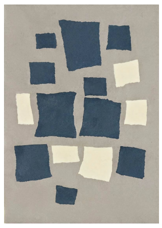
CHAPITRE 12

Vecteurs aléatoires

Le hasard est ma matière première.

JEAN ARP (1886-1966)
Co-fondateur du mouvement Dada.

Ci-contre : "Collage avec des carrés disposés selon les lois du hasard".



1 Rappels : couples de variables aléatoires discrètes

1.1 Lois, lois marginales et indépendance

DÉFINITION **loi d'un couple**

La loi conjointe *d'un couple* (X,Y) *de variables aléatoires discrètes, c'est la donnée de la valeur de* $\mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$ *pour tout couple* $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

DÉFINITION **indépendance, cas discret**

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires discrètes. On dit que* X *et* Y *sont* ***indépendantes*** *si*

$$\forall (x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\qquad \mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big) \;=\; \mathbf{P}(X=x)\cdot\mathbf{P}(Y=y).$$

Remarque. Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales**. Elles s'obtiennent à partir de la loi du couple en utilisant la formule des probabilités totales avec les systèmes complet d'événements $\big([Y=y]\big)_{y\in Y(\Omega)}$ et $\big([X=x]\big)_{x\in X(\Omega)}$

$$\forall x\in X(\Omega),\qquad \mathbf{P}(X=x) \;=\; \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$$

$$\forall y\in Y(\Omega),\qquad \mathbf{P}(Y=y) \;=\; \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)$$

⚠ **Attention.** Les lois marginales de X et Y ne permettent pas de retrouver la loi du couple.
Par exemple, soient X et Y deux variables de Bernoulli de paramètre $1/2$. Dans les trois cas suivants, les lois marginales sont identiques alors que les lois de couples diffèrent.

- X et Y indépendantes.
- $Y = X$.
- $Y = 1 - X$.

Par contre si X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X, Y) est connue.

PROPOSITION — **loi d'une fonction, cas général**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, et soit g une fonction à valeurs réelles définie sur le sous-ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$. Notons Z la variable aléatoire $g(X, Y)$. Alors, pour tout élément k de $Z(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(Z = k) = \sum_{\substack{i \in X(\Omega),\ j \in Y(\Omega) \\ g(i,j) = k}} \mathbf{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big),$$

où la somme porte sur le sous-ensemble de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ constitué par les couples (i, j) tels que $g(i, j) = k$.

Résultat admis.

1.2 Calculs d'espérance

Sans hypothèses particulières, l'espérance d'une fonction de deux variables aléatoires s'obtient à l'aide du théorème de transfert. La loi conjointe des deux variables permet le calcul, lorsqu'elle existe de l'espérance de $g(X, Y)$ sans nécessité de calculer la loi de la fonction associée.

THÉORÈME — **de transfert pour un couple de variables**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, et soit g une fonction à valeurs réelles définie sur le sous-ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ de $\mathbb{R}^2$. Sous réserve de convergence absolue,

$$\mathbf{E}\big(g(X, Y)\big) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} g(x, y) \cdot \mathbf{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big).$$

Résultat admis.

Remarque. C'est l'hypothèse de convergence absolue qui assure que la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre de ses termes.

Voici deux applications de ce théorème, dans le cas d'une combinaison linéaire d'une part, et dans le cas d'un produit de deux variables indépendantes d'autre part.

COROLLAIRE — **linéarité de l'espérance**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et λ et μ deux réels.

Si X *et* Y *admettent une espérance,*

alors *alors* $\lambda X + \mu Y$ *admet une espérance et* $\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y)$.

Corollaire — **espérance d'un produit de variables indépendantes**

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires.*

Si X *et* Y
- *admettent une espérance et*
- *sont indépendantes,*

alors $X\cdot Y$ *admet une espérance et* $\mathbf{E}(X\cdot Y)=\mathbf{E}(X)\cdot\mathbf{E}(Y)$.

Exercice 1

✧ Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $X(\Omega)=\{-1;0;1\}$. Notons $Y=X^2$.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y). En déduire la loi de Y.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Comparer $\mathbf{E}(X\cdot Y)$ et $\mathbf{E}(X)\cdot\mathbf{E}(Y)$. Commenter.

p. 20

1.3 Loi d'une somme, exemples

Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires. Donnons la loi de la somme $Z=X+Y$. On a

$$Z(\Omega)=\left\{x+y\,|\,(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\right\}.$$

Pour tout $z\in Z(\Omega)$.

$$\mathbf{P}(Z=z)=\sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ x+y=z}}\mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=y]\big)=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ z-x\in Y(\Omega)}}\mathbf{P}\big([X=x]\cap[Y=z-x]\big).$$

Si les variables X et Y sont indépendantes, alors la loi de Z est donnée par la formule du **produit de convolution discret**. Pour tout $z\in Z(\Omega)$:

$$\mathbf{P}(Z=z)=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ z-x\in Y(\Omega)}}\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=z-x).$$

Dans le cas particulier où les variables X et Y sont supposées indépendantes, de loi binomiale ou de Poisson, et où la fonction g est simplement l'addition, la loi de $g(X,Y)$ est en fait totalement connue :

Proposition — **somme de lois binomiales**

Soient $m,\,n\in\mathbb{N}^*$, $p\in[0;1]$ *et* $X_1,X_2:\Omega\to\mathbb{R}$ *deux variables aléatoires.*

Si
- X_1 *et* X_2 *sont indépendantes.*
- $X_1\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$ *et* $X_2\hookrightarrow\mathscr{B}(m,p)$.

Alors $X_1+X_2\hookrightarrow\mathscr{B}(n+m,p)$.

Preuve. • *Preuve par le calcul.*

Comme $X_1(\Omega)=[\![0;n]\!]$, $X_2(\Omega)=[\![0;m]\!]$, on a bien $(X_1+X_2)(\Omega)=[\![0;n+m]\!]$.

