DM 3 - sujet A

THÈMES : VARIABLES À DENSITÉ

A. Préliminaires

On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\quad c_{n+1}+c_n = \dfrac{1}{n}$.

3. Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2

$$\frac{1}{n} \leqslant 2c_n \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

4. Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , l'égalité :

$$c_n = (-1)^n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\right)$$

5. Écrire un programme Python qui prend en argument $n\in\mathbb{N}^*$ et renvoie c_n.

B. Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<1 \\ \frac{1}{c_n t^n(1+t)} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

6. À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité :

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u.$$

7. En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité.

Dans la suite, on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

8. Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1}.

9. Dans cette question, exclusivement, on suppose que $n=1$. Préciser la fonction F_1.

- **a)** En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbf{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \dfrac{1}{2}$.
- **b)** Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

10. Soit x un réel strictement supérieur à 1.

- **a)** Justifier l'encadrement : $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_{1/x}^{1}\frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u\right)$.

c) Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{F}_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{F}_n(x)=1$.

11. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{F}_n(x)$ si x est un réel inférieur ou égal à 1 ?

Nous verrons au chapitre Convergences des variables aléatoires, que la suite de variables aléatoires $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge en loi.*

– FIN –

DM 3 - sujet *

THÈME : VARIABLES DISCRÈTES ET À DENSITÉ

Distance en variation totale

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I - le cas continu

On dit qu'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne s'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |h(x) - h(y)| \leqslant C|x - y|.$$

On note $\mathscr{L}$ l'ensemble de ces fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$. Si $h \in \mathscr{L}$, on pose :

$$N(h) = \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}\\ x\neq y}} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|}.$$

Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ possédant une densité continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une espérance.

1. Soit $X \in \mathscr{M}$. Montrer que pour tout $h \in \mathscr{L}$, $h(X)$ admet une espérance.

2. Soit $(X, Y) \in \mathscr{M}^2$.
Montrer qu'il existe une constante $D \geqslant 0$ dépendant de X et Y, telle que, pour tout $h \in \mathscr{L}$:

$$\big|\mathbf{E}\big(h(X)\big) - \mathbf{E}\big(h(Y)\big)\big| \leqslant D\,N(h).$$

On pose, pour tout $(X, Y) \in \mathscr{M}^2$

$$d(X, Y) = \sup_{\substack{h\in\mathscr{L}\\ N(h)\leqslant 1}} \big|\mathbf{E}\big(h(X)\big) - \mathbf{E}\big(h(Y)\big)\big|.$$

3. Montrer que d vérifie :
- **a)** $d(X, X) = 0$;
- **b)** $d(X, Y) = d(Y, X)$;
- **c)** $d(X, Z) \leqslant d(X, Y) + d(Y, Z)$.
- **d)** Soient X et $\tilde{X}$ deux variables de $\mathscr{M}$ ayant même loi. Justifier que $d(X, Y) = d(\tilde{X}, Y)$.

4. Montrer que

$$\big|\mathbf{E}(X - Y)\big| \leqslant d(X, Y) \leqslant \mathbf{E}(|X - Y|).$$

5. On suppose que X suit la loi normale $\mathscr{N}\left(\lambda, \sigma^2\right)$ et Y la loi normale $\mathscr{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Montrer que

$$d(X, Y) = |\lambda - \mu|.$$

6. On suppose que X suit la loi normale $\mathscr{N}\left(0, \sigma^2\right)$ et Y la loi normale $\mathscr{N}(0, 1)$. Montrer que

$$d(X, Y) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1 - \sigma|.$$

Partie II - le cas discret

Dans la suite, on admet ce résultat sur les produits de Cauchy :

- Pour deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définie la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

- Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors la séries $\sum c_n$ est aussi absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right).$$

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. De plus, pour X, Y deux variables aléatoires, on pose

$$d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\mathbf{P}([\mathrm{X}=n]) - \mathbf{P}([\mathrm{Y}=n])\right|.$$

7. Justifier que la quantité $d(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est bien définie.

- *Exemples*

8. Soient $p\,q, \in]0,1[$, $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{B}(q)$. Exprimer $d(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ en fonction de p et q.

