CHAPITRE 12

Compléments sur les variables aléatoires à densité

Il n'y a rien de plus triste qu'une vie sans hasard.

HONORÉ DE BALZAC (1799-1850)

1 Loi du maximum, loi du minimum

Soient X, Y des variables aléatoires *indépendantes* à densité définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Notons f_X et f_Y des densités respectivement de X et Y. On définit les applications

$$Z : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \max\big(X(\omega); Y(\omega)\big) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \min\big(X(\omega); Y(\omega)\big) \end{array} \right.$$

Noter simplement $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$. Les applications Z et T sont des variables aléatoires.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbf{P}(Z \leqslant t) \\ &= \mathbf{P}\big([X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]\big) \\ &= \mathbf{P}\big([X \leqslant t]\big) \cdot \mathbf{P}\big([Y \leqslant t]\big) \quad \text{Par indépendance} \\ F_Z(t) &= F_X(t) \cdot F_Y(t). \end{aligned}$$

Par produit, F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points (noté D). Z est une variable aléatoire à densité. Une densité est donnée par dérivation, pour $t \in \mathbb{R} \setminus D$

$$f_Z(t) = {F_Z}'(t) = {F_X}'(t) \cdot F_Y(t) + F_X(t) \cdot {F_Y}'(t) = f_X(t)F_Y(t) + f_Y(t)F_X(t).$$

La dernière égalité s'étend à tout réel t.

- Le calcul est similaire pour le minimum en rajoutant le passage au complémentaire. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 1 - F_T(t) &= \mathbf{P}(T > t) \\ &= \mathbf{P}\big([X > t] \cap [Y > t]\big) \\ &= \mathbf{P}\big([X > t]\big) \cdot \mathbf{P}\big([Y > t]\big) \quad \text{Par indépendance} \\ 1 - F_T(t) &= (1 - F_X(t)) \times (1 - F_Y(t)). \end{aligned}$$

Par produit, F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points (noté D_T). T est une variable aléatoire à densité. Une densité est donnée par dérivation, pour $t \in \mathbb{R} \setminus D_T$

$$-f_T(t) = (1 - F_T)'(t) = (1 - F_X)'(t) \cdot \big(1 - F_Y(t)\big) + \big(1 - F_X(t)\big) \cdot (1 - F_Y)'(t) = -f_X(t)\big(1 - F_Y(t)\big) - f_Y(t)\big(1 - F_X(t)\big).$$

Finalement, on peut poser pour tout réel t

$$f_T(t) = f_X(t)\big(1 - F_Y(t)\big) + f_Y(t)\big(1 - F_X(t)\big).$$

Le calcul précédent se généralise facilement au cas de n variables aléatoires indépendantes à densité $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Avec

$$Z = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad T = \min(X_1, \ldots, X_n),$$

on a

$$F_Z(t) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t) \quad \text{et} \quad 1 - F_T(t) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - F_{X_i}\right)(t).$$

Les variables Z et T restent des variables à densité. Retenons aussi la simplification lorsque les variables X_i suivent la même loi (ainsi, $F_{X_i} = F_{X_1}$)

on a

$$F_Z(t) = F_{X_1}(t)^n \quad \text{et} \quad 1 - F_T(t) = \left(1 - F_{X_1}(t)\right)^n.$$

Une densité pour Z et pour T sont données par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = n f_{X_1}(t) F_{X_1}(t)^{n-1} \quad \text{et} \quad f_T(t) = n f_{X_1}(t)\left(1 - F_{X_1}(t)\right)^{n-1}.$$

Exercice 1

✧ Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois exponentielles de paramètres λ et μ.

1. Donner la loi de $T = \min(X, Y)$.
2. En déduire l'existence et le calcul des espérances de $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$.
3. Généraliser le résultat de la première question avec n variables.

p. 17

Exercice 2

✦ Soient n un entier $\geqslant 2$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de densité f :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1, +\infty[\\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier l'existence de $\mathbf{E}(X_i)$ et $\mathbf{V}(X_i)$. Les calculer si possible.
2. Soit $Y = \min_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i)$. Déterminer la loi de Y et étudier l'existence de $\mathbf{E}(Y)$.
3. De même avec $Z = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i)$.

p. ??

Exercice 3

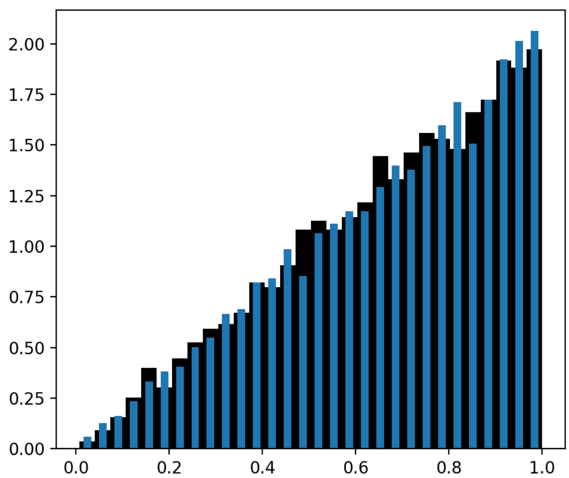
✦

1. Que permet de conjecturer le programme et les résultats suivants ?
2. Prouver votre conjecture puis généraliser le résultat obtenu ? Comment interpréter graphiquement ce résultat ?

p. ??

