DS 3 - sujet A

THÈMES : VARIABLES À DENSITÉ, DIAGONALISATION

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

Soit T une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Soient a un nombre réel strictement positif et X la variable aléatoire définie par

$$X = |T| + a.$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2. En déduire que X est une variable à densité et préciser une densité f de X.

3. Écrire une fonction python `Approx` qui prend en argument a et renvoie une approximation de l'espérance et une approximation de la variance de X.
On pourra utiliser la commande `rd.normal(m,d,q)` *qui simule une réalisation d'une matrice de $\mathcal{M}_{1,q}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{N}(m,d^2)$.*

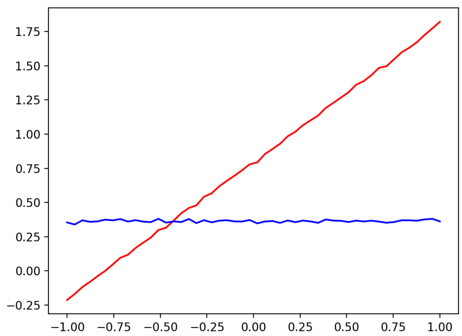
4. a) Exprimer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ en fonction de a. *Pour la variance, on pourra commencer par donner la valeur de* $\mathbf{E}(T^2)$.

b) Expliquer si les résultats obtenus sont en accord avec les simulations python suivantes :

Editeur

```
a=np.linspace(-1,1,50)
E=np.zeros(50)
V=np.zeros(50)
for i in range(50):
    e,v=Approx(a[i])
    E[i]=e
    V[i]=v

plt.plot(a,E,color='red')
plt.plot(a,V,color='blue')
plt.show()
```



Problème A : étude du crochet de Lie

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^m = 0$; le plus petit entier p tel que $M^p = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de M.
Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $[u,v]$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $[u,v] = u \circ v - v \circ u$.
Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit de même $[A,B] = AB - BA$. La matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant fixée, on note Φ_A l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe $[A,M]$; ainsi :

$$\Phi_A(M) = AM - MA.$$

5. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I - Exemple 1 avec $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et que A est la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est constituée des quatre matrices :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Étude de* A

6. Est-ce que la matrice A est diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

7. **a)** Expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
On choisira pour P *une matrice dont les termes de la première ligne sont tous les deux égaux à 1.*
b) Expliciter P^{-1}.

- *Étude de* Φ_A

8. Déterminer la matrice J de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, matrice de Φ_A dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Est-ce que Φ_A est diagonalisable ?

9. On pose

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Montrer que $\mathscr{B} = (A, F_1, F_2, F_3)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Donner la matrice de Φ_A dans la base $\mathscr{B}$.
On pourra s'appuyer sur les calculs python suivants :

Editeur

```python
def test(M):
    A=np.ones([2,2])
    return np.dot(A,M)-np.dot(M,A)

F1=np.array([[1,-1],[-1,1]])
F2=np.array([[1,1],[-1,-1]])
F3=np.array([[1,-1],[1,-1]])
```

Console

```
>>> test(F1)
array([[0., 0.],
       [0., 0.]])
>>> test(F2)
array([[-2., -2.],
       [ 2.,  2.]])
>>> test(F3)
array([[ 2., -2.],
       [ 2., -2.]])
```

Partie II - Exemple 2 avec $n = 2$

On suppose toujours $n = 2$ et on pose

$$\Delta = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad \text{où} \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$$

Dans cette partie, A est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ admettant a et b comme valeurs propres.

10. Justifier l'existence d'une matrice Q inversible telle que $A = Q\Delta Q^{-1}$.

Soit Q une telle matrice, on définit alors l'endomorphisme ψ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), \qquad \psi(M) = QMQ^{-1}.$$

11. Justifier que pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

$$\Phi_A\big(\psi(M)\big) = \psi\big(\Phi_\Delta(M)\big).$$

12. Pour tout entier i de $[\![1,4]\!]$, on pose $K_i = \psi(E_i)$.
Montrer que (K_1, K_2, K_3, K_4) est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

13. **a)** Montrer que, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, K_i est vecteur propre de Φ_A.
b) En déduire que Φ_A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Partie III - exemple avec les endomorphismes

14. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on ne peut pas trouver deux matrices A et B telles que $[A, B] = I_n$.

- On considère dans la suite $E = \mathbb{R}[x]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et les endomorphismes de E, notés f et d tels que, pour tout polynôme R de E, on a :
$$f(R)(x) = xR(x) \quad \text{et} \quad d(R)(x) = R'(x).$$

,

15. **a)** Calculer, pour tout R de E, $[d, f](R)$. Quel est l'endomorphisme $[d, f]$?
b) Ce résultat est-il en contradiction avec celui de la question précédente ?

Partie IV - condition suffisante de nilpotence

Dans cette partie, on se donne f, g, deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que
$$[f, g] = \alpha f + \beta g \quad \text{où} \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Dans les trois prochaines questions, on suppose que $\beta = 0$.

16. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $\left[f^k, g\right] = \alpha k f^k$.

17. On suppose que $f^m \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, avec $m \in \mathbb{N}$. Montrer alors que les applications $\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^m$ sont libres dans $\mathscr{L}(E)$.

18. Conclure en montrant que l'endomorphisme f est nilpotent. C'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

19. On revient au cas général de $\beta \in \mathbb{R}$. Justifier que $\alpha f + \beta g$ est nilpotent.

Problème B : Loi de survie et taux de panne / coefficient d'avarie

Partie A : le cas continu

On appelle durée de vie d'un composant électronique la durée de fonctionnement de ce composant jusqu'à sa première panne éventuelle. On considère un composant électronique dont la durée de vie est modélisée par une variable aléatoire T définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
Si F est la fonction de répartition de cette variable aléatoire, on appelle loi de survie du composant la fonction D définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad D(t) = 1 - F(t).$$

On suppose dans la suite que T est une variable aléatoire de densité f nulle sur $\mathbb{R}_*^-$, continue sur $\mathbb{R}^+$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_*^+$.

Pour tout réel t positif, on appelle coefficient d'avarie à l'instant t le nombre $\pi(t)$ défini par :
$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)}.$$

- Soit t un réel positif.
Pour tout réel strictement positif h, on note $q(t, h)$ la probabilité que le composant tombe en panne entre les instants t et $t + h$ sachant qu'il fonctionne encore à l'instant t, c'est-à-dire le nombre $q(t, h)$ défini par :
$$q(t, h) = \mathbf{P}_{[T>t]}\big(T \in]t, t+h]\big).$$

20. Établir pour tout réel h strictement positif, l'égalité : $\quad q(t, h) = \dfrac{D(t) - D(t+h)}{D(t)}$.

21. **a)** Montrer que la fonction D est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et préciser sa fonction dérivée.
b) Montrer que le rapport $\frac{q(t,h)}{h}$ a pour limite $\pi(t)$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures.

22. • *Exemple 1, le cas exponentiel.*
On suppose, dans cette question, que λ est un réel strictement positif et que T suit la loi exponentielle de paramètre λ.
a) Déterminer alors la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative.
b) Établir, pour tout réel t positif, l'égalité $\pi(t) = 1/\mathbf{E}(T)$.

- *Exemple 2.*
On suppose dans cette question que la densité f de la variable aléatoire T est définie par :
$$f(t) = \begin{cases} t e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

23. Vérifier que la fonction f est une densité de probabilité.

- On admet les égalités suivantes (vues à l'exercice 1) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

24. Montrer que la variable aléatoire T^2 suit une loi exponentielle et préciser son paramètre. En déduire la variance de la variable aléatoire T.

25. Déterminer la loi de survie du composant et donner l'allure de sa courbe représentative en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et le point d'inflexion. On donne : $e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,607$.

26. Calculer, pour tout réel t positif, le coefficient d'avarie $\pi(t)$.

- *Le cas constant*

  On suppose dans cette question qu'il existe une constante α strictement positive telle que l'on ait : $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \pi(t) = \alpha$.

27. Pour tout réel t positif, on pose : $g(t) = e^{\alpha t} D(t)$. Montrer que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}^+$.

28. En déduire que T suit une loi exponentielle et préciser son paramètre.

- *Exemple inverse*

  La durée de vie (en années) du composant est une variable aléatoire X dont le coefficient d'avarie est la fonction π définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\pi(t) = t^3$.

29. Quelle est la probabilité que ce composant survive plus d'un an ?

On pourra dans un premier temps considérer la dérivée de $x \mapsto \ln(1 - F(x))$ pour déterminer $F(x)$ où F représente la fonction de répartition de X.

30. Quelle est la probabilité que ce composant, âgé de 1 an, survive plus de 2 ans ?

Partie B - Entretien préventif

On désire, dans cette partie, comparer le coût de deux méthodes d'entretien.

On suppose que la variable aléatoire T admet une espérance (nécessairement strictement positive) notée $\mathbf{E}(T)$ et représentant donc la durée moyenne de fonctionnement d'un composant.

On considère que la panne d'un composant provoque un préjudice de coût C, et que son remplacement a un coût K, C et K étant deux constantes strictement positives.

Une première méthode d'entretien consiste à attendre la panne pour procéder au remplacement. On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné par :

$$c_1 = \frac{K + C}{\mathbf{E}(T)}.$$

Une deuxième méthode d'entretien consiste à se fixer un réel θ strictement positif et à remplacer le composant dès sa panne si elle survient au bout d'une durée de fonctionnement inférieure à θ, sinon à le remplacer préventivement au bout d'une durée θ de fonctionnement.

On estime alors que le coût de l'entretien du composant par unité de temps est donné en fonction de θ par :

$$c_2(\theta) = \frac{K + (1 - D(\theta))C}{\int_0^\theta D(t)\,dt}.$$

31. À l'aide d'une intégration par parties, établir la formule :

$$\int_0^\theta D(t)\,dt = \mathbf{P}([T > \theta]) \cdot \theta + \mathbf{P}([T \leqslant \theta]) \cdot \int_0^\theta t \frac{f(t)}{F(\theta)}\,dt$$

L'intégrale $\int_0^\theta D(t)\,dt$ peut donc s'interpréter comme la durée moyenne de fonctionnement du composant dans la deuxième méthode.

32. Calculer c_1 et, pour tout réel θ strictement positif, $c_2(\theta)$ dans le cas où T suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Montrer qu'alors la deuxième méthode ne présente pas d'avantage. Comment peut-on expliquer ce résultat ?

33. On suppose que T suit la loi décrite dans la question 23.

a) Préciser la valeur de c_1 et montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{\theta \to +\infty} c_2(\theta) = c_1$.

b) Pour tout réel strictement positif θ, on pose : $\displaystyle\varphi(\theta) = C\int_0^\theta e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{\theta}\left(K + C\left(1 - e^{-\frac{\theta^2}{2}}\right)\right).$

Donner les variations de φ.

c) Étudier les variations de la fonction c_2 et montrer qu'elle admet un minimum en θ_0 qui vérifie : $c_2(\theta_0) < c_1$.

d) Établir l'égalité $c_2(\theta_0) = C\theta_0$ puis l'inégalité $\theta_0 < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 + \frac{K}{C}\right)$.

e) On suppose, dans cette question, que K et C sont tous deux égaux à 1 , et on donne : $c_2(1,5) = 1,5429$ et $c_2(1,45) = 1,5439$. En déduire un encadrement de θ_0 d'amplitude 0,1 .

Le chat, Geluck.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.
Soit une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distinctes deux à deux. L'objet de cet exercice est de montrer que, si k est un entier naturel impair et si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec S^k, alors elle commute avec S. Dans la suite de l'exercice (sauf la dernière question), k désigne un entier naturel impair fixé.

34. Justifier l'existence d'une matrice P inversible telle que la matrice $P^{-1}SP$ soit une matrice D diagonale.

35. Pour tout indice $i \in [\![1;n]\!]$, on définit le polynôme L_i par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j \in [\![1;n]\!] \\ j \neq i}} \frac{x-\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Justifier que la famille $(L_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

36. En déduire l'existence d'un polynôme U de E tel que :

$$U\left(\lambda_1^k\right) = \lambda_1, \quad U\left(\lambda_2^k\right) = \lambda_2, \quad \ldots, \quad U\left(\lambda_n^k\right) = \lambda_n.$$

37. Prouver que le polynôme R, défini par $R(x) = U\left(x^k\right) - x$ est un polynôme annulateur de D puis de S.

38. Soit une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AS^k = S^kA$. Montrer que pour tout entier naturel p, $AS^{pk} = S^{pk}A$.

39. En déduire que les matrices A et S commutent, c'est-à-dire que $AS = SA$.

- *Le cas pair.*
  On considère la matrice S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

40. **a)** Vérifier que S possède deux valeurs propres distinctes et préciser S^{2p} pour tout p in $\mathbb{N}$.
b) Est-ce que le résultat est encore vrai si k est pair ?