9. Soient $p \in]0,1[$, $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{P}(p)$.
Établir l'égalité $d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = 2p(1-\mathrm{e}^{-p})$ et en déduire la majoration $d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \leqslant 2p^2$.

- *Distance et sommes*

10. **a)** Soient X, Y, Z, T quatre variables aléatoires mutuellement indépendantes. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|\mathbf{P}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}=n) - \mathbf{P}(\mathrm{Z}+\mathrm{T}=n)| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{Y}=j)\left|\mathbf{P}(\mathrm{X}=n-j) - \mathbf{P}(\mathrm{Z}=n-j)\right| + \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{Z}=i)\left|\mathbf{P}(\mathrm{Y}=n-i) - \mathbf{P}(\mathrm{T}=n-i)\right|.$$

b) En déduire que $d(\mathrm{X}+\mathrm{Y},\mathrm{Z}+\mathrm{T}) \leqslant d(\mathrm{X},\mathrm{Z}) + d(\mathrm{Y},\mathrm{T})$.

- *Applications*

11. Justifier que si $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $\mathrm{V} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,q)$ alors $d(\mathrm{U},\mathrm{V}) \leqslant 2n|p-q|$.
On pourra supposer les variables U *et* V *indépendantes. On rappelle aussi que si* $\mathrm{A} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, $\mathrm{B} \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$ *avec* A *et* B *indépendantes, alors* $\mathrm{A}+\mathrm{B} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$.

12. **a)** Soient $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $\mathrm{S} \hookrightarrow \mathscr{P}(np)$. Prouver l'inégalité $d(\mathrm{U},\mathrm{S}) \leqslant 2np^2$.
b) Retrouver le théorème de convergence en loi des lois de Poisson.

13. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*^+$. En utilisant les résultats précédents, montrer que

$$d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \leqslant 2|\lambda-\mu| \quad \text{si} \quad \mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda), \quad \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{P}(\mu).$$

Indication. On pourra remarquer que $d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \leqslant d(\mathrm{X},\mathrm{X}') + d(\mathrm{X}',\mathrm{Y}') + d(\mathrm{Y},\mathrm{Y}')$ *et utiliser la question 12.b).*

14. **a)** Écrire un programme python qui prend en arguments λ, n et renvoie

$$[\mathbf{P}(\mathrm{X}=0), \ldots, \mathbf{P}(\mathrm{X}=n)] \quad \text{où} \quad \mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$$

b) Faire de même pour

$$[\mathbf{P}(\mathrm{Y}=0), \ldots, \mathbf{P}(\mathrm{Y}=n)] \quad \text{où} \quad \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p).$$

On peut utiliser la commande `math.comb(n,i)` *pour calculer* $\binom{n}{i}$.

c) Tracer $\left(d(\mathrm{X}_n,\mathrm{Y})\right)_{n\in[\![1;20]\!]}$ où $\mathrm{X}_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n,\frac{1}{n}\right)$ et $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$.
Pour évaluer numériquement $d(\mathrm{X}_n,\mathrm{Y}_n)$, *on peut se limiter à calculer les 50 premiers termes de la somme.*

– FIN –

DM 3 - éléments de solution

Sujet A
D'après HEC 2004 Maths III voie E

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} c_{n+1}-c_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ c_{n+1}-c_n &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

L'intégrande est négative et les bornes dans le bon sens, donc par croissance de l'intégrale

$$c_{n+1}-c_n \leqslant 0.$$

La suite $(c_n)_n$ est décroissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} c_{n+1}+c_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^1 \\ c_{n+1}+c_n &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$c_n = \frac{1}{n} - \underbrace{c_{n+1}}_{\geqslant 0} \leqslant \frac{1}{n}.$$

De plus, par décroissance de la suite

$$2c_{n+1} \leqslant c_n + c_{n+1} \leqslant 2c_n$$

puis avec la question précédente

$$2c_{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 2c_n.$$

On a donc bien $1/n \leqslant 2c_n$ par l'inégalité de droite et l'inégalité de gauche avec le changement d'indice $n \to n-1$ donne pour tout $n \geqslant 2$

$$2c_n = 2c_{n+1-1} \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

D'où le premier résultat. De plus,

$$1 \leqslant 2nc_n \leqslant \frac{n}{n-1}$$

et par le théorème d'encadrement $2nc_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. C'est-à-dire

$$c_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

4. On a

$$c_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \big[\ln(1+x)\big]_0^1 = \ln 2.$$