Soit $k\in[\![0;n+m]\!]$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements formé par $\big([X_2=\ell]\big)_{\ell\in[\![0;m]\!]}$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big([X_1+X_2=k]\big)&=\sum_{\ell=0}^{m}\mathbf{P}\big([X_1+X_2=k]\cap[X_2=\ell]\big)=\sum_{\ell=0}^{m}\mathbf{P}\big([X_1=k-\ell]\cap[X_2=\ell]\big)\\&=\sum_{\ell=0}^{m}\mathbf{P}\big([X_1=k-\ell]\big)\mathbf{P}\big([X_2=\ell]\big)\quad\text{par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2\\&=\sum_{\ell=0}^{m}\binom{n}{k-\ell}\binom{m}{\ell}p^{k-\ell}q^{n-k-\ell}p^{m-\ell}=p^kq^{m+n-k}\sum_{\ell=0}^{m}\binom{n}{k-\ell}\binom{m}{\ell}\end{aligned}$$

$$\mathbf{P}\big([X_1+X_2=k]\big)=p^kq^{m+n-k}\binom{m+n}{k}.$$

La dernière égalité est une conséquence de la formule de Vandermonde.

• *Seconde preuve.*
Considérons $n+m$ répétitions d'une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p. On suppose que les expériences sont mutuellement indépendantes. Notons :

- Y_1 : Le nombre de succès parmi les n premières expériences.
- Y_2 : le nombre de succès parmi les m dernières expériences.

Par construction

$$Y_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p) \quad \text{et} \quad Y_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p).$$

La variable Y_1+Y_2 compte le nombre de succès parmi les $n+m$ expériences. On a bien

$$Y_1+Y_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p).$$

Or, Y_1 (respectivement Y_2) a la même loi que X_1 (resp. X_2) et X_1+X_2 a la même loi que Y_1+Y_2, ce qui conclut.

Remarque. On pourra donner une troisième preuve à l'aide des fonctions génératrices.

PROPOSITION — somme de lois de Poisson

Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{R}_*^+$ *et* $X_1,X_2:\Omega\to\mathbb{R}$ *deux variables aléatoires.*

Si
- X_1 *et* X_2 *sont indépendantes.*
- $X_1\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda)$ *et* $X_2\hookrightarrow\mathscr{P}(\mu)$.

Alors

$$X_1+X_2\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda+\mu).$$

Preuve. Tout d'abord, $(X_1+X_2)(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}([X_1+X_2=k]) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbf{P}([X_1+X_2=k]\cap[X_2=\ell]) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbf{P}([X_1=k-\ell]\cap[X_2=\ell])\\
&= \sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbf{P}([X_1=k-\ell])\cdot\mathbf{P}([X_2=\ell]) = \sum_{\ell=0}^{\mathbf{k}}\mathbf{P}([X_1=k-\ell])\cdot\mathbf{P}([X_2=\ell])\\
&= \sum_{\ell=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-\ell}}{(k-\ell)!}\cdot e^{-\mu}\frac{\mu^{\ell}}{\ell!} = e^{-(\lambda+\mu)}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{\lambda^{k-\ell}\cdot\mu^{\ell}}{k-\ell)!\ell!}\\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\lambda^{k-\ell}\mu^{\ell} \qquad \text{d'après la formule du binôme}\\
\mathbf{P}([X_1+X_2=k]) &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k.
\end{aligned}$$

On a bien $X_1+X_2\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

Remarque. Par récurrence, ces résultats s'étendent pour des sommes de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1.4 Loi du maximum, du minimum

Pour déterminer la loi de $\max(X,Y)$, on passe par la fonction de répartition.

Pour la loi du $T = \min(X, Y)$, on passe par la fonction d'anti-répartition ($x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{P}(T > x)$).

Exercice 2

✦ ✎ **Un exemple**
Soient p et p' deux réels de $]0;1[$ et X et X′ deux v.a indépendantes. On suppose de plus que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $X' \hookrightarrow \mathscr{G}(p')$.

1. Donner la loi de la variable aléatoire $T = \min(X, X')$.
2. Calculer $\mathbf{P}([X \geqslant X'])$.
3. Comment interpréter les résultats précédents en termes de lancer de pièces ?

p. 20

2 Généralisation aux vecteurs aléatoires, indépendances

Dans la suite, un vecteur aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ est la donnée d'un n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ où chaque X_i désigne une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

2.1 Lois, lois marginales

DÉFINITION — **loi d'un vecteur aléatoire, loi marginale**

- *La **loi d'un vecteur aléatoire** $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles est donnée par la fonction de $F_{(X_1,\dots,X_n)}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$F_{(X_1,\dots,X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t_i]\right).$$

- *On appelle **i-ème loi marginale** de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ la loi de X_i.*

Exercice 3

✦ Soit F la fonction de répartition associée à un couple (X_1, X_2). Pour $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit l'ensemble $\mathscr{R} =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2]$. Exprimer $\mathbf{P}((X_1, X_2) \in \mathscr{R})$ à l'aide de F, a et b.

p. 21

PROPOSITION — **égalité en loi**

Soient $(X_1, \dots, X_n)$, $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires définis sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- *Les vecteurs $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.*
- *La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Alors *les variables aléatoires $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.*

Résultat admis.

Exemple. La fonction $g : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$ est continue car polynomiale. Si $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$ et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {Y_i}^2$ ont même loi.

2.2 Indépendance

DÉFINITION **indépendance**

Soit $(X_1,X_2,\dots,X_n)$*, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$.
Les variables X_1, X_2, ..., X_n *sont dites* ***mutuellement indépendantes*** *si pour tout* $(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$*, les événements* $[X_1\leqslant t_1],\dots,[X_n\leqslant t_n]$ *sont mutuellement indépendants. Autrement dit,*

$$\forall\,(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n,\qquad \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\leqslant t_i]\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}\,(X_i\leqslant t_i)\,.$$

Remarques.

- Les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall\,(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n,\qquad F_{(X_1,\dots,X_n)}\,(t_1,\dots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}F_{X_k}\,(t_k)\,.$$

- Il est clair que, si les variables aléatoires $X_1,X_2,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors, pour toute partie I de $[\![1;n]\!]$, les variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

- On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est composée de variables mutuellement indépendantes si pour toute partie finie $I\subset\mathbb{N}$, les variables $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

⚠ **Attention.** Si $X_1,\dots,X_n$ sont des variables mutuellement indépendantes, alors ces variables sont deux à deux indépendantes. La réciproque est fausse !

LEMME **des coalitions**

Soit $(X_1,X_2,\dots,X_n)$*, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$.

