DS 5 - sujet A

THÈMES : CALCULS DIFFÉRENTIELS, COMPLÉMENTS SUR LES VECTEURS ALÉATOIRES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1 : calculs différentiels

Partie I : exemples avec 2 et 3 variables

- Soient a un paramètre réel et F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_a(x,y) = \begin{bmatrix} x & y & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ a \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'il existe un unique point critique (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera. Calculer $F_a(x_0, y_0)$.
3. Simplifier, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, le nombre : $G_a(x,y) = F_a(x,y) + \frac{1}{3}(3x-y-a)^2 + 2a^2$ et préciser son signe.
4. En déduire que la fonction F_a admet un unique extremum sur $\mathbb{R}^2$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum et donner sa valeur notée $M(a)$.
5. Montrer que la fonction M qui, à tout réel a associe le nombre $M(a)$, admet un unique extremum que l'on précisera. En déduire le maximum de la fonction

$$g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

- On désigne par J et A les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

6. **a)** Donner le spectre de J.
b) Exprimer A à l'aide de I_3 et J. En déduire le spectre de A.
7. On considère dans la suite le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par $(X,Y) \mapsto \langle X, Y\rangle = {}^tXY$.
Expliciter une base orthonormée $\mathscr{C}$ composée de vecteurs propres de A. En déduire qu'il existe une matrice P orthogonale telle que $D = PA{}^tP$ soit diagonale.
8. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Expliciter $g(x,y,z)$ à l'aide des réels $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ et $\tilde{z}$. Retrouver le deuxième résultat de la question 5.

Partie II : exemple avec n variables

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2\right).$$

9. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Puis expliciter $\partial_i(f_n)$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.
10. En déduire que f_n possède deux points critiques que l'on explicitera.

Exercice 2
Matrice de variance/covariance et vecteurs gaussiens

- **Matrice de variance/covariance**
  Soit $\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, un vecteur aléatoire constitué de variables aléatoires admettant chacune une variance. On appelle matrice de variance/covariance de $\overline{X}$, noté $M(\overline{X})$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont donnés par

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad m_{i,j} = \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right).$$

  On appelle vecteur espérance et on note $\mathbf{E}(\overline{X})$ la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients e_i sont donnés par

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad e_i = \mathbf{E}\left(X_i\right).$$

11. Justifier que $M(\overline{X})$ est diagonalisable.

12. Soit $x = {}^t\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ une matrice colonne. On pose $S = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i$. Vérifier que

$$\mathbf{E}(S) = {}^t x \mathbf{E}(\overline{X}) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(S) = {}^t x M(\overline{X}) x.$$

13. En déduire que toutes les valeurs propres de $M(\overline{X})$ sont positives.

14. On suppose que la fonction python `simu_vect()` renvoie une matrice ligne qui simule le vecteur aléatoire $\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Que fait le programme `mystere` et expliquer ensuite le test?

Editeur

```python
def mystere(i,j):
    m=50000
    c=0
    ei=0
    ej=0
    for k in range(m):
        X=simu_vect()
        c+=X[i]*X[j]
        ei+=X[i]
        ej+=X[j]
    return c/m-(ei/m)*(ej)/m
```

Editeur

```python
# Le test
def simu_vect():
    X=np.zeros(3)
    X[0]=rd.normal(0,1)
    X[1]=rd.normal(0,1)
    X[2]=X[0]+X[1]
    return X

>>> mystere(0,1)
0.00384393224441707
>>> mystere(1,2)
1.0061337258219256
>>> mystere(0,0)
0.9995651400527096
```

b) En déduire un programme qui donne une approximation de la matrice de variance/covariance de $\overline{X}$.

- **Vecteurs gaussiens**
  On dit qu'une variable aléatoire est gaussienne si elle suit une loi normale ou qu'elle est presque sûrement nulle.
  On dit que le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est gaussien si pour tout $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, la variable $a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ est gaussienne.

15. **a)** Justifier que si les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont toutes gaussiennes et mutuellement indépendantes alors le vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ est gaussien.

b) Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien. Montrer que chaque variable X_i est gaussien.

- *Exemple 1*
  Dans les trois prochaines questions, X suit la loi normale centrée réduite, et Y, indépendante de X, suit la loi discrète définie par

$$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

16. Déterminer la loi de XY.

17. Calculer la covariance de X et XY.

18. Le vecteur (X, XY) est-il gaussien? *Calculer la probabilité* $\mathbf{P}(X + XY = 0)$.

- *Exemple 2*
  Dans la prochaine question, $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ est un vecteur gaussien tel que

$$M(\overline{X}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\overline{X}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

19. **a)** Déterminer la loi de $S = X_1 + X_2$ et celle de $T = X_1 + X_3$.
b) Expliciter la matrice de variance/covariance $M(S, T)$.

- *Une condition d'indépendance*
  Dans la suite, on admet le résultat suivant : si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteurs gaussien alors les variables X_i sont mutuellement indépendantes si et seulement si la matrice de variance/covariance est diagonale.

20. Soient X et Y deux variables indépendantes normales centrées réduites. Justifier que les variables $X+Y$ et $X-Y$ constituent un vecteur gaussien. En déduire que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

- *Simulation d'un couple gaussien centré*
  On considère le vecteur (X_1, X_2) gaussien centré et de matrice de covariance $M(X_1, X_2)$. Plus précisément, on suppose

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, {\sigma_1}^2\right) \quad \text{et} \quad X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, {\sigma_2}^2\right)$$

et que le coefficient de corrélation linéaire est donné par

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbf{V}(X_1)\,\mathbf{V}(X_2)}}.$$

21. **a)** Vérifier que $L\,{}^tL = M(X_1, X_2)$ où on a posé

$$L = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_2 \end{bmatrix}.$$

b) Soient G_1 et G_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. On définit le couple de variables $(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2})$ par

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X_1} \\ \widetilde{X_2} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

Vérifier que les couples (X_1, X_2) et $(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2})$ ont même matrice de variance/covariance.

22. **a)** Écrire un programme python qui prend en argument une matrice de variance/covariance $M(X_1, X_2)$ du couple (X_1, X_2) et renvoie la matrice ligne $\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \rho \end{bmatrix}$.
b) Modifier le programme précédent pour renvoyer la matrice L.

23. En admettant que les couples (X_1, X_2) et $(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2})$ ont même loi. Donner un programme python qui prend en argument une matrice de variance/covariance $M(X_1, X_2)$ du couple (X_1, X_2) et renvoie une simulation du couple (X_1, X_2).

Problème

Le but de ce problème (dont les trois parties sont indépendantes) est l'étude du temps passé dans une mairie par un usager quand un ou plusieurs guichets sont à la disposition du public, et que plusieurs personnes se présentent en même temps.
À moins d'une mention explicite du contraire dans l'énoncé, X étant une variable aléatoire à densité, on désignera par F_X sa fonction de répartition, et par f_X une fonction densité de probabilité de X.

Partie A - Étude de deux guichets

Dans cette partie, il y a deux guichets à la disposition du public. Trois personnes A_1, A_2 et A_3 entrent en même temps dans la salle. À l'instant $t = 0$, A_1 et A_2 s'adressent simultanément aux deux guichets. A_3 attend et s'adressera au premier guichet libéré, soit par A_1, soit par A_2. On suppose que :

- La durée de passage au guichet de A_i (avec $i = 1, 2$ ou 3) est une variable aléatoire X_i qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$;
- Les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes ;
- La durée du changement de personne à chaque guichet peut être considérée comme nulle.

- **Étude d'un événement**
  On se propose de calculer la probabilité de l'événement E : "A_3 quitte la mairie en dernier".

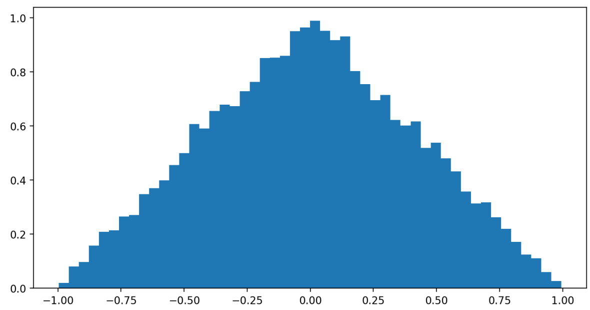
24. Montrer que la variable $-X_2$ suit une loi uniforme dont on précisera les paramètres.

25. Calculer une densité de probabilité φ_1 de la variable Y_1 définie par : $Y_1 = X_1 - X_2$. On précisera cette fonction sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Expliquer si le résultat obtenu est cohérent avec le programme python suivant :

Editeur

```
m=20000
E=rd.random(m)-rd.random(m)
plt.hist(E,50,density=True)
plt.show()
```



26. En déduire Φ_1, la fonction de répartition de Y_1.
27. Calculer la fonction de répartition, Φ_2, de la variable Z_1 définie par $Z_1 = |Y_1|$. En déduire une densité de probabilité, φ_2, de Z_1.
28. Calculer une densité de probabilité, φ_3, de la variable $Z_1 - X_3$.
29. En déduire la probabilité de l'événement $[Z_1 - X_3 \leqslant 0]$. Quelle est la probabilité de E ?

- **Étude d'une variable aléatoire**

On pose :
$$T_3 = \min(X_1, X_2) + X_3.$$

30. Que représente T_3 pour A_3 ?
31. Justifier que $\min(X_1, X_2)$ est une variable à densité et donner une densité de probabilité, f. Que remarque-t-on ?
32. Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant 0 \\ 2t - t^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (t-2)^2 & \text{si} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \leqslant t \end{cases}$$

est une densité de probabilité de T_3. En déduire l'espérance mathématique et la variance de T_3.

Partie B - Étude de n guichets

Dans cette partie, n guichets sont ouverts au public. n personnes $A_1, A_2, \dots, A_n$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$ et s'adressent à l'un des guichets (les n guichets sont donc tous occupés à l'instant $t = 0$). On suppose que :

- la durée de passage au guichet de A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est une variable aléatoire X_i qui suit la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné ;
- les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

33. On désigne par U_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a, la première, terminé sa démarche administrative.
Déterminer la loi de U_n. Quelle loi reconnaît-on ? Donner son espérance mathématique et sa variance.
34. On note V_n la variable aléatoire égale au temps passé au guichet par la personne qui a la dernière, terminé sa démarche administrative.
Déterminer la fonction de répartition de V_n. En déduire une de ses densités de probabilité, et montrer que son espérance mathématique est donnée par :
$$\mathbf{E}(V_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k+1}.$$
35. Soit t un réel strictement positif. On désigne par W_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant terminé leur démarche administrative à l'instant t. Donner la loi de W_t ainsi que son espérance mathématique.

Partie C - Étude d'un guichet

Dans cette partie, un seul guichet est ouvert au public. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, on se donne une suite $N, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que les variables X_i où $i \in \mathbb{N}^*$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif donné, et que N suit la loi géométrique de paramètre p (où p désigne un élément de l'intervalle $]0, 1[$). N personnes $A_1, A_2, \dots, A_N$ se présentent à la mairie à l'instant $t = 0$, et font donc la queue, dans cet ordre, devant ce guichet.

On suppose que, pour tout entier naturel i non nul, la durée de passage au guichet de A_i est donnée par la variable aléatoire X_i. On pose :
$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i,$$

ce qui signifie que : $\forall \omega \in \Omega, \quad S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$

Par exemple :

- Si $N(\omega) = 2$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$;
- Si $N(\omega) = 4$ alors $S(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega) + X_4(\omega)$.

Ainsi, S, qui est la somme d'un nombre aléatoire de variables X_i, apparaît comme étant le temps total passé à la mairie par la personne qui termine en dernier sa démarche administrative.

- *Simulation*

36. **a)** Écrire un programme qui prend en argument λ et p et simule la variable S.

b) Comment obtenir une approximation de $\mathbf{E}(S)$?

