# TD 5

## Thèmes : Séries de Fourier, algèbre bilinéaire

### A. Préliminaires

Dans la suite, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $]-\pi;\pi[$, $2\pi$-périodiques avec des limites finies en $\pm\pi$. Pour tout $f \in \mathrm{E}$, on définit les coefficients de Fourier par :

$$a_0(f) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad b_0(f) = 0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

On définit de plus la matrice $\qquad \widehat{\mathrm{F}}_n(f) = a_n(f)\,\mathrm{I}_2 + b_n(f)\,\mathrm{J} \quad$ où $\quad \mathrm{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

- *Régularité et décroissance des coefficients de Fourier*

**1.** Justifier que l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ par

$$\forall\,(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2, \qquad \varphi(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{A}\mathrm{B}\right)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

**2.** On suppose dans cette question que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**a)** Montrer que : $\; a_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad$ et $\quad b_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**b)** En déduire que $\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

*On admet que ce résultat est encore valable même lorsque $f$ est continue (de classe $\mathcal{C}^0$).*

**3.** Vérifier que si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\quad \widehat{\mathrm{F}}_n(f') = -n\mathrm{J}\,\widehat{\mathrm{F}}_n(f)$.

**4.** Comparer $\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f')\right\|$ et $\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\right\|$.

**5.** En déduire que si $f$ est de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p \in \mathbb{N}$ alors $\quad \left\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\right\| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$.

- *Un produit scalaire sur* E

**6.** Vérifier que l'application définie sur $\mathrm{E}^2$ par

$$\forall\,(f,g) \in \mathrm{E}^2, \qquad \langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur E. On note $\mathrm{N}(\cdot)$, la norme associée.

**7.** Notons $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{I}$), le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions paires (respectivement impaires). Vérifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

**8. a)** Justifier que pour tous $a$, $b \in \mathbb{R}$, $\cos(a)\cdot\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$.

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions $f_k$ pour $k \in [\![0; n]\!]$ par

$$f_0 : t \in \mathbb{R} \mapsto 1/\sqrt{2} \quad \text{et pour } k \geqslant 1 \quad f_k : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(kt).$$

Justifier que la famille $\mathcal{F}_n$ constituée des fonctions $(f_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

*De la même manière, on montre que la famille $\mathcal{G}_n$ constituée des fonctions $g_k : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(kt)$ pour $k \in [\![1; n]\!]$ est orthonormée.*

**9.** Vérifier que la concaténation des familles $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ forme une famille orthonormée de E.

**10.** Soit $f \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n)$. Démontrer que

$$\mathrm{N}(f)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left\| \widehat{\mathrm{F}}_k(f) \right\|^2.$$

*On peut montrer que si la fonction $f$ est « suffisamment régulière » alors pour tout réel $x$, $\mathrm{S}_n(f)(t)$ tend vers $f(t)$ lorsque $n \to +\infty$. On peut en déduire que la limite de $\Big(\mathrm{N}\big(\mathrm{S}_n(f)\big)\Big)_n$ est alors $\mathrm{N}(f)$. La preuve est accessible avec les outils de deuxième année mais elle n'est pas dans l'esprit du programme, on propose donc de le vérifier numériquement avec python.*

### B - Calculs approchés des coefficients de Fourier

On démontre que pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x]$, on a la formule de Simpson

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{P}(x)\mathrm{d}x = \frac{\beta - \alpha}{6} \left[ \mathrm{P}(\alpha) + 4\mathrm{P}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \mathrm{P}(\beta) \right].$$

Partant de ce constant, pour une fonction continue $f$, on approxime l'intégrale sur $[\alpha; \beta]$ par

$$\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x \simeq \mathrm{I}(f, \alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{6} \left[ f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta) \right] \qquad (\bullet)$$

Pour obtenir une meilleure approximation sur un segment $[a; b]$, on partitionne uniformément le segment $[a; b]$ en $p$ sous-segments. Sur chacun sous-segment, on approxime l'intégrale à l'aide de la relation $(\bullet)$. Une approximation d'ordre $p$ est alors donnée par

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{I}\big(f, a + kh, a + (k+1)h\big) \quad \text{où} \quad h = \frac{b-a}{p}.$$

**11.** Compléter la fonction `Approx` qui prend en arguments un entier naturel non nul $p$, une fonction $f$, deux réels $a$, $b$ et renvoie une approximation de $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du schéma décrit ci-dessus.