Si *les variables* $X_1,X_2,\dots,X_n$*, sont indépendantes,*

alors *toute variable aléatoire fonction de* $X_1,X_2,\dots,X_p$ *est indépendante de toute variable aléatoire fonction de* $X_{p+1},X_{p+2},\dots,X_n$.

Résultat admis.

PROPOSITION **caractérisation par des intervalles**

Soit $(X_1,X_2,\dots,X_n)$*, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$*. Les énoncés suivants sont équivalents.*

i) *Les variable* $X_1,\dots,X_n$ *sont mutuellement indépendantes.*

ii) *Pour tous intervalles* $I_1,\dots,I_n$ *de* $\mathbb{R}$, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\in I_i]\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}\big([X_i\in I_i]\big).$

Remarque. L'implication **ii)**$\Rightarrow$ **i)**est directe en considérant les intervalles du type $]-\infty;t_i]$. la réciproque est plus technique et admise.

PROPOSITION **caractérisation de l'indépendance, cas discret**

Soit $(X_1,X_2,\dots,X_n)$*, un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$*. Les variables* $X_1,\dots,X_n$ *sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout* $(t_1,\dots,t_n)\in X_1(\Omega)\times\dots\times X_n(\Omega)$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i=t_i]\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{P}\,(X_i=t_i)\,.$$

Résultat admis.

2.3 Calculs d'espérance et de la variance

Le programme limite la définition de l'espérance et de la variance aux cas de variables aléatoires finies, discrètes dénombrables et à densité. Mais les propositions suivantes s'étendent au cas général.

L'espérance

PROPOSITION — **linéarité de l'espérance**

Soient $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *et* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Si *pour tout* $i \in [\![1; n]\!]$, X_i *admet une espérance,*

Alors $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ *admet une espérance avec*

$$\mathbf{E}(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) = \lambda_1 \mathbf{E}(X_1) + \cdots + \lambda_n \mathbf{E}(X_n).$$

Preuve. C'est une généralisation par récurrence de la linéarité de l'espérance énoncée en début de chapitre. ■

Exercice 4

✦ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, de même loi, à valeurs dans $[1; +\infty[$. Montrer que $\mathbf{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right)$ existe et vaut $\frac{1}{2}$.
On pourra remarquer que $\frac{X}{X+Y}$ *et* $\frac{Y}{X+Y}$ *ont même loi.*

p. 21

PROPOSITION — **espérance d'un produit**

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, *un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- *Pour tout* $i \in [\![1; n]\!]$, X_i *admet une espérance.*
- *Les variables* $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ *sont mutuellement indépendantes.*

Alors $X_1 \times \cdots \times X_n$ *admet une espérance avec*

$$\mathbf{E}(X_1 \times \ldots \times X_n) = \mathbf{E}(X_1) \times \ldots \times \mathbf{E}(X_n).$$

Preuve. De nouveau, c'est une récurrence à partir du cas $n = 2$ prouvée en début de chapitre. ■

Exercice 5

✦ Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, des variables aléatoires indépendantes et suivant chacune une loi uniforme sur $[-1/2, 1/2]$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \left(e^x - e^{-x}\right)/2$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel $t > 0$, on a

$$\mathbf{E}\left(e^{tS_n}\right) = \left(\frac{f(t/2)}{t/2}\right)^n \quad \text{où} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

p. 21

Exercice 6

✦ *D'après oral ESCP 2022*

1. Soient S et T deux variables aléatoires réelles indépendantes, telles que T et $-\mathrm{T}$ aient la même loi. Montrer que $\mathbf{E}\big(\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T})\big)=\mathbf{E}\big(\cos(\mathrm{S})\big)\mathbf{E}\big(\cos(\mathrm{T})\big)$.

2. On considère une suite $(\mathrm{R}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1,1\}$ et telles que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(\mathrm{R}_k=-1)=\mathbf{P}(\mathrm{R}_k=1)=\frac{1}{2}$ p. 21
et on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{R}_k$. Montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\mathbf{E}\big(\cos(t\mathrm{S}_n)\big)=(\cos t)^n.$$

La variance

PROPOSITION — **variance et indépendance**

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires sur* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$.

Si
- X *et* Y *admettent une variance.*
- X *et* Y *sont indépendantes.*

Alors $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ *admet une espérance avec* $\mathbf{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathbf{V}(\mathrm{X})+\mathbf{V}(\mathrm{Y})$.

Preuve. • Traitons dans un premier temps, le cas des variables aléatoires X et Y centrées (c'est-à-dire d'espérances nulles). Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ est une variable centrée. Puis, par définition de la variance :

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathbf{E}\left((\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2\right)=\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2+2\mathrm{XY}+\mathrm{Y}^2\right)=\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2\right)+2\mathbf{E}(\mathrm{XY})+\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^2\right).$$

D'après le résultat précédent dans le cas d'un produit de variables indépendantes et par hypothèse $\mathbf{E}(\mathrm{X})=\mathbf{E}(\mathrm{Y})=0$,

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^2\right)+2\mathbf{E}(\mathrm{X})\mathbf{E}(\mathrm{Y})+\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}^2\right)=\mathbf{V}(\mathrm{X})+\mathbf{V}(\mathrm{Y}).$$

• Traitons le cas général. Posons $\overline{\mathrm{X}}=\mathrm{X}-\mathbf{E}(\mathrm{X})$, $\overline{\mathrm{Y}}=\mathrm{Y}-\mathbf{E}(\mathrm{Y})$.

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})&=\mathbf{V}\big(\mathrm{X}+\mathrm{Y}-\mathbf{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})\big)=\mathbf{V}\big(\mathrm{X}+\mathrm{Y}-\mathbf{E}(\mathrm{X})-\mathbf{E}(\mathrm{Y})\big).\\&=\mathbf{V}\left(\overline{\mathrm{X}}+\overline{\mathrm{Y}}\right) &&\text{d'après le cas précédent}\\&=\mathbf{V}\left(\overline{\mathrm{X}}\right)+\mathbf{V}\left(\overline{\mathrm{Y}}\right)=\mathbf{V}(\mathrm{X})+\mathbf{V}(\mathrm{Y}).\end{aligned}$$

■

Le résultat suivant s'en déduit par récurrence en rappelant que, par le lemme des coalitions, X_{k+1} est indépendant de $\mathrm{X}_1+\ldots+\mathrm{X}_k$.