– FIN –

DS 3- sujet *

Thèmes : Thèmes : Variables à densité, Diagonalisation

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème I - Partition de l'unité

Dans toute la suite, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n.
Soit k endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ de E. On dit que $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ constitue une partition de l'identité de E si :

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_k = \mathrm{id}_E\,.$$

Partie A - préliminaires

Soit k endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ de E qui constituent une partition de l'identité de E. Pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, on note r_i le rang de l'endomorphisme u_i.

1. **a)** Établir les relations : $\quad E = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i) \quad$ et $\quad n \leqslant \sum_{i=1}^{k} r_i$.

b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(u_1), \mathrm{Im}(u_2), \dots, \mathrm{Im}(u_k)$ sont en somme directe si et seulement si on a : $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$.

Dans les quatre prochaines questions partie, on cherche à montrer l'équivalence des propriétés (1), (2) et (3) suivantes :

(1) $n = \sum_{i=1}^{k} r_i$;
(2) Les endomorphismes $u_1, u_2, \dots, u_k$ sont des projecteurs.
(3) Pour tout $(i, j) \in [\![1,k]\!]^2$, avec $i \neq j$, on a : $u_i \circ u_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2. Soit p un projecteur de E. Justifier que pour toute base $\mathscr{B}$ de E, la trace de la matrice représentative de p est égale au rang de p.

3. En déduire l'implication (2) $\Rightarrow$ (1).

4. En remarquant que pour $x \in E$, $u_i(x) = \sum_{j=1}^{k} u_j\left(u_i(x)\right)$, établir l'implication (1) $\Rightarrow$ (3).

5. Conclure en établissant une troisième implication.

6. Vérifier que si l'un des énoncés (1), (2) et (3) est vrai, alors u_i est le projecteur sur $\mathrm{Im}(u_i)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j\in[\![1;k]\!]\\ i\neq j}} \mathrm{Im}(u_j)$.

Partie B - partition de l'unité liée à un endomorphisme

- *Un exemple dans le cas non-diagonalisable*
  Dans cet exemple, on considère $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

7. Préciser le spectre de la matrice A et montrer que A n'est pas diagonalisable.

8. Montrer que le polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $Q(x) = x^3 + x^2$ est un polynôme annulateur de A.

9. Existe-t-il un polynôme de degré 2 annulateur de A?

10. On pose $Q_1(x) = x^2$. Déterminer $Q_2 \in \mathbb{R}_2[x]$ de sorte que les deux endomorphismes $Q_1(f)$ et $Q_2(f)$ sont des projecteurs et constituent une partition de l'identité de $\mathbb{R}^3$.

- *Étude du cas diagonalisable.*
On suppose dans la suite du sujet que f est un endomorphisme de E diagonalisable et possédant k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note :
    - $L_i(x)$ le polynôme de $\mathbb{R}[x]$ défini par : $L_i(x) = \prod_{\substack{j \in [\![1,k]\!] \\ j \neq i}} \left(\dfrac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$;
    - $E_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ;
    - p_i l'endomorphisme de E défini par $p_i = L_i(f)$.

11. Justifier l'égalité $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$. En déduire que le polynôme défini par $P(x) = \prod_{j=1}^{k} \left(x - \lambda_j \right)$ est un polynôme annulateur de f.

12. Établir pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'inclusion : $\operatorname{Im}\left(p_i\right) \subset E_{\lambda_i}(f)$.

13. **a)** Pour $(i, j) \in [\![1; k]\!]^2$, préciser la valeur de $L_j(\lambda_i)$.

b) Justifier que $\sum_{j=1}^{k} L_j(x) = 1$.

c) En déduire que les endomorphismes $p_1, p_2, \dots, p_k$ constituent une partition de l'identité de E.

14. **a)** Justifier que la somme $\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} p_i$ est directe.

b) En déduire $\operatorname{rg} p_i = \dim E_{\lambda_i}(f)$ puis l'égalité $\operatorname{Im}\left(p_i\right) = E_{\lambda_i}(f)$.

15. Vérifier que p_i est le projecteur sur $E_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j \in [\![1;k]\!] \\ i \neq j}} E_{\lambda_j}(f)$.

16. Vérifier que $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$ et, plus généralement, justifier que pour tout polynôme Q

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{k} Q(\lambda_i) p_i.$$

On pourra commencer par évaluer ces expressions en les vecteurs d'une base de E *constituée de vecteurs propres.*

Partie C - Application à la dimension du commutant

On considère de nouveau un endomorphisme f de E diagonalisable et possédant k valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. On note $p_1, p_2, \dots, p_k$ les projecteurs définis à la partie précédente et $\mathscr{C}_f$, le commutant de f. C'est-à-dire

$$\mathscr{C}_f = \left\{ g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f \right\}.$$

17. Justifier que $\mathscr{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

18. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Justifier que $g \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si, pour tout indice $i \in [\![1; k]\!]$, g commute avec p_i.

19. Pour tout $i \in [\![1; k]\!]$, on définit

$$\mathscr{C}_{f,i} = \left\{ h \in \mathscr{L}(E) \mid p_i \circ h \circ p_i = h \right\}.$$

On admet que $\mathscr{C}_{f,i}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

a) Pour $i, j \in [\![1; k]\!]$, simplifier $p_i \circ p_j$.

b) Vérifier que $\mathscr{C}_{f,i} \subset \mathscr{C}_f$ et que $\dim \mathscr{C}_{f,i} = \dim(E_{\lambda_i}(f))^2$.

c) En remarquant que pour tout $g \in \mathscr{C}_f$, $g = \sum_{i=1}^{k} p_i \circ g \circ p_i$, établir que $\mathscr{C}_f = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathscr{C}_{f,i}$.

20. Montrer que $\dim\left(\mathscr{C}_f\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(f))^2$. En déduire que

$$n \leqslant \dim\left(\mathscr{C}_f\right) \leqslant n^2.$$

- *Les cas d'égalité*

21. **a)** Justifier que $n = \dim\left(\mathscr{C}_f\right)$ si et seulement si f admet exactement n valeurs propres.

b) Vérifier que dans ce cas la famille $(p_1, \dots, p_n)$ est une base de $\mathscr{C}_f$ puis que

$$\mathscr{C}_f = \left\{ Q(f) \mid Q \in \mathbb{R}[x] \right\}.$$

22. Démontrer que $n^2 = \dim\left(\mathscr{C}_f\right)$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \, \mathrm{id}_E$.

Problème II - Confidentialité différentielle

Est-il possible que le marketing digital pose des problèmes de sécurité des données personnelles? De récents travaux, mettant en cause les outils de mesure de performance en temps réel des différentes campagnes de publicité sur internet, démontrent que certaines données très sensibles (préférences religieuses, sexuelles, etc.) peuvent être obtenues par des segmentations précises des audiences et sans aucune action de la part de l'utilisateur.
Dans ce problème, nous nous intéressons à une méthode proposée pour protéger ces données, méthode baptisée confidentialité différentielle.
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies les variables aléatoires qui apparaissent dans l'énoncé.

Partie I : Loi de Laplace

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_*^+$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathscr{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right).$$

23. Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

24. *Fonction de répartition.*
- **a)** Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathscr{L}(0,1)$.
- **b)** On suppose que X suit la loi $\mathscr{L}(0,1)$. Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathscr{L}(\alpha, \beta)$.
- **c)** En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathscr{L}(\alpha, \beta)$.

25. *Espérance et variance.*
- **a)** On suppose que X suit la loi $\mathscr{L}(0,1)$. Justifier l'existence et calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
- **b)** En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathscr{L}(\alpha, \beta)$.

- *Simulation à partir d'une loi exponentielle. Méthode 1*

Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

26. Reconnaître la loi de $X = (2V-1)U$.

27. En déduire un programme python `Laplace` qui prend en argument α, β et renvoie une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{L}(\alpha, \beta)$.

28. Anticiper la réponse au code suivant.

```
s=0
for i in range(5000):
    s+=Laplace(1,2)**2
print(s/5000)
```

- *Simulation à partir d'une loi exponentielle. Méthode 2*

29. Montrer que Ψ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;1[$ et exprimer $\Psi^{-1}(x)$. *Distinguer* $x \in]0;1/2[$ *et* $x \in [1/2;1[$.
Si $U \hookrightarrow \mathscr{U}(]0;1[$, reconnaître la loi de $\Psi^{-1}(U)$.

30. En déduire une nouvelle fonction `Laplace2` qui permet de simuler la loi $\mathscr{L}(0,1)$.

Partie II : Lois ε-différentielles

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. On dit que (X, Y), un couple de variables aléatoires, est un couple ε-différentiel si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$e^{-\varepsilon}\mathbf{P}\big([X \in I]\big) \leqslant \mathbf{P}\big([Y \in I]\big) \leqslant e^{\varepsilon}\mathbf{P}\big([X \in I]\big).$$

Intuitivement, les lois de X et Y seront d'autant plus proches que le plus petit ε tel que (X, Y) soit un couple ε-différentiel est proche de 0.

- *Un exemple dans le cas discret*

31. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que $X(\Omega) \cup Y(\Omega) = \{z_n \mid n \in J\}$ où J est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$. Montrer que (X, Y) est ε-différentiel si et seulement si

$$\forall n \in J, \quad e^{-\varepsilon}\mathbf{P}([X = z_n]) \leqslant \mathbf{P}([Y = z_n]) \leqslant e^{\varepsilon}\mathbf{P}([X = z_n])$$

32. Dans cette question, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $1/2$, Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et elles sont indépendantes. On pose $Y = X + Z$.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$1 - p \leqslant \frac{\mathbf{P}([Y = k])}{\mathbf{P}([X = k])} \leqslant \frac{1}{1-p}.$$

c) En déduire que (X, Y) est $-\ln(1-p)$-différentiel.

- *Caractérisation pour les variables à densité*

On suppose dans la suite que X et Y sont deux variables à densité de densités respectives f et g et de fonction de répartition F et G.

33. On suppose dans cette question que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-\varepsilon} f(t) \leqslant g(t) \leqslant e^{\varepsilon} f(t)$.
Montrer que (X, Y) est ε-différentiel.

34. On suppose maintenant que (X, Y) est ε-différentiel. Soient $h > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ où f et g sont continues. Montrer que :
$$e^{-\varepsilon} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} \leqslant \frac{G(t+h) - G(t)}{h} \leqslant e^{\varepsilon} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}.$$
En conclure que
$$e^{-\varepsilon} f(t) \leqslant g(t) \leqslant e^{\varepsilon} f(t).$$

- *Cas des transformations affines*

35. On suppose dans la suite que X et Y sont deux variables à densité de densités respectives f et g continues sur $\mathbb{R}$.

a) Pour tous $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $b \in \mathbb{R}$, justifier que $aX + b$ est une variable à densité et exprimer une densité en fonction de a et b.

b) En déduire que si (X, Y) est ε-différentiel alors $(aX + b, aY + b)$ est aussi ε-différentiel.

- *Cas des lois de Laplace*

36. Montrer que si X suit la loi $\mathscr{L}(a, b)$ et Y la loi $\mathscr{L}\left(a', b\right)$, alors (X, Y) est $\frac{|a-a'|}{b}$-différentiel.

- *Une première interprétation.*

37. on suppose que (X, Y) est un couple ε-différentiel et que U est une variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ indépendante de X et Y. On définit la variable aléatoire Z par :
$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } U(\omega) = 1 \\ Y(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbf{P}([Z \in I]) \neq 0$. Montrer que :
$$\mathbf{P}_{[Z \in I]}([U = 1]) = p \frac{\mathbf{P}([X \in I])}{p\mathbf{P}([X \in I]) + (1-p)\mathbf{P}([Y \in I])}.$$
En déduire que
$$\frac{p}{p + (1-p)e^{\varepsilon}} \leqslant \mathbf{P}_{[Z \in I]}([U = 1]) \leqslant \frac{p}{p + (1-p)e^{-\varepsilon}}$$

b) Si ε est proche de zéro, le fait de disposer d'une information sur la valeur de Z change-t-il notablement le paramètre de la loi de U et par conséquent la probabilité d'en déduire la valeur prise par U ?

Partie III *Facultatif*

- Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère $D = [\![0, d]\!]$ et n un entier naturel plus grand que 2.
- On dira que deux éléments de D^n, a et b, sont voisins si ils ne différent que d'une composante au plus. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble des couples de voisins.
- On considère q une application de D^n dans $\mathbb{R}$.

Concrètement, un élément de D^n représente une table d'une base de donnée et q une requête sur cette base. Étant donné $a = (a_1, \dots, a_n)$, on s'intéresse au problème de la confidentialité de certains des a_i lorsque les autres a_i sont connus, ainsi que D, q et $q(a)$.