Editeur

```
def simu1():
    return max(rd.random(2))
def simu2():
    return np.sqrt(rd.random())
m=5000
Ech1=np.zeros(m), Ech2=np.zeros(m)
for i in range(m):
    Ech1[i]=simu1()
    Ech2[i]=simu2()
plt.hist(Ech1,30,density=True,color='
    black')
plt.hist(Ech2,30,density=True,rwidth
    =0.5)
plt.show()
```



2 Loi d'une somme de variables aléatoires à densité

2.1 Calcul d'un produit de convolution

Soient f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points). Pour tout réel x, on définit, sous-réserve d'existence, $f * g(x)$ par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cela définit alors une nouvelle fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f * g(x)$. On parle alors de produit de convolution.

Exercice 4

✧ **Conditions suffisantes d'existence et propriétés**

Soient f, g et h, trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que f soit bornée sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ soient absolument convergentes. p. 17

1. Montrer que $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $f * g = g * f$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f * (g + \lambda h) = (f * g) + \lambda(f * h)$.

Exemples. Nous en donnons deux. Chacun vérifie la condition de la question 1 de l'exercice précédent, le produit de convolution sera ainsi toujours bien défini.

- *Exemple 1 avec la gaussienne.*

Posons pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculons $f * f(x)$. Dans un premier temps, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x-t)f(t) &= \mathrm{e}^{-(x-t)^2/2} \cdot \mathrm{e}^{-t^2/2} = \mathrm{e}^{-\left((x-t)^2+t^2\right)/2} = \mathrm{e}^{-\left(t^2 - tx + \frac{x^2}{2}\right)} = \mathrm{e}^{-((t-x/2)^2+x^2/4)} \\ &= \mathrm{e}^{-x^2/4} \cdot \mathrm{e}^{-(t-x/2)^2}. \end{aligned}$$

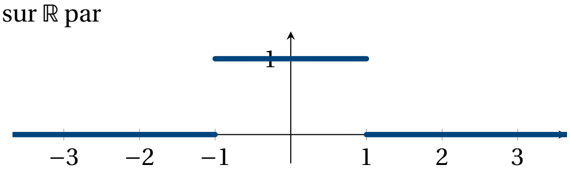
On a donc
$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t-x/2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

À l'aide du changement de variable affine $u = t - x/2$, il vient

$$f * f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2/4}.$$

- *Exemple 2 avec une fonction à support borné.* Soit c définie sur $\mathbb{R}$ par

$$c(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons

$$c * c(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(x-t)c(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tout d'abord, simplifions les bornes de l'intégrale.

$$c(x-t)c(t) \neq 0 \iff \begin{cases} -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ -1 \leqslant t - x \leqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 - x \leqslant t \leqslant 1 + x. \end{cases}$$

Distinguons plusieurs cas :

- Si $x \leqslant -2$, alors les conditions précédentes ne peuvent être vérifiées simultanément : $c(x-t)c(t) = 0$ pour tout t et $c * c(x) = 0$.
- Si $x \geqslant 2$, on a de même, $c * c(x) = 0$.

- Si $x \in [-2;0]$, on a $x-1 \leqslant -1$ et $x+1 \leqslant 1$. Les conditions se simplifient en $-1 \leqslant t \leqslant x+1$ et

$$c * c(x) = \int_{-1}^{x+1} c(x-t)c(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{x+1} 1\,\mathrm{d}u = x+2.$$

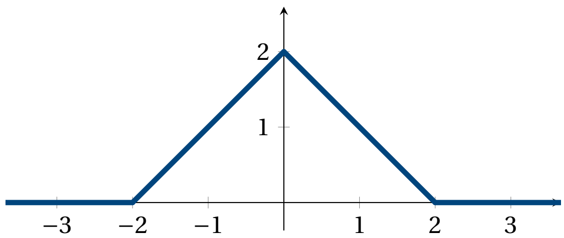
- Si $x \in [0;2]$, on a maintenant $x-1 \leqslant t \leqslant 1$ et

$$c * c(x) = \int_{x-1}^{1} c(x-t)c(t)\,\mathrm{d}t = 2-x.$$

Finalement :

$$c * c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin [-2;2] \\ 2+x & \text{si} \quad x \in [-2;0] \\ 2-x & \text{si} \quad x \in [0;2]. \end{cases}$$

On obtient un graphe en "triangle".



Exercice 5

✦✦✦ On définit les fonctions f, g et h sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \qquad g(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $f * h$, $g * g$, $g * h$.

p. 18

2.2 Le théorème de sommation

THÉORÈME — **loi d'une somme**

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, *de densités respectives* f_X *et* f_Y.