COROLLAIRE — **variance et indépendance**

Soit $(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\ldots,\mathrm{X}_n)$, *un vecteur aléatoire défini sur un espace probabilisé* $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$.

Si
- *Pour tout* $i\in[\![1;n]\!]$, X_i *admet une variance.*
- *Les variables* $(\mathrm{X}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ *sont mutuellement indépendantes.*

Alors $\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n$ *admet une variance avec*

$$\mathbf{V}(\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n)=\mathbf{V}(\mathrm{X}_1)+\cdots+\mathbf{V}(\mathrm{X}_n).$$

Exemple. Nous avons vu que si $\mathrm{X}\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$ alors il existe X_1, X_2, …, X_n, des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre p telles que X et $\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$ ont même loi. On retrouve alors l'espérance et la variance d'une loi binomiale

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$
$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

3 Compléments sur les couples : la covariance

3.1 Définitions et premières propriétés

DÉFINITION - PROPOSITION **covariance**

Soient X, Y *deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
Si X *et* Y *admettent un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire* $(X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y))$ *admet une espérance. On définit la covariance de* X *et* Y *par*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\Big((X-\mathbf{E}(X))\cdot(Y-\mathbf{E}(Y))\Big).$$

Exercice 7

✧ Prouver la convergence dans l'énoncé précédent et l'inégalité

$$2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \leqslant \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y).$$

p. 22

Remarque. Lorsque $X = Y$, nous retrouvons la définition de la variance : $\mathbf{V}(X) = \mathrm{Cov}(X,X)$.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé. Dans la suite, $\mathscr{M}_2$ désigne l'ensemble des variables aléatoires de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

PROPOSITION **propriété de la covariance**

La covariance est :

- ***Symétrique*** *:* $\forall X, Y \in \mathscr{M}_2, \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$.
- ***Positive*** *:* $\forall X \in \mathscr{M}_2, \quad \mathrm{Cov}(X,X) \geqslant 0$.
  De plus, il y a égalité $\mathrm{Cov}(X,X) = 0$ *si et seulement si* X *est presque sûrement constante.*
- ***Bilinéaire*** *:*
  - → *Linéaire à gauche. Pour tous* $X_1, X_2, Y \in \mathscr{M}_2$, *tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
  $$\mathrm{Cov}\left(\lambda X_1 + \mu X_2, Y\right) = \lambda\,\mathrm{Cov}(X_1, Y) + \mu\,\mathrm{Cov}(X_2, Y).$$
  - → *Linéaire à droite. Pour tous* $X_1, X_2, Y \in \mathscr{M}_2$, *tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
  $$\mathrm{Cov}\left(Y, \lambda X_1 + \mu X_2\right) = \lambda\,\mathrm{Cov}(Y, X_1) + \mu\,\mathrm{Cov}(Y, X_2).$$

Preuve. Soient $X, Y \in \mathscr{M}_2$.

- Symétrique.
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\Big((X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y))\Big) = \mathbf{E}\Big((Y-\mathbf{E}(Y))(X-\mathbf{E}(X))\Big) = \mathrm{Cov}(Y,X).$$
- Positive.
$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathbf{E}\Big((X-\mathbf{E}(X))^2\Big) \geqslant 0$$
car l'espérance d'une variable aléatoire positive ou nulle est toujours positive ou nulle. Précisons que si $\mathrm{Cov}(X,X) = 0$, la variable aléatoire $(X-\mathbf{E}(X))^2$ est nulle presque sûrement, donc X est presque sûrement constante.

- Bilinéaire.
  Comme la covariance est symétrique, il suffit de vérifier la linéarité à gauche. Soient $X_1, X_2 \in \mathscr{M}_2$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On note $\overline{X_i} = X_i - \mathbf{E}(X_i)$ les variables centrées.

$$(\lambda X_1 + \mu X_2) - \mathbf{E}(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda(X_1 - \mathbf{E}(X_1)) + \mu(X_2 - \mathbf{E}(X_2)) = \lambda\overline{X_1} + \mu\overline{X_2}.$$

  Par linéarité de l'espérance, il vient

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) &= \mathbf{E}\left((\lambda\overline{X_1} + \mu\overline{X_2})(Y - \mathbf{E}(Y))\right)\\ &= \lambda\mathbf{E}\left(\overline{X_1}(Y - \mathbf{E}(Y))\right) + \mu\mathbf{E}\left(\overline{X_2}(Y - \mathbf{E}(Y))\right)\\ \operatorname{Cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) &= \lambda\operatorname{Cov}\left(\overline{X_1}, Y\right) + \mu\operatorname{Cov}\left(\overline{X_2}, Y\right) = \lambda\operatorname{Cov}(X_1, Y) + \mu\operatorname{Cov}(X_2, Y).\end{aligned}$$

■

Attention. Ces propriétés sont à rapprocher de la définition d'un produit scalaire. Il y a toutefois, une grande différence : la covariance n'est pas une forme bilinéaire définie au sens où :

$$\operatorname{Cov}(X, X) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad X = 0.$$

Vocabulaire. Deux variables sont dites décorrélées si la covariance est nulle.

Exercice 8

✧ *Les questions sont indépendantes.*

1. Soient $X, Y \in \mathscr{M}_2$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\operatorname{Cov}(X, Y)$.
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant la même variance. Montrer qu'alors les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont décorrélées.

p. 22

PROPOSITION — dépendance et corrélation

Soient X, Y *deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *admettant un moment d'ordre 2.*

Si X *et* Y *sont indépendants*

Alors X *et* Y *sont des variables décorrélées :* $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

Attention. La réciproque est fausse.

Exercice 9

✧ **Contre-exemple**
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. Vérifier que X et $Y = X^2$ sont décorrélées mais non indépendantes.

p. 22

THÉORÈME — formule de Huygens

Soient X, Y *deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *admettant un moment d'ordre 2. On a*

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

Preuve. Posons le calcul.

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\big)\\ &= \mathbf{E}\big(XY - X\mathbf{E}(Y) - Y\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X)\big).\end{aligned}$$

On poursuit par linéarité de l'espérance.

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

■

Exercice 10

✦ Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, admettant une espérance $\mu \neq 0$ et une variance σ^2 non nulle.

1. Exprimer l'espérance et la variance de XY en fonction de μ et σ^2.
2. Est-ce que les variables $X+Y$ et XY sont indépendantes ?

p. 22

Exercice 11

✦✦ Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On note M_n la variable aléatoire définie sur Ω par $M_n(\omega) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i(\omega)$.

