de plusieurs variables (les coûts de productions, les risques, l'utilité d'un produit..).

L'enjeu est double, justifier que de tels extrema existent et surtout les calculer.

4.1 Extrema locaux

DÉFINITION

extrema locaux

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

→ On dit que f a un **maximum local** en a s'il existe $r \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (\|x - a\| < r \Rightarrow f(a) \geq f(x)).$$

→ On dit que f a un **minimum local** en a s'il existe $r \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (\|x - a\| < r \Rightarrow f(a) \leq f(x)).$$

→ On dit que f a un **extremum local** si f a un maximum local ou un minimum local.

Remarque. En pratique, pour étudier un extremum, on regardera le signe de $f(x) - f(a)$.

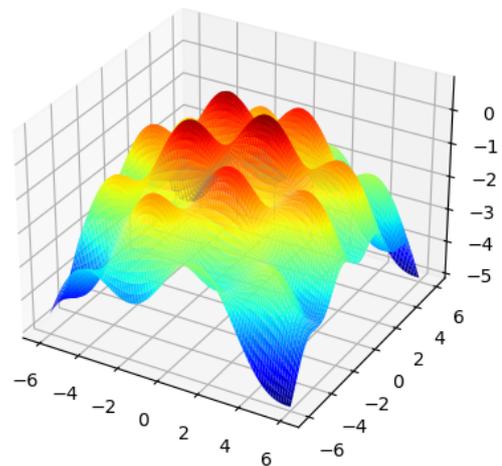
Exemple. Ci-dessous, un exemple de fonction avec une multitude d'extrema locaux qui ne sont pas tous globaux.

Editeur

```
def f(x, y):
    z=np.sin(x)*np.cos(2*y) -(x**2+y**2)/15
    return z

x = np.linspace(-6, 6, 100)
y = np.linspace(-6, 6, 100)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = f(X,Y)

fig = plt.figure()
ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1,
               cstride=1, cmap='jet', edgecolor='none')
```



4.2 Point critique et condition nécessaire d'extremum

DÉFINITION

point critique

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et $a \in \mathbb{R}^n$.

On dit que a est un **point critique** de f si $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Autrement dit,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \partial_i f(a) = 0.$$

Exercice 7



Les questions sont indépendantes.

1. Calculer les points critiques des fonctions suivantes.

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y \quad \text{et} \quad g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

2. Justifier que la fonction h définie sur \mathbb{R}^2 par $h(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x)$ admet un unique point critique. p. 18

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur \mathbb{R}^n , $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k$.

Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et calculer son unique point critique.

Exercice 8

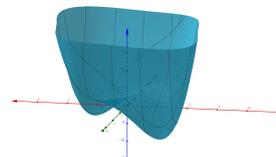
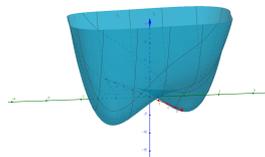
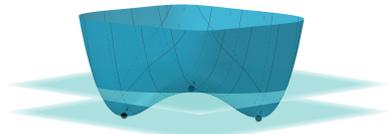
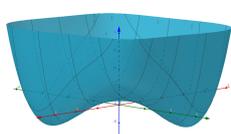


À l'aide des différentes vues de la surface, conjecturer le nombre de points critiques de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

p. 19

Prouver votre conjecture.



THÉORÈME

condition nécessaire d'extremum

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et $a \in \mathbb{R}^n$.

Si f a un extremum en $a \in \mathbb{R}^n$,

alors a est un point critique de f .

Preuve. Raisonnons par contraposée en supposant $\nabla f(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ (c'est-à-dire $\|\nabla f(a)\| \neq 0$). D'après le développement limité d'ordre 1 en a , pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) - f(a) = \langle \nabla f(a), h \rangle + \|h\| \cdot \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

En particulier, pour $h = \lambda \nabla f(a)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient

$$f(a+h) - f(a) = \lambda \|\nabla f(a)\|^2 + |\lambda| \varepsilon(\lambda h) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \lambda \|\nabla f(a)\|^2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda \|\nabla f(a)\|^2 > 0 & \text{si } \lambda > 0 \\ \lambda \|\nabla f(a)\|^2 < 0 & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

La quantité $f(a+h) - f(a)$ change de signe au voisinage de a et f ne peut avoir d'extremum en a .