Si
- *Les variables* X *et* Y *sont indépendantes,*
- *La fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sauf en un nombre fini de points.

Alors *la variable* X + Y *est à densité et* h *est une densité.*

Exemples. Reprenons les deux premiers calculs de la section précédente.

- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont la loi est une loi normale centrée réduite. Une densité est donnée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_X(t) = f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t).$$

Le premier calcul justifie l'existence du produit de convolution $f_X * f_Y$ avec

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_X * f_Y(x) = \frac{1}{2\pi} f * f(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/(2\cdot\sqrt{2}^2)}.$$

On constate alors que X + Y est encore une variable à densité qui suit encore une loi normale $\mathscr{N}(0;2)$.

- Le deuxième calcul traduit le fait que la somme de deux lois uniformes sur $[-1;1]$ est encore une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par

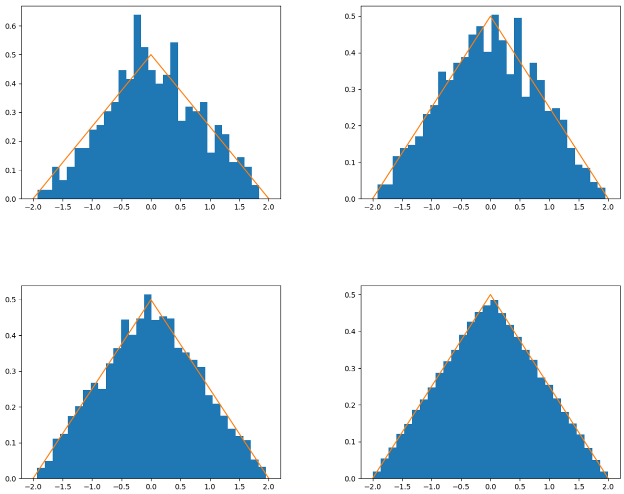
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin [-2;2] \\ (2+x)/4 & \text{si} \quad x \in [-2;0] \\ (2-x)/4 & \text{si} \quad x \in [0;2]. \end{cases}$$

Vérification expérimentale avec Python

Editeur

```
m=500
 # puis, 1000, 5000 et 10^4
 # taille de l'échantillon
x=-1+2*np.random.rand(m)
y=-1+2*np.random.rand(m)
 # simulation d'une loi uniforme
 # continue sur [-1;1]

plt.hist(x+y,30,density=True)
 # tracé de l'histogramme
plt.plot([-2,0,2],[0,0.5,0])
 # tracé de la densité
plt.show()
 # affichage
```



Remarque. La somme de deux variables aléatoires à densité n'est pas toujours une variable aléatoire à densité. Il suffit de considérer $X+(-X)$ pour s'en convaincre.

Exercice 6

✦✦ **Probabilité de collision**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à densité bornée. p. 18
Que dire de la probabilité $\mathbf{P}\big([X=Y]\big)$?

Un lien vers une explication en vidéo.

3 Application aux lois usuelles

3.1 Stabilité par somme des lois γ

On rappelle les définitions des fonctions Γ et β

$$\Gamma : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \beta : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

Les propriétés de ces fonctions et les liens entre elles sont étudiées à l'exercice **??**, p. **??**.

THÉORÈME **somme de deux lois γ**

Soient $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}_+^*$ *et* X_1, X_2 *deux variables aléatoires sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Si
- X_1 *et* X_2 *sont indépendantes.*
- $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$ *et* $X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$.

Alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1+\nu_2).$$

Preuve. Notons $\alpha_1 = \Gamma(\nu_1)^{-1}$ et $\alpha_2 = \Gamma(\nu_2)^{-1}$ pour alléger les notations. Considérons de plus les densités de probabilité :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ \alpha t^{\nu_1-1}\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t<0 \\ \alpha_2 t^{\nu_2-1}\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

Soient $x \in \mathbb{R}$. Justifions l'existence et calculons $f * g(x)$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$f(x-t)g(t) \neq 0 \iff \begin{cases} x-t \geqslant 0 \\ t \geqslant 0 \end{cases} \iff 0 \leqslant t \leqslant x.$$

- Si $x < 0$, on a toujours $f(x-t)g(t) = 0$ et par suite

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

- Si $x \geqslant 0$. On peut réduire l'intervalle d'intégration à $[0,x]$. $f * g(x)$ est alors bien défini en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \alpha_1 (x-t)^{\nu_1 - 1} \mathrm{e}^{-(x-t)} \cdot \alpha_2 t^{\nu_2 - 1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ f * g(x) &= \alpha_1 \alpha_2 \mathrm{e}^{-x} \int_0^x (x-t)^{\nu_1 - t} t^{\nu_2 - 1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissant de $[0;x]$ dans $[0;1]$.