- *Étude théorique*

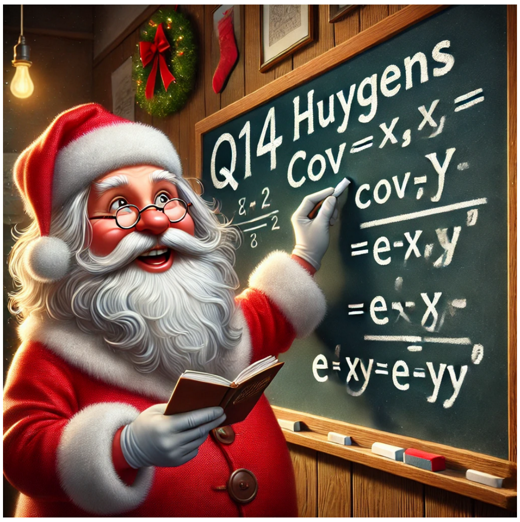
37. Soit n un entier naturel non nul fixé. Reconnaître la loi de $\sum_{i=1}^{n} \lambda X_i$.

38. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$, tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbf{P}_{[N=n]}(S \leqslant x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^x e^{-\lambda t} t^{n-1} \, dt.$$

39. En déduire la fonction de répartition de S (on admettra qu'il est possible de permuter les deux symboles $\sum_{n=1}^{+\infty}$ et $\int_0^x$ que l'on rencontrera au cours du calcul). Donner une densité de probabilité de S. Reconnaître la loi de S.

40. Vérifier que $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X_1)\,\mathbf{E}(N)$. Retrouver cette égalité grâce à la formule de l'espérance totale.



– JOYEUSES FÊTES ! ! –

DS 5- sujet *

THÈMES : CALCULS DIFFÉRENTIELS, COMPLÉMENTS SUR LES VECTEURS ALÉATOIRES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1 : calcul différentiel, point-selle et point critique

On considère la matrice réelle $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(x,y) = \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que g admet un unique point critique (x_0, y_0) si et seulement si $a+d-b-c \neq 0$. Déterminer dans ce cas (x_0, y_0).

- On suppose dans la suite que $a-b$ et $d-c$ sont de même signe et non tous nuls et on suppose également que $a-c$ et $d-b$ sont de même signe et non tous nuls.

2. Montrer que dans ce cas g admet un unique point critique (x_0, y_0) et que $(x_0, y_0) \in [0;1]^2$.

3. Vérifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$g(x,y) = g(x_0,y_0) + (x-x_0)(y-y_0)(a+d-b-c).$$

4. Discuter de la nature du point critique. Est-ce un maximum, minimum local, ni l'un ni l'autre ?

Problème A : Loi du χ^2 et applications

La partie 1 présente la loi du χ^2 (lire khi-deux) et certaines de ses propriétés. La partie 2 présente une application de la loi du χ^2.

Partie 1 - loi du χ^2

- On rappelle que pour tout réel $x > 0$, on pose
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$
et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(k) = (k-1)!$.
Soit r un entier non nul. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi du χ^2 à r degrés de liberté si et seulement si X est une variable à densité où une densité f_r est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad f_r(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right) 2^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^-, \quad f_r(x) = 0.$$

5. Soit X suivant la loi du χ^2 à r degrés de liberté.
Reconnaître la loi de la variable X/2. En déduire l'espérance et la variance de X.

- *Simulation à l'aide d'une loi de Poisson*

6. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, pour tout entier n non nul :
$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} e^{\lambda - t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

7. Soit Y_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et X_{2n} une variable aléatoire suivant la loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté. Montrer que $\mathbf{P}(X_{2n} > 2\lambda) = \mathbf{P}(Y_\lambda < n)$.

8. Écrire une fonction python qui prend en argument n entier et x réel qui retourne la valeur de $\mathbf{P}(X_{2n} > x)$.

9. En déduire un second programme qui prend en argument n et trace la fonction de répartition d'une variable suivant la loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté sur l'intervalle $[0;20]$.

- Soit k un entier non nul et $X_1, \dots, X_k$ des variables indépendantes normale centrées réduites.

10. **a)** Reconnaître la loi de ${X_1}^2/2$.

b) En déduire la loi de ${X_1}^2 + \dots + {X_k}^2$.

Partie 2

Soient n et s des entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère une urne contenant des boules de couleurs $C_1, \dots, C_s$. Pour chaque indice i, les boules de couleur C_i sont en proportion p_i. On a donc $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$ et on suppose que, pour tout i, $p_i > 0$.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.

Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules de couleur C_i obtenues à l'issue des n tirages. On remarque que la variable X_i dépend de n et que $\sum_{i=1}^{s} X_i = n$. On définit la variable aléatoire U_n par :

$$U_n = \sum_{i=1}^{s} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}.$$

- **A. Étude des variables** X_i

11. Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.

12. Soit $(i, j) \in [\![1, s]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Sans calculs, déterminer la loi de $X_i + X_j$ et sa variance. En déduire que $\mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right) = -np_i p_j$.

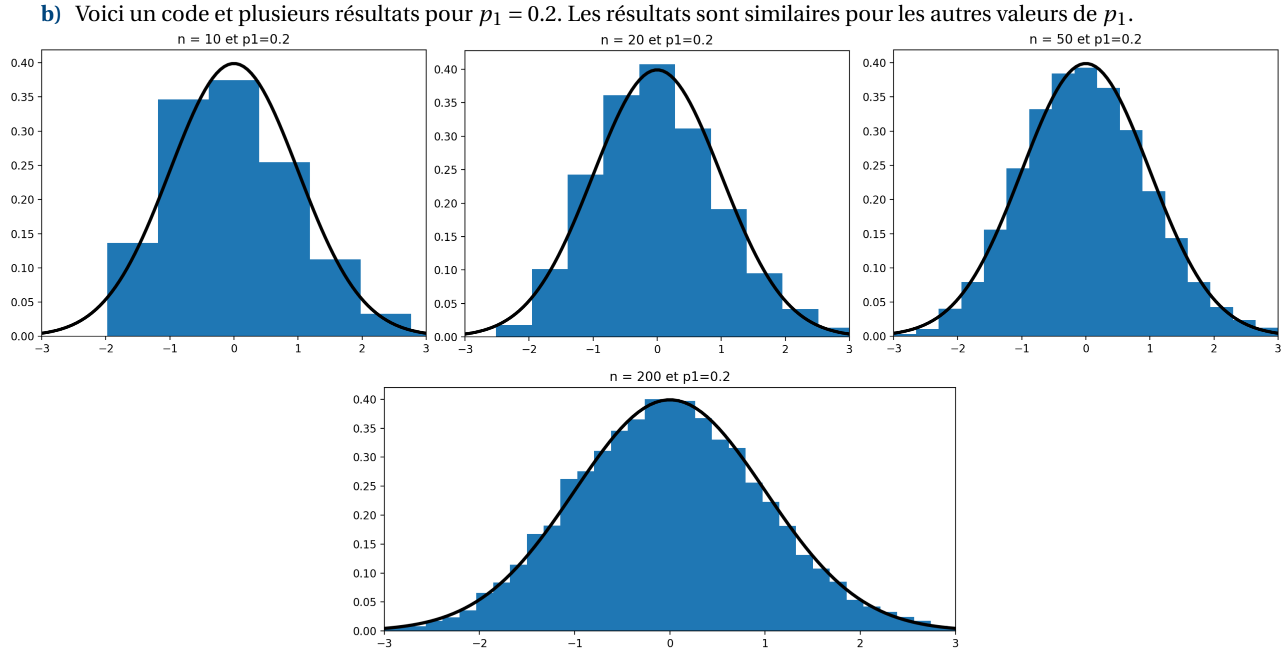
- **B. Le cas de deux couleurs**

On suppose dans cette partie que $s = 2$.

13. Montrer que $U_n = {Z_1}^2$ où $Z_1 = \dfrac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1 p_2}}$.

14. **a)** Écrire un programme python qui prend en argument n et p_1 et simule la variable Z_1.

b) Voici un code et plusieurs résultats pour $p_1 = 0.2$. Les résultats sont similaires pour les autres valeurs de p_1.



Editeur

```python
p1=0.2
classe= (np.arange(0,n)-0.5-n*p1)/np.sqrt(n*p1*(1-
    p1))
x=np.linspace(-3,3,100)
y=(2*np.pi)**(-1/2)*np.exp(-x**2/2)
plt.plot(x,y,color='black')
m=10000
E=np.zeros(m)
for i in range(m):
    E[i]= simuZ1(p1,n)
plt.hist(E,bins=classe,density=
    True)
plt.show()
```

Par quelle loi peut-on approcher la loi de Z_1 lorsque n est grand ?

- **C. Retour au cas général**
On suppose désormais s entier quelconque supérieur ou égal à 2. On pose

$$Y_i = \frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}}.$$

On note M la matrice de variance/covariance des variables $Y_1, \dots, Y_s$. C'est-à-dire

$$M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_s(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall\, i, j \in [\![1;n]\!], \qquad m_{i,j} = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j).$$

15. Montrer que $M = I_s - N$ où N la matrice dont le terme en ligne i et colonne j vaut $\sqrt{p_i p_j}$.

16. Montrer que $N^2 = N$ et déterminer le rang de N.

17. Montrer qu'il existe une matrice inversible Q telle que $M = QJ_{s-1}Q^{-1}$ où J_{s-1} est la matrice carrée d'ordre s, diagonale, dont les $s-1$ premiers éléments diagonaux sont égaux à 1 et le dernier est nul. On ne demande pas de calculer explicitement la matrice Q.
Dans la suite, on admet que l'on peut choisir Q orthogonale : ${}^tQ = Q^{-1}$.

18. On définit les variables $Z_1, \dots, Z_s$ par :

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_s \end{bmatrix} = {}^tQ \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_s \end{bmatrix}.$$

On note a_{ij} l'élément de la ligne i et de la colonne j de ${}^tQ$.

a) Exprimer chaque Z_i en fonction de $Y_1, \dots, Y_s$ et des a_{ij}. Montrer que les variables Z_i sont centrées (d'espérance nulle).

b) En utilisant la bilinéarité de la covariance, déterminer la matrice de covariance de $Z_1, \dots, Z_s$. Qu'en déduit-on pour la variable Z_s ?

19. On admettra l'approximation suivante : n est supposé grand et sous cette hypothèse, $Z_1, \dots, Z_{s-1}$ sont des variables indépendantes de loi normale centrées réduites.
Montrer que U_n suit la loi du χ^2 à $s-1$ degrés de liberté.

Problème B : Optimisation et variables aléatoires

Dans tout le sujet :

- On désigne par n un entier naturel, au moins égal à 2.
- X est une variable aléatoire à valeurs dans un intervalle $]0, \alpha[$ où α est un réel strictement positif. On suppose que X admet une densité f strictement positive et continue sur $]0, \alpha[$, et nulle en dehors de $]0, \alpha[$.
- On note F la fonction de répartition de X.
- $X_1, \dots, X_n$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X.

On admet que toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et on pourra remarquer qu'elles admettent toutes une espérance.

Partie I. Lois des deux plus grands

Les notations et résultats de cette partie seront utilisés dans le reste du sujet. On définit deux variables aléatoires Y_n et Z_n de la façon suivante. Pour tout $\omega \in \Omega$:

- $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ est le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$;
On remarque que Y_n est définie également lorsque n vaut 1, de sorte que dans la suite du sujet on pourra considérer Y_{n-1}.
- $Z_n(\omega)$ est le «deuxième plus grand» des nombres $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, autrement dit, une fois que ces n réels sont ordonnés dans l'ordre croissant, Z_n est l'avant dernière valeur. On note que lorsque la plus grande valeur est présente plusieurs fois, $Z_n(\omega)$ et $Y_n(\omega)$ sont égaux.

20. Justifier que les variables Y_n et Z_n admettent une espérance.

- *Loi de* Y_n. Soit G_n la fonction de répartition de Y_n.

21. Vérifier que Y_n est une variable aléatoire à densité et exprimer une densité g_n de Y_n en fonction de f, F et n.

- *Loi de* Z_n. Soit H_n la fonction de répartition de Z_n.