38. Dans cette question on suppose que $a_2, \dots, a_n$ sont connus et on cherche à protéger a_1.

a) Quelle est probabilité d'obtenir la bonne valeur de a_1 si l'on choisit une valeur au hasard dans $[\![0, d]\!]$?

b) Dans cette question $q(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Montrer que si $q(a)$ est publique alors on sait déterminer la valeur de a_1.

On dit que l'on dispose d'un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q si :

(c1) pour tout $a \in D^n$, on dispose d'une variable aléatoire réelle X_a ;

(c2) pour tout $(a, b) \in \mathcal{V}$, $\left(X_a, X_b\right)$ est ε-différentiel.

(c3) pour tout $a \in D^n$, $\mathbf{E}(X_a) = q(a)$.

- *Majoration de la probabilité de trouver a_1.*

39. Dans cette question, nous allons justifier en partie la terminologie. On suppose à nouveau que $a_2, \dots, a_n$ sont connus, que l'on cherche à protéger a_1 et que :

- Le public connaît des d'intervalles $I_0, \dots, I_d$ disjoints de réunion $\mathbb{R}$ tels qu'avec les valeurs fixées de $a_2, \dots, a_n$, si $q(a) \in I_j$ alors $a_1 = j$. Cela signifie que si $q(a)$ est publique alors a_1 aussi.

- On dispose d'un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q et que l'on rend X_a publique à la place de $q(a)$.

On considère alors que l'expérience aléatoire modélisée par $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ comporte comme première étape le choix au hasard de a_1 dans $[\![0,d]\!]$ et on définit :

A_1 la variable aléatoire associée à ce choix;

- pour tout $j \in [\![0,d]\!], Y_j = X_{(j,a_2,\dots,a_n)}$. On suppose que A_1 et Y_j sont indépendantes pour tout $j \in D$.
- la variable aléatoire réelle R par : $\forall \omega \in \Omega$, si $A_1(\omega) = j$ alors on détermine l'unique k tel que $Y_j(\omega) \in I_k$ et on pose $R(\omega) = k$.
- $\theta = \mathbf{P}([R = A_1])$.

a) Montrer que $\theta = \displaystyle\sum_{j=0}^{d} \mathbf{P}\Big(\big[Y_j \in I_j\big] \cap [A_1 = j]\Big)$.

b) En déduire que $\theta = \dfrac{1}{d+1} \displaystyle\sum_{j=0}^{d} \mathbf{P}\Big(\big[Y_j \in I_j\big]\Big)$

c) En conclure que :

$$\theta \leqslant \frac{1}{d+1}\left(e^{\varepsilon} - \left(e^{\varepsilon}-1\right)\mathbf{P}([Y_0 \in I_0])\right) \leqslant \frac{e^{\varepsilon}}{d+1}$$

d) On pose $\rho = \frac{1}{d+1}$ et $\tau = \dfrac{\theta-\rho}{\rho}$.

Donner une majoration de τ. Que représente cette quantité? Qu'en déduire concernant la méthode de confidentialité présentée dans cette question lorsque ε est proche de 0?

On pose $\delta = \max_{(a,b)\in\mathscr{V}} |q(a) - q(b)|$ et on suppose que $\delta > 0$.

40. Dans cette question, pour tout $a \in D^n$, on pose $X_a = q(a) + Y$ où Y suit la loi de Laplace de paramètre $(0, \beta)$.

a) Pour tout $a \in D^n$, déterminer $\mathbb{E}(X_a)$ et une densité de probabilité f_a de la loi de X_a en fonction de $q(a)$ et de β.

b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \mathscr{V}$, $f_a(t) \leqslant \exp\left(\frac{\delta}{\beta}\right) f_b(t)$.

En déduire que pour tout $(a,b) \in \mathscr{V}$, $\left(X_a, X_b\right)$ est $\frac{\delta}{\beta}$-différentiel.

c) Comment choisir β pour disposer alors d'un procédé de ε-confidentialité de D^n pour q?

41. Dans cette question, pour tout $a = (a_1, \dots, a_n)$ appartenant à D^n, $q(a) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$.

a) Quelle est la valeur de δ?

On utilise dans la suite le procédé de ε-confidentialité tel qu'il a été défini dans la question 14 mais au lieu de publier la valeur X_a, on procède ainsi :

- si $X_a < \frac{1}{2}$ on publie 0;
- si $X_a \in \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right[$ où $k \in [\![1, nd-1]\!]$, on publie k;
- sinon on publie nd.

b) Montrer que la valeur aléatoire Z_a publiée vérifie :

$$Z_a = \begin{cases} 0 & \text{si } X_a < 1/2 \\ \lfloor X_a + 1/2 \rfloor & \text{si } X_a \in [1/2, nd - 1/2[\\ nd & \text{si } X_a \geqslant nd - 1/2 \end{cases}$$

c) Écrire un script qui pour d, n et ε saisis par l'utilisateur, génère une valeur aléatoire de $a \in D^n$ puis affiche $q(a)$ et Z_a.

d) Pour $n = 1000, d = 4$ et ε choisi par l'utilisateur, écrire un script qui estime la valeur moyenne de $\frac{|Z_a - q(a)|}{q(a)}$ (on considèrera que $q(a)$ est toujours non nul).

N.B. À titre d'information, on obtient le tableau de valeurs suivant :

ε	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2
Moyenne	1.91%	1%	0.6%	0.5%	0.3%	0.3%	0.28%	0.2%	0.2%	0.19%	0.17%	0.16%

– FIN –

DS 3A - solution

Exercice 1

1. La variable X est à valeurs dans $[a;+\infty[$. En particulier, pour tout réel $x \leqslant a$
$$\mathrm{F}(x)=0.$$
Soit $x \in [a;+\infty[$,
$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x) &= \mathbf{P}(\mathrm{X}\leqslant x) = \mathbf{P}(|\mathrm{T}|+a\leqslant x)\\
&= \mathbf{P}(|\mathrm{T}|\leqslant x-a)\\
&= \mathbf{P}(a-x\leqslant \mathrm{T}\leqslant x-a)\\
&= \mathbf{P}(a-x< \mathrm{T}\leqslant x-a) \quad \text{T est à densité}\\
\mathrm{F}(x) &= \Phi(x-a)-\Phi(a-x).
\end{aligned}$$
Par la propriété de symétrie de Φ
$$\mathrm{F}(x)=2\Phi(x-a)-1.$$

2. Comme Φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit par composition que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a;+\infty[$. De plus, F est constante sur $]-\infty;a[$, F est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;a[$. Pour justifier que F est continue sur $\mathbb{R}$, il ne reste plus qu'à justifier la continuité en a.
En tant que fonction de répartition, F est continue à droite
$$\mathrm{F}(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \mathrm{F}(a)=\Phi(0)-\Phi(0)=0$$
et F étant nulle sur $]-\infty;a[$
$$\mathrm{F}(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} 0=\mathrm{F}(a).$$
On en déduit la continuité en a. Dès lors, F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en a, on en déduit que X est une variable à densité. Précisons une densité. Notons φ, la densité continue de la loi normale centrée réduite
$$\varphi : t\in\mathbb{R}\mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-t^2/2).$$
On obtient une densité f de X en dérivant F sur $\mathbb{R}\setminus\{a\}$. Si $x\leqslant a$, $f(x)=0$. Si $x>a$, on a par composition
$$f(x)=2\Phi'(x-a)=2\varphi(x-a)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2}}.$$

3.

```python
# solution 1
def Approx(a):
    e=0
    e2=0
    m=5000 # taille de l'échantillon
    for i in range(m):
        t=np.abs(rd.normal(0,1))
        e+=t+a
        e2+=(t+a)**2
    return e/m,e2/m-(e/m)**2
# en utilisant la formule de Koenig-
    Huygens pour calculer la variance

# solution 2
def ApproxBis(a):
    Ech=np.abs(rd.normal(0,1,5000))
    e=np.mean(Ech)+a
    v=np.std(Ech)**2
    # la commande std pour standart
        deviation renvoie l'écart-type
    return e,v
```

Tests :

```
>>> ApproxBis(1)
(1.7961492444841656,
     0.3651706748193544)

>>> Approx(1)
(1.802814522173332,
    0.35771701150039137)
```

4.a) L'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^{+\infty} x\varphi(x-a)\,\mathrm{d}x$$
est une intégrale généralisée en $+\infty$ car l'intégrande est continue sur $[a;+\infty[$. Par le changement de variable affine $t=x-a$, on sait que les intégrales
$$2\int_a^{+\infty} x\varphi(x-a)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad 2\int_0^{+\infty}(t+a)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$
sont de même nature et égales en cas de convergence.
Or par parité de la densité φ
$$\int_0^{+\infty} a\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{a}{2}$$
et pour tout réel $\mathrm{A}>0$
$$\int_a^{\mathrm{A}} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^{\mathrm{A}} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
On en déduit que
$$\int_0^{+\infty} 2t\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$
Finalement, l'intégrale $2\int_a^{+\infty} x\varphi(x-a)\,\mathrm{d}x$ est convergente (même absolument car l'intégrande est positive), X admet une espérance et
$$\mathbf{E}(\mathrm{X})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}+a.$$

- De plus, par la formule de Koenig-Huygens

$$\mathbf{E}\left(T^2\right) = \mathbf{V}(T) + \mathbf{E}(T)^2 = 1 + 0 = 1.$$

et par la même formule

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{V}(|T| + a) = \mathbf{V}(|T|)\\ &= \mathbf{E}\left(|T|^2\right) - \mathbf{E}(|T|)^2\\ \mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}\left(T^2\right) - \mathbf{E}(|T|)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

4.b) Oui les résultats sont en accord. Si on prend en compte les erreurs d'approximations, la courbe en rouge est une droite de pente 1. Cela correspond bien à la fonction $a \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{E}(X) = \sqrt{2/\pi} + a$ et la courbe en bleue est celle de la variance qui est indépendante de a. On a par exemple en première approximation

$$1 - \frac{2}{\pi} \simeq 1 - \frac{2}{3} \simeq 0.3.$$

Problème A

---

5. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A\\ &= \lambda(AM - AM) + AN - NA\\ \Phi_A(\lambda M + N) &= \lambda\Phi_A(M) + \Phi_A(N).\end{aligned}$$

D'où la linéarité de Φ_A.
De plus, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Phi_A(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En conclusion, Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Comme A est une matrice symétrique réelle, A est diagonalisable. De plus, par la formule du rang

$$\mathrm{rg}A = 1 \quad \text{donc} \quad \dim E_0(A) = 1.$$

Plus précisément

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

On a une seconde valeur propre avec 2 et

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

La matrice A est la matrice Attila. Exemple classique du cours.

7.a) On peut choisir

$$D = \mathrm{diag}(2, 0) \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

7.b) Dans le cas des matrices de taille 2, il existe une formule explicite de l'inverse

$$P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

8. On a

$$\begin{aligned}\Phi_A(E_1) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = E_2 - E_3\\ \Phi_A(E_2) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -E_1 + E_4\\ \Phi_A(E_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = E_1 - E_4\\ \Phi_A(E_4) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = E_2 - E_3.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice est symétrique donc J et Φ_A sont diagonalisables.

9.a) Faire un test de liberté.
La famille est libre avec autant de vecteurs que la dimension. C'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9.b) On a

$$\Phi_A(A) = \Phi_A(F_1) = 0_2, \quad \Phi_A(F_2) = -2F_2, \quad \Phi_A(F_3) = 2F_3.$$

On en déduit que la matrice de Φ_A dans cette nouvelle base est diagonale (on a une base de vecteurs propres)

$$\mathrm{diag}(0, 0, -2, 2).$$

On retrouve le fait que Φ_A est un endomorphisme diagonalisable.

10. La matrice A admet 2 valeurs propres et A est de taille $(2,2)$. On sait alors que A est diagonalisable. Plus précisément A est semblable à une matrice diagonale contenant les valeurs propres (avec multiplicité). Comme l'ordre n'a pas d'importance, A est semblable à Δ et la matrice Q existe.

11. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\Phi_A(\psi(M)) &= A\psi(M) - \psi(M)A\\ &= Q\Delta Q^{-1} \cdot QMQ^{-1} - QMQ^{-1} \cdot Q\Delta Q^{-1}\\ &= Q\Delta MQ^{-1} - QM\Delta Q^{-1}\\ &= Q(\Delta M - M\Delta)Q^{-1}\\ \Phi_A(\psi(M)) &= \psi\left(\Phi_\Delta(M)\right).\end{aligned}$$

12. *Rédaction 1.*
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i K_i = 0_2.$$

Puis
$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i Q E_i Q^{-1} = 0_2.$$

Soit
$$Q\left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i E_i\right)Q^{-1} = 0_2,$$

en multipliant respectivement à gauche et à droite par Q^{-1} et Q

$$\sum_{i=1}^{4} x_i E_i = 0_2.$$

Comme $(E_i)_{i\in[[1;4]]}$ est libre, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. la famille $(K_i)_{i\in[[1;4]]}$ est libre. Comme elle contient $\dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ vecteurs, c'est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

- *Rédaction 2.*
On vérifie que ψ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ en explicitant l'application réciproque

$$\psi^{-1} : M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto Q^{-1}MQ \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Dès lors la famille image $\left(\psi(E_i)\right)_{i\in[[1;4]]}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ car $(E_i)_{i\in[[1;4]]}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

13.a) Soit $i \in [[1;4]]$. En reprenant la question 11

$$\Phi_A(K_i) = \Phi_A(\psi(E_i)) = \psi(\Phi_\Delta(E_i)).$$

Or on a aussi

$$\Phi_\Delta(E_1) = \Phi_\Delta(E_2) = 0_2$$
$$\Phi_\Delta(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & a-b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (a-b)E_2$$
$$\Phi_\Delta(E_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b-a & 0 \end{bmatrix} = -(a-b)E_3$$

avec $E_i \neq 0$ pour tout indice i. D'où l'existence pour chaque indice $i \in [[1;4]]$ d'une valeur propre λ_i telle que

$$\Phi_A(K_i) = \psi(\lambda_i E_i) = \lambda_i K_i.$$

13.b) L'endomorphisme Φ_A admet une base de vecteurs propres donnée par la famille $(K_i)_{i\in[[1;4]]}$. Par définition, l'endomorphisme Φ_A est diagonalisable.

Noter que la démonstration proposée ici se généralise aux matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

14. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux matrices A, B telles que

$$AB - BA = [A,B] = I_n.$$

En particulier

$$0 = \mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}\left([A,B]\right) = \mathrm{Tr}(I_n) = n.$$

Absurde, il n'existe pas de telles matrices.

15.a) Soit $R \in \mathbb{R}[x]$

$$d \circ f(R) = d(xR) = 1 \times R + xR'$$

et $$f \circ d(R) = f(R') = xR'.$$

Par conséquent

$$[d,f](R) = d \circ f(R) - f \circ d(R) = R.$$

Ainsi $$[d,f] = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[x]}.$$

15.b) Il n'y a pas de contradiction avec la question précédente car on se place en dimension infinie alors que la question 14 se place dans le cas de la dimension finie des matrices.

16. Justifions par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \quad \left[f^k, g\right] = \alpha k f^k$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

→ *Initialisation.* On a

$$\left[f^0, g\right] = [\mathrm{id}_E, g] = g - g = 0 = \alpha \cdot f^0.$$

La propriété $\mathscr{P}(0)$ est donc vérifiée.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ soit vérifiée. On a

$$\begin{aligned}
\left[f^{k+1}, g\right] &= f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1} \\
&= f \circ \left(f^k \circ g\right) - g \circ f^{k+1} \\
&= f \circ \left(g \circ f^k + \alpha k f^k\right) - g \circ f^{k+1} \quad (\mathscr{P}(k)) \\
&= f \circ g \circ f^k - g \circ f \circ f^k + \alpha k f^{k+1} \\
&= (f \circ g - g \circ f) \circ f^k + \alpha k f^{k+1} \\
&= (\alpha f) \circ f^k + \alpha k f^{k+1} \\
\left[f^{k+1}, g\right] &= \alpha(k+1) f^{k+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété au rang suivant est établie.

→ *Conclusion.* La propriété est vraie pour tout entier naturel k.

17. *Solution 1.*
Puisque $f^m \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, on a $f^k \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ pour tout $k \in [[0,m]]$. Considérons l'endomorphisme

$$\Phi : u \in \mathscr{L}(E) \mapsto [u,g] \in \mathscr{L}(E).$$

De sorte que

$$\Phi(f^k) = k\alpha f^k \quad \text{et} \quad f^k \neq 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Dit autrement, f^k est un vecteur propre de Φ pour la valeur propre αk. Comme les valeurs propres sont distinctes ($\alpha \neq 0$), les vecteurs propres forment une famille libre. Ce qui conclut.

- *Solution 2.*
Puisque $f^m \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, on a $f^k \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ pour tout $k \in [[0,m]]$. Justifions par récurrence que la propriété

« La famille $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \cdots, f^k)$ est libre »

est vraie pour tout $k \leqslant m$.

→ *Initialisation.* La propriété est vraie si $k = 0$, puisque $f^0 = \mathrm{id}_E \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. La famille (f^0) est libre.

→ *Hérédité.* Soit $k \in [[1;m]]$ et on suppose que la famille $(\mathrm{id}_E, f, \dots, f^{k-1})$ est libre. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{j=0}^{k} \lambda_j f^j = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad (\bullet)$$

D'après le résultat précédent, on a pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\left[f^j, g\right] = \alpha j f^j,$$

d'où

$$0 = \left[\sum_{j=0}^{k} \lambda_j f^j, g\right] = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \left[f^j, g\right] = \alpha \sum_{j=0}^{k} \lambda_j j f^j \quad (\bullet\bullet)$$

En effectuant $\frac{1}{\alpha}(\bullet\bullet) - k(\bullet)$, on obtient

$$\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j (j-k) f^j.$$

L'hypothèse de récurrence implique $\lambda_j(j-k) = 0$ donc $\lambda_j = 0$ pour tout indice $j \in [\![0, k-1]\!]$. L'égalité se réduit alors à $\lambda_k f^k = 0$ qui donne $\lambda_k = 0$. Ainsi la famille $(\mathrm{id}_E, f, \dots, f^k)$ est libre. La propriété au rang suivant est établie.

⇀ *Conclusion.* La propriété est vraie pour tout $k \in [\![0, m]\!]$.

18. Raisonnons par l'absurde. Si f n'était pas nilpotent, on aurait $f^m \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. La famille $(\mathrm{id}_E, f, \dots, f^m)$ est donc libre pour tout m de $\mathbb{N}$. Mais ceci est absurde dès que $m > \dim(E)^2$ car $\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel de dimension $\dim(E)^2$.

19. On a

$$\begin{aligned}
[\alpha f + \beta g, g] &= (\alpha f + \beta g) \circ g - g \circ (\alpha f + \beta g) \\
&= \alpha f \circ g - \alpha g \circ f \\
&= \alpha (f \circ g - g \circ f) \\
[\alpha f + \beta g, g] &= \alpha(\alpha f + \beta g).
\end{aligned}$$

Si on pose $F = \alpha f + \beta g$, on a donc

$$[F, g] = \alpha F \quad \text{et} \quad \alpha \neq 0.$$

En reprenant le résultat précédent, on en déduit que $F = \alpha f + \beta g$ est nilpotent.

Problème B

d'après Edhec voie S 2000 et HEC maths 2 2002, voie E

---

20. Pour tout réel h strictement positif

$$\begin{aligned}
q(t,h) &= \mathbf{P}_{[T>t]}\big([T \in]t, t+h]]\big) \\
&= \frac{\mathbf{P}\big([T \in]t, t+h]] \cap [T > t]\big)}{\mathbf{P}(T > t)}.
\end{aligned}$$

Or si $T \in]t, t+h]$ alors $T > t$ donc

$$\big[T \in]t, t+h]\big] \cap [T > t] = \big[T \in]t, t+h]\big].$$

On en déduit la simplification

$$\begin{aligned}
q(t,h) &= \frac{\mathbf{P}(T \in]t, t+h])}{\mathbf{P}(T > t)} = \frac{\mathbf{P}(t < T \leqslant t+h)}{\mathbf{P}(T > t)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(T \leqslant t+h) - \mathbf{P}(T \leqslant t)}{\mathbf{P}(T > t)}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{D(t) - D(t+h)}{D(t)} = \frac{1 - \mathbf{P}(T \leqslant t) - \big(1 - \mathbf{P}(T \leqslant t+h)\big)}{\mathbf{P}(T > t)} = q(t,h).$$

21.a) On a pour tout réel positif t, $D(t) = 1 - F(t)$ avec F la fonction de répartition de T. Or F est dérivable là où la densité f de T est continue. D'après l'énoncé, f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Donc F et D sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$D'(t) = -F'(t) = -f(t).$$

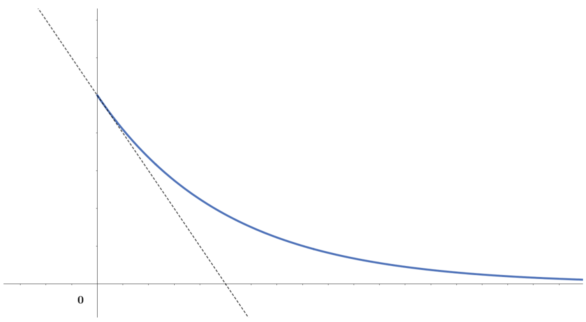
21.b) On calcule ce rapport en faisant apparaitre le taux d'accroissement de D : pour $h > 0$ on peut réutiliser les égalités précédentes.

$$\begin{aligned}
\frac{q(t,h)}{h} &= \frac{D(t) - D(t+h)}{D(t) \cdot h} = -\frac{1}{D(t)} \cdot \frac{D(t+h) - D(t)}{h} \\
&\xrightarrow[h \to 0]{} -\frac{D'(t)}{D(t)} = \frac{f(t)}{D(t)} = \pi(t).
\end{aligned}$$

22.a) La loi de survie est donnée par $D(t) = 1 - F(t)$ avec $F(t) = 0$ si $t \leqslant 0$ et pour $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t \\
&= 1 - e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

Donc si $t \leqslant 0$, on a $D(t) = 1$ et si $t \geqslant 0$, on a $D(t) = e^{-\lambda t}$. Pour la courbe représentative, D est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, la dérivée à droite de 0 vaut $-\lambda$, et D tend vers 0 en $+\infty$.



22.b) On retrouve pour $t \geqslant 0$:

$$\pi(t) = \frac{f(t)}{D(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda = \frac{1}{\mathbf{E}(T)}$$

car T suit une loi exponentielle.

Dans le cas exponentiel, le taux de panne est donc constant.

23. La fonction f est une densité de probabilité car :

⇀ f est positive.

⇀ f continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme fonction constante sur $\mathbb{R}_*^-$ et comme produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_*^+$.

⇀ On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

avec $\displaystyle\int_0^M t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_0^M = 1 - e^{-\frac{M^2}{2}} \xrightarrow[M \to +\infty]{} 1 =$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$
La fonction f est une densité de probabilité.

24. Soit $\mathrm{S} = \mathrm{T}^2$ et G sa fonction de répartition. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_*^-$:
$$[\mathrm{S} \leqslant t] = \left[\mathrm{T}^2 \leqslant t\right] = \varnothing$$
d'où $\qquad \mathbf{P}(\mathrm{S} \leqslant t) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(t) = 0.$

Et pour $t \geqslant 0$:
$$[\mathrm{S} \leqslant t] = \left[\mathrm{T}^2 \leqslant t\right] = [-\sqrt{t} \leqslant \mathrm{T} \leqslant \sqrt{t}]$$
et
$$\begin{aligned}\mathrm{G}(t) &= \mathbf{P}(\mathrm{S} \leqslant t) = \mathbf{P}(\mathrm{T} \leqslant \sqrt{t}) - \mathbf{P}(\mathrm{T} \leqslant -\sqrt{t})\\ &= \mathbf{P}(\mathrm{T} \leqslant \sqrt{t}) = \mathrm{F}(\sqrt{t}) \qquad (\bullet)\end{aligned}$$

- *Rédaction 1*

La fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^-$ car constante sur cet intervalle. Elle est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ par produit et composition. Ainsi G est classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Vérifions que G est continue en 0. En tant que fonction de répartition G est continue à droite. La continuité à gauche est claire en remarquant que
$$\lim_{t\to 0^-} \mathrm{G}(t) = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0 = \mathrm{G}(0).$$
On en déduit que que G est bien une fonction de répartition d'une variable à densité. La densité s'obtient par dérivation. Pour $t < 0$, $\mathrm{G}'(t) = 0$ et pour $t > 0$,
$$\begin{aligned}\mathrm{G}'(t) &= f(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{t}^2}{2}}\frac{1}{2\sqrt{t}}\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}.\end{aligned}$$
On en déduit que $\mathrm{T}^2 = \mathrm{S}$ suit une loi exponentielle de paramètre $1/2$.

- *Rédaction 2*

Par intégration, la fonction de répartition de T est donnée par
$$\mathrm{F} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$
En reprenant la relation $(\bullet)$, on obtient pour tout réel t
$$\mathrm{G}(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{t}^2}{2}} = 1 - \mathrm{e}^{-t/2} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$
On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $1/2$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, $\mathrm{T}^2 = \mathrm{S}$ suit une loi exponentielle de paramètre $1/2$.