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^{\nu_1 - 1} t^{\nu_2 - 1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (x - xu)^{\nu_1 - 1} (xu)^{\nu_2 - 1} \cdot (x\,\mathrm{d}u) \\ &= x^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \int_0^1 (1-u)^{\nu_1 - 1} u^{\nu_2 - 1}\,\mathrm{d}u = \beta(\nu_1, nu_2) x^{\nu_1 + \nu_2 - 1}. \end{aligned}$$

On obtient pour $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$f * g(x) = \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \beta(\nu_1, \nu_2)}_{\text{indépendant de } x} \cdot x^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \mathrm{e}^{-x}$$

À une constante près, $f * g$ est une densité d'une loi $\gamma(v_1 + v_2)$.

$$f * g(x) = \alpha_1 \alpha_2 \beta(\nu_1, \nu_2) \times \Gamma(\nu_1 + \nu_2) \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)} x^{\nu_1 + \nu_2 - 1} \mathrm{e}^{-x}.$$

Or, d'après le théorème sur les sommes, $f * g$ est une densité de la variable $X + Y$. Donc

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f * g(t)\,\mathrm{d}t = \alpha_1 \alpha_2 \beta(\nu_1, \nu_2) \Gamma(\nu_1 + \nu_2)$$

On en déduit que

$$\alpha_1 \alpha_2 \beta(\nu_1, \nu_2) \cdot \Gamma(\nu_1 + \nu_2) = 1$$

et $X_1 + X_2$ suit une loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$.

■

Remarque. Ce calcul a permis de retrouver l'égalité

$$\forall\, \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}_*^+, \quad \beta(\nu_1, \nu_2) = \int_0^1 (1-u)^{\nu_1 - 1} u^{\nu_2 - 1}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}.$$

COROLLAIRE — **cas particulier des lois exponentielles**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, \cdots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé.

Si
- *Les variables $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.*
- *Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.*

Alors

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \gamma(n).$$

Preuve. Il suffit de procéder par récurrence en rappelant que la loi exponentielle de paramètre 1 est aussi une loi $\gamma(1)$. ■

Exercice 7

✦ **Cas général - loi d'Erlang**
Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Vérifier que la somme $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ est à densité et préciser une densité. p. 18

3.2 Stabilité par somme des lois normales

PROPOSITION — **somme de deux lois normales**

Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

Si
- X_1 *et* X_2 *sont indépendantes.*
- $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1, {\sigma_1}^2\right)$ *et* $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_2, {\sigma_2}^2\right)$.

Alors $$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2\right).$$

Exercice 8

✦✦ **Preuve**

1. On suppose dans cette question que $m_1 = m_2 = 0$. Prouver l'énoncé en adaptant le premier exemple de la section et en admettant l'égalité suivante :
$$-\frac{(x-t)^2}{2{\sigma_1}^2} - \frac{t^2}{2{\sigma_2}^2} = -\frac{\sigma^2}{2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}\left(t - \frac{{\sigma_2}^2}{\sigma^2}x\right)^2 - \frac{x^2}{2\sigma^2} \quad \text{où} \quad \sigma = \sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}.$$
2. En déduire le cas général avec m_1 et m_2 non nécessairement nuls.

p. 19

Exercice 9

On considère X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi respectives $\mathcal{N}\left(m_1, \sigma_1^2\right)$ et $\mathcal{N}\left(m_2, \sigma_2^2\right)$. Soient $S = X + Y$ et $T = X - Y$.
1. Déterminer la loi de S puis celle de T.
2. On suppose que S et T sont indépendantes. Donner la loi de $S + T$. En déduire $\sigma_1 = \sigma_2$.

p. 19

On en déduit par récurrence :

COROLLAIRE — **somme de n lois normales**

Soient $X_1, \cdots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, {\sigma_i}^2)$. Alors
$$X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n {\sigma_i}^2\right).$$

Exemple. En particulier, retenons que si $(X_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un vecteur aléatoire composé de variables mutuellement indépendantes et de loi identique $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors
$$\overline{X_n}^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1).$$

Remarque. Nous avons vu que les lois normales sont stables par transformations affines, ainsi toute combinaison linéaire ed variables aléatoires suivant des lois normales restent une loi normale.

4 Un exemple détaillé

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $]0;1[$. On pose

$$Z = \frac{\min(X,Y)}{\max(X,Y)}.$$

Déterminons la loi de Z.

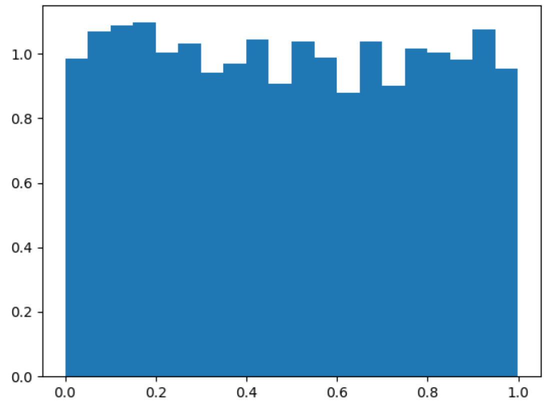
Simulation Python et conjecture

Editeur

```python
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulation():
    X=rd.random()
    Y=rd.random()
    Z=min(X,Y)/max(X,Y)
    return Z

Ech=[]
for i in range(5000):
    Z=simulation()
    Ech.append(Z)
plt.clf()
plt.hist(Ech, bins=20, density=
    True)
plt.show()
```



De manière assez surprenante, la loi semble uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. Une preuve s'impose !