**Editeur**

```
def Approx( ... ):
    I=
    h=
    for k in ... :
        alpha= ...
        beta= ...
        I=  ...
    return I
```

**12.** Modifier la fonction précédente pour obtenir une fonction python `an` qui prend en arguments un entier naturel $n$, une fonction $f$ et renvoie une approximation de $a_n(f)$ (on pourra choisir $p = 20$).

**13.** En déduire une fonction python `aCoeff` qui prend en arguments un entier naturel N, une fonction $f$ et renvoie une matrice ligne contenant une approximation de

$$\begin{bmatrix} a_0(f) & a_1(f) & \dots & a_{\mathrm{N}}(f) \end{bmatrix}.$$

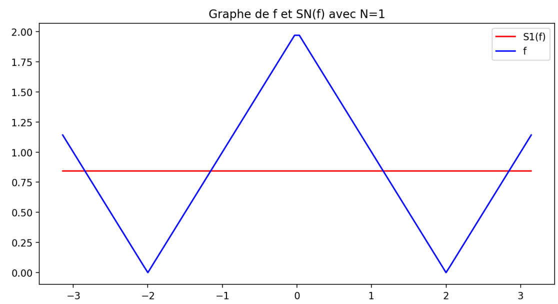
De même, on admet que l'on dispose d'une fonction `bCoeff` qui prend en arguments un entier naturel N, une fonction $f$ et renvoie une matrice ligne contenant une approximation de $\begin{bmatrix} 0 & b_1(f) & \dots & b_{\mathrm{N}}(f) \end{bmatrix}$.

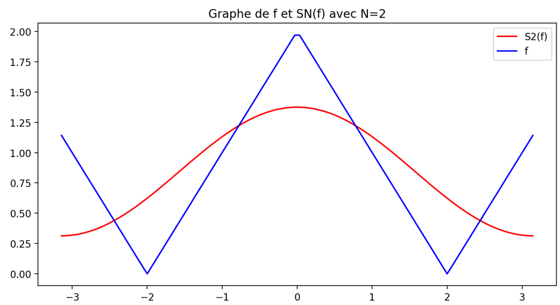
**14.** Compléter le programme qui permet d'afficher $\mathrm{S_N}(f)$ pour la fonction $f \in \mathrm{E}$ définie sur $[-\pi;\pi]$ par $f(t) = \big||t|-2\big|$.

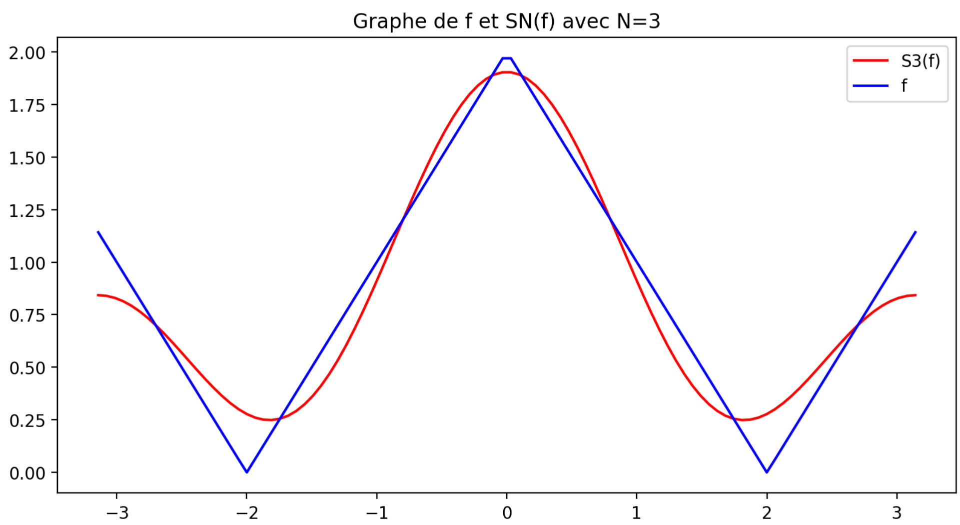
**Editeur**

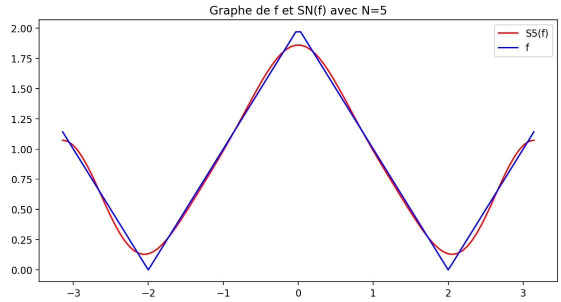
```python
def f(t):
    ...
    return ...
```