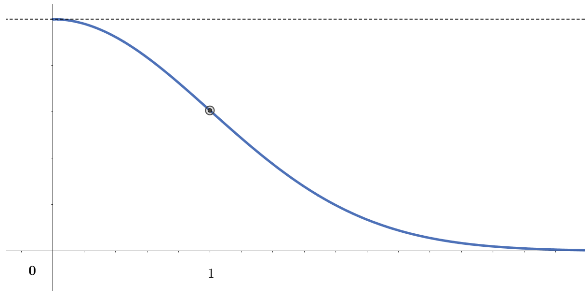
- En particulier $\mathbf{E}\left(\mathrm{T}^2\right) = 1/(1/2) = 2$ et
$$\mathbf{V}(\mathrm{T}) = \mathbf{E}\left(\mathrm{T}^2\right) - \mathbf{E}(\mathrm{T})^2 = 2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}^{\,2} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

25. On a $\mathrm{D}(t) = 1 - \mathrm{F}(t)$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et D également.
→ $\mathrm{D}(t) = 1$ sur $\mathbb{R}^-$.
→ Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on a
$$\mathrm{F}(t) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x + \int_0^t x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^t = 1 - \mathrm{e}^{-t^2/2}$$
et donc $\qquad \mathrm{D}(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}.$

→ Sur $\mathbb{R}^+$: $\mathrm{D}'(t) = -t\mathrm{e}^{-t^2/2}$ Donc D est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$.

→ D' est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathrm{D}''(t) = \left(t^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-t^2/2}$ est du signe de $\left(t^2 - 1\right)$ polynôme du second degré qui a pour racines 1 (et -1 qui est négatif). Donc la courbe représentative est concave sur $[0,1]$ et convexe sur $[1,+\infty[$.

→ La courbe représentative de D a donc un point d'inflexion en 1 avec une pente de $\mathrm{D}'(1) = \mathrm{e}^{-1/2} \simeq 0{,}607$ et $\mathrm{D}(1) = \mathrm{e}^{-1/2} \simeq 0{,}607$
→ On a $\mathrm{D}'(0) = -f(0) = 0$ donc on a une tangente horizontale en 0.
→ D tend vers 0 en $+\infty$ et on a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.



26. On obtient pour tout $t \in \mathbb{R}^+$
$$\pi(t) = t.$$

27. Comme $\pi(t) = \alpha$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on a $f(t) = \alpha\mathrm{D}(t)$ et on rappelle que D est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathrm{D}'(t) = -f(t)$.
La fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et
$$\begin{aligned} g'(t) &= \alpha\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{D}(t) + \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{D}'(t)\\ &= \mathrm{e}^{\alpha t}(\alpha\mathrm{D}(t) + \mathrm{D}(t))\\ &= \mathrm{e}^{\alpha t}(f(t) - f(t)) = 0.\end{aligned}$$
Donc g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$.

28. Comme g est constante elle vaut $g(0) = \mathrm{D}(0) = 1$ et pour tout $t \geqslant 0$ on a $\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{D}(t) = 1$ et $\mathrm{D}(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$ d'où la densité de T
$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \qquad f(t) = \alpha\mathrm{D}(t) = \alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$
Et comme sa densité est nulle sur $\mathbb{R}^-$, la variable T suit bien une loi exponentielle de paramètre α.

32. Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on a donc
$$\frac{f(t)}{1 - \mathrm{F}(t)} = t^3.$$
D'où $\qquad \left(\ln\circ(1 - \mathrm{F})\right)'(t) = -t^3.$

Par intégration sachant que $F(0)=0$

$$\ln\left(1-F(t)\right)=\int_0^x (\ln\circ(1-F))'(t)\,dt=\int_0^x -t^3\,dt=-\frac{x^4}{4}.$$

Il vient $1-F(x)=\exp\left(-x^4/4\right)$ puis

$$F(x)=1-\exp\left(-x^4/4\right).$$

La probabilité recherchée est alors

$$\mathbf{P}(X>1)=1-\mathbf{P}(X\leqslant 1)=1-F(1)=e^{-1/4}.$$

L'application numérique donne 0.023 année, soit un peu plus d'une semaine. La fin est proche...

30. On cherche

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X>1]}(X>2)&=\frac{\mathbf{P}([X>2]\cap[X>1])}{\mathbf{P}(X>1)}\\&=\frac{\mathbf{P}(X>2)}{\mathbf{P}(X>1)}.\end{aligned}$$

Puis en reprenant le calcul précédent, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[X>1]}(X>2)&=\frac{1-\mathbf{P}(X\leqslant 2)}{1-\mathbf{P}(X\leqslant 1)}\\&=\frac{e^{-2^4/4}}{e^{-1/4}}=e^{-15/4}.\end{aligned}$$

La probabilité pour que ce composant âgé de un an, survive plus de deux ans est $e^{-15/4}$.

31. Intégrons par parties sachant que les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$

$$\begin{aligned}\int_0^\theta D(t)\cdot 1\,dt&=[D(t)\cdot t]_0^\theta-\int_0^\theta t\cdot D'(t)\,dt\\&=\theta\cdot D(\theta)-0-\int_0^\theta t\cdot f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Sachant que $D(t)=\mathbf{P}(T>t)$ et que $\mathbf{P}(T\leqslant\theta)=F(\theta)$, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^\theta D(t)\cdot 1\,dt&=\mathbf{P}(T>\theta)\cdot\theta+\int_0^\theta\frac{\mathbf{P}(T\leqslant\theta)}{F(\theta)}tf(t)\,dt\\&=\mathbf{P}(T>\theta)\cdot\theta+\mathbf{P}(T\leqslant\theta)\cdot\int_0^\theta t\frac{f(t)}{F(\theta)}\,dt.\end{aligned}$$

32. Comme T suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$, on sait que $\mathbf{E}(T)=1/\lambda$. D'où

$$c_1=\lambda(K+C).$$

De plus, pour $\theta\in\mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}\int_0^\theta D(t)\,dt&=\int_0^\theta e^{-\lambda t}\,dt=\left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^\theta\\&=\frac{1-e^{-\lambda\theta}}{\lambda}.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}c_2(\theta)&=\frac{K+\left(1-e^{-\lambda\theta}\right)C}{\frac{1-e^{-\lambda\theta}}{\lambda}}=\lambda\frac{K+\left(1-e^{-\lambda\theta}\right)C}{1-e^{-\lambda\theta}}\\&=\lambda\left(\frac{K}{1-e^{-\lambda\theta}}+C\right).\end{aligned}$$

Comme $\qquad 1-e^{-\lambda\theta}<1,$

On constate alors que

$$c_2(\theta)>c_1.$$

La méthode 2 n'a pas davantage. En effet, dans le cas d'une loi exponentielle, le taux de panne est constant. Dit autrement, il n'y a pas de phénomènes d'usure et il n'est pas utile de changer le composant préventivement.

33.a) On a vu que $\mathbf{E}(T)=\sqrt{\pi/2}$. Dès lors

$$c_1=\frac{K+C}{\sqrt{\pi/2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(K+C).$$

Sachant que $D(\theta)\underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et

$$\int_0^\theta D(t)\,dt=\int_0^\theta e^{-t^2/2}\,dt\underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}e^{-t^2/2}=\sqrt{\pi/2}.$$

On obtient par quotient de limite

$$c_2(\theta)=\frac{K+(1-D(\theta))C}{\int_0^\theta D(t)dt}\underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{K+C}{\sqrt{\pi/2}}=c_1.$$

33.b) La fonction

$$\theta\in\mathbb{R}\mapsto\int_0^\theta e^{-t^2/2}\,dt$$

est la primitive de la fonction $g:t\in\mathbb{R}\mapsto e^{-t^2/2}$ qui s'annule en 0. En particulier, elle est dérivable et la dérivée est g. On en déduit que la fonction φ est dérivable par somme et composition de fonctions dérivables. On vérifie que pour tout $\theta\in\mathbb{R}_*^+$

$$\varphi'(\theta)=\frac{1}{\theta^2}\left(K+C\left(1-e^{-\theta^2/2}\right)\right)>0.$$

La fonction φ est donc strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_*^+$. On peut préciser les limites

$$\varphi(\theta)\underset{\theta\to-\infty}{\longrightarrow}-\infty\quad\text{et}\quad\varphi(\theta)\underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow}C\sqrt{\pi/2}.$$

33.c) La fonction c_2 est dérivable par quotient et

$$\begin{aligned}&c_2'(\theta)\\&=\frac{-D'(\theta)C\cdot\int_0^\theta D(t)dt-[K+(1-D(\theta))C]D(\theta)}{\left(\int_0^\theta D(t)dt\right)^2}\\&=\frac{f(\theta)C\cdot\int_0^\theta D(t)dt-[K+(1-D(\theta))C]D(\theta)}{\left(\int_0^\theta D(t)dt\right)^2}\\&=\frac{\theta\cdot e^{-\theta^2/2}C\cdot\int_0^\theta D(t)dt-\left[K+\left(1-e^{-\theta^2/2}\right)C\right]e^{-\theta^2/2}}{\left(\int_0^\theta D(t)dt\right)^2}\\&=\theta\cdot e^{-\theta^2/2}\frac{C\int_0^\theta D(t)dt-\frac{1}{\theta}\left[K+\left(1-e^{-\theta^2/2}\right)C\right]}{\left(\int_0^\theta D(t)dt\right)^2}\\&=\theta\cdot e^{-\theta^2/2}\cdot\varphi(\theta).\end{aligned}$$

Le signe de c_2' dépend uniquement de celui de φ. Or on a vu que φ est strictement croissante, continue et

$$\varphi(\theta) \underset{\theta\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad \varphi(\theta) \underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow} C\sqrt{\pi/2} > 0.$$

D'après le théorème de la bijection φ s'annule une seule fois (disons en θ_0) avec un uniquement changement de signe

$$\forall\theta\in]0;\theta[,\qquad \varphi(\theta)<0$$
$$\forall\theta\in]\theta;+\infty[,\qquad \varphi(\theta)>0.$$

on en déduit que c_2 est strictement décroissante sur $]0;\theta_0[$ et strictement croissante sur $]\theta;+\infty[$. Il y a donc un minimum atteint uniquement en θ_0. En particulier

$$c_2(\theta_0) \leqslant \lim_{\theta\to+\infty} c_2(\theta) = c_1.$$

33.d) On a vu que $\varphi(\theta_0) = 0$. C'est-à-dire

$$C\int_0^{\theta_0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{1}{\theta_0}\left(K + C\left(1 - e^{-\theta_0^2/2}\right)\right) = 0$$

ou encore

$$\int_0^{\theta_0} D(t)\,dt = \int_0^{\theta_0} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{C\theta_0}\left(K + C\left(1 - e^{-\theta_0^2/2}\right)\right).$$

Puis

$$c_2(\theta_0) = \frac{K + (1 - D(\theta_0))C}{\int_0^{\theta_0} D(t)dt} = \frac{K + \left(1 - e^{-\theta_0^2/2}\right)C}{\frac{1}{C\theta_0}\left(K + C\left(1 - e^{-\theta_0^2/2}\right)\right)} = C\theta_0.$$

Concluons :

$$\theta_0 = \frac{1}{C}c_2(\theta_0) < \frac{1}{C}c_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 + \frac{K}{C}\right)$$

33.e) Sous ces conditions $c_2(\theta_0) = \theta_0$. Comme $c_2(\theta_0)$ est le minimum de c_2, on a

$$c_2(\theta_0) \leqslant c_2(1,5) = 1,5429.$$

Et comme $\theta_0 = c_2(\theta_0)$ on a finalement $\theta_0 \leqslant 1,5429$ D'autre part, c_2 est croissante sur $[\theta_0, +\infty[$, et $c_2(1,45) > c_2(1,5)$ alors que $1,45 < 1,5$. On ne peut donc pas avoir 1,45 et 1,5 dans cet intervalle. Finalement $1,45 \leqslant \theta_0 \leqslant 1,5429 \leqslant 1,55$.

Exercice 2

34. Puisque $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable. Il existe donc P inversible telle que $P^{-1}SP$ soit diagonale.

Les polynômes L_i sont les polynômes d'interpolation de Lagrange.

35. Vérifier que

$$L_i\left(\lambda_j\right) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Comme il y a $\dim \mathbb{R}_n[x]$ vecteurs dans la famille et que pour chaque indice $i \in [\![0;n]\!]$, $L_i \in \mathbb{R}_n[x]$, il suffit de vérifier que la famille est libre. Soient $\mu_0, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_i L_i = 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

En évaluant en λ_j pour un indice j fixé, on obtient

$$1 \times \mu_j = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \underbrace{L_i\left(\lambda_j\right)}_{\delta_{ij}} = 0.$$

Ainsi la famille est libre. C'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

36.) Vérifier que le polynôme

$$U = \sum_{i=0}^{n} {\lambda_i}^k L_i$$

convient.

| Ce polynôme U est même unique.