22. Soit x un réel.

a) Donner une expression de l'événement $[Z_n \leqslant x]$ en fonction des événements $\left[X_k \leqslant x\right]$ et $\left[X_k > x\right]$ avec $k \in [\![1, n]\!]$.

b) Établir : $\quad H_n(x) = n[1 - F(x)][F(x)]^{n-1} + F(x)^n$

23. En déduire que Z_n est une variable aléatoire à densité et qu'une densité de Z_n est donnée par

$$h_n(x) = n(n-1)f(x)\big(1 - F(x)\big)\big(F(x)\big)^{n-2}.$$

- *Simulation informatique*

24. On suppose dans cette question uniquement que les variables $X_1, \ldots, X_n$ suivent une loi exponentielle de paramètre 1.

a) En utilisant la commande `np.sort`, écrire un programme qui prend en argument n et renvoie une simulation de Y_n et Z_n.
La commande `np.sort` *prend en argument une matrice ligne et renvoie la matrice avec les mêmes coefficients mais triés dans l'ordre croissant.*

b) Proposer un second programme qui n'utilise pas la commande `np.sort`.

- *Exemple avec la loi puissance*

25. On suppose dans la fin de cette partie que la densité de probabilité f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \frac{x^{\lambda-1}}{\alpha^{\lambda}} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où λ et α sont deux constantes strictement positives. On dit que X suit la loi puissance de paramètres α et λ.

a) Montrer que Y_n suit aussi une loi puissance de paramètres à préciser en fonction de n, λ et α.

b) En déduire l'espérance de Y_n.

26. Calculer l'espérance de Z_n.

Partie II. Un problème d'optimisation

On reprend la notation de la partie précédente : G_{n-1} est la fonction de répartition de Y_{n-1}, qui est le maximum de $X_1, \ldots, X_{n-1}$. On répond dans cette partie au problème d'optimisation suivant : trouver une fonction σ définie sur $]0, \alpha[$ vérifiant les trois propriétés :

P1 σ est une bijection de $]0, \alpha[$ dans un intervalle $]0, \beta[$, avec β un réel strictement positif.

P2 σ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ et σ' est à valeurs strictement positives sur $]0, \alpha[$.

P3 on définit, pour tout $x \in]0, \alpha[$ et tout $y \in]0, \beta[$,

$$\gamma(x, y) = (x - y)G_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y)\right).$$

Alors pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\gamma(x, y)$ atteint son maximum lorsque $y = \sigma(x)$.

Raisonnons par analyse-synthèse.

- *Analyse*

On suppose dans un premier temps qu'une telle fonction σ vérifiant ces trois propriétés existe.

27. a) Justifier que σ^{-1} est dérivable sur $]0, \beta[$ et exprimer sa dérivée $\left(\sigma^{-1}\right)'$ en fonction de σ' et σ^{-1}.

b) En déduire la dérivée partielle [1] $\partial_2(\gamma)(x, y)$.

28. En regardant la quantité $\partial_2(\gamma)(x, \sigma(x))$, déduire que pour tout $x \in]0, \alpha[$:

$$\sigma'(x)G_{n-1}(x) + \sigma(x)g_{n-1}(x) = xg_{n-1}(x).$$

29. Montrer alors, pour tout $x \in]0, \alpha[$

$$\sigma(x) = \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x t g_{n-1}(t)\, dt \quad (\bullet)$$

30. Montrer que pour tout $x \in]0, \alpha[$, on a également :

$$\sigma(x) = x - \int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\, dt \quad (\bullet\bullet)$$

- *Synthèse*

On suppose à présent que σ est la fonction définie par l'égalité $(\bullet)$ ou $(\bullet\bullet)$.

31. Montrer que pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\quad 0 < \sigma(x) < x$.

32. Montrer que σ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ et que pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\sigma'(x)$ est du signe de $x - \sigma(x)$.

33. Montrer que σ réalise une bijection de $]0, \alpha[$ dans $]0, \beta[$ avec $\beta = \mathbf{E}(Y_{n-1})$.

34. On fixe un réel $x \in]0, \alpha[$. Soit $y \in]0, \beta[$, on pose $z = \sigma^{-1}(y)$.

1. On admet que les résultats et définitions vus sur $\mathbb{R}^2$ s'étendent aux cas des fonctions définies sur $]0; \alpha[\times]0; \beta[$.

a) Établir :

$$\gamma(x,y)=(x-z)G_{n-1}(z)+\int_0^z G_{n-1}(t)\,dt.$$

b) En déduire : $\gamma(x,\sigma(x))-\gamma(x,y)=(z-x)G_{n-1}(z)-\displaystyle\int_x^z G_{n-1}(t)\,dt.$

c) Conclure que $y\in]0;\beta[\mapsto\gamma(x,y)$ admet un maximum atteint pour $y=\sigma(x)$.

35. Est-ce que la fonction γ définie sur $]0;\alpha[\times]0;\beta[$ admet un maximum global ?

- **Estimation de** $\sigma(x)$**.** Soit $x\in]0,\alpha[$.

36. On considère la fonction φ_x définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\varphi_x(t)=\begin{cases} t & \text{si } t\leqslant x\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

En utilisant la relation ($\bullet$), montrer que $\sigma(x)=\dfrac{\mathbf{E}\left(\varphi_x\left(Y_{n-1}\right)\right)}{\mathbf{P}\left(Y_{n-1}\leqslant x\right)}$.

37. On admet dans la suite qu'il existe une fonction python `simuX()` qui renvoie une simulation de la variable X.
Écrire un programme qui prend en argument x et n et simule la variable $\varphi_x(Y_{n-1})$.

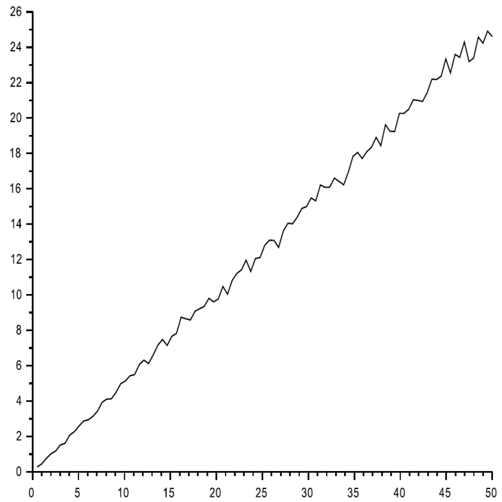
38. En déduire une fonction python d'entête `sigma(x,n)` qui retourne une valeur approchée de $\sigma(x)$ obtenue comme quotient d'une approximation de $\mathbf{E}\left(\varphi_x\left(Y_{n-1}\right)\right)$ et de $\mathbf{P}\left(Y_{n-1}\leqslant x\right)$.

- **Exemple**

39. On suppose dans cette question que X suit la loi puissance de paramètres α et λ.

a) Donner une expression de $\sigma(x)$ pour tout $x\in]0,\alpha[$ dans ce cas.

b) Votre résultat est-il en accord avec la courbe ci-dessous obtenue sous cette hypothèse, en utilisant la fonction sigma de la question précédente lorsque $n=6$, $\lambda=0,2$ et $\alpha=50$? Justifier votre réponse.



Partie III. Modélisation d'enchères

Un bien est mis en vente aux enchères et n acheteurs $A_1,\ldots,A_n$ sont intéressés. Chaque acheteur A_k attribue une valeur x_k à ce bien, appelée valeur privée, qui n'est pas connue des autres acheteurs.
Afin de se procurer ce bien, A_k propose ensuite, de façon secrète, une mise (on dit aussi une offre) y_k. Toutes les mises sont alors révélées simultanément et l'acheteur qui remporte le bien est celui qui a proposé la plus grande mise. En cas d'égalité, le gagnant est tiré au sort parmi ceux qui ont la mise la plus importante.
Le prix à payer par le gagnant au vendeur dépend du type d'enchère organisé. On étudie ici l'enchère au premier prix ou enchère hollandaise.

- l'enchère au premier prix ou enchère hollandaise : l'acheteur gagnant paye la mise qu'il a lui-même proposée. Ce type d'enchère correspond aux enchères dynamiques «descendantes» : la vente commence avec un prix très élevé et baisse progressivement. Le premier qui accepte le prix remporte le bien.

- **Du point de vue de l'acheteur**

On s'intéresse au résultat suivant : à partir de l'information dont dispose l'acheteur k, notamment à partir de sa valeur privée x_k, comment doit-il choisir sa mise y_k afin d'optimiser son résultat net ? On appelle stratégie de l'acheteur k une fonction σ_k telle que $y_k=\sigma_k\left(x_k\right)$.

On suppose que chaque acheteur A_k a une valeur privée $x_k = X_k(\omega)$ qui est une réalisation de la variable aléatoire X_k. Soit σ la fonction définie à la partie II.
Le problème étant symétrique, on se met par exemple à la place de l'acheteur n, et on suppose que les $n-1$ premiers acheteurs appliquent la stratégie σ, c'est-à-dire : pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, l'acheteur k mise $\sigma\left(X_k\right)$. L'acheteur n a une valeur privée x_n et choisit une mise y_n.
On note E_n l'événement «l'acheteur A_n remporte l'enchère».

40. **a)** Montrer que $\mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}\left(Y_{n-1} \leqslant \sigma^{-1}(y_n)\right)$.

b) On note R_n la variable aléatoire donnant le résultat net de l'enchère pour l'acheteur A_n.
On note $\mathbf{1}_{E_n}$ la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(E_n)$.
Justifier que $R_n = (x_n - y_n)\mathbf{1}_{E_n}$ et en déduire que le résultat espéré de l'acheteur A_n en fonction de sa valeur privée $x_n \in]0, \alpha[$ et de l'offre $y_n \in]0, \beta[$ est donnée par

$$\mathbf{E}(R_n) = (x_n - y_n)\, G_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y_n)\right).$$

c) En déduire que pour optimiser son espérance de résultat, l'acheteur A_n a intérêt à appliquer lui aussi la stratégie σ.
Il s'agit de ce que l'on appelle un équilibre de Nash en théorie des jeux : si tous les acheteurs appliquent cette stratégie d'équilibre σ, alors aucun n'a intérêt à changer de stratégie.

- **Du point de vue du vendeur**
On se met maintenant à la place du vendeur. Les valeurs privées des acheteurs sont données par les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$.
On suppose que le vendeur organise une enchère au premier prix, et que les acheteurs adoptent la stratégie d'équilibre σ donnée décrite précédemment.
On note B_n la variable aléatoire donnant le bénéfice, ou revenu, du vendeur. Il s'agit du montant que paye l'acheteur qui a remporté l'enchère.

d) i) Justifier que $B_n = \sigma(Y_n)$.

ii) En déduire les égalités

$$\mathbf{E}(B_n) = n\int_0^{\alpha} \sigma(x) G_{n-1}(x) f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^{\alpha}\left(\int_0^{x} t g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

iii) Conclure en montrant que

$$\mathbf{E}(B_n) = n\int_0^{\alpha} n\left(1 - F(x)\right) g_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

– JOYEUSES FÊTES !! –

DS 5A - solution

Exercice 1

1. On a $F_a(x,y) = -3x^2+2xy+2xa-3y^2+2ya-3a^2$ donc F_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale. En particulier

$$\partial_1 F_a(x,y) = -6x+2y+2a$$
$$\partial_2 F_a(x,y) = 2x-6y+2a.$$

2. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Ce point est critique si et seulement si

$$\begin{cases} -6x+2y+2a=0 \\ 2x-6y+2a=0 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2+3L_1}{\iff} \begin{cases} -6x+2y+2a=0 \\ -16y+8a=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=a/2 \\ y=a/2 \end{cases}$$

On en déduit qu'il existe un unique point critique donné par

$$\left(x_0,y_0\right) = (a/2,a/2).$$

On calcule ensuite

$$\begin{aligned} F_a\left(x_0,y_0\right) &= -3\frac{a^2}{4}+2\frac{a^2}{4}+2\frac{a}{2}a-3\frac{a^2}{4}+2\frac{a}{2}a-3a^2 \\ &= -2a^2. \end{aligned}$$

3. On a

$$(3x-y-a)^2 = 9x^2-6xy-6xa+y^2+2ya+a^2$$

donc

$$\begin{aligned} &G_a(x,y) \\ &= -3x^2+2xy+2xa-3y^2+2ya-3a^2 \\ &\quad +\frac{1}{3}\left(9x^2-6xy-6xa+y^2+2ya+a^2\right)+2a^2 \\ &= -\frac{8}{3}y^2+\frac{8}{3}ya-\frac{2}{3}a^2 \\ &= -\frac{2}{3}\left(4y^2-4ya+a^2\right) = -\frac{2}{3}(2y-a)^2. \end{aligned}$$

Ainsi G_a est négative.