Justifions par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\right).$$

est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

→ *Initialisation.* Avec la question 2,

$$c_2 = \frac{1}{1} - c_1 = 1 - \ln 2$$

et $$(-1)^2\left(\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\right) = 1 - \ln 2.$$

La propriété $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit un entier $n \geqslant 2$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. De nouveau, par la question 2

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \frac{1}{n} - c_n \\ &= \frac{1}{n} - (-1)^n\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\right) \\ &= \frac{1}{n} + (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - (-1)^{n+1}\ln 2 \end{aligned}$$

Or,

$$(-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{n} + (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - (-1)^{n+1}\ln 2 \\ 1 &= (-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie si $\mathscr{P}(n)$ l'est.

→ *Conclusion.* $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• *Rédaction 2.* Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = (-1)^n c_n$ de sorte que l'on peut retraduire l'égalité de la question 2 par

$$d_{k+1} - d_k = (-1)^{k+1}(c_{k+1} + c_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Ensuite, par télescopage

$$d_n - d_1 = \sum_{k=1}^{n-1} d_{k+1} - d_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

D'où le résultat.

5.

```
def Calculcn(n):
    c=np.log(2)
    for i in range(1,n):
        c=1/i-c
    return c
```

6. On effectue le changement de variable $u = 1/t$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;x]$:

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^n(1+t)} = \int_1^{1/x} -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\frac{1}{u^n}\left(1+\frac{1}{u}\right)}$$
$$= -\int_1^{1/x} \frac{u^{n-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u.$$

7. Puisque la fonction $u \mapsto \frac{u^{n-1}}{1+u}$ est continue sur $[0,1]$ donc la fonction $x \mapsto \int_x^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,du$ existe et est continue sur $[0,1]$. En particulier,

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u = c_n$$

$$\iff \lim_{x\to+\infty} \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u = c_n$$

$$\iff \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^n(1+t)} = c_n.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^n(1+t)}$ étant continue et positive sur $[1,+\infty[$, cette fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^n(1+t)}$ existe, ce qui notre cas. Par conséquent, la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n(1+t)} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^n(1+t)} = c_n$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c_n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n(1+t)} = \frac{c_n}{c_n} = 1.$

Finalement, f_n est bien une densité de probabilité.

8. La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t f_n(t)$ est continue sur $[0;+\infty[$, on a donc une intégrale généralisée en $+\infty$.

$$\frac{1}{x^{n-1}(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^n}$$

Par conséquent, X_n admet une densité si et seulement si $n \geqslant 2$ avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{c_n}\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^n(1+x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{c_n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{n-1}(1+x)} \\
&= \frac{c_{n-1}}{c_n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{c_{n-1}x^{n-1}(1+x)} \\
&= \frac{c_{n-1}}{c_n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{c_{n-1}}{c_n}.
\end{aligned}$$

9. Soit $x \in \mathbb{R}$.

→ Si $x < 1$, alors

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t)dt = 0.$$

→ Si $x \geqslant 1$ alors sachant que $c_1 = \ln 2$, on trouve

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int_{-\infty}^x f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x f_1(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\ln 2}\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} \\
&= \frac{1}{\ln 2}\int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\ln 2}\big(\ln(x) - \ln(1+x)\big) = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{x}{1+x}\right).
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 \leqslant y) \geqslant \frac{1}{2} &\iff F_1(y) \geqslant \frac{1}{2} \\
&\iff \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \leqslant \frac{\ln(2)}{2} = \ln(\sqrt{2}) \\
&\iff 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{1+x} = \ln(\sqrt{2}) \\
&\iff y \leqslant \sqrt{2}+1.
\end{aligned}$$

• Comme X_1 est à valeurs dans $[1;+\infty[$, Z est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Si G désigne la fonction de répartition de Z_1 :

$$G(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}^-.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Par stricte croissance de la fonction exponentielle

$$G(x) = \mathbf{P}(Z \leqslant x) = \mathbf{P}(\ln X_1 \leqslant x) = \mathbf{P}\left(X_1 \leqslant e^x\right) = F_1\left(e^x\right).$$

• La restriction de G à $]-\infty;0[$ est constante donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle. Par composition G est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$. Pour vérifier que G est continue sur $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier la continuité en 0.