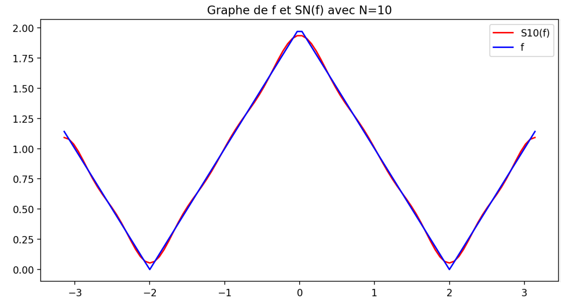
```python
N=10 # un choix d'une valeur de N
x=np.linspace(-np.pi,np.pi,100)
A=aCoeff(f,N), B=bCoeff(f,N)
Y=np.zeros(100)
for i in range(0,100):
    Y[i]=A[0]/np.sqrt(2)
    for k in range(1,N+1):
        Y[i]= ...
plt.plot(x,Y,'r')
plt.plot(x,f(x),'b')
plt.show()
```








## C - Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$ via l'égalité de Parseval

On admet dans la suite que pour toute fonction $f$ de E

$$\mathrm{N}(f)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left\|\widehat{\mathrm{F}}_k(f)\right\|^2.$$

**15.** Préciser les coefficients de Fourier de la fonction $f$ périodique de période $2\pi$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in ]-\pi;\pi]$.

**16.** En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

**17.** Calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ en considérant maintenant la fonction $f$ périodique de période $2\pi$ définie sur $]-\pi;\pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,\pi], \\ 0 & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \end{cases}$$

– FIN –

# Éléments de solution

**1.** Par les propriétés de la trace, l'application est bien une forme bilinéaire symétrique.

- Pour $\mathrm{A} = (a_{ij})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$, vérifier que

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^t\mathrm{A}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2 \geqslant 0.$$

En particulier, si $\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^t\mathrm{A}\right) = 0$, on obtient une somme de termes positifs qui est nulle. Nécessairement, chaque terme est nul.

$$\forall\, i,\, j \in [\![1;n]\!], \qquad a_{ij} = 0.$$

La matrice A est nulle.

**2.a)** On a par intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \left[-f(t)\left(\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

On constate que le crochet est nul puisque la fonction $f$ est périodique $f(\pi) = f(-\pi)$. De plus, par l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left|f'(t)\cos(nt)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t.$$

On obtient donc

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\mathrm{Cste}}{n}.$$

Par le théorème d'encadrement $b_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
De même, on montre que $a_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**2.b)** *Rédaction 1*

On vérifie que si $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors

$$\|\mathrm{A}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Dans ce cas

$$\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\right\| = \sqrt{2a_n(f)^2 + 2b_n(f)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

*Rédaction 2*
Par l'inégalité triangulaire

$$\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\right\| \leqslant |a_n(f)|\cdot\|\mathrm{I}_2\| + |b_n(f)|\cdot\|\mathrm{J}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Procédons par intégrations par parties (les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$).

$$\begin{aligned}
\pi a_n\left(f'\right) &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{[f(t)\cos(nt)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= n\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \pi n b_n(f).
\end{aligned}$$

Ainsi $\qquad a_n\left(f'\right) = nb_n(f).$

De même, on établit que

$$b_n\left(f'\right) = -na_n(f).$$

Puis

$$\begin{aligned}
-n\mathrm{J}\widehat{\mathrm{F}}_n(f) &= \begin{bmatrix} 0 & -n \\ n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n(f) & b_n(f) \\ -b_n(f) & a_n(f) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_n(f)n & -na_n(f) \\ na_n(f) & b_n(f)n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_n\left(f'\right) & b_n\left(f'\right) \\ -b_n\left(f'\right) & a_n\left(f'\right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

On a bien $\qquad \widehat{\mathrm{F}}_n\left(f'\right) = -n\mathrm{J}\widehat{\mathrm{F}}_n(f).$