Exercice 10

✦ **Une première approche ?**
Expliquer pourquoi le schéma de preuve suivant ne convient pas.

- *Étape 1.* Trouver, en reprenant la partie 1, la loi de $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$
- *Étape 2.* En déduire, en passant par la fonction de répartition, la loi de $\ln(U)$ et $-\ln(V)$.
- *Étape 3.* Appliquer le théorème de sommation pour obtenir la loi de

$$W = \ln(U/V) = \ln(U) + (-\ln(V)).$$

- *Étape 4.* Conclure, de nouveau avec la fonction de répartition, en obtenant la loi

$$Z = \exp(W).$$

p. 19

Calcul de la loi

- Appliquons le logarithme afin d'avoir des sommes.

$$\begin{aligned}\ln(Z) &= \ln\left(\min\{X,Y\}\right) - \ln\left(\max\{X,Y\}\right)\\ &= \min\{\ln(X),\ln(Y)\} - \max\{\ln(X),\ln(Y)\} \quad \text{car ln est croissante}\\ &= -\left|\ln(X) - \ln(Y)\right|.\end{aligned}$$

- Donnons une densité de $\ln(Y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^-$. Soit $t \in \mathbb{R}^-$

$$\begin{aligned}F_{\ln(Y)}(t) &= \mathbf{P}(\ln(Y) \leqslant t)\\ &= \mathbf{P}\left(Y \leqslant e^t\right) \quad \text{car l'exponentielle est croissante}\\ &= F_Y\left(e^t\right) = e^t \quad \text{car } e^t \in]0;1] \text{ et } F_Y(x) = x \text{ si } x \in [0;1].\end{aligned}$$

et $F_{\ln(y)}(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}_*^+$.1. Par dérivation, une densité est

$$g(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En adaptant le résultat précédent, on constate que X est bien à densité avec une densité f donnée par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit $$-\ln(X) \hookrightarrow \mathscr{E}(1).$$

- Soient $x, t \in \mathbb{R}$.

$$f(x-t)g(t) \neq 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} x-t \geqslant 0 \\ t \leqslant 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} t \leqslant x \\ t \leqslant 0. \end{array} \right.$$

Distinguons deux cas.

→ Si $x \in \mathbb{R}^+$, la condition devient $t \leqslant 0$ et le produit de convolution va être convergent

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-(x-t)}e^t\,\mathrm{d}t = e^{-x}\int_{-\infty}^{0} e^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{-x}. \end{aligned}$$

→ Pour $x \in \mathbb{R}^-$, on a maintenant

$$\begin{aligned} h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{x} e^{-(x-t)}e^t\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-x}\int_{-\infty}^{x} e^{2t}\,\mathrm{d}t = e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}e^{x}. \end{aligned}$$

En résumé, on a convergence pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$f * g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

De plus, par le lemme de coalitions, les variables ln(X) et $-\ln(Y)$ sont indépendantes. Ensuite par le théorème de sommation $\ln(X) - \ln(Y)$ est une variable à densité et une densité est donnée par $h = f * g$.

Vocabulaire. On retrouve une loi de Laplace (voir exercice **??**, p.**??**).

- Justifions maintenant que z est à densité et déterminons une densité. Soit H, la fonction de répartition de $\ln(X) - \ln(Y)$. Soit $t \in [0;1]$

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbf{P}(Z \leqslant t) \\ &= \mathbf{P}(-\ln(Z) \geqslant -\ln(t)) \\ &= \mathbf{P}\big(|\ln(X) - \ln(Y)| \geqslant -\ln(t)\big) \\ &= 1 - \mathbf{P}\big(|\ln(X) - \ln(Y)| \leqslant -\ln(t)\big) \\ &= 1 - \mathbf{P}(-\ln(t) > \ln X - \ln Y > \ln t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(-\ln(t) \geqslant \ln X - \ln Y > \ln t) \\ &= 1 - \big(H(-\ln(t)) - H(\ln(t))\big). \end{aligned}$$

Puis par dérivation, une densité est donnée sur $[0;1]$ par

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= \frac{1}{t}H'(-\ln(t)) + \frac{1}{t}H'(\ln(t)). \\ &= \frac{1}{t}h(-\ln(t)) + \frac{1}{t}h(\ln(t)). \end{aligned}$$

Après simplifications, on trouve simplement $f_Z(t) = 1$. Au final

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0;1] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est l'expression d'une densité d'une loi uniforme sur $[0,1]$:

$$Z \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0;1]\big).$$

Exercice 11

✦✦ *Les questions sont indépendantes.*

p. 19

1. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathscr{U}(]0;1])$. Donner la loi de
$$T = -\ln\big(\max\{X,Y\}\big).$$
2. Reprendre le problème avec trois variables aléatoires indépendantes X, Y, T suivant des lois uniformes sur $[0;1]$ et
$$Z = \frac{\min(X,Y,T)}{\max(X,Y,T)}.$$