En tant que fonction de répartition, G est bien continue à droite. De plus

$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{G}(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = \mathrm{G}(0).$$

C'est la continuité à gauche en 0, puis la continuité en 0.
En résumé, la fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, Z est donc une variable à densité et une densité est obtenue par dérivation

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{\ln 2} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

10. Pour tout $u \in [0;1]$

$$\frac{1}{(1+u)^2} \leqslant 1 \quad \text{puis} \quad \frac{u^n}{(1+u)^2} \leqslant u^n.$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u &\leqslant \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u + \int_0^{1/x} \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_0^1 u^n\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_{u=0}^{u=1} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_n(x) &= \int_{-\infty}^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{c_n} \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^n(1+t)} \\ &= \frac{1}{c_n} \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Intégrons par parties (les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$)

$$\begin{aligned} \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{u^n}{n} \times \frac{1}{1+u}\right]_{1/x}^1 - \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{n} \times \frac{-1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{nx^{n-1}(1+x)} + \frac{1}{n}\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Il vient

$$\mathrm{F}_n(x) = \frac{1}{2nc_n} - \frac{1}{nc_n} \times \frac{1}{x^{n-1}(1+x)} + \frac{1}{nc_n}\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u$$

Or on a vu que :

$$2nc_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1;$$

$$\frac{1}{x^{n-1}(1+x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

$$\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Finalement

$$\mathrm{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

11. On trouve 0.

Sujet *

Notons que si $h \in \mathscr{L}$, alors on a pour tous réels x, y distincts

$$|h(x) - h(y)| \leqslant \mathrm{N}(h)|x-y|.$$

Inégalité qui est aussi vraie pour $x = y$.

1. On a par hypothèse sur h :

$$|h(\mathrm{X}) - h(0)| \leqslant \mathrm{C}|\mathrm{X} - 0| = \mathrm{C}|\mathrm{X}|.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} |h(\mathrm{X})| &\leqslant |h(\mathrm{X}) - h(0) + h(0)| \\ &\leqslant |h(\mathrm{X}) - h(0)| + |h(0)| \\ |h(\mathrm{X})| &\leqslant \mathrm{C}|\mathrm{X}| + |h(0)|. \end{aligned}$$

Comme X admet une espérance, $\mathrm{C}|\mathrm{X}| + |h(0)|$ aussi. Par domination, $h(\mathrm{X})$ admet une espérance.

2. Par hypothèse sur h

$$|h(\mathrm{X}) - h(\mathrm{Y})| \leqslant \mathrm{N}(h)|\mathrm{X} - \mathrm{Y}|$$

puis par croissance de l'espérance

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(h(\mathrm{X}) - h(\mathrm{Y}))| &\leqslant \mathbf{E}(|h(\mathrm{X}) - h(\mathrm{Y})|) \\ &\leqslant \mathrm{N}(h)\mathbf{E}(|\mathrm{X} - \mathrm{Y}|). \end{aligned}$$

3.a) On a pour tout $h \in \mathscr{L}$

$$\left|\mathbf{E}\big(h(\mathrm{X}) - h(\mathrm{X})\big)\right| = 0$$

d'où $d(\mathrm{X},\mathrm{X}) = 0$.

3.b) C'est une conséquence directe de

$$|\mathbf{E}(h(\mathrm{X}) - h(\mathrm{Y}))| = |\mathbf{E}(h(\mathrm{Y}) - h(\mathrm{X}))|.$$

3.c) Soit $h \in \mathscr{L}$.
Par linéarité de l'espérance avec $\mathrm{N}(h) \leqslant 1$

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(h(\mathrm{X}) - h(\mathrm{Y}))| &= |\mathbf{E}(h(\mathrm{X}) - h(\mathrm{Z})) + \mathbf{E}(h(\mathrm{Z}) - h(\mathrm{Y}))| \\ &\leqslant |\mathbf{E}(h(\mathrm{X}) - h(\mathrm{Z}))| + |\mathbf{E}(h(\mathrm{Z}) - h(\mathrm{Y}))| \\ &\leqslant d(\mathrm{X},\mathrm{Z}) + d(\mathrm{Z},\mathrm{Y}). \end{aligned}$$

