CHAPITRE 13

Projections orthogonales

L'art des mathématiques consiste à trouver le cas particulier qui contient tous les germes de la généralité.

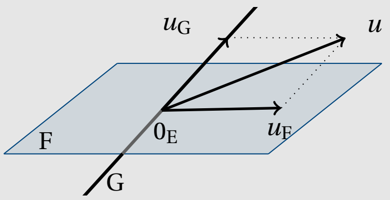
DAVID HILBERT
Mathématicien allemand (1862-1943)

1 Rappels : projecteur et orthogonal d'un sous-espace

1.1 Les projecteurs

DÉFINITION (RAPPEL) **projecteur**

Soient E *un espace vectoriel et* F, G *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.*



Ainsi, pour tout $u \in E$, *il existe une unique décomposition* $u = u_F + u_G$ *où* $(u_F, u_G) \in F \times G$. *On pose*

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u_F. \end{array} \right.$$

Cette application est linéaire, elle est appelée le ***projecteur*** *sur* F *parallèlement à* G.

Remarque. Rappelons que $F = \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right)$ et $G = \operatorname{Ker}(p)$. En particulier, on a

$$E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p).$$

Si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à cette décomposition en supplémentaire, on obtient une base de diagonalisation avec

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\operatorname{rg} A}\!\!\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\dim \operatorname{Ker} A}.$$

De plus, $\mathrm{id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F.

THÉORÈME (RAPPEL) **caractérisation d'un projecteur**

Soit $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) *L'application p est un projecteur.*

ii) *L'application p est linéaire et $p \circ p = p$.*

Exercice 1

✦

1. Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E.

a) Donner les puissances de p, puis celles de $2\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + p$.

b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, simplifier $\left(\lambda p + \mu \mathrm{id}_{\mathrm{E}}\right) \circ \left(2\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + p\right)$. En déduire que $2\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + p$ est un isomorphisme. p. 15

2. Considérons deux projecteurs p et q qui commutent.
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur et justifier que $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(p \circ q)$.

1.2 Les sous-espaces orthogonaux

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle orthogonal de F, et on note $\mathrm{F}^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F, c'est-à-dire :

$$\mathrm{F}^\perp = \left\{u \in \mathrm{E} \mid \forall\, v \in \mathrm{F},\ \langle u, v\rangle = 0\right\}.$$

PROPOSITION (RAPPEL) **espaces supplémentaires orthogonaux**

Soit F*, un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien* $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$*. Alors*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp.$$

En particulier $$\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{E}.$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}_{2n}[x]$, on considère le produit scalaire $\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$ et F le sous-espace vectoriel des polynômes impairs. On a $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(x, x^3, x^5, \cdots, x^{2n+1}\right)$. On vérifie que $\mathrm{F}^\perp$ est le sous-espace des polynômes pairs.

Remarque. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F que l'on complète par $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$, une base orthonormée de E. On a

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\left(e_1, \dots, e_p\right), \quad \mathrm{F}^\perp = \mathrm{Vect}\left(e_{p+1}, \dots, e_n\right).$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, considérons $u = (1,0,1)$ et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u)$, la droite vectorielle engendrée par u. Déterminons une base de $\mathrm{F}^\perp$.

- *Rédaction 1.* Soit $\mathrm{X} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} \in \mathrm{Vect}(u)^\perp &\iff \langle x, u\rangle = 0\\
&\iff 1\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z = 0\\
&\iff x = -z\\
&\iff \mathrm{X} = (x, y, -x) = x(1,0,-1) + y(0,1,0).
\end{aligned}$$

Si on pose $v = (1,0,-1)$ et $w = (0,1,0)$, on obtient

$$\mathrm{Vect}(u)^\perp = \mathrm{Vect}(v, w).$$

Comme v et w sont non colinéaires, ils forment une base de $\mathrm{F}^\perp$.

- *Rédaction 2.* Notons que

$$\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{F} = 2.$$

On vérifie que si on pose $v = (1, 0, -1)$ et $w = (0, 1, 0)$,

$$\langle v, u\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle w, u\rangle = 0.$$

On a donc $v,\ w \in F^{\perp}$, puis $\mathrm{Vect}(v, w) \subset F^{\perp}$. Or (v, w) est une famille libre contenant autant de vecteurs que la dimension, c'est une base de $F^{\perp}$.

Exercice 2

✦ *Les questions sont indépendantes.*

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère les plans F et G d'équations respectives :

$$x + 2y + 3z = 0 \quad \text{et} \quad x - y - z = 0.$$

Déterminer une base de $F^{\perp}$ puis de $(F \cap G)^{\perp}$.

2. Soit $\mathbb{R}_3[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$. On pose $F = \mathbb{R}_1[x]$.

Déterminer une base de $F^{\perp}$.

p. 15

Exercice 3

✦✦ Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels.
Justifier que F et G sont supplémentaires si et seulement si $F^{\perp}$ et $G^{\perp}$ sont supplémentaires.

p. 16

PROPOSITION — **condition nécessaire et suffisante d'appartenance à l'orthogonal**

Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ *un sous-espace vectoriel de* E. *On a*

$$u \in F^{\perp} \iff \forall\, i \in [\![1; k]\!], \qquad \langle u, e_i\rangle = 0.$$

Exercice 4

✦ **Vecteur normal à un hyperplan**

Soit F un hyperplan d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

1. Montrer qu'il existe $u_0 \in E$ tel que pour tout $v \in E$: $\quad v \in F \iff \langle u_0, v\rangle = 0$.

2. *Exemples*

a) On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et l'hyperplan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$. Déterminer un vecteur normal à F.

b) Soit maintenant $E = \mathbb{R}_3[x]$ et le produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,dt$. Déterminer un vecteur normal à $\mathbb{R}_2[x]$.