4. Comme F_a n'a qu'un seul point critique, il n'y a qu'un seul extremum possible qui serait atteint en $\left(x_0,y_0\right)$. De plus $G_a(x,y)$ est maximale en $(a/2,a/2)$ et $-\frac{1}{3}(3x-y-a)^2$ également. Donc $F_a(x,y) = G_a(x,y)-\frac{1}{3}(3x-y-a)^2$ est maximale en $\left(x_0,y_0\right)$ où elle vaut

$$M(a) = -2a^2.$$

5. La fonction M admet un unique extremum atteint en $a=0$ et c'est un maximum.
On en déduit que la fonction de trois variables

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mapsto F_z(x,y),$$

admet un unique extremum. C'est un maximum atteint en $(0,0,0)$.

6.a) La matrice J est de rang 1. Ainsi, 0 est valeur propre et l'espace propre associé est de dimension $3-1=2$ (formule du rang). On constate de plus que

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

est vecteur propre pour la valeur propre 3. Par un compte des dimensions, il n'y a pas d'autres valeurs propres et

$$\mathrm{Sp}(J) = \{0;3\}.$$

6.b) On a

$$A = J-4I_3.$$

Soient $X\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} AX=\lambda X &\iff JX-4I_3X=\lambda X \\ &\iff JX=(\lambda+4)X. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $(\lambda+4)\in\mathrm{Sp}(J)$. Connaissant le spectre de J,

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-4;-1\}.$$

7. On constate que la base $\mathscr{C}$ formée par les trois matrices suivantes convient.

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad X_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix},\quad X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

Ces vecteurs propres sont associés aux valeurs propres -4, -1, -1. La matrice

$$P = \begin{bmatrix}X_1 & X_2 & X_3\end{bmatrix}$$

est orthogonale ${}^tP = P^{-1}$ et

$$P A {}^tP = \mathrm{Diag}(-4,-1,-1).$$

8. Posons pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$X = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

de sorte que

$$g(x,y,z) = {}^tXAX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t\tilde{X}D\tilde{X}.$$

Si on pose le calcul, on trouve

$$g(x,y,z) = -4\tilde{x}^2-\tilde{y}^2-\tilde{z}^2.$$

On constate que

$$g(x,y,z) \leqslant 0 = g(0,0,0).$$

La fonction g admet 0 comme maximum global atteint en $(0,0,0)$.

9. La fonction $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto -\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2$ est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition

$$x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2\right)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. De plus, la fonction

$$(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto -\sum_{k=1}^{n} x_k$$

est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Par produit, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

- On a pour tout $i \in [\![1;n]\!]$

$$\begin{aligned}\partial_i f_n(x) &= -2x_i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) + \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\\ &= \left(1-2x_i\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).\end{aligned}$$

10. Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Ce point est critique si et seulement si pour tout $i \in [\![1;n]\!]$

$$\left(1-2x_i\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) = 0 \iff 2x_i\sum_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

Dans ce cas $\sum_{k=1}^{n} x_k \neq 0$, et pour tout indice i,

$$x_i = \frac{1}{2\sum_{k=1}^{n} x_k}.$$

En particulier, on doit avoir $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, de sorte que $\sum_{k=1}^{n} x_k = nx_1$ et

$$x_1 = \frac{1}{2nx_1} \iff x_1^2 = \frac{1}{2n} \iff x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Finalement, f_n possède deux points critiques

$$a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1,1,\dots,1) \quad \text{et} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2n}}(1,1,\dots,1) = -a.$$

Exercice 2

11. Par symétrie de la covariance, la matrice $\mathrm{M}(\overline{\mathrm{X}})$ est symétrique. Elle est donc diagonalisable.

12. On a par linéarité de l'espérance et en identifiant une matrice de taille 1 avec son coefficient

$$\begin{aligned}{}^t x\mathbf{E}(\overline{\mathrm{X}}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{E}(\mathrm{X}_1)\\ \mathbf{E}(\mathrm{X}_2)\\ \vdots \\ \mathbf{E}(\mathrm{X}_n)\end{bmatrix}\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{E}(\mathrm{X}_i)\\ {}^t x\mathbf{E}(\overline{\mathrm{X}}) &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathrm{X}_i\right) = \mathbf{E}(\mathrm{S}).\end{aligned}$$

- D'une part, par bilinéarité de la covariance

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathrm{S}) &= \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathrm{X}_i\right)\\ &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathrm{X}_i; \sum_{j=1}^{n} x_j\mathrm{X}_j\right)\\ \mathbf{V}(\mathrm{S}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \mathrm{Cov}\left(\mathrm{X}_i;\mathrm{X}_j\right)\end{aligned}$$

D'autre part, par définition du produit matriciel,

$$\underbrace{{}^t x}_{\in\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{\mathrm{M}(\overline{\mathrm{X}})}_{\in\mathscr{M}_{n}(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{x}_{\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R}).$$

C'est-à-dire un réel.

$$\begin{aligned}{}^t x\mathrm{M}(\overline{\mathrm{X}})x &= \sum_{i=1}^{n} [{}^t x]_{1i}\,[\mathrm{M}(\overline{\mathrm{X}})x]_{i1}\\ &= \sum_{i=1}^{n} [x]_{i1}\sum_{j=1}^{n} [\mathrm{M}(\overline{\mathrm{X}})]_{ij}\,[x]_{j1}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j m_{ij}\\ {}^t x\mathrm{M}(\overline{\mathrm{X}})x &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \mathrm{Cov}\left(\mathrm{X}_i,\mathrm{X}_j\right).\end{aligned}$$

D'où l'égalité $\quad \mathbf{V}(\mathrm{S}) = {}^t x\mathrm{M}(\overline{\mathrm{X}})x.$

13. Soit $x \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ. On a d'une part

$${}^t x\mathrm{M}(\overline{\mathrm{X}})x = \lambda\,{}^t x x = \lambda\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)}_{>0}.$$

On a bien "> 0" car x est un vecteur propre, il est donc non nul.

D'autre part $\quad {}^t x\mathrm{M}(\overline{\mathrm{X}})x = \mathbf{V}(\mathrm{S}) \geqslant 0.$

Par conséquent, $\lambda \geqslant 0$. Le spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

14.a) D'après la loi des grands nombres, on peut affirmer que les quantités `c/m`, `ei/m`, `ej/m` donne des approximations respectivement des réels

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}_{i+1}\mathrm{X}j+1), \quad \mathbf{E}(\mathrm{X}_{i+1}) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(\mathrm{X}_{j+1}).$$

| Il y a le décalage d'indice habituelle en python.

En suivant les indications du père Noël en fin de sujet, la quantité `c/m-ei/m*ej/m` est une approximation de

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}_{i+1}\mathrm{X}j+1) - \mathbf{E}(\mathrm{X}_{i+1})\mathbf{E}(\mathrm{X}_{j+1}) = \mathrm{Cov}(\mathrm{X}_{i+1},\mathrm{X}_{j+1})$$

d'après la formule de Huygens.

- Pour le test, le vecteur aléatoire $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ est telle que X_1 et X_2 sont indépendantes avec

$$X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1) \quad \text{et} \quad X_3 = X_1 + X_2.$$

La commande `mystere(0,1)` renvoie donc une approximation de

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$$

qui est, par indépendance de X_1 et X_2 nulle.
La commande `mystere(1,2)` renvoie bien une approximation de

$$\mathrm{Cov}(X_2, X_3) = \mathrm{Cov}(X_2, X_1 + X_2) = \mathbf{V}(X_2) = 1.$$

La commande `mystere(0,0)` renvoie bien une approximation de

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \mathbf{V}(X_1) = 1.$$

14.b)

```python
def cov_var():
    n=len(simu_vect())
    # On lance une simulation pour récupérer la longeur du vecteur aléatoire
    M=np.zeros([n,n])
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            M[i,j]=mystere(i,j)

    return M
```

15.a) Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si a est nul, la variable $a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ est nulle donc gaussienne. Si a est non nul, on sait que la mutuelle indépendance des variables X_i permet d'affirmer que la variable $a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ suit une loi normale de paramètres

$$\sum_{i=1}^{n} a_i m_i, \quad \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 {\sigma_i}^2$$

où pour tout indice i, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, {\sigma_i}^2)$. Cette variable est gaussienne. Finalement, le vecteur est bien gaussien.

Beaucoup d'oublis de l'indépendance des variables dans les copies.

15.b) Il suffit de considérer le n-uplet

$$(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{ème position}}, 0, \ldots, 0)$$

pour obtenir directement

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = X_i$$

gaussienne.

16. On considère $\big([Y=-1], [Y=1]\big)$ le système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
F_{XY}(x) &= \mathbf{P}(XY \leqslant x) \\
&= \mathbf{P}([XY \leqslant x] \cap [Y=-1]) + \mathbf{P}([XY \leqslant x] \cap [Y=1]) \\
&= \mathbf{P}([X \geqslant -x] \cap [Y=-1]) + \mathbf{P}([X \leqslant x] \cap [Y=1]) \\
F_{xy}(x) &= \mathbf{P}(X \geqslant -x)\mathbf{P}(Y=-1) + \mathbf{P}(X \leqslant x)\mathbf{P}(Y=1).
\end{aligned}$$

Si on note Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, alors

$$\begin{aligned}
F_{XY}(x) &= (1 - \Phi(-x))\frac{1}{2} + \Phi(x) \cdot \frac{1}{2} \\
&= \Phi(x) \cdot \frac{1}{2} + \Phi(x)\frac{1}{2} = \Phi(x).
\end{aligned}$$

Ainsi $F_{XY} = \Phi$, comme la fonction de répartition caractérise la loi, XY suit une loi $\mathcal{N}(0;1)$.

17. Par la formule de Huygens

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, XY) &= \mathbf{E}(X \cdot XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(XY) \\
&= \mathbf{E}\left(X^2Y\right) - 0 \qquad \text{(variables centrées)} \\
&= \mathbf{E}\left(X^2\right)\mathbf{E}(Y) \qquad \text{(indépendance X, Y)} \\
\mathrm{Cov}(X, XY) &= 0.
\end{aligned}$$

18. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X + XY = 0) &= \mathbf{P}(X(1+Y) = 0) \\
&= \mathbf{P}(1 + Y = 0) = \mathbf{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Car X est à densité, $\mathbf{P}(X = 0) = 0$. Dès lors $X + XY$ ne peut être à densité donc non normale.
Notons aussi que $X + XY$ n'est pas nulle presque sûrement.
La variable $X + XY$ n'est pas gaussienne, le vecteur (X, XY) n'est pas gaussien.

19.a) La variable S est une combinaison linéaire de X_1 et X_2 donc S est gaussienne : presque sûrement nulle ou normale. L'espérance est

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(X_1 + X_2) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) = 1 \neq 0.$$

En particulier, on exclut le cas où S est nulle presque sûrement. La variance est

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(S) &= \mathbf{V}(X_1 + X_2) \\
&= \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\
&= 1 + 6 + 2 \times (-1) = 5.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$S \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 5).$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(T) &= \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_3) = 2 \\
\mathbf{V}(T) &= \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_3) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_3) \\
&= 1 + 1 + 2 \times 0 = 2.
\end{aligned}$$

D'où $\qquad T \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 2).$

19.b) On a aussi

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(S, T) \\
&= \mathrm{Cov}(X_1 + X_2, X_1 + X_3) \\
&= \mathrm{Cov}(X_1, X_1) + \mathrm{Cov}(X_1, X_3) + \mathrm{Cov}(X_2, X_1) + \mathrm{Cov}(X_2, X_3) \\
&= 1 + 0 + (-1) + 2 = 2.
\end{aligned}$$

D'où

$$M(S, T) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}(S) & \mathrm{Cov}(S, T) \\ \mathrm{Cov}(S, T) & \mathbf{V}(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

20. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$a(X+Y)+b(X-Y) = \underbrace{(a+b)}_{\in\mathbb{R}}X + \underbrace{(a-b)}_{\in\mathbb{R}}Y$$

est gaussienne car (X,Y) est un vecteur gaussien.