Ce résultat étant vérifié pour tout $h \in \mathscr{L}$ tel que $\mathrm{N}(h) \leqslant 1$, on a

$$\sup_{\substack{h\in\mathscr{L} \\ \mathrm{N}(h)\leqslant 1}} \left|\mathbf{E}\big(h(\mathrm{X})\big) - \mathbf{E}\big(h(\mathrm{Y})\big)\right| \leqslant d(\mathrm{X},\mathrm{Z}) + d(\mathrm{Z},\mathrm{Y}).$$

D'où $\qquad d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \leqslant d(\mathrm{X},\mathrm{Z}) + d(\mathrm{Z},\mathrm{Y}).$

3.d) Comme X et $\tilde{\mathrm{X}}$ ont même loi, ils admettent une densité f commune. Soit $h \in \mathscr{L}$. Comme les espérances existent

$$\mathbf{E}\big(h(\mathrm{X})\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}\big(h(\tilde{\mathrm{X}})\big).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big(h(\mathrm{X}) - h(\mathrm{Y})\big) &= \mathbf{E}\big(h(\mathrm{X})\big) - \mathbf{E}\big(h(\mathrm{Y})\big)\\ &= \mathbf{E}\big(h(\tilde{\mathrm{X}})\big) - \mathbf{E}\big(h(\mathrm{Y})\big)\\ \mathbf{E}\big(h(\mathrm{X}) - h(\mathrm{Y})\big) &= \mathbf{E}\big(h(\tilde{\mathrm{X}}) - h(\mathrm{Y})\big).\end{aligned}$$

Puis "en prenant" la borne supérieure

$$d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = d\left(\tilde{\mathrm{X}},\mathrm{Y}\right).$$

> Notons que si $h \in \mathscr{L}$, alors h est continue. Nous verrons que par le théorème d'égalité en loi $h(\mathrm{X})$ et $h\left(\tilde{\mathrm{X}}\right)$ ont même loi. En particulier, même espérance. La suite de la preuve est identique.

4. Il suffit de prendre $h_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, on a bien $h_0 \in \mathscr{L}$ avec $\mathrm{N}(h_0) = 1$. D'où

$$|\mathbf{E}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})| = |\mathbf{E}(h_0(\mathrm{X}) - h_0(\mathrm{Y}))| \leqslant d(\mathrm{X},\mathrm{Y}).$$

L'inégalité de droite est une conséquence de le question 2.

5. Soit $\mathrm{N} \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1)$.
On sait que X et Y ont respectivement même loi que $\sigma\mathrm{N}+\lambda$ et $\sigma\mathrm{N}+\mu$. D'après la 3.d)

$$\begin{aligned}d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= d(\sigma\mathrm{N}+\lambda,\mathrm{Y})\\ &= d(\sigma\mathrm{N}+\lambda,\sigma\mathrm{N}+\mu).\end{aligned}$$

Or $\qquad \Big|\mathbf{E}\big((\sigma\mathrm{N}+\lambda) - (\sigma\mathrm{N}+\mu)\big)\Big| = |\lambda-\mu|$

et $\quad \mathbf{E}\Big(\big|(\sigma\mathrm{N}+\lambda) - (\sigma\mathrm{N}+\mu)\big|\Big) = \mathbf{E}\big(|\lambda-\mu|\big) = |\lambda-\mu|.$

D'après les inégalités de la question précédente :

$$|\lambda-\mu| \leqslant d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \leqslant |\lambda-\mu|.$$

D'où l'égalité demandée.

> Nous verrons que si X et Y sont en plus indépendantes, alors la différence $\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ suit une loi normale $\mathscr{N}(\lambda-\mu, 2\sigma^2)$. Ce résultat simplifie la preuve.

6. La variable X a la même loi que $\sigma\mathrm{N}$, Y a la même loi que N. D'où $d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = d(\sigma\mathrm{N},\mathrm{N})$. Or

$$\mathbf{E}\big(|\sigma\mathrm{N}-\mathrm{N}|\big) = |1-\sigma|\mathbf{E}\big(|\mathrm{N}|\big)$$

et par la formule de transfert

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big(|\mathrm{N}|\big) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |t| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \quad \text{(parité)}\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_0^{+\infty}\\ \mathbf{E}\big(|\mathrm{N}|\big) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1-\sigma|.$$

En revenant à la définition, on montre même l'égalité.

7. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|\mathbf{P}(\mathrm{X}=n) - \mathbf{P}(\mathrm{Y}=n)| \leqslant \mathbf{P}(\mathrm{X}=n) + \mathbf{P}(\mathrm{Y}=n).$$

Or les séries $\sum \mathbf{P}(\mathrm{X}=n)$, $\sum \mathbf{P}(\mathrm{Y}=n)$ sont convergentes. Par le critère de majoration, la série

$$\sum |\mathbf{P}(\mathrm{X}=n) - \mathbf{P}(\mathrm{Y}=n)|$$

est bien convergente. La somme $d(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ est donc bien définie.

8. On a $\mathrm{X}(\Omega) = \mathrm{Y}(\Omega) = \{0;1\}$

$$\begin{aligned}d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathbf{P}(\mathrm{X}=n) - \mathbf{P}(\mathrm{Y}=n)|\\ &|\mathbf{P}(\mathrm{X}=0) - \mathbf{P}(\mathrm{Y}=0)| + |\mathbf{P}(\mathrm{X}=1) - \mathbf{P}(\mathrm{Y}=1)|\\ &\big|(1-p)-(1-q)\big| + |p-q|\\ d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= 2|p-q|.\end{aligned}$$

9. On a $\mathrm{X}(\Omega) = \{0;1\}$ et $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}d(\mathrm{X},\mathrm{Y}) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mathbf{P}(\mathrm{X}=n) - \mathbf{P}(\mathrm{Y}=n)|\\ &= |\mathbf{P}(\mathrm{X}=0) - \mathbf{P}(\mathrm{Y}=0)| + |\mathbf{P}(\mathrm{X}=1) - \mathbf{P}(\mathrm{Y}=1)|\\ &\quad + \sum_{n\geqslant 2} |\mathbf{P}(\mathrm{X}=n) - \mathbf{P}(\mathrm{Y}=n)|\\ &= \left|1-p-\mathrm{e}^{-p}\right| + \left|p-p\mathrm{e}^{-p}\right| + \sum_{n\geqslant 2} \mathbf{P}(\mathrm{Y}=n).\end{aligned}$$

Or $\qquad \left|1-p-\mathrm{e}^{-p}\right| = \mathrm{e}^{-p} - (1-p)$

d'après l'inégalité de convexité $\mathrm{e}^{-p} \geqslant 1-p$.

De plus $\qquad \left|p-p\mathrm{e}^{-p}\right| = p\left(1-\mathrm{e}^{-p}\right).$

Et

$$\sum_{n\geqslant 2}\mathbf{P}(Y=n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(Y=n)-\mathbf{P}(Y=1)-\mathbf{P}(Y=0)$$
$$=1-pe^{-p}-e^{-p}$$
$$=1-e^{-p}(1+p).$$

Au total, on trouve

$$d(X,Y)=e^{-p}-1+p+p-pe^{-p}+1-e^{-p}-pe^{-p}$$
$$=2p+\left(-2pe^{-p}\right)$$
$$d(X,Y)=2p(1-e^{-p}).$$

La majoration découle de l'inégalité de convexité

$$e^{-p}\geqslant 1-p \quad \text{puis} \quad p\geqslant 1-e^{-p}.$$

10.a) Soit $n\in\mathbb{N}$. À l'aide de la formule des probabilités totales avec le systèmes complets d'événements $([Y=j])_{j\in\mathbb{N}}$

$$\mathbf{P}(X+Y=n)=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbf{P}([X+Y=n]\cap[Y=j])$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}([X+Y=n]\cap[Y=j])$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}([X=n-j]\cap[Y=j])$$
$$\mathbf{P}(X+Y=n)=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(X=n-j)\mathbf{P}(Y=j).$$

De même

$$\mathbf{P}(Z+T=n)=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(Z=n-j)\mathbf{P}(T=j).$$

D'où

$$\mathbf{P}(X+Y=n)-\mathbf{P}(Z+T=n)$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(Y=j)\big(\mathbf{P}(X=n-j)-\mathbf{P}(Z=n-j)\big)$$
$$+\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(Y=j)\mathbf{P}(Z=n-j)-\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(Z=n-j)\mathbf{P}(T=j)$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(Y=j)\big(\mathbf{P}(X=n-j)-\mathbf{P}(Z=n-j)\big)$$
$$+\sum_{j=0}^{n}\mathbf{P}(Z=n-j)\big(\mathbf{P}(Y=j)-\mathbf{P}(T=j)\big).$$

Le résultat s'en déduit par l'inégalité triangulaire.