1. Reconnaître la loi de M_n, préciser sont espérance.
2. Soient r et s deux entiers tels que $1 \leqslant r < s$. Vérifier que $\mathbf{E}(M_r M_s) = 1 - q^r$.
3. Calculer la covariance $\operatorname{cov}(M_r, M_s)$.

p. ??

PROPOSITION — **variance d'une somme**

Soient X, Y *deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *admettant un moment d'ordre 2.*
Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, *la variable* $\lambda X + \mu Y$ *admet un moment d'ordre 2, et*

$$\mathbf{V}(\lambda X + \mu Y) = \lambda^2 \mathbf{V}(X) + 2\lambda\mu \operatorname{Cov}(X, Y) + \mu^2 \mathbf{V}(Y).$$

Exercice 12

✧ Prouver cette égalité.

p. 22

Remarques.

- En particulier, $X+Y$ admet un moment d'ordre 2 et $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) + \mathbf{V}(Y)$.
- Cette formule est à comparer avec la formule avec le produit scalaire. Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien

$$\forall x, y \in E, \qquad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

- Soient $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et admettant des variances. On montre la généralisation :

$$\boxed{\mathbf{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{cov}(X_i, X_j).}$$

Exercice 13

✦

1. À l'aide d'une inégalité usuelle, montrer que pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$,
$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right).$$
2. En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance, puis justifier l'égalité de la remarque précédente.

p. 22

THÉORÈME — **inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient X, Y. *On a*

$$\left|\operatorname{Cov}(X, Y)\right| \leqslant \sigma(X)\,\sigma(Y)$$

où $\sigma(X)$ *et* $\sigma(Y)$ *désignent respectivement l'écart-type de* X *et* Y.

Exercice 14

✦ **Preuve**

1. Prouver cette inégalité en introduisant la fonction polynomiale $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{V}(t\mathrm{X}+\mathrm{Y})$.
2. Préciser le cas d'égalité.
3. *Exemple.*
Soient X, Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et suivant des lois de Bernoulli. Montrer que $4\,\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \leqslant 1$.

p. 23

3.2 Coefficient de corrélation

DÉFINITION **coefficients de corrélation**

Soient X, Y *deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ *admettant un moment d'ordre 2. On suppose de plus que* $\mathbf{V}(\mathrm{X}) \neq 0$ *et* $\mathbf{V}(\mathrm{Y}) \neq 0$. *On appelle* ***coefficient de corrélation linéaire****, noté* $\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})$*, le nombre réel défini par*

$$\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\sigma(\mathrm{X})\sigma(\mathrm{Y})}$$

où $\sigma(\mathrm{X})$ *et* $\sigma(\mathrm{Y})$ *désignent respectivement l'écart-type de* X *et* Y.

Remarques.

- Si X et Y sont indépendantes, leur coefficient de corrélation linéaire est nul. Mais la réciproque est fausse.
- À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\left|\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})\right| \leqslant 1.$$

Exercice 15

✧ Soient X et Y des variables aléatoires admettant des variances non nulles.

1. Soient $a, c \in \mathbb{R}_*^+$, $b, d \in \mathbb{R}$. Prouver que $\rho(a\mathrm{X}+b, c\mathrm{Y}+d) = \rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.
2. *Cas d'égalité.* On pose $\mathrm{Z} = \left(\frac{1}{\sigma(\mathrm{Y})}\right)\mathrm{Y} - \left(\frac{\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\sigma(\mathrm{X})}\right)\mathrm{X}$.
   a) Exprimer $\mathbf{V}(\mathrm{Z})$ à l'aide de $\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.
   b) Que peut-on en déduire si $\left|\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})\right| = 1$?

p. 23

Exercices

Révisions : couples de v.a discrètes

Exercice 16. ✧ On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenues.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

≫ Solution p. 23

Exercice 17. ✦ Une urne contient $N-2$ boules vertes, 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire les boules de l'urne, une à une et sans remise.

1. Soient X_1 le rang d'apparition de la boule blanche et X_2 le rang d'apparition de la boule rouge. Déterminer la loi de X_1, la loi de X_2 et la loi du couple (X_1, X_2).
2. Soit X le rang où on obtient pour la première fois soit la boule blanche, soit la boule rouge. Soit Y le rang où on a obtenu pour la première fois les deux boules blanche et rouge. Déterminer la loi de X et la loi de Y.

≫ Solution p. 24

Exercice 18. ✦✦ *D'après Oral HEC 2014*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathbf{P}\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \frac{\lambda}{(i+j+1)!}.$$

1. Déterminer le réel λ.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

≫ Solution p. 24

Compléments

Exercice 19. ✧ **Vrai ou faux ?**

Dans la suite, X et Y désignent deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé admettant un moment d'ordre 2.

1. Si $\mathbf{E}(X) = 0$ alors $\mathbf{E}(X^2) = 0$. ✓ ×
2. Si X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Cov}(X, X+Y) = \mathbf{V}(X)$. ✓ ×

≫ Solution p. 25

Exercice 20. ✦ ✎ Soient $p \in]0,1[$ et (X, Y) un couple de v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}\big([X = n] \cap [Y = k]\big) = \begin{cases} \alpha (1-p)^k & \text{si } k \geqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Préciser α.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
3. Reconnaître la loi de $X+1$? En déduire l'espérance et la variance de X.
4. Vérifier que X et $Y - X$ sont deux variables de même loi et indépendantes.
5. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

≫ Solution p. 25

Exercice 21. ✦ **Un cas très particulier !**

Soient X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telles que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(q)$. Montrer que si X et Y sont décorrélées alors elles sont indépendantes.

≫ Solution p. 26

Exercice 22. ✦✦ Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad Y_n = X_n X_{n+1} \quad \text{et} \quad U_n = Y_1 + \ldots + Y_n.$$

1. Quelle est la loi de Y_n ? Les Y_i sont-elles deux à deux indépendantes ?
2. Calculer l'espérance et la variance de U_n.