On a

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X+Y,X-Y) &= \operatorname{Cov}(X,X)-\operatorname{Cov}(Y,Y)\\ &= \mathbf{V}(X)-\mathbf{V}(Y)=0.\end{aligned}$$

Dès lors la matrice variance/covariance est diagonale. D'après le résultat admis, les variables $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

21.a)

$$\begin{aligned}L^tL &= \begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & \rho\sigma_2\\ 0 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma^2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \rho^2\sigma_2^2+(1-\rho^2)\sigma_2^2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}\\ L^tL &= M(X_1,X_2).\end{aligned}$$

car $$\sigma_i^2 = \mathbf{V}(X_i) = \operatorname{Cov}(X_i,X_i)$$

et $$\rho\sigma_1\sigma_2 = \frac{\operatorname{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathbf{V}(X_1)\mathbf{V}(X_2)}}\sigma_1\sigma_2 = \operatorname{Cov}(X_1,X_2).$$

21.b) Notons ℓ_{ij} les coefficients de la matrice L. Ainsi

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1 &= \ell_{11}G_1+\ell_{12}G_2\\ \tilde{X}_2 &= \ell_{21}G_1+\ell_{22}G_2.\end{aligned}$$

Comme G_1 et G_2 sont indépendantes

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\tilde{X}_1) &= \ell_{11}^2\mathbf{V}(G_1)+\ell_{12}^2\mathbf{V}(G_2)\\ &= \sigma_1^2\times 1+0^2\times 1 = \mathbf{V}(X_1)\\ \operatorname{Cov}(\tilde{X}_1,\tilde{X}_2) &= \ell_{11}\ell_{21}+\ell_{12}\ell_{22}\\ &= \rho\sigma_2\sigma_1 = \operatorname{Cov}(X_1,X_2)\\ \mathbf{V}(\tilde{X}_2) &= \ell_{21}^2\mathbf{V}(G_1)+\ell_{22}^2\mathbf{V}(G_2)\\ &= \rho^2\sigma_2^2\times 1+\left(1-\rho^2\right)\sigma_2^2 = \sigma_2^2 = \mathbf{V}(X_2).\end{aligned}$$

On a donc bien la même matrice de variance/covariance.

22.a) On a par définition de la matrice de variance/covariance

$$M(X_1,X_2) = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2\end{bmatrix}.$$

On en déduit le code

```
def Triplet(M):
    sigma1=np.sqrt(M[0,0])
    sigma2=np.sqrt(M[1,1])
    rho=M([1,0])/(sigma1*sigma2)
    return np.array([sigma1,sigma2,rho])
```

22.b)

```
def L(M):
    sigma1=np.sqrt(M[0,0])
    sigma2=np.sqrt(M[1,1])
    rho=M([1,0])/(sigma1*sigma2)
    L21=rho*sigma2
    L22=np.sqrt(1-rho**2)*sigma2
    L=np.array([[sigma1,0],[L21,L22]])
    return L
```

23.

```
def Simu(M):
    G=np.transpose(rd.normal(0,1,2))
    return np.dot(L(M),G)
```

Problème

d'après ECRICOME 1997

---

24. La variable $-X_2$ est à valeurs dans $[-1;0]$ presque sûrement. Donc pour $x \geqslant 0$, $F_2(x)=1$ et pour $x \leqslant -1$, $F_2(x)=0$. Où on a noté F_2, la fonction de répartition de $-X_2$.
Pour $x \in [-1;0]$

$$\begin{aligned}F_2(x) &= \mathbf{P}(-X_2 \leqslant x) = \mathbf{P}(X_2 \geqslant -x)\\ &= 1-\mathbf{P}(X_2 < -x) = 1-\mathbf{P}(X_2 \leqslant -x)\\ &= 1-F(-x) = 1+x\end{aligned}$$

où F est la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0;1]$. Résumons

$$\forall x \in \mathbb{R},\qquad F_2(x) = \begin{cases}0 & \text{si } x \leqslant -1\\ \frac{x-(-1)}{0-(-1)} & \text{si } x \in [-1;0]\\ 1 & \text{si } x \geqslant 0.\end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi $\mathscr{U}([-1;0])$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi

$$-X_2 \hookrightarrow \mathscr{U}([-1;0])$$

22. Une densité de $-X_2$ est donnée par g :

$$\forall t \in \mathbb{R},\qquad g(t) = \begin{cases}0 & \text{si } t \notin [-1;0].\\ 1 & \text{si } t \in [-1;0].\end{cases}$$

Une densité de X, est donnée par f :

$$\forall t \in \mathbb{R},\qquad f(t) = \begin{cases}0 & \text{si } t \notin [0;1]\\ 1 & \text{si } t \in [0;1].\end{cases}$$

Explicitons le produit de convolution (bien défini car f est bornée). Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f(x-t)g(t) \neq 0 &\iff \begin{cases}0 \leqslant x-t \leqslant 1\\ -1 \leqslant t \leqslant 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}-1+x \leqslant t \leqslant x\\ -1 \leqslant t \leqslant 0\end{cases}\end{aligned}$$

→ *Cas 1*
Si $x < -1$, le système n'a pas de solution

$$\forall t \in \mathbb{R},\qquad f(x-t)g(t) = 0$$

et $$f*g(x) = 0.$$

→ *Cas 2*
Si $x \in [0,1]$, le système devient $x-1 \leqslant t \leqslant 0$ et

$$f * g(x) = \int_{x-1}^{0} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x-1}^{0} 1\,\mathrm{d}t = 1-x.$$

→ *Cas 3*
Si $x \in [-1;0]$, le système est $-1 \leqslant t \leqslant x$ et

$$f * g(x) = \int_{-1}^{x} 1\,\mathrm{d}t = 1+x$$

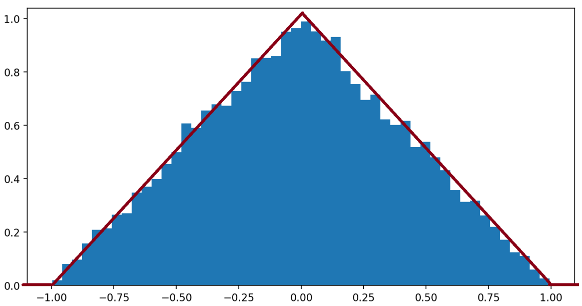
→ *Cas 4*
Si $x \geqslant 0$, le système est impossible et $f * g(x) = 0$.

En résumé

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-1;1] \\ 1-|x| & \text{si } x \in [-1;1]. \end{cases}$$

Les variables X_1 et $-X_2$ sont indépendantes, le produit de convolution $f * g$ est bien défini donc $\varphi_1 = f * g$ est une densité de $X_1 - X_2$ d'après le théorème de sommation.

Le résultat est cohérent, l'histogramme épouse approximativement la courbe représentative de la courbe de φ_1.



26. On obtient Φ_1 par intégration :

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ (1-x)^2/2 & \text{si } x \in [-1;0]. \\ 1-(1-x)^2/2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

27. La variable Z_1 est à valeurs dans $[0;1]$. Donc

$$\Phi_2(x) = 0 \text{ si } x < 0 \quad \Phi_2(x) = 1 \text{ si } x > 1.$$

Pour $x \in [0;1]$,

$$\begin{aligned} \Phi_2(x) &= \mathbf{P}(Z_1 \leqslant x) = \mathbf{P}(-x \leqslant Y_1 \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(-x < Y_1 \leqslant x) \quad (\text{ densité }) \\ &= \Phi_1(x) - \Phi_1(-x). \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient :

$$\Phi_2(x) = 1-(1-x)^2/2-(1-x)^2/2 = 2x - x^2.$$

On constate que Φ_2 est continue sur $\mathbb{R}$ car constante sur $]-\infty;0[$ et $]1,+\infty[$, polynomiale sur $]0;1[$ et continue en 0

$$\lim_{x\to 0^-} \Phi_2(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} 2x - x^2 = \lim_{x\to 0^+} \Phi_2(x) = \Phi_2(0).$$

et continue en 1 par le même argument. Φ_2 est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ donc Z_1 est une variable à densité et une densité est obtenue par dérivation là où c'est possible :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_2(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \notin [0;1] \\ 2(1-t) \text{ si } t \in [0;1]. \end{cases}$$

28. Comme Z_1 est fonction de X_1 et X_2 qui sont en indépendance mutuelle avec X_3, Z_1 est indépendante de $-X_3$ (lemme des coalitions). La densité φ_2 est bornée. D'après le théorème de sommation $Z_1 - X_3$ est à densité et une densité est donnée par un produit de convolution. En reprenant la question 22, on trouve :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\\ 1-t^2 & \text{si } t \in [-1;0] \\ (1+t)^2 & \text{si } t \in [0;1] \end{cases}$$

29. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_1 - X_3 \leqslant 0) &= \int_{-\infty}^{0} \varphi_3(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} \varphi_3(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{0} 1-t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

La personne A_3 quitte la mairie en premier si la différence (en valeur absolue) des temps de A_1 et A_2 est supérieure au temps de A_3. Ainsi

$$E = [|X_1 - X_2| \geqslant X_3] = [Z_1 - X_3 \leqslant 0]$$

Finalement $$\mathbf{P}(E) = \frac{2}{3}.$$

30. La variable T_3 représente le temps total d'attente de A_3.

31. Notons $m = \min(X_1, X_2)$. La variable m est à valeurs dans $[0,1]$ et si on note H sa fonction de répartition, on a

$$H(t) = 0 \text{ si } t \leqslant 0 \quad H(t) = 1 \text{ si } t \geqslant 1$$

et pour $t \in [0;1]$

$$\begin{aligned} 1-H(t) &= \mathbf{P}(\min(X_1,X_2) > t) \\ &= \mathbf{P}([X_1 > t] \cap [X_2 > t]) \\ &= \mathbf{P}(X_1 > t)\,\mathbf{P}(X_2 > t) \quad (\text{indépendance}) \\ 1-H(t) &= (1-t)^2. \end{aligned}$$

Ainsi $$H(t) = 1-(1-t)^2.$$

La fonction H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, on a donc une variable à densité dont une densité est :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0;1] \\ 2(1-t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate que $f = \varphi_2$.

32. Appliquer de nouveau le théorème de sommation. L'espérance est alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 2t - t^2\,\mathrm{d}t + \int_1^2 (t-2)^2\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Après simplifications, on trouve

$$\mathbf{E}(T_3) = \frac{5}{6}.$$

Vérifier que $\mathbf{V}(T_3) = \frac{5}{36}$.

33. Justifier que U_n suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$. En particulier

$$\mathbf{E}(U_n) = \frac{1}{n\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(U_n) = \frac{1}{(n\lambda)^2}.$$

34. On vérifie que V_n admet pour fonction de répartition définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_{V_n}(x) = \begin{cases} \left(1-e^{-\lambda x}\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifier que la fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Dès lors, V_n est une variable à densité et une densité est donnée sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{V_n}(x) = \begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

35. On développe pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} t f_{V_n}(t) &= n\lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k e^{-\lambda k t} \\ &= n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-1)^k \cdot t e^{-\lambda(k+1)t} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot \left(\lambda(k+1) t e^{-\lambda(k+1)t}\right). \end{aligned}$$

À l'aide d'une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda(k+1))$ qui admet une espérance

$$\int_0^{+\infty} \lambda(k+1) t e^{-\lambda(k+1)t} \, dt = \frac{1}{(k+1)\lambda}.$$

De plus, on dispose de la formule du pion

$$\frac{n}{k+1}\binom{n-1}{k} = \frac{n(n-1)!}{(k+1)(k)!(n-1-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))} = \binom{n}{k+1}.$$

On en déduit la convergence absolue et l'égalité.