Le résultat reste valable sans l'hypothèse d'indépendance.

4.b) D'après le rappel sur les séries de Cauchy avec les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par

$$a_n=\mathbf{P}(Y=n) \quad \text{et} \quad b_n=|\mathbf{P}(X=n)-\mathbf{P}(Z=n)|$$

pour une suite $(c_n)_n$ vérifiant

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(Y=k)|\mathbf{P}(X=n-k)-\mathbf{P}(Z=n-k)|,$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbf{P}(Y=i)\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|\mathbf{P}(X=j)-\mathbf{P}(Z=j)|\right)$$
$$=1\times d(X,Z).$$

De même avec la suite $(d_n)_n$ définie par

$$d_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(Z=k)|\mathbf{P}(Y=n-k)-\mathbf{P}(T=n-k)|,$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}d_n=1\times d(Y,T).$$

Le résultat s'en déduit par somme sur les inégalités de la question précédente.

12.a) Procédons par récurrence sur la propriété

$$\mathscr{H}(n):\ \text{si}\ \begin{cases}U\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)\\ S\hookrightarrow\mathscr{P}(np)\end{cases} \quad \text{alors} \quad d(U,S)\leqslant 2np^2.$$

→ La propriété $\mathscr{H}(1)$ est un cas particulier traité à la question 9.

→ Soit $n\in\mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{H}(n)$ vraie.
Soient $U\hookrightarrow\mathscr{B}(n+1,p)$ et $S\hookrightarrow\mathscr{P}((n+1)p)$. On sait qu'il existe quatre variables aléatoires indépendantes telles que

$$\begin{matrix}X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p) & Z\hookrightarrow\mathscr{P}(np)\\ Y\hookrightarrow\mathscr{B}(p) & T\hookrightarrow\mathscr{P}(p)\end{matrix}$$

et $X+Y$ a la même loi que U, $Z+T$ même loi que S.

Bien distinguer l'égalité en loi de l'égalité des variables aléatoires.

Comme la distance ne dépend que des lois

$$d(U,S)=d(X+Y,Z+T)$$
$$\leqslant d(X,Z)+d(Y,T)$$
$$\leqslant 2np^2+2p^2$$
$$d(U,S)\leqslant 2(n+1)p^2.$$

Dès lors $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie si $\mathscr{H}(n)$ l'est.
→ En conclusion, $\mathscr{H}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

12.b) Soient $(X_n)_n$, une suite de variables aléatoires telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$$

et $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. D'après ce qui précède

$$d(X_n, Y) \leqslant 2n\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or on a aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(Y = k)\right| \leqslant d(X_n, Y).$$

Par encadrement

$$\mathbf{P}(X_n = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}(Y = k)$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant \max(\lambda, \mu)$. On peut donc considérer

$$X_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right) \quad \text{et} \quad Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{\mu}{n}\right)$$

On a alors

$$\begin{aligned} d(X, Y) &\leqslant d\,(X, X_n) + d\,(X_n, Y) \\ &\leqslant d\,(X, X_n) + d\,(X_n, Y_n) + d\,(Y_n, Y)\,. \end{aligned}$$

D'une part (question 9)

$$d\,(X, X_n) \leqslant 2n\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 = \frac{2\lambda^2}{n}, \quad d\,(Y_n, Y) \leqslant \frac{2\mu^2}{n}.$$

D'autre part, on a avec la question 11

$$d\,(X_n, Y_n) \leqslant 2n\left|\frac{\lambda}{n} - \frac{\mu}{n}\right| = 2|\lambda - \mu|.$$