≫ Solution p. 26

Exercice 23. ✦✦ **Loi de Pascal**
On dispose d'une urne contenant une proportion $p \in]0,1[$ de boules blanches. On effectue une suite infinie de tirages, indépendants. Pour chaque $r \in \mathbb{N}^*$, on note R_r la variable aléatoire qui renvoie le rang de la r-ième «boule blanche», (avec 0 si le r-ième boule blanche n'apparaît pas).
Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la v.a qui renvoie 1 si l'on a obtenu une boule blanche au i-ème tirage, et 0 sinon.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. On note aussi $Y_0 = 0$.

1. On note A l'événement « obtenir un nombre fini de boules blanches » et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n l'événement « ne plus obtenir de boules blanches à partir du n-ième lancer ».
   - **a)** En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(A_n) = 0$.
   - **b)** Exprimer A en fonction des événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire $\mathbf{P}(A)$.
   - **c)** En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(R_r = 0) = 0$.
2. Identifier la loi de R_1, en déduire l'existence et la valeur de $\mathbf{E}(R_1)$ et $\mathbf{V}(R_1)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de Y_n ?
4. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant r$.
   Exprimer l'événement $[R_r = n]$ en fonction d'événements formés à partir des variables Y_{n-1} et X_n.
5. En déduire la loi de R_r.
6. Écrire une fonction Python qui prend en argument r et simule la variable aléatoire R_r.

≫ Solution p. 26

Exercice 24. ✦✦ ✎ **Somme aléatoire de variables aléatoires discrètes - identité de Wald**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi et admettant une espérance. Soit N, une nouvelle variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et admettant aussi une espérance. On pose

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

C'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0. \end{cases}$$

On admet que S est une variable aléatoire.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{P}(N = n) \neq 0$. Justifier l'existence et calculer l'espérance $\mathbf{E}(S \mid [N = n])$.
2. En déduire l'existence de l'espérance de S et l'égalité $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X_1) \cdot \mathbf{E}(N)$.

≫ Solution p. 27

Exercice 25. ✦✦✦ *d'après HEC 2014*

On lance indéfiniment un dé équilibré et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro sorti au n-ième tirage. Les variables aléatoires X_n, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, sont donc supposées indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$. Pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, on note T_i le temps d'attente de la sortie du numéro i.

1. **a)** Donner la loi de T_1 ainsi que son espérance et sa variance.
   - **b)** Trouver l'espérance des variables aléatoires $\mathrm{Inf}(T_1, T_2)$ et $\mathrm{Sup}(T_1, T_2)$.
2. Justifier l'existence de la covariance de T_1 et de T_2, que l'on notera $\mathrm{Cov}(T_1, T_2)$.
3. **a)** Établir, pour tout $i \in [\![2,6]\!]$, la relation : $\mathbf{E}\big(T_1 \mid [X_1 = i]\big) = 7$.
   - **b)** Montrer que pour tout $i \in [\![3,6]\!]$, on a : $\mathbf{E}\big(T_1T_2 \mid [X_1 = i]\big) = \mathbf{E}\big((1+T_1)(1+T_2)\big)$.
   - **c)** Calculer $\mathbf{E}(T_1T_2)$.
   - **d)** En déduire $\mathrm{Cov}(T_1, T_2)$ ainsi que le coefficient de corrélation linéaire de T_1 et T_2.

4. a) Trouver un réel α tel que les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ soient non corrélées.
   b) Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}\big(T_2 + \alpha T_1 \mid [T_1 = 1]\big)$.
   c) Les variables aléatoires T_1 et $T_2 + \alpha T_1$ sont-elles indépendantes ?

≫ Solution p. 28

Avec un peu d'algèbre linéaire...

Exercice 26. ✦ ✎ **Matrice de variance-covariance**

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, un vecteur aléatoire dont chaque variable aléatoire admet un moment d'ordre 2. On définit la matrice colonne aléatoire $\mathscr{X}$ et la matrice $\mathscr{E}$ des espérances et $\mathscr{V}$ des variances-covariances par

$$\mathscr{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \mathscr{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(X_1) \\ \mathbf{E}(X_2) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(X_n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathscr{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathbf{V}(X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathbf{V}(X_n) \end{bmatrix}.$$

1. Comparer la somme de tous les coefficients de la matrice $\mathscr{V}$ avec $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$.
2. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels et A la matrice ligne $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$. On note Z la variable aléatoire réelle définie par $Z = A\mathscr{X} = \sum_{k=1}^{n} a_i X_i$. Exprimer $\mathbf{E}(Z)$ à l'aide de A et $\mathscr{E}$, puis $\mathbf{V}(Z)$ avec A et $\mathscr{V}$.
3. a) Justifier que la matrice $\mathscr{V}$ est diagonalisable et que les valeurs propres sont positives.
   b) Préciser les valeurs propres lorsque les variables sont mutuellement indépendantes.
4. Que dire des variables aléatoires X_i si la matrice $\mathscr{V}$ n'est pas inversible ?

≫ Solution p. 28

Exercice 27. ✦✦ ✎ **Matrice de variance-covariance II**

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!], X_i$ suit la loi de Poisson de paramètre 1.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $Y_k = X_1 + \cdots + X_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$.

On définit aussi la matrice de variance-covariance par

$$M_n = \left(\mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right)\right)_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

≫ Solution p. 29

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, rappeler la loi de Y_k. Préciser $\mathbf{E}(Y_k)$ et $\mathbf{V}(Y_k)$.
2. On considère tout d'abord le cas particulier $n = 2$.
   a) Expliciter la matrice M_2.
   b) Montrer que M_2 est inversible et expliciter son inverse.
3. On revient au cas général avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.
   a) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$. Montrer que $\mathrm{Cov}\left(Y_i, Y_j\right) = i$.
   b) Expliciter la matrice M_n.

   On note

$$N_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[t_{i,j}\right]_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}.$$

   la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients situés au-dessus de la diagonale sont égaux à 1, les autres étant nuls.
4. Montrer que N_n est inversible et calculer son inverse que l'on notera R_n.
5. a) Exprimer M_n en fonction de ${}^tN_n$ et de N_n.
   b) Justifier que M_n est inversible et exprimer $(M_n)^{-1}$ en fonction de R_n et ${}^tR_n$.

6. Soit $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$ et soit $Z_n=\begin{bmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i Y_i\right)={}^t(T_nZ_n)(T_nZ_n)$.