36.a)

```python
def simuS(lbda,p):
    N=rd.geometric(p)
    X=rd.exponential(1/lbda,[N,1])
    return np.sum(X)
```

35. La variable W_t compte le nombre de succès (la personne a terminé sa démarche administrative) dans n répétitions d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. La probabilité de succès est :

$$\mathbf{P}\left(X_i \leqslant t\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Finalement on a une loi binomiale

$$W_t \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, 1-e^{-\lambda t}\right).$$

36.b)

```python
def approx_esp(lbda,p):
    s=0
    for i in range(5000):
        s+=simuS(lbda,p)
    return s/5000
```

37. Par les règles de transformation affine

$$\lambda X_i \hookrightarrow \mathscr{E}(1) = \gamma(1).$$

De plus les variables λX_i son mutuellement indépendantes On sait alors que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda X_i \hookrightarrow \gamma(n).$$

38. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\mathbf{P}_{[N=n]}(S < x) = \mathbf{P}_{[N=n]}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right).$$

Par indépendance de N et $\sum_{i=1}^{n} X_i$ (lemme des coalition)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{[N=n]}(S < x) &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda X_i \leqslant \lambda x\right) = \int_0^{\lambda} f_n(t) \, dt \end{aligned}$$

où f_n est une densité de la loi $\gamma(n)$. Par exemple sur $\mathbb{R}^+$

$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t} \quad \text{où} \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

À l'aide du changement de variables affine $u = \lambda^{-1} t$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{[N=n]}(S < x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (\lambda u)^{n-1} e^{-\lambda u} \lambda \, du \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^x u^{n-1} e^{-\lambda u} \, du. \end{aligned}$$

39. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(N = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S < x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n) \mathbf{P}_{[N=n]}(S < x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p q^{n-1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^x u^{n-1} e^{-\lambda u} \, du \\ &= \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p \lambda^n q^{n-1} u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u} \, du \\ &= \int_0^x \lambda p e^{-\lambda u} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q u)^m}{m!} du \end{aligned}$$

en admettant l'inversion entre la somme et l'intégrale. On reconnaît alors la somme d'une série exponentielle

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q u)^m}{m!} = e^{\lambda q u}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S < x) &= \int_0^x p e^{-\lambda u} \cdot e^{\lambda q u} \, du \\ &= \int_0^x p e^{-\lambda p u} \, du = 1 - e^{-\lambda p x}. \end{aligned}$$

On a aussi pour tout $x \in \mathbb{R}^-$,

$$\mathbf{P}(S < x) = 0.$$

On constate que S admet la même fonction de répartition qu'une variable de loi $p\lambda$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi $S \hookrightarrow \mathscr{E}(p\lambda)$.

40. On a bien

$$\mathbf{E}(S) = \frac{1}{p\lambda} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\lambda} = \mathbf{E}(N) \cdot \mathbf{E}(X_1).$$

Pour la seconde preuve, voir l'exercice sur l'identité de Wald.

DS 5* - solution

Exercice 1

1. Explicitons $g(x,y)$ pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & 1-x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ay+b(1-y) \\ cy+d(1-y) \end{bmatrix} \\ &= ayx+b(1-y)x+(1-x)(cy+d(1-y)) \\ g(x,y) &= (a-b-c+d)xy+(b-d)x+(c-d)y+d. \end{aligned}$$

La fonction g est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\begin{cases} \partial_1 g(x,y) = (a-b-c+d)y+b-d \\ \partial_2 g(x,y) = (a-b-c+d)x+c-d. \end{cases}$$

Posons $s=a-b-c+d$.
Si $s\neq 0$, on a un unique point critique

$$(x_0,y_0) = \left(-\frac{b+d}{s}, \frac{d-c}{s}\right).$$

Si $s=0$, alors il y a 0 ou une infinité de points critiques.

2. Dans ce cas, on a bien

$$s=a-b-c+d=(a-b)+(d-c)\neq 0$$

car si il y a égalité, $(a-b)$ et $(d-c)$ étant de même signe, on aurait $a-b=0=c-d$. Cas exclu par hypothèse. Ensuite

$$\frac{d-b}{s} = \frac{d-b}{(d-b)+(a-c)} = \frac{1}{1+\frac{a-c}{d-b}} \text{ car } d-b\neq 0$$

Comme $a-c$ et $d-b$ sont de même signe

$$\frac{a-c}{d-b}\geqslant 0 \quad\text{et}\quad 0\leqslant\frac{d-b}{s}\leqslant 1.$$

Il en va de même pour $(d-c)/s\in[0;1]$. Finalement

$$(x_0,y_0)\in[0;1]^2.$$

3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. D'une part

$$\begin{aligned} & g(x,y)-g(x_0 y_c) \\ &= sx_y+(b-d)x+(c-d)y \\ &= sx_0y_0+(b-d)x_0+(c-d)y_0 \\ &= sxy+(b-d)x+(c-d)y-sx_0y_0+sx_0y_0+sy_0x_0. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} s(x-x_0)(y-y_0) &= sxy-sx_0y-sxy_0+sx_0y_0 \\ &= sxy+(c-d)y+(b-d)x+sx_0y_0 \end{aligned}$$

D'où $\qquad g(x,y)-g(x_0,y_0)=s(x-x_0)(y-y_0).$

4. Posons $h_1=x-x_0$, $h_2=y-y_0$ de sorte que

$$g(x,y)-g(x_0,y_0)=\underbrace{s}_{\neq 0}h_1h_2.$$

Si $h_1=h_2$, $g(x,y)-g(x_0,y_0)$ est du signe de s.
Pour $h_1=-h_2$, $g(x,y)-g(x_0,y_0)$ est de signe opposé de s.
Ce changement de signe permet d'affirmer que le point critique est un point selle.

Problème A

5. La variable $X/2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Pour $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{X/2}(x) &= \mathbf{P}(X/2\leqslant x) = \mathbf{P}(X\leqslant 2x) \\ &= F_X(2x). \end{aligned}$$

On en déduit que $F_{X/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par composition. La variable $X/2$ est donc à densité et une densité g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} \forall x\in\mathbb{R}^- \quad & g(x)=0 \\ \forall x\in\mathbb{R}_*^+ \quad & g(x) = 2{F_X}'(2x) \\ &= 2f_r(2x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(r/2)}x^{r/2-1}\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Dès lors $\qquad X/2\hookrightarrow\gamma(r/2).$

En particulier

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{2}\right)=\frac{r}{2}\quad\mathbf{V}\left(\frac{X}{2}\right)=\frac{r}{2}$$

et $\qquad \mathbf{E}(X)=r\quad \mathbf{V}(X)=\mathbf{V}\left(2\cdot\frac{X}{2}\right)=4\cdot\frac{r}{2}=2r.$

6. La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et λ

$$\begin{aligned} \exp(\lambda) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(\lambda-0)^k+\int_0^\lambda\frac{\exp^{(n)}(u)}{(n-1)!}(\lambda-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}+\int_0^\lambda\frac{(\lambda-u)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

On obtient le résultat à l'aide du changement de variable affine $t=\lambda-u$.

7. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{2n}>2\lambda) &= 1-\mathbf{P}(X_{2n}\leqslant 2\lambda) \\ &= 1-\int_0^{2\lambda}f_{2n}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 1-\frac{1}{\Gamma(n)2^n}\int_0^{2\lambda}t^{n-1}\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On poursuit avec le changement de variable affine $u = t/2$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X_{2n} > 2\lambda\right) &= 1 - \frac{1}{\Gamma(n)2^n}\int_0^\lambda 2^{n-1}u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}2\,\mathrm{d}u \\ &= 1 - \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\lambda u^{n-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Puis avec la question précédente et le rappel $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X_{2n} > 2\lambda\right) &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\int_0^\lambda \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{\lambda-u}\,\mathrm{d}u \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\mathrm{e}^{\lambda} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{P}\left(Y_\lambda = k\right) \\ \mathbf{P}\left(X_{2n} > 2\lambda\right) &= \mathbf{P}\left(Y_\lambda < n\right).\end{aligned}$$

8. Pour le programme, on s'appuie sur l'égalité précédente. Si x est négatif, la probabilité demandée vaut 1. Pour x positif strict, on pose $\lambda = x/2$ de sorte que

$$\mathbf{P}\left(X_{2n} > x\right) = \mathbf{P}\left(Y_\lambda < n\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda^i}{i!}.$$

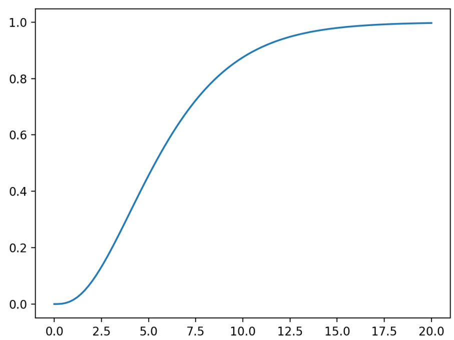
On calcule la somme à l'aide d'une boucle `for`.

```
def proba(x,n):
    if x=<0:
        return 0
    lbda=x/2
    s=1
    p=1
    for i in range(1,n):
        p*=lbda/i
        s+=p
    return np.exp(-lbda)*s
```

9.

```
n=3
x=np.linspace(0,20,100)
y=np.zeros(100)
for i in range(100):
    y[i]=1-proba(x[i],n)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Exemple avec $n = 3$



10.a) Notons G la fonction de répartition de $X_1^2/2$. Comme la variable est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, G est nulle sur $\mathbb{R}_*^-$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}G(x) &= \mathbf{P}\left(X_1^2 \leqslant 2x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(-\sqrt{2x} \leqslant X_1 \leqslant \sqrt{2x}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(-\sqrt{2x} < X_1 \leqslant \sqrt{2x}\right) \quad \text{(densité)} \\ &= \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x}) \\ G(x) &= 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1.\end{aligned}$$

Par composition G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, et sur $\mathbb{R}_*^-$. De plus G est continue à droite (c'est une fonction de répartition)

$$\lim_{x\to 0^+} G(x) = G(0) = 0 = \lim_{x\to 0^-} G(x).$$

La fonction G est donc continue en 0, puis sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $X_1^2/2$ est à densité et une densité g est donnée par

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R}^-, \quad g(x) \\ &\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad g(x) = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi'(\sqrt{2x}) \\ &\qquad = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(\sqrt{2x})^2/2} \\ &g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{1/2-1}\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

Ainsi $\qquad X_1^2/2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

> Noter qu'il n'est pas nécessaire de justifier que $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$. En effet, g est à densité et nulle sur $\mathbb{R}^-$. L'égalité
>
> $$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}$$
>
> impose déjà la constante et $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$.

10.b) Par le lemme des coalitions, les variables $X_i^2/2$ sont mutuellement indépendantes et suivent les lois $\gamma(1/2)$. Par stabilité des lois gamma par somme

$$\frac{1}{2}\left(X_1^2 + \cdots + X_k^2\right) \hookrightarrow \gamma\left(\frac{k}{2}\right).$$

En reprenant la question 5, $\sum_{i=1}^{k} X_i^2$ suit une loi du χ^2 à k degrés de liberté.

11. La variable X_i compte le nombre de succès (avoir une boule de couleur C_i) dans n répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes. On sait alors que

$$X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, p_i\right)$$

$$\mathbf{E}\left(X_i\right) = np_i \quad \text{et} \quad \mathbf{V}\left(X_i\right) = np_i\left(1 - p_i\right).$$

12. La variable $X_i + X_j$ compte le nombre de succès (avoir une boule C_i ou C_j) dans n répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes. Comme une boule n'a qu'une couleur, la probabilité de succès est $p_i + p_j$. Ainsi

$$\begin{aligned}&X_i + X_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, p_i + p_j\right) \\ &\mathbf{E}\left(X_i + X_j\right) = n\left(p_i + p_j\right) \\ &\mathbf{V}\left(X_i + X_j\right) = n\left(p_i + p_j\right)\left(1 - p_i - p_j\right).\end{aligned}$$

Par la formule de Huygens

$$\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)=\mathbf{E}\left(X_iX_j\right)-\mathbf{E}\left(X_i\right)\mathbf{E}\left(X_j\right).$$

Or $\quad \mathbf{V}\left(X_i+X_j\right)=\mathbf{V}\left(X_i\right)+\mathbf{V}\left(X_j\right)+2\,\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right).$

On obtient

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)\\&=\frac{1}{2}\left(n\left(p_i+p_j\right)\left(1-p_i-p_j\right)-np_i\left(1-p_i\right)-np_j\left(1-p_j\right)\right)\\&=\cdots=-np_ip_j.\end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned}U_n&=\frac{(X_1-np_1)^2}{np_1}+\frac{(X_2-np_2)^2}{np_2}\\&=\frac{(X_1-np_1)^2}{np_1}+\frac{(n-X_1-n(1-p_1))^2}{np_2}\\&=p_2{Z_1}^2+p_1{Z_1}^2={Z_1}^2\end{aligned}$$

14.a)