Exercices

Compléments sur les variables à densité

Exercice 12. ✦ Anticiper la réponse de la machine à la suite des commandes suivantes :

≫ Solution p. 19

Editeur

```
import numpy.random as rd
C=0
m=5000
for i in range(m):
    if rd.normal(0,1)<rd.normal(0,1):
        C+=1
print(C/m)
```

Exercice 13. ✦
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite et $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{\pm 1; 0\}$. On définit

$$Y_0 = X_0 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = \alpha Y_n + X_{n+1}.$$

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(Y_n)$ et $\mathbf{V}(Y_n)$.

2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable Y_n suit une loi normale dont on précisera les paramètres.

3. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Cov}\left(Y_n, Y_{n+p}\right)$.

≫ Solution p. 20

Exercice 14. ✦✦
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a, \sigma^2\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(b, \sigma^2\right)$. Prouver l'équivalence

$$\mathbf{P}(X \leqslant Y) \geqslant \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad a \leqslant b.$$

≫ Solution p. 20

Exercice 15. ✦✦
Soient f, g deux fonctions positives non nulles bornées, continues et telles que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ soient convergentes. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t)\mathrm{d}t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t\right).$$

≫ Solution p. 21

Exercice 16. ✦✦ *D'après oraux HEC 2013*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note α, la probabilité que la matrice ci-dessous soit diagonalisable.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$ et $\mathbf{P}(XY > 0)$.

2. Calculer α.

≫ Solution p. 21

Exercice 17. ✦✦ Soient X, Y, et Z trois variables aléatoires, indépendantes de même loi. On pose

$$\forall\, a, b\, c \in \mathbb{R}, \qquad M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

1. a) Justifier que si $a+b+c \neq 0$ alors $M(a,b,c)$ est diagonalisable.
   b) Comparer les événements $[X+Y+Z \neq 0]$ et "La matrice $M(X,Y,Z)$ est diagonalisable". En déduire la probabilité que la matrice aléatoire $M(X,Y,Z)$ soit diagonalisable lorsque les trois variables suivent des lois normales.
2. Reprendre la question en supposant que $X+1$, Y et Z suivent des lois de Poisson.

≫ Solution p. 21

Loi d'une somme, d'un maximum, d'un produit, etc

Exercice 18. ✦ ✎ Maximum et loi de Gumbel

On dit que la variable X suit la loi de Gumbel si sa fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = e^{-e^{-x}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant chacune la loi de Gumbel. Montrer que la variable aléatoire Z définie par $Z = \max(X_1, \ldots, X_n) - \ln n$ suit également la loi de Gumbel.
2. On considère maintenant une suite de variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant chacune la loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$. Posons $S_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n) - \ln n$. Montrer que l'on a, pour tout $x \geqslant 0$, la convergence suivante :

$$F_{S_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x) \qquad \text{où X suit une loi de Gumbel.}$$

≫ Solution p. 22

Exercice 19. ✦ ✎ Loi d'un produit d'une variable discrète et d'une continue

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que X est une variable discrète à valeurs dans $\{-1;1\}$ et que Y suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0;1)$.
Donner la loi de $Z = XY$?

≫ Solution p. 22

Exercice 20. ✦ Exemples avec les lois uniformes *D'après EDHEC*

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose : $Z = X+Y$.

1. a) Déterminer une densité de Z.
   b) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, les événements $(Z>1)$ et $(1-x<Z\leqslant 1+x)$ sont indépendants.
2. On pose : $T = \max(X,Y)$. On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
   a) Montrer que T est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de T.
   b) En déduire que T possède une espérance et la déterminer.
3. On pose : $U = |X-Y|$ et on admet que U est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Montrer que U est combinaison linéaire de Z et T, puis en déduire l'espérance de U.

≫ Solution p. 22

Exercice 21. ✦ Loi d'une différence de lois exponentielles *D'après Ecricome*

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

1. Déterminer la fonction de répartition, puis donner une densité de la variable $T = -X$.
2. Montrer que $Y-X$ admet une densité, notée h, définie par :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{ab}{a+b}e^{-bt}, & \text{pour } t>0 \\ \dfrac{ab}{a+b}e^{at}, & \text{pour } t \leqslant 0. \end{cases}$$

3. On considère la variable $Z = |Y-X|$.
   a) Montrer que pour tout $s \in [0,+\infty[$, $\mathbf{P}(Z\leqslant s) = 1 - \dfrac{be^{-as}+ae^{-bs}}{a+b}$.
   b) Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Z.
   c) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

≫ Solution p. 23

Exercice 22. ✦✦ Lois de Pareto et produit

Pour $a \in \mathbb{R}_*^+$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(t) = \begin{cases} \frac{a}{t^{a+1}} & \text{si } t \in [1;+\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Vérifier que f_a est une densité de probabilité.
On dit qu'une variable X suit une loi de Pareto de paramètre a si X admet f_a comme densité.
2. Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Pareto de paramètre a. Justifier que le produit $X_1 \ldots X_n$ est une variable à densité, et en donner une densité.