**4.** Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En remarquant que ${}^t\mathrm{J}\mathrm{J} = \mathrm{I}_2$

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{JA}\|^2 &= \mathrm{Tr}\left((\mathrm{JA})^t(\mathrm{JA})\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t(\mathrm{JA})(\mathrm{JA})\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{A}{}^t\mathrm{JJA}\right) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{AA}\right) = \|\mathrm{A}\|^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n\left(f'\right)\right\| = |-n|\cdot\left\|\mathrm{J}\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\right\| = n\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\right\|.$$

**5.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $f^{(p)}$, la dérivée $p$-ième de $f$. Par récurrence sur le résultat précédent

$$n^p\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n(f)\right\| = \left\|\widehat{\mathrm{F}}_n\left(f^{(p)}\right)\right\|.$$

Or, en reprenant la première question avec $f^{(p)}$ de classe $\mathcal{C}^0$ (continue), on a

$$\left\|\widehat{\mathrm{F}}_n\left(f^{(p)}\right)\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat.

**6.** Justifions que l'application $\varphi$ suivante est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0\big([a;b]\big)$.

$$\forall\, f,\, g \in \mathcal{C}^0\big([a;b]\big), \qquad \varphi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

⇀ *Symétrie*
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0\big([a;b]\big)$.

$$\begin{aligned}\varphi(f,g) &= \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b g(t)f(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(g,f).\end{aligned}$$

⇀ *Bilinéarité*
Justifions la linéarité à gauche. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f$, $g$, $h \in \mathcal{C}^0\big([a,b]\big)$, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + g, h) &= \int_a^b \big(\lambda f(t) + g(t)\big)h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_a^b f(t)h(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\varphi(f,h) + \varphi(g,h).\end{aligned}$$

Par symétrie, on obtient la linéarité à droite et donc la bilinéarité.

⇀ *Positivité*
Pour $f \in \mathcal{C}^0([a;b])$. Par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens

$$\varphi(f,f) = \int_a^b \underbrace{f(t)^2}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

⇀ *Définie*
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b])$ telle que

$$\varphi(f,f) = \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction $t \in [a;b] \mapsto f(t)^2$ est positive et continue, par le cours, la fonction $f$ est nulle sur $[a;b]$.

L'application $\varphi$ est bien un produit scalaire.

**7.** Soit $f \in \mathrm{E}$. On a pour tout réel $x$

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{=p(x)} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{=i(x)}.$$

On vérifie que $p$ est $i$ sont respectivement des fonctions paire et impaire. Il vient

$$\mathrm{E} = \mathcal{P} + \mathcal{I}.$$

Ensuite, pour $f \in \mathcal{P}, g \in \mathcal{I}$, la fonction $fg$ est impaire et par intégration sur un segment centré

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

D'où $\langle f, g\rangle = 0$. On en déduit que les sous-espaces $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces orthogonaux. En particulier, ils sont en somme directe.
On a ainsi montré que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

**8.a)** On part des formules trigonométriques :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

En sommant, on obtient la relation de l'énoncé.

**8.b)** Soient $k$, $p \in [\![0;n]\!]$.
⇀ Si $k \neq p$, $k \neq 0$, $p \neq 0$

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(pt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt-pt) + \cos(kt+pt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k-p)t)}{k-p} + \frac{\sin((k+p)t)}{k+p}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.\end{aligned}$$

⇀ Pour $k = p$, $k \neq 0$, $p \neq 0$

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(pt)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2kt)\,\mathrm{d}t = \pi + 0 = \pi.\end{aligned}$$

⇀ Pour $k = p = 0$, on trouve

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)f_0(t)\cos(pt)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2} = \pi.$$

⇀ Si $k = 0$, $p \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)\cos(pt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Le résultat s'en déduit

$$\forall\, p,\, k \in [\![0;n]\!], \quad \langle f_p, f_k\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq k \\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

La famille $\mathcal{F}_n$ est orthonormée.

**9.** On a

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_n) \subset \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}(\mathcal{G}_n) \subset \mathcal{I}.$$

Or, on a vu que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont orthogonaux dans E. La concaténation des deux familles orthonormées reste donc orthonormée.