   On pose $W_n=T_nZ_n=\begin{bmatrix} w_1\\ \vdots\\ w_n\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

7. Montrer que ${}^t(R_nW_n)(R_nW_n)=\left(\sum_{i=1}^{n-1}(w_i-w_{i+1})^2\right)+w_n{}^2$.

8. Vérifier que, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(a-b)^2\leqslant 2a^2+2b^2$. En déduire ${}^t(R_nW_n)(R_nW_n)\leqslant 4\,{}^t(W_n)W_n$.

9. Conclure que pour tout $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$,
$$\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i Y_i\right)\geqslant\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} z_i{}^2.$$

Exercice 28. ✦✦ **Matrice des lois conditionnées**

On dit qu'une matrice carrée à coefficients positifs M est stochastique si la somme des coefficients de chaque colonne est égale à 1. Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On appelle matrice des lois conditionnées de X sachant Y, la matrice carrée d'ordre n,
$$M=\left(a_{ij}\right)_{i,j\in[\![1;n]\!]}\quad\text{où}\quad a_{ij}=\mathbf{P}_{[Y=j]}(X=i).$$

1. Montrer que M est stochastique et que 1 est une valeur propre de M.
   Indication. Montrer que 1 *est valeur propre si et seulement si* ${}^tM-I_n$ *n'est pas inversible.*
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si les colonnes de M sont proportionnelles.

≫ Solution p. 30

Exercice 29. ✦✦✦ *d'après oral ESCP 2022*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$. On suppose que X et Y admettent des moments d'ordre 2 et on suppose que X n'a pas une variance nulle. Soit la matrice :
$$A=\begin{bmatrix}\mathbf{E}(X^2) & \mathbf{E}(X)\\ \mathbf{E}(X) & 1\end{bmatrix}.$$

1. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, montrer l'existence de l'espérance $\mathbf{E}\big((Y-aX-b)^2\big)$ et trouver une matrice colonne B et un nombre $C\in\mathbb{R}$ (qui ne dépendent ni de a ni de b) tels que :
$$\mathbf{E}\left((Y-aX-b)^2\right)={}^tUAU-2\,{}^tBU+C\quad\text{avec}\quad U=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}.$$
   On souhaite montrer l'existence et trouver $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{E}\big((Y-aX-b)^2\big)$ soit minimal. On pose $f(a,b)=\mathbf{E}\big((Y-aX-b)^2\big)$.
2. Montrer que f admet une borne inférieure sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont strictement positives.
   On admet (pour l'instant) qu'il existe une matrice orthogonale P *telle que* $A=PD\,{}^tP$ *avec* D *diagonale.*
4. En déduire l'existence d'un minimum pour f sur $\mathbb{R}^2$.
5. Trouver explicitement tous les couples (a,b) pour lesquels ce minimum est atteint.

≫ Solution p. 31

Exercice 30. ✦✦✦ **Application de l'inversibilité de la matrice de Vandermonde** *d'après Oraux HEC 2014*

1. Soient $a_0,a_1,\dots,a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts. Notons $\mathcal{B}=\left(1,x,\dots,x^n\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{C}=(e_0,\dots,e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.
   a) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme
$$\varphi:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1}\\ P & \longmapsto & \big(P(a_0),\dots,P(a_n)\big).\end{array}\right.$$
   b) Expliciter A, la matrice de φ de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Est-t-elle inversible ?
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes finies définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, et soit n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2 . On suppose que $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ et $Y(\Omega)=\{y_1,y_2,\dots,y_m\}$. On pose pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ et tout $j\in[\![1,m]\!]$:
$$p_i=\mathbf{P}(X=x_i),\quad q_j=\mathbf{P}\left(Y=y_j\right),\quad \pi_{i,j}=\mathbf{P}\left([X=x_i]\cap[Y=y_j]\right)\quad\text{et}\quad \delta_{i,j}=\pi_{i,j}-p_iq_j.$$
   On suppose que pour tout $h\in[\![1;n-1]\!]$ et tout $k\in[\![1;m-1]\!]$, la covariance de X^h et Y^k est nulle.

a) Soit $k \in [\![1;m-1]\!]$. Montrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on a : $\sum_{j=1}^{m} \delta_{i,j} {y_j}^k = 0$.

b) En déduire que X et Y sont indépendantes.

≫ Solution p. 31

Exercice 31. ✦✦✦ **Exemple de calcul de loi de la trace et du rang**

1. *Préliminaires*
Soit φ une projecteur de $\mathbb{R}^n$ de rang r. Soit P, la matrice canoniquement associée à φ.
Préciser le spectre de φ et donner le lien entre Tr(P) et rg(P).

- *Cas 1.*

2. On considère la famille $X_1, \dots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ toutes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Soit M une variable aléatoire discrète de Ω dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout ω dans Ω, $M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = \operatorname{diag}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$. De plus, on note T la variable aléatoire Tr(M).

a) Donner la loi de probabilité de T. Préciser son espérance et sa variance.

b) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire R = rg(M).

c) On se propose de déterminer la probabilité de l'événement Z :

« les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension ».

i) On note V l'événement : « M ne possède qu'une seule valeur propre ». Calculer $\mathbf{P}(V)$.

ii) On suppose n impair. Déterminer $\mathbf{P}(Z)$.

iii) On suppose n pair. Calculer $\mathbf{P}(T = n/2)$. En déduire $\mathbf{P}(Z)$.

- *Cas 2.*

3. On note $U = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = U\,{}^tU = \left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$.

a) Donner la loi de probabilité de chaque variable aléatoire a_{ij}.

b) Donner la loi de tr(A) puis de rg(A).

≫ Solution p. 31

Exercice 32. ✦✦ ✎ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, suivant la même loi et avec un moment d'ordre 2. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{bmatrix}.$$

1. On suppose dans cette question que $X, Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.Calculer la probabilité que la matrice A soit inversible.

2. Justifier que A est toujours diagonalisable.

3. Notons λ_1 et λ_2 les variables aléatoires égales aux valeurs propres de A. Calculer $\operatorname{Cov}(\lambda_1, \lambda_2)$ puis $\mathbf{E}(\lambda_1 \lambda_2)$.

≫ Solution p. 32

Problème 33. ✦✦✦ **Distance en variation totale**
Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans une partie de $\mathbb{N}$.