```
def simuZ1(n,p):
    x1=np. binomial(n,p)
    return (x-n*p/(np.sqrt(n*p*(1-p)))
```

14.b) Lorsque n est grand, l'histogramme associé à un échantillon de Z_1 est très proche d'une densité de la loi normale centrée réduite. On peut approcher dans ce cas la loi de Z_1 par une loi normale centrée réduite.

15. Soient $i,j\in[\![1,s]\!]$.
Si $i\neq j$, par bilinéarité de la covariance

$$\begin{aligned}m_{ij}&=\mathrm{Cov}\left(Y_i,Y_j\right)\\&=\frac{1}{n\sqrt{p_i}\sqrt{p_j}}\mathrm{Cov}\left(\left(X_i-np_i\right),\left(X_j-np_j\right)\right)\\&=\frac{1}{n\sqrt{p_ip_j}}\mathrm{Cov}\left(X_i,X_j\right)\\&=\frac{1}{n\sqrt{p_ip_j}}\left(-np_ip_j\right)\quad\text{(question 12)}\\&=-\sqrt{p_ip_j}\\m_{ij}&=(I_s-N)_{ij}.\end{aligned}$$

→ pour $i=j$,

$$\begin{aligned}m_{ij}&=\mathrm{Cov}\left(Y_i,Y_j\right)\\&=\mathbf{V}\left(Y_i\right)=\frac{1}{np_i}\mathbf{V}\left(X_i\right)\\&=\frac{1}{np_i}np_i\left(1-p_i\right)\quad\text{(question 11)}\\&=1-p_i=1-\sqrt{p_ip_i}\\m_{ij}&=(I_s-N)_{ij}.\end{aligned}$$

On a donc bien $M=I_s-N$.

16. Soit $(i,j)\in[\![1;s]\!]^2$

$$\begin{aligned}[N^2]_{ij}&=\sum_{k=1}^{n}[N]_{ik}[N]_{kj}\\&=\sum_{k=1}^{s}\sqrt{p_ip_k}\cdot\sqrt{p_kp_j}\\&=\sqrt{p_ip_j}\sum_{k=1}^{n}p_k=\sqrt{p_ip_j}\\\left[N^2\right]_{ij}&=[N]_{ij}.\end{aligned}$$

Ainsi $N^2=N$. La matrice N est la matrice d'un projecteur.

Rédaction 1
On montre que le rang du projecteur est donné par la trace de la matrice. Ainsi

$$\mathrm{rg}\,N=\mathrm{Tr}(N)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{p_ip_i}=\sum_{i=1}^{n}p_i=1.$$

Rédaction 2
On peut aussi remarquer que si on note C la matrice colonne

$$C=\begin{bmatrix}\sqrt{p_1}\\\sqrt{p_2}\\\vdots\\\vdots\\\sqrt{p_n}\end{bmatrix}\neq0$$

alors la j-ème colonne de N est :

$$C_j=\sqrt{p_j}C.$$

Toutes les colonnes sont proportionnelles et N est non nulle, donc

$$\mathrm{rg}\,N=1.$$

17. La matrice M est symétrique, elle est donc diagonalisable. On a

$$\mathrm{rg}\left(M-I_n\right)=\mathrm{rg}(-N)=\mathrm{rg}\,N=1$$

Ainsi 1 est valeur propre de M et par la formule du rang, la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est $s-1$.

De plus, N est la matrice d'un projecteur non nul, 1 est aussi valeur propre de N. On en déduit que 0 est valeur propre de M et par un compte des dimensions l'espace propre associé à 0 est de dimension 1. On en déduit que M est semblable à la matrice diagonale

$$D=\mathrm{Diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{s-1\text{ fois}},0)\in\mathscr{M}_s(\mathbb{R}).$$

M est la matrice d'un projecteur associé au projecteur de N.

18.a) Pour tout indice $i\in[\![1;s]\!]$

$$Z_i=\sum_{j=1}^{s}a_{ij}Y_j.$$

Par linéarité de l'espérance, Z_i admet une espérance et

$$\mathbf{E}(Z_i)=\sum_{j=1}^{s}a_{ij}\mathbf{E}(Y_j)=0.$$

18.b) Soient i, $k \in [\![1;s]\!]$. Par bilinéarité de la covariance

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(Z_i, Z_j\right) &= \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{i\ell}a_{jk}\,\mathrm{Cov}\left(Y_\ell, Y_k\right)\\
&= \sum_{\ell=1}^{s} a_{i\ell}\left(\sum_{k=1}^{s} a_{jk}m_{k\ell}\right)\\
&= \sum_{\ell=1}^{s} a_{i\ell}[QM]_{j\ell}\\
&= \sum_{\ell=1}^{s} [QM]_{j\ell}[{}^tQ]_{\ell i}\\
&= [QM{}^tQ]_{ji}\\
&= [{}^tQMQ]_{ij} \cdot \text{M symétrique}\\
\mathrm{Cov}\left(Z_i, Z_j\right) &= [J_{s-1}]_{ij}.
\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de variance/covariance de Z_1, …, Z_s est la matrice diagonale J_{s-1}.
En particulier

$$\mathbf{V}(Z_s) = \left[J_{S-1}\right]_{ss} = 0.$$

La variable Z_s est presque sûrement constante. Elle est presque sûrement nulle car la variable Z_s est centrée.

19. Posons

$$\tilde{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_s \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_s \end{bmatrix}.$$

De sorte que

$$U_n = \sum_{i=1}^{s} {Y_i}^2 = {}^t\tilde{Y}\tilde{Y}.$$

Or on a aussi $\tilde{Y} = Q\tilde{Z}$ et

$${}^t\tilde{Y}\tilde{Y} = {}^tZ{}^tQQ\tilde{Z} = {}^t\tilde{Z}\tilde{Z}$$

car la matrice Q est orthogonale. On a alors la simplification

$$U_n = {}^t\tilde{Y}\tilde{Y} = {}^t\tilde{Z}\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{s} {Z_i}^2.$$

De plus Z_s est presque sûrement nulle, donc U_n a la même loi que

$$\sum_{i=1}^{s-1} {Z_i}^2.$$

Or, les variables Z_i pour $i \in [\![1;s-1]\!]$ sont de loi normale centrée réduite et indépendantes, en reprenant la question 10.b), U_n suit une loi du χ_2 de degré $s-1$.

Problème B
d'après Essec sujet voie E 2018

20.

On peut noter que les variables X_i sont presque sûrement à valeurs dans $[0;\alpha]$. Il en va donc de même de Y_n et Z_n. Les variables sont donc bornées presque sûrement. Par conséquent, elles admettent toute une espérance. Donnons une démonstration plus générale.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant |Z_n| \leqslant |Y_n| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |X_i|.$$

Comme chaque variable X_i admet une espérance, $\sum_{i=1}^{n} |X_i|$ admet aussi une espérance par linéarité. Par domination, Y_n et Z_n admettent une espérance.

La définition

$$Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

ne signifie pas qu'il existe un indice i tel que $Y_n = X_i$. En effet, on rappelle que la variable aléatoire Y_n est une application de $\Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$

$$Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)).$$

Ainsi pour chaque $\omega \in \Omega$, il existe donc bien un indice i tel que $Y_n(\omega) = X_i(\omega)$ mais cet indice i dépend de ω.

21. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \mathbf{P}(X_n \leqslant x) = \mathbf{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x)\\
&= \mathbf{P}([X_1 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x])\\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(X_i \leqslant x\right) \qquad \text{(indépendance)}\\
&= \mathbf{P}(X_1 \leqslant x)^n \qquad \text{(égalité en loi)}\\
G_n(x) &= F(x)^n.
\end{aligned}$$

Par produit G_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0;\alpha\}$. Dès lors, Y_n est à densité et une densité est donnée par dérivation (là ou s'est possible)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = nf(x)F(x)^{n-1}.$$

22.a) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'événement $[Z_n \leqslant x]$ est réalisé si et seulement si au moins $n-1$ événements parmi

$$[X_1 \leqslant x], \ldots \left[X_k \leqslant x\right], \ldots, [X_n \leqslant x]$$

sont réalisés. En distinguant les cas où il y en a exactement $n-1$ de réalisés et n de réalisés

$$[Z_n \leqslant x] = \bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} [X_k \leqslant x] \cap [X_i > x]\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\right).$$

22.b) L'union précédente étant disjointe

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(x) &= \mathbf{P}(\mathrm{Z}_n \leqslant x)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} [\mathrm{X}_k \leqslant x] \cap [\mathrm{X}_i > x]\right)\\ &\quad + \mathbf{P}\left(\prod_{k=1}^{n} [\mathrm{X}_k \leqslant x]\right).\end{aligned}$$

On poursuit par mutuelle indépendance des variables $(\mathrm{X}_i)_i$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(x) &= \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{X}_k \leqslant x) \times \mathbf{P}(\mathrm{X}_i > x)\\ &\quad + \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{X}_k \leqslant x)\end{aligned}$$

et égalité en loi

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_n(x) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{X}_1 \leqslant x)^{n-1}(1-\mathbf{P}(\mathrm{X}_1 \leqslant x))\\ &\quad + \mathbf{P}(\mathrm{X}_1 \leqslant x)^n\\ &= n\mathrm{F}(x)^{n-1}(1-\mathrm{F}(x)) + \mathrm{F}(x)^n.\end{aligned}$$

23. Par combinaison linéaire et produit, H_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. La variable Z_n est donc à densité et une densité est obtenue par dérivation de H_n. D'où pour tout réel x

$$\begin{aligned}h_n(x) &= n(-f(x))\mathrm{F}(x)^{n-1} + n(1-\mathrm{F}(x))(n-1)f(x)\times\mathrm{F}(x)^{n-2}\\ &\quad + nf(x)\mathrm{F}(x)^{n-1}\\ &= nf(x)\Big(-\mathrm{F}(x)^{n-1} + (n-1)(1-\mathrm{F}(x))\mathrm{F}(x)^{n-2}\\ &\quad + \mathrm{F}(x)^{n-1}\Big).\\ h_n(x) &= n(n-1)f(x)(1-\mathrm{F}(x))\mathrm{F}(x)^{n-2}.\end{aligned}$$

24.a)

```
def simuYnZn(n):
    X=np.sort(rd.exponential(1,[n,1]))
    return X[n-1],X[n-2]
```

24.b) Dans un premier temps, on crée une fonction qui prend en argument une matrice ligne et renvoie le premier et second maximum. Par exemple

```
def secondmax(X):
    n=len(X) # on suppose n>1
    y=max(X[0],X[1]) # correspondra au max
    z=X[0] # correpondra au "second max"
    for i in range(1,n):
        x=X[i] # juste pour la lisibilité
            du code
        if x>y: # si x est plus grand que
            y et donc de z
            z=y
            y=x
        elif x>z : # x est alors compris
            entre z et y
            z=x
    return y,z
```

Puis on reprend le code précédent