L'exercice suivant propose une autre démonstration via les dérivées directionnelles.

Exercice 9



Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n admettant un maximum en $a \in \mathbb{R}^n$.

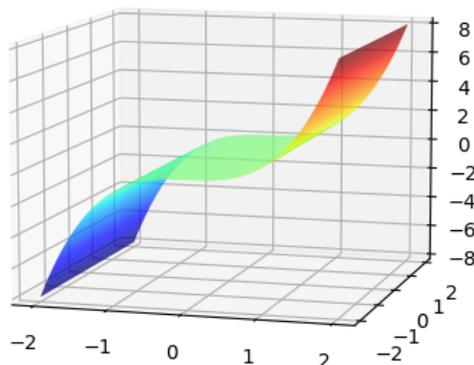
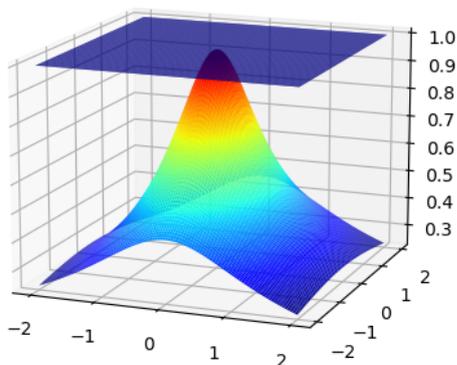
1. Soit u un vecteur de \mathbb{R}^n non nul. En utilisant la fonction $g_{a,u} : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a+tu)$, montrer que $\langle \nabla f(a), u \rangle = 0$.
2. Conclure que a est un point critique de f .

p. 19



Attention. La réciproque est fautive.

Ci-dessous, deux exemples de surfaces de fonctions de deux variables admettant un point critique en $(0, 0)$. Mais dans le second cas, il n'existe pas d'extremum en $(0, 0)$.



Vocabulaire. Un point critique qui ne correspond pas à un extremum est un **point selle** ou **point col**.

Recherche d'extrema d'une fonction de plusieurs variables

Étudions la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = x^2 - 3x + xy + y^2$.

→ *Calcul des dérivées partielles.*

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 car polynomiale avec pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\partial_1 f(x, y) = 2x - 3 + y \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = x + 2y.$$

→ *Recherche du ou des points critiques.*

Si f possède un extremum local en (x, y) , alors $\partial_1 f(x, y) = \partial_2 f(x, y) = 0$, donc $2x + y = 3$ et $x + 2y = 0$. On obtient un unique point critique avec $a = (2, -1)$.

→ *Vérification sur chaque point critique.*

On étudie le signe de la différence $f(x, y) - f(a)$ pour déterminer si le point critique a donnera un extremum.

Par un changement de variable, c'est équivalent à étudier $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a)$ pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(2 + h_1, -1 + h_2) - f(2, -1) &= (2 + h_1)^2 - 3(2 + h_1) + (2 + h_1)(-1 + h_2) + (-1 + h_2)^2 + 3 \\ &= h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2 = \left(h_1 + \frac{h_2}{2}\right)^2 + \frac{3h_2^2}{4} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc f possède un minimum global atteint en $(2, -1)$. Il vaut $f(2, -1) = -3$.

Exercice 10

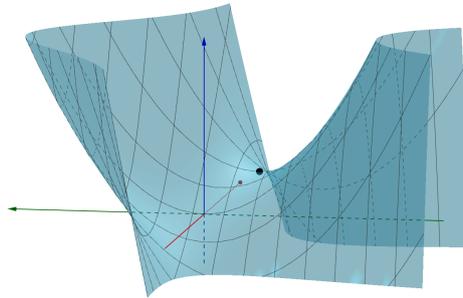


◆ En reprenant la méthode précédente, déterminer les extrema de f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = x^2 y + y^2 + x.$$

p. 19

Vérifier la cohérence du résultat avec la surface représentative de f .





Exercices



On limite les exercices aux fonctions de classe \mathcal{C}^1 définies sur \mathbb{R}^n . Le cas des fonctions de classe \mathcal{C}^2 ou définies sur une partie de \mathbb{R}^n sera étudié au second semestre.