1. • *Préliminaires : loi d'un couple*
Soit $p \in]0;1/2[$. On considère deux variables aléatoires S, T respectivement à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\{0;1\}$. On suppose que la loi du couple (S, T) est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \mathbf{P}\big([S=k]\cap[T=0]\big) = \begin{cases} e^{-p} - p\left(1-e^{-p}\right) & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k=1 \\ p^k e^{-p}/k! & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\big([S=k]\cap[T=1]\big) = \begin{cases} p\left(1-e^{-p}\right) & \text{si } k=0 \\ pe^{-p} & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2. \end{cases}$$

a) Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité.

b) Reconnaître les lois marginales de S et T.

c) Exprimer $\mathbf{P}(S = T)$ en fonction de p.

d) En déduire que $\mathbf{P}(S = T) \geqslant 1 - 2p^2$.

2. • *La distance en variation totale*

Pour X, Y deux variables aléatoires, on pose : $d(X,Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\mathbf{P}([X = n]) - \mathbf{P}([Y = n])\right|$.

a) Vérifier que $d(X,Y)$ est bien défini et $d(X,Y) \leqslant 2$.

b) Que dire de X et Y si $d(X,Y) = 0$?

c) Soient X, Y et Z trois variables aléatoires. Montrer que $d(X,Y) = d(Y,X)$ et $d(X,Z) \leqslant d(X,Y) + d(Y,Z)$.

3. • *Une majoration de la distance*

a) Justifier que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on a $\left|\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A)\right| \leqslant \mathbf{P}\big([X \neq Y]\big)$.

b) On pose $A = \left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \mathbf{P}\big([X = n]\big) \geqslant \mathbf{P}\big([Y = n]\big)\right\}$, justifier que

$$d(X,Y) = 2\left|\mathbf{P}\big([X \in A]\big) - \mathbf{P}\big([Y \in A]\big)\right| \quad \text{puis} \quad d(X,Y) \leqslant 2\mathbf{P}\big([X \neq Y]\big).$$

c) On suppose dans cette question que X s'exprime sous la forme $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où les variables $(X_1, \ldots, X_n)$ sont indépendantes et de même loi. De même, on suppose que $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où les variables $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont indépendantes et de même loi. Montrer alors que

$$d(X,Y) \leqslant 2n - 2\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(X_i = Y_i\right).$$

4. • *Inégalité de Le Cam*

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Montrer que si $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, alors : $d(X,Y) \leqslant \dfrac{4\lambda^2}{n}$.

5. Quel théorème retrouve-t-on lorsque $n \to +\infty$?

≫ Solution p. 33

Problème 34. ✦✦ **Théorème de Weierstrass dans le cas $\mathscr{C}^1$**

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$.

1. Justifier qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $(x,y) \in [0;1]^2$, $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x - y|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction P_n par

$$P_n : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}. \end{array} \right.$$

Soient $p \in [0;1]$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ et indépendantes.

2. a) Rappeler la loi de $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Préciser son espérance et sa variance.

b) Vérifier que si on note $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$, alors $\mathbf{V}\left(\overline{X}_n\right) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

3. Montrer que $\mathbf{E}\left(f\left(\overline{X}_n\right)\right) = P_n(p)$. En déduire que

$$P_n(p) - f(p) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

4. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. On note :

- $A_{1,\varepsilon}$ l'ensemble des entiers $k \in [[0;n]]$ tels que $|k/n - p| < \varepsilon/M$;
- $A_{2,\varepsilon}$ l'ensemble des entiers $k \in [[0;n]]$ tels que $|k/n - p| \geqslant \varepsilon/M$.

En particulier, on obtient $P_n(p) - f(p) = S_{1,\varepsilon} + S_{2,\varepsilon}$ où

$$\forall i \in \{1;2\}, \quad S_{i,\varepsilon} = \sum_{k \in A_{i,\varepsilon}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p)\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

a) Démontrer que $\left|S_{1,\varepsilon}\right| \leqslant \varepsilon$.

b) Vérifier ensuite que $\left|S_{2,\varepsilon}\right| \leqslant 2M\mathbf{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \varepsilon/M\right)$.

5. **a)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathbf{P}\left(\left|\overline{X}_n - p\right| \geqslant \varepsilon/M\right) \leqslant M^2/(4n\varepsilon^2)$.

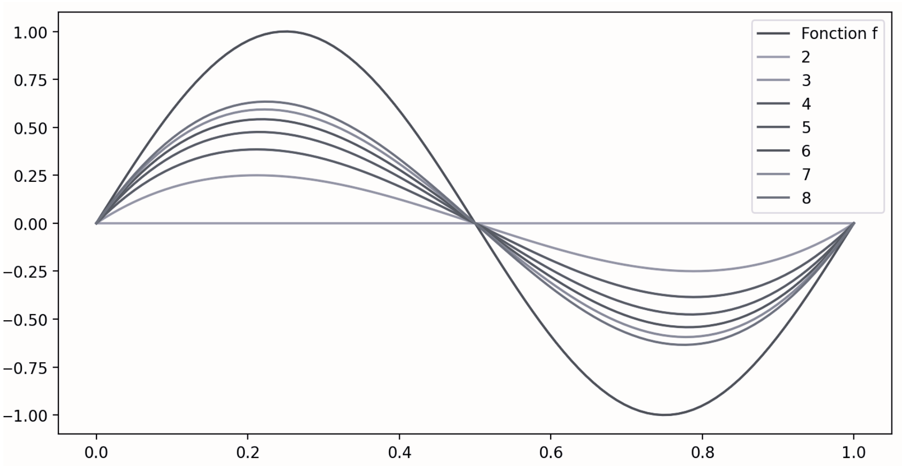
   b) Avec un bon choix de ε, conclure en montrant que

$$\sup_{x\in[0;1]} \left|f(x) - P_n(x)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- *Illustration avec Python*

6. Écrire un programme qui prend en arguments un réel t, un entier naturel n, une fonction f définie sur $[0;1]$ et renvoie $P_n(t)$ où P_n est défini à la question 1.
   On pourra utiliser la commande **sp.binom(i,j)** *de la bibliothèque* **scipy.special** pour le coefficient $\binom{i}{j}$.

7. Proposer un code pour afficher sur le même graphe, la courbe de $f : t \in [0;1] \mapsto \sin(2\pi t)$, et les courbes de P_i pour $i \in [\![2;8]\!]$.



≫ Solution p. 34