36. Notons que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Comme D est diagonale,

$$\begin{aligned} U\left(D^k\right) &= U\left(\operatorname{diag}\left(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k\right)\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(U\left(\lambda_1^k\right), \ldots, U\left(\lambda_n^k\right)\right) \\ &= \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \\ U\left(D^k\right) &= D. \end{aligned}$$

D'où $\qquad R(D) = U\left(D^k\right) - D = D - D = 0_n.$

Ainsi, R est un polynôme annulateur de D. Et puisque $S = PDP^{-1}$, on a

$$R(S) = R\left(PDP^{-1}\right) = PR(D)P^{-1} = 0.$$

Donc R est aussi un polynôme annulateur de S.

38. Justifions par récurrence que

$$\mathscr{P}(p): \quad AS^{pk} = S^{pk}A$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

→ *Initialisation.* $\mathscr{P}(0)$ est claire car pas convention, la puissance nulle d'une matrice est l'identité.

→ *Hérédité.* Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie. Dans ce cas

$$\begin{aligned} AS^{(p+1)k} &= AS^{pk}S^k \\ &= \left(AS^{pk}\right)S^k \\ &= S^{pk}AS^k \qquad \text{d'après } \mathscr{P}(k) \\ &= S^{pk}S^kA \quad \text{car A et } S^k \text{ comutent} \\ AS^{(p+1)k} &= S^{(p+1)k}A. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

→ *Conclusion.* Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $AS^{pk} = S^{pk}A$.

39. Soit $U = \sum_{p=0}^{n-1} a_p X^p$ le polynôme de la question 35.b. Alors

$$U\left(X^k\right) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p X^{kp}$$

puis $$\mathrm{U}\left(\mathrm{S}^k\right) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \mathrm{S}^{kp}.$$

En reprenant le résultat précédent, on obtient

$$\mathrm{U}\left(\mathrm{S}^k\right)\mathrm{A} = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \mathrm{S}^{kp}\mathrm{A} = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \mathrm{A}\mathrm{S}^{kp} = \mathrm{A}\mathrm{U}\left(\mathrm{S}^k\right).$$

Enfin, d'après la question 36, $\mathrm{R}(\mathrm{S}) = 0$ donc $\mathrm{U}(\mathrm{S}^k) = \mathrm{S}$ et $\mathrm{SA} = \mathrm{AS}$. Ce qui conclut.

40.a) Le réel λ est valeur propre de S si et seulement si $\mathrm{S} - \lambda \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible, si et seulement si $\det(\mathrm{S} - \lambda \mathrm{I}_2) = 0$. Or

$$\det(\mathrm{S} - \lambda \mathrm{I}_2) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Ainsi, S possède deux valeurs propres distinctes : 1 et -1. De plus, on constate que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{I}_2$ et si $k = 2p$ est pair,

$$\mathrm{S}^k = \left(\mathrm{S}^2\right)^p = \mathrm{I}_2{}^p = \mathrm{I}_2.$$

40.b) Le résultat est faux pour k pair. En effet S^k commute avec toutes les matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ pourtant il existe des matrices A qui ne commutent pas avec S. Par exemple

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

car $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & * \\ * & * \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

DS 3* - solution

Problème A
Le début est adapté du sujet HEC 2016

1.a) Par définition d'une partition de l'unité

$$\mathrm{id}_{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^{k} u_i.$$

C'est-à-dire pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$x = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}(x) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{u_i(x)}_{\in \mathrm{Im}(u_i)}.$$

Donc $$\mathrm{E} \subset \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i).$$

L'inclusion réciproque est directe, d'où l'égalité demandée. On sait par la formule de Grassmann que pour tous sous-espaces vectoriels F, G de E

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G})-\dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) \leqslant \dim(\mathrm{F})+\dim(\mathrm{G}).$$

Par récurrence, on en déduit que

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \dim(\mathrm{Im}(u_i)).$$

D'où le résultat.

1.b) On a

$$\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i).$$

D'après le cours, une somme est directe si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces est égale à la dimension de la somme des sous-espaces. Ainsi

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(u_i) \iff n = \sum_{i=1}^{k} r_i.$$

2. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires tels que le projecteur p projette sur F parallèlement à G. Soit $\mathscr{B}$, une base de E adaptée à la décomposition $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G} = \mathrm{E}$. C'est-à-dire $\mathscr{B}$ est obtenue par la concaténation d'une base de F et d'une base de G. Or, on sait que

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad p(x) = x$$
$$\forall x \in \mathrm{G}, \quad p(x) = 0.$$

On en déduit que la matrice de p dans cette base (de vecteurs propres de p) est diagonale et plus précisément

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \mathrm{Diag}(1,\ldots,1,0\ldots,0)$$

où le nombre de 1 est donné par la dimension de F.

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)\right) = 1+\ldots+1 = \dim \mathrm{F}.$$

Or F correspond aussi à l'image de p

$$\mathrm{Tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)\right) = \dim \mathrm{Im}\, p = \mathrm{rg}(p).$$

Si $\mathscr{B}'$ est un autre base de E, les matrices

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p)$$

représentent le même endomorphisme. Par la formule de changement de base, elles sont semblables. Comme la trace est un invariant de similitude, ces deux matrices ont même trace.
En conclusion, pour toute base de E, la matrice de p dans cette base a pour trace le rang de p.

3. Notons M_i, la matrice de u_i dans une base $\mathscr{B}$ de E. Comme les applications u_i forment une partition de l'unité, on a

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{M}_i = \mathrm{I}_n.$$

La trace étant linéaire

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Tr}(\mathrm{M}_i) = \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n) = n.$$

On conclut à l'aide de la question précédente car la trace de M_i correspond au rang de u_i.

4. On suppose donc (1) vérifiée. Soient $x \in \mathrm{E}$ et $i \in [\![1,n]\!]$,

$$u_i(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}\left(u_i(x)\right) = \sum_{j=1}^{k} u_j\left(u_i(x)\right) = \underbrace{u_1\left(u_i(x)\right)}_{\in \mathrm{Im}(u_1)}+\cdots+\underbrace{u_k\left(u_i(x)\right)}_{\in \mathrm{Im}(u_k)}.$$

Or on a aussi

$$u_i(x) = \underbrace{0}_{\in \mathrm{Im}(u_1)} +\cdots+ \underbrace{0}_{\in \mathrm{Im}(u_{i-1})} + \underbrace{u_i(x)}_{\in \mathrm{Im}(u_i)} + \underbrace{0}_{\in \mathrm{Im}(u_{i+1})} +\cdots+ \underbrace{0}_{\in \mathrm{Im}(u_k)}.$$

Précisons que la somme des images $\mathrm{Im}(u_i)$ est directe (question 1.b) en supposant (1)). Par unicité de la décomposition dans le cas d'une somme directe :

$$\forall j \neq i, \quad u_j\left(u_i(x)\right) = 0.$$

5. Il reste à établir (3)⇒(2).
On suppose donc que pour tout $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$,

$$u_i \circ u_j = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

Soit $j \in [\![1,k]\!]$. De nouveau, à partir de $\mathrm{id}_E = \sum_{i=1}^{k} u_i$, on obtient

$$u_j = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ u_j = u_j \circ u_j + \sum_{i \neq j} \underbrace{u_i \circ u_j}_{=0_{\mathscr{L}(E)}} = u_j \circ u_j.$$

On en déduit que u_j est un endomorphisme tel que ${u_j}^2 = u_j$. C'est donc un projecteur. L'énoncé (2) est vérifié.

6. On sait que u_i projette sur l'image parallèlement à son noyau. Sachant que pour tout indice $j \neq i$, on a

$$u_i \circ u_j = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

donc $$\operatorname{Im} u_j \subset \operatorname{Ker} u_i.$$

Par somme, on a donc

donc $$\bigoplus_{\substack{j \in [\![1;n]\!] \\ j \neq i}} \operatorname{Im}\left(u_j\right) \subset \operatorname{Ker} u_i.$$

De plus, on a l'égalité des dimensions

$$\begin{aligned}\dim\left(\bigoplus_{\substack{j \in [\![1;n]\!] \\ j \neq i}} \operatorname{Im}\left(u_j\right)\right) &= \dim E - \dim \operatorname{Im} u_i \\ &= \dim \operatorname{Ker} u_i.\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité et la conclusion

$$\bigoplus_{\substack{j \in [\![1;n]\!] \\ j \neq i}} \operatorname{Im}\left(u_j\right) = \operatorname{Ker} u_i.$$

7. La matrice A est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Il vient

$$\operatorname{Sp}(A) = \{-1; 0\}.$$

De plus, on constate que A a une colonne nulle et deux colonnes non proportionnelles. On en déduit que A est de rang 2 et par le théorème du rang, 0 est valeur propre avec

$$\dim(\ker(A)) = \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right) - \operatorname{rg}(A) = 3 - 2 = 1.$$

De plus,
$$A + I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On retrouve le fait que -1 est valeur propre avec

$$\dim\left(\ker\left(A + I_3\right)\right) = 1.$$

Par contre, si on compte les dimensions de tous les sous-espaces propres, on ne trouve pas 3. On sait alors que A n'est pas diagonalisable.

8. Il suffit de vérifier par le calcul que

$$A^3 + A = 0_3.$$

9. Raisonnons par l'absurde en supposons qu'un tel polynôme annulateur P de degré 2 existe. Comme le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$P(x) = \lambda x(x+1).$$
Or, on vérifie que

$$A(A+I_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 1 & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \neq 0_3.$$

| Il suffit de calculer un coefficient non nul.

C'est donc absurde, il n'existe pas de tel polynôme P.

10. On a
$$Q_1(A) = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a directement $Q_1(A)^2 = Q_1(A)$, la matrice $Q_1(A)$ est bien une matrice de projecteur. De plus,

$$\begin{aligned}\left(I_3 - A^2\right)^2 &= I_3 - 2A^2 + A^4 = I_3 - 2A^2 + A^2 \\ &= I_3 - A^2.\end{aligned}$$

Si on pose $Q_2(x) = 1 - x^2$, on a donc $Q_2(A)^2 = Q_2(A)$. La matrice $Q_2(A)$ est aussi une matrice de projecteur.
On en déduit que $Q_1(f)$ et $Q_2(f)$ sont des projecteurs de E et
$$Q_1(f) + Q_2(f) = f^2 + \mathrm{id}_E - f^2 = \mathrm{id}_E.$$
C'est bien une partition de l'unité en projecteurs.

11. La première égalité est une conséquence directe du fait que f soit diagonalisable. Justifions que

$$P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

C'est-à-dire $$\forall\, u \in E, \qquad P(f)(u) = 0_E.$$

Soit e, un vecteur propre associé à la valeur propre λ_{i_0}, on a donc $f(e) = \lambda_{i_0} e$, ou encore

$$\left(f - \lambda_{i_0} \mathrm{id}_E\right)(e) = 0_E.$$

Comme
$$P(f) = \overbrace{\underset{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}{\overset{k}{\bigcirc}} \left(f - \lambda_i \mathrm{id}_E\right)}^{:=g} \circ \left(f - \lambda_{i_0} \mathrm{id}_E\right)$$

on obtient

$$P(f)(e) = g \circ \left(f - \lambda_{i_0} \mathrm{id}_E\right)(e) = g(0_E) = 0_E$$

car g est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

Attention, noter bien la composition o. On évitera les expressions qui n'ont pas de sens du type

$$P(f) = \prod_{i=1}^{k} \left(f - \lambda_i \mathrm{id}_E\right) \qquad \times\times\times$$

Or f est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres. Donc il existe une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1;n]\!], \qquad P(f)(e_i) = 0_E.$$

Justifions que cette égalité s'étend alors à tout vecteur de E par linéarité. Pour $u \in \mathrm{E}$, il existe une famille de réels $(\mu_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ telle que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$$

et $$\mathrm{P}(f)(u) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathrm{P}(f)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}.$$

D'où $$\mathrm{P}(f) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

12. Soit $y \in \operatorname{Im} p_i$. Il existe donc $e \in \mathrm{E}$ tel que

$$y = p_i(e) = \mathrm{L}_i(f)(e).$$

Or il existe une constante c_i non nulle dépendant uniquement de i telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{P}(x) = c_i\left(x-\lambda_i\right)\mathrm{L}_i(x).$$

Par conséquent

$$\left(f-\lambda_i \operatorname{id}_{\mathrm{E}}\right)\circ \mathrm{L}_i(f) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$

D'où $$\left(f-\lambda_i \operatorname{id}_{\mathrm{E}}\right)\circ \mathrm{L}_i(f)(e) = 0_{\mathrm{E}}$$

C'est-à-dire $$\left(f-\lambda_i \operatorname{id}_{\mathrm{E}}\right)(y) = 0_{\mathrm{E}}$$

ou encore $$y \in \operatorname{Ker}\left(f-\lambda_i \operatorname{id}_{\mathrm{E}}\right) = \mathrm{E}_{\lambda_i}(f).$$

Ce qui donne bien l'inclusion

$$\operatorname{Im}\left(p_i\right) \subset \mathrm{E}_{\lambda_i}(f).$$

13.a) On a

$$\mathrm{L}_j\left(\lambda_i\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

13.b) Posons $\mathrm{Q} = \left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{L}_i\right) - 1$ de sorte que pour tout $i \in [\![1;k]\!]$

$$\mathrm{Q}\left(\lambda_i\right) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{L}_j\left(\lambda_i\right) - 1 = \sum_{j=1}^{k} \delta_{ij} - 1 = 1-1 = 0.$$

Or Q est une combinaison linéaire de polynômes de degré $k-1$, Q est de degré au plus $k-1$ avec au moins k racines. Le polynôme Q est nul et l'égalité est établie.