Dérivées partielles premières

Exercice 11. ♦ Calculer les dérivées partielles de f définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x, y) = \int_{y^2}^{y^2+x^2} \cos(u^2) \, du.$$

>> Solution p. 19

Exercice 12. ♦ Déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1 f(x, y) = 4x^3 y + 3y + 1 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x, y) = x^4 + 3x.$$

>> Solution p. 20

Exercice 13. ♦♦♦ Dérivation composée

1. Préliminaires

Soient f une fonction définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, n fonctions définies et de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} . On définit la fonction g par :

$$\forall t \in I, \quad g(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

Montrer que la fonction g est également de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i'(t) \partial_i f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

2. Application 1

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla f(x, y) = (x, y).$$

Démontrer que tous les points $(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$ avec $t \in \mathbb{R}$ appartiennent tous à la même ligne de niveau de f .

3. Application 2 : les fonctions homogènes

On dit qu'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y).$$

a) Soit f une fonction homogène.

- i) Montrer que les dérivées partielles d'une fonction homogène de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 sont aussi homogènes.
- ii) Justifier que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \partial_1 f(x, y) + y \partial_2 f(x, y) = \alpha f(x, y) \quad (\bullet)$$

b) On suppose réciproquement que f vérifie (\bullet) .

- i) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $\varphi: t \mapsto f(tx, ty)$ vérifie l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \quad \varphi'(t) = \frac{\alpha}{t} \varphi(t).$$

- ii) En étudiant la fonction $h: t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \varphi(t) t^{-\alpha}$, en déduire que f est homogène de degré α .

>> Solution p. 20

Exercice 14. ♦♦♦ Inégalité des accroissements finis et suite du type $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$

On considère une application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . On suppose qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\partial_1 f(x, y)| + |\partial_2 f(x, y)| \leq k.$$

1. Soient $a = (x, y), b = (x', y') \in \mathbb{R}^2$. On pose $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + t(b - a))$.

- a) Préciser $g(0)$ et $g(1)$. Justifier que g est de classe \mathcal{C}^1 et préciser sa dérivée.
- b) En déduire que

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leq k \max(|x - x'|, |y - y'|).$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|)$.

- a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} \leq k a_n$.
 - b) En déduire l'existence d'une constante c telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c k^{n/2}$.
 - c) Conclure en prouvant la convergence de la série $\sum u_{n+1} - u_n$, puis de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
En passant à la limite dans la relation de récurrence, on montre que la limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell, \ell)$.
3. Justifier que la convergence ne dépend pas du choix des conditions initiales u_0 et u_1 .
4. *Python*. On définit la suite u par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 1 + \frac{1}{4} \sin(u_n + u_{n+1}).$$

- a) Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie u_n .
- b) Vérifier que la suite u converge vers une limite finie ℓ .
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq (1/\sqrt{2})^n$.
- c) En déduire un programme pour obtenir une approximation de la limite à 10^{-3} près.

>> Solution p. 20

Exercice 15. ♦♦ Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 et $a, b \in \mathbb{R}^n$.

1. ☞ Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(b) - f(a) = \langle b - a, \nabla f(c) \rangle.$$

2. On considère dans cette question la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|x\|^2$. Déterminer une valeur de c en fonction de a et b .

>> Solution p. 21

Points critiques et optimisation

Exercice 16. ♦ Recherche d'un minimum

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z^2) e^{x(y^2 + z^2 + 1)}.$$

- 1. a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 .
- b) Vérifier que f possède un unique point critique, noté $a \in \mathbb{R}^3$. Calculer $f(a)$.
- 2. a) Montrer que si $x \geq 0$, alors $f(x, y, z) \geq 0$, et que si $x \leq 0$, alors $f(x, y, z) \geq x e^x$.
- b) Déterminer le minimum de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x e^x$, et en déduire que f atteint son minimum en A .

>> Solution p. 22

Exercice 17. ♦♦ Une infinité de points critiques!

D'après oral ESCP

Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (2x - y)^2 e^{2x - y}.$$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et vérifier que

$$\forall a \in \mathbb{R}^2, \quad \partial_1 f(a) + 2\partial_2 f(a) = 0.$$

2. Montrer que f possède une infinité de points critiques. Trouver ceux en lesquels f admet un extremum local ou global.

>> Solution p. 22

Exercice 18. ♦♦♦ Mélange avec des probabilités

D'après oral ESCP

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont à densité et définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Sous réserve d'existence, on note $\mathbf{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X .