≫ Solution p. 24

Exercice 23. ✦✦ **Loi de la partie fractionnaire**
Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$.

1. Donner la loi de $\lfloor X \rfloor$. Préciser son espérance et sa variance.
2. Démontrer que la variable $Y = X - \lfloor X \rfloor$ est à densité et donner une densité.

≫ Solution p. 25

Exercice 24. ✦✦ Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de la loi $\mathscr{E}(1)$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$. Vérifier que $X - \alpha Y$ est une variable à densité dont une densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x/\alpha}}{\alpha+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{\alpha+1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

2. Soit $Z = \frac{X}{Y}$. Vérifier que Q est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
3. Déterminer la loi de $\frac{X}{X+Y}$.

Exercice 25. ✦✦ **Somme de lois uniformes**
Soient $Z, X_1, \ldots, X_n$, $n+1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$.

1. Justifier que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une variable à densité et qu'il existe une densité f_n dont la restriction à $[0;1]$ est donnée par :

$$\forall x \in [0;1], \qquad f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2. Calculer $\mathbf{P}(Z > X_1 + X_1 + \ldots + X_n)$.

≫ Solution p. 25

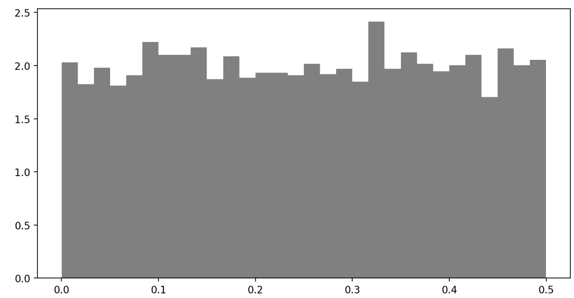
Exercice 26. ✦✦ **Un exemple sans l'hypothèse d'indépendance**
Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0;1]$.

1. Déterminer la loi et l'espérance de $Y = \min(X, 1-X)$, ainsi que de $Z = \max(X, 1-X)$.
2. Vérifier que vos résultats sont en accord avec les simulations numériques suivantes :

≫ Solution p. 26

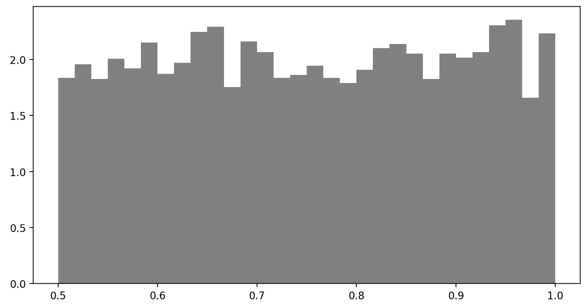
Editeur

```
ech=np.zeros(5000)
for i in range(5000):
    x=np.random.rand()
    ech[i]=min(x,1-x)
plt.hist(ech,30,density=True)
plt.show()
```



Editeur

```
ech=np.zeros(5000)
for i in range(5000):
    x=np.random.rand()
    ech[i]=max(x,1-x)
plt.hist(ech,30,density=True)
plt.show()
```



3. Calculer, si elles existent, les espérances de X/Z et de X/Y.

Exercice 27. ✦✦✦ **Minimum sur un nombre aléatoire de variables**
On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n=\min(X_1,\cdots,X_n)$.

1. Donner la loi de U_n.

2. Soit N une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. On suppose que N est indépendant des X_k, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, et on pose :

$$U_N=\min\left(X_1,\cdots,X_N\right)$$

i.e. $U_N(\omega)=\min\left(X_1(\omega),\cdots,X_{N(\omega)}(\omega)\right)$, pour tout $\omega\in\Omega$. On admet que U_N est une variable aléatoire.
Déterminer la loi de U_N.

3. Soient $q\in]0;1[$ et $I(q)=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t)}{(1-qt)^2}\,dt$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall t\in]0;1/q[,\quad \dfrac{1}{t(1-qt)}=\dfrac{a}{t}+\dfrac{b}{1-qt}$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $I(q)$.

c) Conclure en montrant que U_N a une espérance que l'on calculera.
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $\varphi(t)=e^{-t}$.

≫ Solution p. 26

Exercice 28. ✦✦✦ Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme continue sur $[0;1[$. On définit, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires S_n et T_n :

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j\quad\text{et}\quad T_n=S_n-\lfloor S_n\rfloor.$$

1. Vérifier que S_2 est à densité et donner une densité.

2. Montrer que T_2 suit la loi uniforme sur $[0;1[$.

3. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x-\lfloor x\rfloor$.