13.c) On a

$$\sum_{j=1}^{k} p_i = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{L}_j(f) = \operatorname{id}_{\mathrm{E}}.$$

14.a) Soit $\left(x_1,\dots,x_k\right) \in \operatorname{Im} p_1 \times \ldots \times \operatorname{Im} p_k$ tel que

$$x_1 + \ldots + x_k = 0_{\mathrm{E}}.$$

En reprenant la question 12

$$\underbrace{x_1}_{\in \mathrm{E}_{\lambda_1}(f)} + \cdots + \underbrace{x_k}_{\in \mathrm{E}_{\lambda_k}(f)} = 0_{\mathrm{E}}$$

et sachant que les sous-espaces propres sont en somme directe :

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0_{\mathrm{E}}.$$

Les images sont donc bien en somme directe.

14.b) En reprenant la question 1.b), on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{rg} p_i = n = \dim \mathrm{E}$$

et on sait que

$$\sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f) = \dim \mathrm{E}$$

car f est diagonalisable. D'où

$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left(\dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f) - \operatorname{rg}\left(p_i\right)\right)}_{\geqslant 0} = 0$$

car $\operatorname{Im} p_i \subset \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$. Nécessairement

$$\operatorname{rg}\left(p_i\right) = \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$$

et l'égalité $$\operatorname{Im} p_i = \mathrm{E}_{\lambda_i}(f).$$

15. On a donc vérifié la condition (1) du préliminaire. On en déduit (question 6) que p_i est le projecteur sur $\operatorname{Im}\left(p_i\right) = \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$ parallèlement à

$$\bigoplus_{\substack{j\in[\![1;n]\!]\\ j\neq i}} \operatorname{Im}\left(u_i\right) = \bigoplus_{\substack{j\in[\![1;n]\!]\\ j\neq i}} \mathrm{E}_{\lambda_i}(f).$$

16. Soit e, un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j, on montre par récurrence que pour tout entier naturel p

$$f^p(e) = \lambda_j{}^p e.$$

On en déduit par combinaison linéaire que pour tout polynôme Q

$$\mathrm{Q}(f)(e) = \mathrm{Q}(\lambda_j)e.$$

Notons de plus que

$$p_i(e) = \begin{cases} e & \text{si } i=j \\ 0_{\mathrm{E}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Q}_i(\lambda_i)p_i(e) = \mathrm{Q}(\lambda_j)e = \mathrm{Q}(f)(e).$$

Par linéarité et en considérant une base de vecteurs propres, on en déduit que pour tout $x \in \mathrm{E}$

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Q}_i(\lambda_i)p_i(x) = \mathrm{Q}(f)(x).$$

C'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Q}_i(\lambda_i)p_i = \mathrm{Q}(f).$$

En particulier pour le choix du polynôme $\mathrm{Q}(x) = x$, il vient

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i = f.$$

17. • On a $\mathscr{C}_f \subset \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
• L'application nulle $0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ commute avec tout endomorphisme de E donc en particulier avec f. Ainsi $\mathscr{C}_f \neq \varnothing$. • Soient $g, h \in \mathscr{C}_f$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(\lambda g + \mu h)\circ f &= \lambda g \circ f + \mu h \circ f \\ &= \lambda f \circ g + \mu f \circ h \quad (\text{car } g, h \in \mathscr{C}_f)\end{aligned}$$

Ainsi
$$(\lambda g+\mu h)\circ f=f\circ(\lambda g+\mu h).$$
Dès lors
$$\lambda g+\mu h\in\mathscr{C}_f.$$
L'ensemble $\mathscr{C}_f$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

18. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que g commute avec f. Soit $i\in[\![1;k]\!]$.
$$p_i=\mathrm{L}_i(f)=\sum_{j=0}^{k}a_jf^j.$$
Par récurrence, on montre que g commute avec f^j pour tout $j\in\mathbb{N}$. Il vient
$$\begin{aligned}g\circ p_i&=g\circ\left(\sum_{j=0}^{k}a_jf^j\right)=\sum_{j=0}^{k}a_jg\circ f^j\\&=\sum_{j=0}^{k}a_jf^j\circ g=\left(\sum_{j=0}^{k}a_jf^j\right)\circ g\\g\circ p_i&=p_i\circ g.\end{aligned}$$
$\boxed{\Leftarrow}$ On a vu, question 16 que
$$f=\sum_{i=1}^{k}\lambda_ip_i.$$
Par conséquent
$$g\circ f=\sum_{i=1}^{k}\lambda_ig\circ p_i=\sum_{i=1}^{k}\lambda_ip_i\circ g=f\circ g.$$
19.a) En reprenant la condition (2) du préliminaire, pour $i\neq j$
$$p_i\circ p_j=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$
Et p_p étant un projecteur, pour $j=i$
$$p_i\circ p_i=p_i.$$
19.b) Soit $h\in\mathscr{C}_{f,i}$. On a donc
$$p_i\circ h\circ p_i=h.$$
Utilisons la caractérisation démontrée à la question 18. Soit $j\in[\![1:k]\!]$ et justifions que p_j commute avec h. Si $j=i$, en utilisant $p_i\circ p_i=p_i$
$$\begin{aligned}p_i\circ h&=p_i\circ p_i\circ h\circ p_i\\&=p_i\circ h\circ p_i\\&=p_i\circ h\circ p_i\circ p_i\quad=h\circ p_i.\end{aligned}$$
Pour $j\neq i$,
$$\begin{aligned}p_j\circ h&=p_j\circ p_i\circ h\circ p_i\\&=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}\\&=p_i\circ h\circ p_i\circ p_j\quad=h\circ p_j.\end{aligned}$$
Ainsi, h commute avec tous les projecteurs p_j, h commute avec f.

- Soit $i\in[\![1;k]\!]$. On a
$$\mathrm{E}=\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\oplus\mathrm{G}_i$$
où $$\mathrm{G}_i=\bigoplus_{\substack{j\in[\![1;k]\!]\\ i\neq j}}\mathrm{E}_{\lambda_j}(f).$$
Soit $x\in\mathrm{E}$, il existe donc $x_i\in\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$ et $y\in\mathrm{G}_i$ tels que $x=x_i+y$. On a
$$h(x)=h(x_i)+h(y)$$
et
$$p_i\circ h\circ p_i(x)=p_i(h(x_i)).$$
Par unicité de la décomposition, l'égalité
$$p_i\circ h\circ p_i(x)=h(x)$$
n'est possible que si
$$h(x)\in\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\quad\text{et}\quad h(y)=0.$$
Dès lors, $h\in\mathscr{C}_{f,i}$ si et seulement si h est à valeurs dans $\mathbf{E}_{\lambda_i}(f)$ et nulle sur le supplémentaire G_i. Cela permet d'établir un isomorphisme entre $\mathscr{C}_{f,i}$ et $\mathscr{L}(\mathrm{E}_{\lambda_i}(f))$ en posant
$$h\in\mathscr{C}_{f,i}\mapsto h_i\in\mathscr{L}(\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)).$$
Où h_i est l'application restreinte de h à l'espace stable $\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$.
De cet isomorphisme, on en déduit l'égalité des dimensions :
$$\dim\mathscr{C}_{f,i}=\dim\mathscr{L}(\mathrm{E}_{\lambda_i}(f))=\left(\dim\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\right)^2.$$
19.c) Soit $g\in\mathscr{C}_f$.
$$\begin{aligned}g&=g\circ\mathrm{id}_\mathrm{E}=g\circ\left(\sum_{i=1}^{k}p_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}g\circ p_i\\&=\sum_{i=1}^{k}g\circ p_i^2\quad\text{car }p_i\circ p_i=p_i\\g&=\sum_{i=1}^{k}p_i\circ g\circ p_i\end{aligned}$$
On en déduit donc que
$$\mathscr{C}_{\{}=\sum_{i=1}^{k}\mathscr{C}_{f,i}.$$
Justifions maintenant que la somme est directe. Soient g_1, …, g_k des endomorphismes de $\mathscr{C}_{f,1}$, …, $\mathscr{C}_{f,k}$ tels que
$$g_1+\ldots+g_k=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$
D'où
$$\sum_{i=1}^{k}p_i\circ g_i\circ p_i=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$
En composant à gauche par p_j pour un indice $j\in[\![1;k]\!]$, on a directement $g_k=0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. La somme est bien directe.

20. La première égalité est une conséquence directe de la somme directe démontrée à la question précédente.
Comme $\dim\mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\geqslant 1$, on a toujours
$$(\dim\mathrm{E}_{\lambda_i}(f))^2\geqslant\dim\mathrm{E}_{\lambda_i}(f).$$

Par somme
$$\sum_{i=1}^{k}\left(\dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k}\dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f) = n$$
car f est diagonalisable.
De plus, $\mathscr{C}_f$ est sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, donc
$$\dim \mathscr{C}_f \leqslant \dim \mathscr{L}(\mathrm{E}) = n^2.$$

21.a) On a égalité si et seulement si pour tout $i \in [\![1;k]\!]$
$$\left(\dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)\right)^2 = \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f).$$
Comme la dimension d'un sous-espace propre ne peut pas être nul, c'est équivalent à
$$\dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f) = 1.$$
La condition $\sum_{i=1}^{k}\dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f) = n$ impose alors que $k = n$.

21.b) Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i p_i = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}.$$
En composant par p_j, on a directement $\mu_j p_j = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ puis $\mu_j = 0$ car $p_j \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. La famille est libre. Or le nombre d'éléments de la famille coïncide avec la dimension de l'espace. On a donc bien une base.
En reprenant la démarche de la question 18, on vérifie que
$$\left\{\mathrm{Q}(f) \mid \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]\right\} \subset \mathscr{C}_f.$$
La question 16 donne l'inclusion réciproque.

22. Supposons que $n^2 = \dim \mathscr{C}_f$. Ce cas correspond à
$$\mathscr{C}_f = \mathscr{L}(\mathrm{E}).$$
Dit autrement, f commute avec tous les endomorphismes de E. Notons $e_i = \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$. Ainsi
$$\sum_{i=1}^{k} {e_i}^2 = n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} e_i = n.$$
D'où
$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{e_i\left(n - e_i\right)}_{\geqslant 0} = n\sum_{i=1}^{k} e_i - \sum_{i=1}^{n} {e_i}^2 = 0.$$
Or
$$1 \leqslant e_i \leqslant n.$$
Nécessairement, on a pour tout $i \in [\![1;k]\!]$
$$e_i\left(n - e_i\right) = 0 \quad \text{soit} \quad e_i = n.$$
La condition $\sum_{i=1}^{k} e_i = n$ impose $k = 1$. Finalement f est diagonalisable avec une seule valeur propre λ. Si M est la matrice de f dans une base de vecteurs propres alors
$$\mathrm{M} = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) = \lambda \mathrm{I}_n.$$
Par conséquent $f = \lambda\, \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

- La réciproque est directe.

Problème B
adapté du ESSEC 2017 voie E

---

23. La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.
À l'aide du changement de variable affine $u = (t - \alpha)/\beta$, les intégrales
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\beta}\exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\exp(-|u|)\,\mathrm{d}u$$
sont de même nature et égales dans le cas de convergence. Justifions la convergence de la seconde et effectuons le calcul. Par parité de l'intégrande, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0;+\infty[$. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^+$.
$$\int_0^{\mathrm{A}} \frac{1}{2}\exp(-|u|)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\mathrm{A}} \frac{1}{2}\exp(-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{A}}}{2}.$$
Lorsque $\mathrm{A} \to +\infty$, il vient
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\exp(-|u|)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}$$
et par parité
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\exp(-|u|)\,\mathrm{d}u = 1.$$
En reprenant la remarque préliminaire, on en déduit la convergence et l'égalité
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$
En conclusion, f est une densité de probabilité.