```
def simuYnZn(n):
    X=np.sort(rd.exponential(1,[n,1]))
    return secondmax(X)
```

25.a) Précisons la fonction de répartition F associée à une variable suivant une loi puissance de paramètres α, λ. Si $x \leqslant 0, \mathrm{F}(x) = 0$ et si $x \geqslant \alpha, \mathrm{F}(x) = 1$. Soit $x \in]0,\alpha[$.

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda}.$$

Dans ce cas, la fonction de répartition de Y_n est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{G}_n(x) = \mathrm{F}(x)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0\\ (x/\alpha)^{n\lambda} & \text{si } x \in]0;\alpha[\\ 1 & \text{si } x \geqslant \alpha.\end{cases}$$

On vérifie que G_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0;\alpha\}$. La variable Y_n est à densité et une densité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin]0;\alpha[\\ \dfrac{n\lambda x^{n\lambda-1}}{\alpha^{n\lambda}} & \text{si } x \in]0;\alpha[\end{cases}$$

Dit autrement, Y_n suit une loi puissance de paramètre α, $n\lambda$.

25.b) Calculons l'espérance (qui existe question 20).

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n) &= \int_0^{\alpha} t\cdot\frac{n\lambda t^{n\lambda-1}}{\alpha^{n\lambda}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{n\lambda}{\alpha^{n\lambda}}\cdot\frac{1}{n\lambda+1}t^{n\lambda+1}\right]_0^{\alpha}\\ &= \frac{n\lambda}{n\lambda+1}\alpha.\end{aligned}$$

On a $0 \leqslant \mathbf{E}(\mathrm{Y}_n) \leqslant \alpha$ car $\mathrm{Y}_n(\Omega) =]0;\alpha[$ et

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha.$$

Ce qui semble logique car plus n est grand, plus les valeurs prises par Y_n se concentrent en probabilité vers α.

26. Pour $x \in]0;\alpha[$

$$\begin{aligned}h_n(x) &= n(n-1)\frac{\lambda x^{\lambda-1}}{\alpha^{\lambda}}\left(1-\frac{x^{\lambda}}{\alpha^{\lambda}}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda(n-1)}\\ &= \frac{n(n-1)\lambda}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda-1}\left(1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda(n-1)}\\ &= \frac{n(n-1)\lambda}{\alpha}\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda_n-1} - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda(n+1)-1}\right].\end{aligned}$$

Puis

$$xh_n(x) = n(n-1)\lambda\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda_n} - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\lambda(n+1)}\right].$$

Avec le changement de variable affine $u = x/\alpha$, on a $\mathrm{d}x = \alpha\,\mathrm{d}u$ et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{Z}_n) &= \int_0^{\alpha} xh_n(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 n(n-1)\lambda\alpha\left(u^{\lambda_n} - u^{\lambda(n+1)}\right)\mathrm{d}u\\ \mathbf{E}(\mathrm{Z}_n) &= n(n-1)\lambda\alpha\left(\frac{1}{\lambda(n+1)} - \frac{1}{\lambda(n+1)+1}\right).\end{aligned}$$

27.a) Comme σ' ne s'annule pas sur $]0;\alpha[$, on sait que σ^{-1} est dérivable sur $]0;\beta[$ avec

$$\forall t \in]0;\beta[,\quad \left(\sigma^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\sigma'\left(\sigma^{-1}(t)\right)}.$$

27.b) On en déduit que γ admet une dérivée par rapport à y et

$$\begin{aligned}\partial_2\gamma(x,y) &= -G_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y)\right)+(x-y)\left(\sigma^{-1}\right)'(y)G'_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y)\right)\\ &= -G_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y)\right)+\frac{(x-y)}{\sigma'\left(\sigma^{-1}(y)\right)}g_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y)\right).\end{aligned}$$

28. La condition P_3 permet d'affirmer que

$$\partial_2\gamma(x,\sigma(x))=0.$$

D'où

$$-G_{n-1}(x)+\frac{(x-\sigma(x))}{\sigma'(x)}g_{n-1}(x)=0$$

puis $\qquad (x-\sigma(x))g_{n-1}(x)=\sigma'(x)G_{n-1}(x).$

Le résultat s'en déduit en ajoutant $\sigma(x)g_{n-1}(x)$.

29. Posons pour tout $t\in]0;\alpha[$

$$\ell(t)=\sigma(t)G_{n-1}(t).$$

La fonction ℓ est dérivable par produit avec

$$\begin{aligned}\ell'(t)&=\sigma'(t)G_{n-1}(t)+\sigma(t)G'_{n-1}(t)\\ &=\sigma'(t)G_{n-1}(t)+\sigma(t)g_{n-1}(t)\\ \ell'(t)&=tg_{n-1}(t).\end{aligned}$$

On en déduit pour ε, $x\in]0;\alpha[$

$$\begin{aligned}\sigma(x)G_{n-1}(x)-\sigma(\varepsilon)G_{n-1}(\varepsilon)&=\int_\varepsilon^x \ell'(t)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_\varepsilon^x tg_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Précisons g_n est prolongeable par continuité en 0^+ en reprenant l'expression de la question 21. Il en va de même de $t\mapsto tg_{n-1}(t)$. De plus σ étant une bijection croissante de $]0;\alpha[$ dans $]0;\beta[$

$$\sigma(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}0$$

et G_{n-1} est bornée

$$\sigma(\varepsilon)G_{n-1}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}0$$

par passage à la limite $\varepsilon\to0^+$

$$\sigma(x)G_{n-1}(x)=\int_0^x tg_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où le résultat en divisant par $G_{n-1}(x)>0$.

30. Intégrons par parties avec les fonctions $\mathscr{C}^1$: $t\mapsto t$, $t\mapsto G_{n-1}(t)$

$$\begin{aligned}\int_0^x tg_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t&=\int_0^x tG'_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\\ &=[tG_{n-1}(t)]_0^x-\int_0^x 1\cdot G_{n-1}(t)dt\\ &=xG_{n-1}(x)-\int_0^1 G_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Le résultat se déduit alors de $(\bullet)$.

31. La fonction $t\mapsto tg_{n-1}(t)$ est positif sur $]0;x[$ d'où

$$\sigma(x)=\underbrace{\frac{1}{G_{n-1}(x)}}_{\geqslant0}\int_0^x \underbrace{tg_{n-1}(t)}_{\geqslant0}\,\mathrm{d}t\geqslant0$$

par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens. Comme l'intégrande est continue et strictement positive sur $]0;\alpha[$, on aurait

$$\sigma(x)=0\quad\Rightarrow\quad\int_0^x tg_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t=0$$

puis $tg_{n-1}(t)=0$ pour tout $t\in[0,x]$. Ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi

$$\sigma(x)>0.$$

Ensuite

$$x-\sigma(x)=\int_0^x\frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}\,\mathrm{d}t<0$$

par les mêmes arguments. Finalement $0<\sigma(x)<x$.

32. La fonction $x\in[0;\alpha[\mapsto\int_0^x tg_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de $t\mapsto tg_{n-1}(t)$ qui s'annule en 0. En particulier cette fonction est $\mathscr{C}^1$ sur $]0;\alpha[$. Par quotient avec G_{n-1} (aussi $\mathscr{C}^1$), σ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\begin{aligned}G'(x)&=-\frac{g_{n-1}(x)}{G_{n-1}(x)^2}\int_0^x tg_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{G_{n-1}(x)}\left(xg_{n-1}(x)\right)\\ &=\frac{g_{n-1}(x)}{G_{n-1}(x)}\left(-\frac{1}{G_{n-1}(x)^2}\int_0^x tg_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t+x\right)\\ G'(x)&=\underbrace{\frac{g_{n-1}(x)}{G_{n-1}(x)}}_{\geqslant0}(x-\sigma(x)).\end{aligned}$$

En particulier $\sigma'(x)$ et du signe de $x-\sigma(x)$, c'est-à-dire strictement positif sur $]0;\alpha[$.

33. C'est une conséquence du théorème de la bijection dont on rappelle les conditions d'application :

- σ est continue sur $]0;\alpha[$;
- D'après la question précédente, σ est strictement croissante sur $]0;\alpha[$;
- On a les limites

$$\sigma(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}0$$

$$\text{et}\quad\sigma(x)\xrightarrow[x\to\alpha^-]{}\frac{1}{G_{n-1}(\alpha)}\int_0^\alpha tg_{n-1}(t)\mathrm{d}t=\mathbf{E}(Y_{n-1})$$

car X est à valeurs presque sûrement dans $]0;\alpha[$, Y_{n-1} aussi et

$$G_{n-1}(\alpha)=1\quad\text{et}\quad\int_0^\alpha tg_{n-1}(t)\mathrm{d}t=\mathbf{E}(Y_{n-1})$$

34.a)

$$\begin{aligned}\gamma(x,y)&=(x-y)G_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y)\right)\\ &=(x-\sigma(z))G_{n-1}(z)\\ &=(x-z)G_{n-1}(z)+(z-\sigma(z))G_{n-1}(z)\\ &=\int_0^z\frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(z)}\,\mathrm{d}t\qquad\text{d'après }(\bullet\bullet)\\ \gamma(x,y)&=(x-z)G_{n-1}(z)+\int_0^z G_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

34.b) Avec $y=\sigma(x)$ dans l'égalité précédente (et donc $z=x$), on a

$$\gamma(x,\sigma(x))=\int_0^x G_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Et en reprenant l'égalité précédente puis avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}&\gamma(x,\sigma(x))-\gamma(x,y)\\&=\int_0^x \mathrm{G}_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t-(x-z)\mathrm{G}_{n-1}(z)-\int_0^z \mathrm{G}_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\\&=(z-x)\mathrm{G}_{n-1}(z)-\int_x^z \mathrm{G}_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

34.c) On en déduit que

$$\gamma(x,\sigma(x))-\gamma(x,y)=\int_x^z (\mathrm{G}_{n-1}(z)-\mathrm{G}_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t.$$

La fonction G_{n-1} étant croissante (c'est une fonction de répartition).

→ Si $x \leqslant z$ alors :

$$\forall t\in[x,z],\quad \mathrm{G}_{n-1}(z)-\mathrm{G}_{n-1}(t)\geqslant 0$$

et par positivité de l'intégrale :

$$\gamma(x,\sigma(x))-\gamma(x,y)\geqslant 0.$$

→ De même, si $x \geqslant z$ alors

$$\forall t\in[z,x],\quad \mathrm{G}_{n-1}(z)-\mathrm{G}_{n-1}(t)\leqslant 0$$

mais les bornes de l'intégrale étant ici dans «l'ordre décroissant» :

$$\gamma(x,\sigma(x))-\gamma(x,y)\geqslant 0$$

En résumé, pour tous $x\in]0,\alpha[$, $y\in]0,\beta[$,

$$\gamma(x,y)\leqslant\gamma(x,\sigma(x)).$$

Le réel x étant fixé, l'application $y\in]0,\beta[\mapsto\gamma(x,y)$ admet un maximum en $\sigma(x)$.

35. Non. Par exemple, on vérifie que γ n'a pas de point critique sur l'ouvert $]0;\alpha[\times]0;\beta[$.

36. Notons que pour tout réel t positif, $\varphi_x(t)\leqslant t$. Comme Y_{n-1} est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

$$0\leqslant\varphi_x(\mathrm{Y}_{n-1})\leqslant \mathrm{Y}_{n-1}.$$

L'espérance de $\varphi_x(\mathrm{Y}_{n-1})$ est bien définie par domination. Ensuite, d'après le théorème de transfert

$$\mathbf{E}\big(\varphi_x(\mathrm{Y}_{n-1})\big)=\int_0^\alpha \varphi_x(t)g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x tg_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a aussi $\mathbf{P}(\mathrm{Y}_{n-1}\leqslant x)=\mathrm{G}_{n-1}(x)$; donc avec la relation $(\bullet)$:

$$\sigma(x)=\frac{\mathbf{E}\big(\varphi_x(\mathrm{Y}_{n-1})\big)}{\mathbf{P}(\mathrm{Y}_{n-1}\leqslant x)}.$$

37.

```
def phi(x,n):
    Y=np.zeros(n-1)
    r=0
    for i in range(n-1):
        Y[i]=simuX()
        y=np.max(Y)
        if y<=x:
            r=y
    return r
```

38. D'après la loi de s grands nombres, on peut approximer l'espérance de $\varphi_x(\mathrm{Y}_{n-1})$ en prenant la moyenne arithmétique d'un grand nombre de simulation. Ce qui donne

```
def Esperancephi(x,n):
    m=5000
    s=0
    for i in range(m):
        Y=np.zeros(n-1)
        for i in range(n-1):
            Y[i]=simuX()
        y=np.max(Y)
        if y<=x:
            s+=y
    return s/m
```

• De même, on peut approximer la probabilité d'un événement en simulant un grand nombre de fois l'expérience et en donnant la fréquence empirique d'apparition de l'événement.

```
def Proba(x):
    m=5000
    compteur=0
    for i in range(m):
        Y=np.zeros(n-1)
        for i in range(n-1):
            Y[i]=simuX()
        y=np.max(Y)
        if y<=x:
            compteur+=1
    return compteur/m
```

• On fusionne ces deux codes pour simplifier la réponse

```
def sigma(x,n):
    m=5000
    compteur=0
    s=0
    for i in range(m):
        Y=np.zeros(n-1)
        for i in range(n-1):
            Y[i]=simuX()
        y=np.max(Y)
        if y<=x:
            s+=y
            compteur+=1
    return s/compteur # on simplifie les "
        m"
```