**10.** La famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\big(\mathcal{F}_n, \mathcal{G}_n\big)$. On sait alors que

$$f = \sum_{k=0}^{n} \langle f, f_k\rangle\; f_k + \sum_{k=1}^{n} \langle f, g_k\rangle\; g_k.$$

Et on a aussi l'expression de la norme

$$\mathrm{N}(f)=\sum_{k=0}^{n}\langle f,f_k\rangle^2+\sum_{k=1}^{n}\langle f,g_k\rangle^2 .$$

Or $a_0(f)=\langle f,f_0\rangle$ et pour tout $k\in [\![1;n]\!]$

$$a_k(f)=\langle f,f_k\rangle \quad \text{et} \quad b_k(f)=\langle f,g_k\rangle .$$

On a donc $\qquad \mathrm{N}(f)=\sum_{k=0}^{n}a_k(f)^2+\sum_{k=1}^{n}b_k(f)^2.$

Sachant que $b_0(f)=0$, il vient

$$\mathrm{N}(f)=\sum_{k=0}^{n}\left(a_k(f)^2+b_k(f)^2\right).$$

On a aussi vu à la question 2.b) que

$$\left\|\widehat{\mathrm{F}}_k(f)\right\|^2=2a_k(f)^2+2b_k(f)^2.$$

On peut donc conclure

$$\mathrm{N}(f)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left\|\widehat{\mathrm{F}}_k(f)\right\|^2.$$

**11.**

```
def Approx(p,f,a,b):
    I=0
    h=(b-a)/p
    alpha=a
    beta=a+h
    for k in range(p) :
        I+=f(alpha)+4*f((alpha+beta)/2)+f(
            beta)
        alpha=alpha+h
        beta=beta+h
    return I/(6*h)
```

*Cette méthode d'approximation est dite méthode des trapèze. Elle est basée sur la formule de Simpson.*

**12.** On approxime $a_n(f)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi-(-\pi)}{6p}\sum_{k=0}^{p-1}g\left(\alpha_k\right)+4g\left(\frac{\alpha_k+\beta_k}{2}\right)+g\left(\beta_k\right)$$

où $g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=f(t)\cos(nt)$ et

$$h=\frac{2\pi}{p},\quad \alpha_k=a+kh,\quad \beta_k=a+(k+1)h.$$

Précisons que le coefficient devant la somme est donc $1/(3p)$.

```
def an(f,n):
    p=20
    I=0
    a=-np.pi
    b=np.pi
    h=(b-a)/p
    alpha=a
    beta=a+h
    for i in range(p):
        I+=f(alpha)*np.cos(n*alpha)+4*f((
            alpha+beta)/2)*np.cos(n*(alpha
            +beta)/2)+f(beta)*np.cos(n*
            beta)
        alpha=alpha+h
        beta=beta+h
    if n==0:
        return I/((2)**(1/2)*3*p)
    else : return I/(3*p)

def bn(f,n):
    p=20
    I=0
    a=-np.pi
    b=np.pi
    h=(b-a)/p
    alpha=a
    beta=a+h
    for i in range(p):
        I+=f(alpha)*np.sin(n*alpha)+4*f((
            alpha+beta)/2)*np.sin(n*(alpha
            +beta)/2)+f(beta)*np.sin(n*
            beta)
        alpha=alpha+h
        beta=beta+h
    return  I/(3*p)
```

**13.**

```
def aCoeff(f,n):
    C=np.zeros(n+1)
    for i in range(0,n):
        C[i]= an(f,i)
    return C

def bCoeff(f,n):
    C=np.zeros(n+1)
    for i in range(0,n):
        C[i]= bn(f,i)
    return C
```

**14.**

```
def f(t):
    return np.abs(np.abs(t)-2)



N=5
x=np.linspace(-np.pi,np.pi,100)
A=aCoeff(f,N)
B=bCoeff(f,N)
Y=np.zeros(100)
for i in range(0,100):
    Y[i]=A[0]/np.sqrt(2)
    for k in range(1,N+1):
        Y[i]=Y[i]+np.cos(k*x[i])*A[k]+np.
            sin(k*x[i])*B[k]

plt.plot(x,Y,'r')
plt.plot(x,f(x),'b')
plt.show()
```

*Ce sujet n'est qu'une très courte introduction aux séries de Fourier qui ont des applications très variées. Introduites historiquement pour la résolution de l'équation de la chaleur, on les retrouve par exemple dans l'analyse des traitements du signal, des images, etc.*

**15.** La fonction $f$ est paire, ses coefficients en sinus sont nuls, et on a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

La calcul de $a_n$ se fait par une double intégration par parties, et on trouve

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

**16.** Appliquons l'égalité de Parseval, ($f$ est continue)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1} \frac{16}{n^4}$$

Soit en simplifiant

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

**17.** On trouve

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^4}{6}.$$