On en déduit que

$$d(X, Y) \leqslant 2\frac{(\lambda^2 + \mu^2)}{n} + 2|\lambda - \mu|.$$

Ce résultat étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$d(X, Y) \leqslant \lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{\lambda^2 + \mu^2}{n} + |\lambda - \mu|\right) \leqslant 2|\lambda - \mu|.$$

14.a) Si on note pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$p_i = \mathbf{P}(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$$

alors $\qquad p_{i+1} = \lambda p_i / (i + 1).$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math as m

def Poi(lbda,n) :
    u=np.exp(-lbda)
    Termes=np.zeros(n+1)
    Termes[0]=u
    for i in range(n) :
            Termes[i+1]=Termes[i]*lbda/(i
                +1)
    return Termes
```

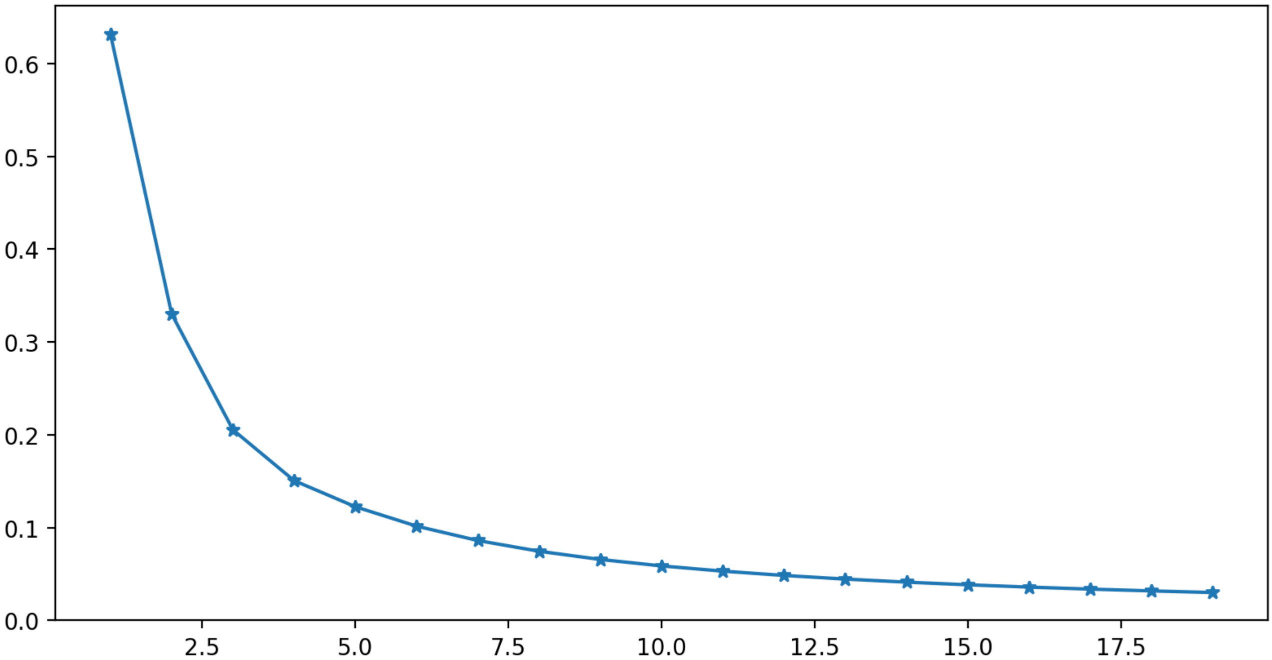
14.b)

```
def Bin(p,n) :
    q=1-p
    Termes=np.zeros(n+1)
    for i in range(n+1) :
            Termes[i]=p**i*q**(n-i)*m.comb
                (n, i)
    return Termes
```

14.c)

```
def ApproxDistance(n):
    N=n+50
    P=Poi(1,N)
    B=Bin(1/n,n)
    d=0
    for i in range(n):
        d+=abs(P[i]-B[i])
    for i in range(n+1,N+1):
        d+=P[i]
    return d

Dist=np.zeros(19)
for i in range(19):
    Dist[i]=ApproxDistance(i+1)
plt.plot(np.arange(1,20),Dist,'-*')
plt.show()
```


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5