Dans tout l'exercice, X, Y et Z sont trois variables aléatoires ayant des moments d'ordre 2. On admet que chacune des variables aléatoires XY, XZ et YZ admet une espérance et on suppose que la condition suivante est vérifiée : $\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) - (\mathbf{E}(XY))^2 \neq 0$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $f(x, y) = \mathbf{E}((Z - xX - yY)^2)$.

- Quelle est, selon les valeurs des réels a, b, c et d , le rang de la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$?
- Établir les inégalités strictes : $\mathbf{E}(X^2) > 0$ et $\mathbf{E}(Y^2) > 0$.
 - Montrer que pour tout couple $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, on a : $\mathbf{E}((xX + yY)^2) > 0$.
- Montrer que la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et qu'elle admet un unique point critique (x_0, y_0) .
 - Montrer que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathbf{E}((Z - x_0X - y_0Y)(xX + yY)) = 0.$$

- En déduire l'égalité :

$$f(x, y) = \mathbf{E}\left((Z - x_0X - y_0Y)^2\right) + \mathbf{E}\left([(x - x_0)X - (y_0 - y)Y]^2\right)$$

- Étudier les extrema de f .

- Dans cette question, on suppose que X et Y sont indépendantes et suivent toutes les deux la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et on pose : $Z = X^2$. Déterminer l'ensemble des couples (x_0, y_0) pour lesquels $\mathbf{E}((Z - xX - yY)^2)$ est minimale.

>> Solution p. 23

Exercice 19. ♦♦♦ Fonctions convexes sur \mathbb{R}^n

D'après oral ESCP 2001

On munit \mathbb{R}^2 du produit scalaire canonique. Soit f une application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

- Soient $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et l'application $\varphi_{x,y}$ définie sur \mathbb{R} par $\varphi_{x,y}(t) = f(x + t(y - x))$. Justifier que $\varphi_{x,y}$ est de classe \mathcal{C}^1 et rappeler une expression de sa dérivée.
- On suppose que f est convexe sur \mathbb{R}^2 . C'est-à-dire

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

- Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_{x,y}$ est une fonction convexe (d'une seule variable). Que dire sur les variations de la fonction $\varphi'_{x,y}$?
- En déduire que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad (\bullet)$$

- Réciproquement, on suppose que f vérifie la relation (\bullet) ci-dessus. Montrer que f est convexe.
- On suppose que f est convexe sur \mathbb{R}^2 .
 - Montrer que si f présente en $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un minimum relatif, alors f présente en x_0 un minimum global.
 - Montrer que si l'ensemble des points où f admet un minimum, noté \mathcal{A} , est non vide, alors cet ensemble est une partie convexe de \mathbb{R}^2 . C'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{A}.$$

>> Solution p. 24

Exercice 20. ♦♦♦ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On se place dans \mathbb{R}^n munit de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient u, v deux vecteurs non colinéaires de \mathbb{R}^n et f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \langle x, u \rangle^2 + \langle x, v \rangle^2$$

- Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^1 et vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(a) = 2 \langle a, u \rangle u + 2 \langle a, v \rangle v$.
- En déduire les points critiques de f .
- Étudier les extrema de f .

>> Solution p. 25

Exercice 21. ♦♦♦ Soient $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et f la fonction définie sur \mathbb{R}^n par :

$$f(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|x\|^2 + \|u\|^2}.$$

- Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n puis déterminer une fonction g définie sur \mathbb{R}^n telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) = g(x)(u - 2f(x)x).$$

- Justifier que f a exactement deux points critiques.
- Préciser les éventuels extrema de f .

» Solution p. 25

Exercice 22. ♦♦

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^3 . On pose pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Soit $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ fixé, on définit

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(t - y_0, y_0 - z_0, z_0 - t). \end{cases}$$

1. À l'aide du théorème des dérivées directionnelles, justifier la dérivabilité de φ et préciser $\varphi'(x_0)$.
2. Que peut-on en déduire sur $\partial_1 F$?
3. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\partial_1 F(x, y, z) + \partial_2 F(x, y, z) + \partial_3 F(x, y, z) = 0.$$

» Solution p. 26

Exercice 23. ♦ Un exemple dans \mathbb{R}^n

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On pose

$$f : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

Vérifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n et admet un unique point critique.

» Solution p. 26