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Vérifier que $h\left(h(S_n)+X_{n+1}\right)=T_{n+1}$.

b) En déduire que T_n suit la loi uniforme sur $[0;1]$.

≫ Solution p. 27

Problème 29. ✦✦✦ ✎ **Lois de Cauchy**

1. • *Préliminaire sur la loi de Cauchy*
Soit $a\in\mathbb{R}_*^+$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_a par : $f_a(x)=\dfrac{a}{\pi\left(a^2+x^2\right)}$.

a) Montrer que f_a est une densité de probabilité.
Dans la suite, X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$ admettant f_a pour densité. On dit alors que X suit une loi de Cauchy de paramètre a et on écrit $X\hookrightarrow\mathscr{C}(a)$.

b) Donner la fonction de répartition de X.

c) Soit $\lambda\in\mathbb{R}_*^+$. Reconnaître la loi de λX lorsque $X\hookrightarrow\mathscr{C}(a)$.

2. *Quotient de lois normales centrées*
Soient N et N′ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, suivant une loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0;1)$.

a) Montrer que la variable aléatoire $Z=\ln|N|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$?

b) Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln\left|N/N'\right|$ est donnée par : $\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=\dfrac{2}{\pi}\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

c) i) En déduire que la fonction de répartition de $U=\left|N/N'\right|$ est donnée par $F_U(x)=2\arctan(x)/\pi\cdot\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

ii) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathbf{P}(N/N'=x)=0$. En remarquant que N et $-$N ont même loi, déduire que $G(x)+G(-x)=1$ où G désigne la fonction de répartition de N/N'.

iii) Conclure en montrant que $N/N'\hookrightarrow\mathscr{C}(1)$.

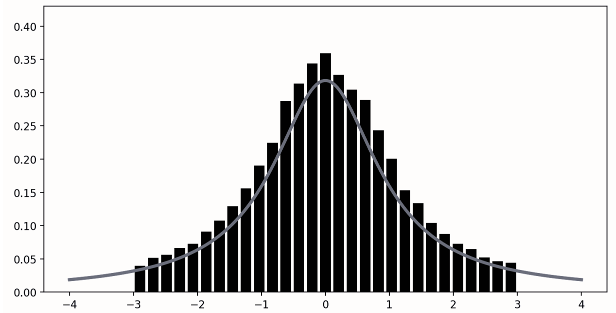
3. Proposer une fonction python qui simule une loi de Cauchy de paramètre 1, puis de paramètre $\lambda\in\mathbb{R}_*^+$.

4. À l'aide du code suivant, que peut-on conjecturer sur la loi de $1/X$ si $X\hookrightarrow\mathscr{C}(1)$? Prouver la conjecture.

≫ Solution p. 28

Editeur

```
plt.clf()
X=np.zeros(50000)
for iter in range(50000):
    X[iter]=1/Cauchy()
plt.hist(X,np.linspace(-3,3,30),density=
    True,rwidth=0.8,color='k')
x=np.linspace(-4,4,200)
plt.plot(x,1/(np.pi*(1+x**2)),linewidth=3)
plt.show()
```



Compléments

Exercice 30. ✦✦ **Maximum de loi normale** *D'après EDHEC 2006*

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ).

On pose $Z = \max(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

1. **a)** Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

   b) Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par :
$$f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$

2. **a)** Rappeler la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

   b) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

   c) En remarquant que, pour tout réel $x, \varphi'(x) = -x\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que :
$$\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

   d) Montrer de même que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt$. En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

3. **a)** Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

   b) Déterminer $\mathbf{E}(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

Exercice 31. ✦✦ **Maximum de loi exponentielle**

On considère n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose alors
$$Y_n = \operatorname{Max}(X_1, \ldots, X_n).$$

On pose de plus pour tout k entier naturel non nul, on pose :
$$u_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \binom{k}{j+1}}{j+1} \quad \text{et} \quad v_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \binom{k}{j+1}}{(j+1)^2}.$$

1. **a)** Expliciter la fonction de répartition de Y_n.

   b) En déduire que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité.

2. **a)** Vérifier que Y_n a une espérance avec :
$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j \binom{n}{j+1}}{j+1}$$

   b) Vérifier que, pour j et k deux entiers entre 1 et $n-1$ vérifiant $j \leqslant k-1$, on a $k\dbinom{k}{j} = j\dbinom{k}{j} + k\dbinom{k-1}{j}$.

   c) Justifier que pour tout entier $k \geqslant 2$: $u_k = u_{k-1} + \dfrac{1}{k}$.

d) En déduire que $\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Préciser un équivalent.

3. **a)** Justifier que pour tout entier $k \geqslant 2$: $v_k - v_{k-1} = \frac{1}{k} u_k$.

b) Montrer que Y_n a un moment d'ordre 2 avec $\mathbf{E}\left(\mathrm{Y}_n{}^2\right) = 2v_n$. En déduire que Y_n a une variance avec $\mathbf{V}(\mathrm{Y}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Indication. Pour $(a_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = 2 \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_i a_j - \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2$.