24.a) • Pour $x \in \mathbb{R}^-$:
$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}\exp(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\mathrm{A} \to -\infty}\left[\frac{1}{2}\exp(t)\right]_{\mathrm{A}}^{x} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}.$$

- Pour $x \in \mathbb{R}^+$:
$$\Psi(x) = \Psi(0) + \int_0^{x} \frac{1}{2}\exp(-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}\exp(-t)\right]_0^{x} = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

24.b) Soit $\mathrm{Y} = \beta\mathrm{X} + \alpha$. La variable Y est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Déterminons la fonction de répartition $\mathrm{F_Y}$ de Y. Soit $x \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{F_Y}(x) = \mathbf{P}(\mathrm{Y} \leqslant x) = \mathbf{P}(\beta\mathrm{X} + \alpha \leqslant x) = \mathbf{P}\left(\mathrm{X} \leqslant \frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \Psi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$
Sachant que Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{F_Y}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composition de Ψ avec une fonction affine. Dès lors, Y est une variable à densité et une densité s'obtient par dérivation. Pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\mathrm{F}'_{\mathrm{Y}}(x) = \frac{1}{\beta}\Psi'\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}f\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{2\beta}\exp\left(-\left|\frac{x-\alpha}{\beta}\right|\right) = f(x).$$
Ainsi f est une densité de Y qui suit donc la loi $\mathscr{L}(\alpha, \beta)$.

24.c) En reprenant le calcul précédent

$$F_Y(x) = \Psi\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) & \text{si } x \leqslant \alpha \\ 1-\frac{1}{2}\exp\left(\frac{-x+\alpha}{\beta}\right) & \text{si } x \geqslant \alpha. \end{cases}$$

25.a) *Deux rédactions possibles ici, on peut faire le calcul direct ou utiliser un argument de symétrie. Rédigeons la seconde option.*

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,\mathrm{d}t$ est généralisée en $\pm\infty$.
Par les croissances comparées, on montre que

$$|t| f(t) = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Par les critères de négligeabilité et de Riemann. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. L'espérance est bien définie. Dans ce cas

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

par imparité de l'intégrande.

- Si $Z \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, alors Z admet un moment d'ordre 2. On a la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{V}(Z) + \mathbf{E}(Z)^2 = 2.$$

On en déduit par parité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^2 \frac{1}{2} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 2.$$

On en déduit par la formule de Koenig-Huygens

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2 = 2 - 0^2 = 2.$$

25.b) Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{L}(\alpha,\beta)$. Si $X \hookrightarrow \mathscr{L}(0,1)$, on a vu que les variables Y et $\beta X + \alpha$ ont même loi. D'après la linéarité de l'espérance et les propriétés de calcul de la variance

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(\beta X + \alpha) = \beta\mathbf{E}(X) + \alpha = \alpha$$
$$\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(\beta X + \alpha) = \beta^2\mathbf{V}(X) = 2\beta^2.$$

26) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([V=0],[V=1])$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}(X \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}([V=1]\cap[X\leqslant x]) + \mathbf{P}([V=0]\cap[X\leqslant x]) \\ &= \mathbf{P}([V=1]\cap[U\leqslant x]) + \mathbf{P}([V=0]\cap[-U\leqslant x]) \\ &= \mathbf{P}(V=1)\mathbf{P}(U\leqslant x) + \mathbf{P}(V=0)\mathbf{P}(-U\leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(V=1)\mathbf{P}(U\leqslant x) + \mathbf{P}(V=0)\mathbf{P}(U\geqslant -x) \end{aligned}$$

par indépendance des variables U et V. Ensuite

$$F_X(x) = \frac{1}{2}F_U(x) + \frac{1}{2}\big(1 - F_U(-x)\big).$$

Or on sait que

$$F_U : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ y & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ 1-e^{-y} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

On constate alors que $F_X = \Psi$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, X suit une loi de Laplace de paramètre $(0;1)$.

27.

```
def Laplace(alpha,beta):
    v=rd.random()<0.5
    u=rd.exponential(1)
    # simulation d'une loi L(0,1)
    l=(2*v-1)*u
    # puis par transformation affine
    return beta*l+alpha
```

| Dans la mesure du possible, on commente le code.

28. Le programme renvoie une réalisation de la variable

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} {X_i}^2$$

où $m = 5000$ et les variables X_i sont mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{L}(1,2)$. D'après la loi faible des grands nombres, il y a une forte probabilité que le résultat soit proche de

$$\mathbf{E}(X^2) \quad \text{où} \quad X \hookrightarrow \mathscr{L}(1,2).$$

En appliquant la formule de Koenig-Huygens

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2 = 2\cdot 2^2 + 1 = 9.$$

29. Reprendre la méthode d'inversion. Vérifier ensuite que

$$\Psi^{-1}(x) = \begin{cases} \ln(2x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1/2 \\ -\ln(2(1-x)) & \text{si } 1/2 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

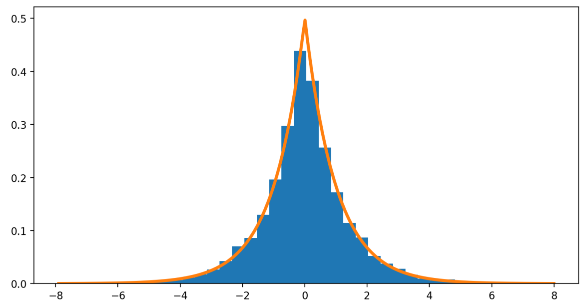
Dans ce cas $\Psi^{-1}(U)$ suit une loi de Laplace $\mathscr{L}(0,1)$.

30. Un code possible est :

```
def Laplace2():
    u=rd.random()
    if u<1/2:
        return np.log(2*u)
    else :
        return -np.log(2*(1-u))
```

On peut tester ce programme en traçant l'histogramme d'un échantillon d'un grands nombre de simulations et vérifier la cohérence avec une densité d'une loi de Laplace. Par exemple :

```
m=10000
Ech=np.zeros(m)
for i in range(m):
    Ech[i]=Laplace2()
plt.hist(Ech,40,density=True)
t=np.linspace(min(Ech),max(Ech),200)
plt.plot(t,np.exp(-abs(t))/2,linewidth=3)
plt.show()
```



31. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que le couple (X, Y) est ε-différentiel. Soit $n \in J$. Comme J est un ensemble non vide de $\mathbb{N}$, il existe un intervalle I tel que $I \cap J = \{z_n\}$. Avec ce choix

$$\mathbf{P}(X = z_n) = \mathbf{P}(X \in I), \quad \mathbf{P}(Y = z_n) = \mathbf{P}(Y \in I).$$

Par définition de l'ε-différentiabilité, on obtient

$$e^{-\varepsilon}\mathbf{P}(X = z_n) \leqslant \mathbf{P}(Y = z_n) \leqslant e^{\varepsilon}\mathbf{P}(X = z_n)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons maintenant que pour tout $n \in J$,

$$e^{-\varepsilon}\mathbf{P}(X = z_n) \leqslant \mathbf{P}(Y = z_n) \leqslant e^{\varepsilon}\mathbf{P}(X = z_n).$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Justifions que

$$e^{-\varepsilon}\mathbf{P}([X \in I]) \leqslant \mathbf{P}([Y \in I]) \leqslant e^{\varepsilon}\mathbf{P}([X \in I]) \qquad (\star)$$

- Si $I \cap J = \varnothing$, on a directement les inégalités $(\star)$.
- Si $I \cap J \neq \varnothing$. Pour tout $n \in I \cap J$

$$e^{-\varepsilon}\mathbf{P}(X = z_n) \leqslant \mathbf{P}(Y = z_n) \leqslant e^{\varepsilon}\mathbf{P}(X = z_n)$$

. On en déduit par somme

$$\underbrace{e^{-\varepsilon}\sum_{n \in I\cap J}\mathbf{P}(X = z_n)}_{=\mathbf{P}(X\in I)} \leqslant \underbrace{\sum_{n \in I\cap J}\mathbf{P}(Y = z_n)}_{=\mathbf{P}(Y\in I)} \leqslant \underbrace{e^{\varepsilon}\sum_{n \in I\cap J}\mathbf{P}(X = z_n)}_{=\mathbf{P}(X\in I)}$$

Ainsi $(\star)$ est encore vérifié. En conclusion, le couple (X, Y) est ε-différentiel.

32.a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- Soit $k = 1$.

$$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}([X = 1] \cap [Z = 0]) = \mathbf{P}(X = 1) \times \mathbf{P}(Z = 0) = \frac{1-p}{2}$$

par indépendance des variables X et Z.
- Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y = k) &= \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Z = 0) + \mathbf{P}(X = k-1)\mathbf{P}(Z = 1)\\ &= \frac{1-p}{2^k} + \frac{p}{2^{k-1}} = \frac{1+p}{2^k}.\end{aligned}$$

32.b) Pour $k = 1$:

$$\frac{\mathbf{P}(Y = 1)}{\mathbf{P}(X = 1)} = 1 - p \in \left[1-p, \frac{1}{1-p}\right]$$

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.

$$\frac{\mathbf{P}(Y = k)}{\mathbf{P}(X = k)} = \frac{\frac{1+p}{2^k}}{\frac{1}{2^k}} = 1 + p \in \left[1-p, \frac{1}{1-p}\right].$$

Ce qui conclut.

32.c) Le résultat précédent s'écrit aussi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$e^{-(-\ln(1-p))} \leqslant \frac{P(Y = k)}{P(X = k)} \leqslant e^{-\ln(1-p)}.$$

D'où le résultat.

33. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b, avec a réel ou $-\infty$, b réel ou $+\infty$, et $a < b$. La croissance de l'intégrale appliquée sur I aux inégalités :

$$\forall t \in I, \qquad e^{-\varepsilon} f(t) \leqslant g(t) \leqslant e^{\varepsilon} f(t)$$

s'écrit :

$$e^{-\varepsilon}\underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{=\mathbf{P}(X\in I)} \leqslant \underbrace{\int_a^b g(t)\,dt}_{=\mathbf{P}(Y\in I)} \leqslant e^{\varepsilon}\underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{=\mathbf{P}(X\in I)}.$$

34. Avec le choix de $I = [t, t+h]$, on obtient

$$e^{-\varepsilon}\mathbf{P}(X \in [t, t+h]) \leqslant \mathbf{P}(Y \in [t, t+h]) \leqslant e^{\varepsilon}\mathbf{P}(X \in [t, t+h])$$

Comme X et Y sont à densité

$$\mathbf{P}(X \in [t, t+h]) = \mathbf{P}(X \in]t, t+h]) = F(t+h) - F(t)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{P}(Y \in [t, t+h]) = \mathbf{P}(Y \in]t, t+h]) = G(t+h) - G(t).$$

On en déduit en divisant par $h \in \mathbb{R}_*^+$

$$e^{-\varepsilon}\frac{F(t+h) - F(t)}{h} \leqslant \frac{G(t+h) - G(t)}{h} \leqslant e^{\varepsilon}\frac{F(t+h) - F(t)}{h}.$$

Par passage à la limite quand h tend vers 0, les fonctions F et G étant dérivables en t (f et g sont continues en t), il vient

$$e^{-\varepsilon}F'(t) \leqslant G'(t) \leqslant e^{\varepsilon}F'(t)$$

D'où

$$e^{-\varepsilon} f(t) \leqslant g(t) \leqslant e^{\varepsilon} f(t).$$

35.a) En reprenant le résultat du cours, $aX + b$ est une variable à densité avec pour densité

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

35.b) On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-\varepsilon} f(x) \leqslant g(x) \leqslant e^{\varepsilon} f(x).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Avec le choix $x = (t-b)/a$ et en divisant par $a > 0$

$$e^{-\varepsilon}\frac{1}{a} f\left(\frac{t-b}{a}\right) \leqslant \frac{1}{a} g\left(\frac{t-b}{a}\right) \leqslant e^{\varepsilon} f\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

D'après la caractérisation démontrée aux questions 33 et 34 $(aX + b, aY + b)$ est ε-différentiel.

On peut démontrer plus directement ce résultat à partir de la définition de ε-différentiabilité.

36. On définit pour $a, b \in \mathbb{R}$, la fonction f_{ab} définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{ab}(t) = \frac{1}{2b} e^{-|t-a|/b}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}|t-a| &= \left|t-a'+\left(a-a'\right)\right| \\ &\leqslant \left|t-a'\right|+\left|a-a'\right|.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}f_{a,b}(t) &\geqslant \frac{1}{2b}\mathrm{e}^{-\frac{|t-a'|-|a-a'|}{b}} \\ &\geqslant f'_{ab}(t)\mathrm{e}^{-|a-a'|/b}\end{aligned}$$

En échangeant le rôle de a et a', on a aussi

$$f'_{a,b}(t) \geqslant f_{a,b}(t)\mathrm{e}^{-|a'-a|/b}.$$

Ainsi en posant $\varepsilon = \left|a-a'\right|/b$, on a bien

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{-\varepsilon} f_{a,b}(t) \leqslant f'_{a,b}(t) \leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon} f_{a,b}(t).$$

Comme X et Y ont respectivement comme densité $f_{a,b}$ et $f_{a',b}$, le résultat est établi.

La suite du sujet n'a pas été modifié, je renvoie au corrigé disponible en ligne de l'APHEC.

Pierre-Simon de Laplace