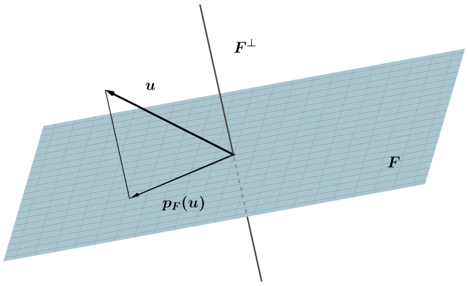
p. 16

2 Projecteurs orthogonaux

2.1 Définitions et exemples

DÉFINITION — **projecteur orthogonal**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, *un espace euclidien.*
On appelle ***projection orthogonale*** *sur* F, *notée* p_F, *la projection sur* F *parallèlement à* $F^{\perp}$.
Pour tout $u \in E$, $p_F(u)$ *est appelé le* ***projeté orthogonal de*** u ***sur*** F.



Retenons

$$v = p_{\mathrm{F}}(u) \iff \begin{cases} v & \in \mathrm{F} \\ u - v & \in \mathrm{F}^{\perp}. \end{cases}$$

Remarque. D'après le rappel du début de chapitre, un projecteur p est orthogonal si et seulement si $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux, si et seulement si $\mathrm{E}_0(p)$ et $\mathrm{E}_1(p)$ sont des supplémentaires orthogonaux de E.

Exercice 5

✧ Soit p un projecteur orthogonal. Justifier que pour tout $u \in \mathrm{E}$

$$\langle p(u), u \rangle = \|p(u)\|^2.$$

p. 16

Exercice 6

✦ ✎ **Exemple**

Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right)$. On définit l'application

$$p : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad p(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}}{2}.$$

p. 16

1. Vérifier que p est un projecteur. Préciser le noyau et l'image de p.
2. Est-ce que p est un projecteur orthogonal ?

Proposition — caractérisation

Soit p, un projecteur d'un espace euclidien $\left(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- **i)** *Le projecteur p est orthogonal.*
- **ii)** *L'endomorphisme p est symétrique.*

Preuve. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que p est orthogonal. Soient u, $v \in \mathrm{E}$. Il existe $u_{\mathrm{K}}, v_{\mathrm{K}} \in \mathrm{Ker}\, p$, u_{I}, $v_{\mathrm{I}} \in \mathrm{Im}\, p$ tels que

$$u = u_{\mathrm{K}} + u_{\mathrm{I}} \quad \text{et} \quad v = v_{\mathrm{K}} + v_{\mathrm{I}}.$$

En particulier, on a $p(u_k) = 0 = p(v_k)$, $p(u) = u_{\mathrm{I}}$ et $p(v) = v_{\mathrm{I}}$. Comme $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont orthogonaux

$$\begin{aligned} \langle p(u), v \rangle &= \left\langle u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{K}} + v_{\mathrm{I}} \right\rangle \\ &= \left\langle u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{K}} \right\rangle + \langle u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{I}} \rangle \\ &= \langle u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{I}} \rangle \end{aligned}$$

et de même $\qquad \langle u, p(v) \rangle = \langle u_{\mathrm{I}}, v_{\mathrm{I}} \rangle.$

D'où l'égalité $\langle p(u), v \rangle = \langle u, p(v) \rangle$. Le projecteur p est orthogonal.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que p est symétrique. Soient $u \in \mathrm{Ker}\, p$ et $v \in \mathrm{Im}\, p$. On a

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle u, p(v) \rangle && \text{car } v \in \mathrm{Im}\, p = \mathrm{E}_1(p) \\ &= \langle p(u), v \rangle && \text{symétrie} \\ &= \langle 0, v \rangle && \text{car } u \in \mathrm{Ker}\, p \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où, le noyau et l'image sont des espaces orthogonaux et p est un projecteur orthogonal. ■

PROPOSITION **caractérisation matricielle**

Soient E *un espace euclidien,* $\mathscr{B}$ *une base orthonormée de* E*,* p *un endomorphisme et* $\mathrm{A}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$.
On a l'équivalence entre :

i) *L'endomorphisme* p *est un projecteur orthogonal.*

ii) *La matrice* A *est symétrique et* $\mathrm{A}^2=\mathrm{A}$.

Preuve. D'après ce qui précède, un endomorphisme p est un projecteur orthogonal si et seulement si on a les deux conditions :

$$\text{I.}\quad p\circ p=p \qquad \text{II.}\quad p \text{ est symétrique.}$$

Matriciellement, la condition I équivaut à $\mathrm{A}^2=\mathrm{A}$. La condition II équivaut à ${}^t\mathrm{A}=\mathrm{A}$ car $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. ■

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier la condition : $\mathscr{B}$ est une base orthonormée.

Exemples.

• Soient $u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2=1$ et $\mathrm{U}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On vérifie que ${}^t\mathrm{U}\mathrm{U}=1$ et $\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{U}$ est une matrice de rang 1 qui est la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u)$.

• Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et J_n, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des $1/n$. On vérifie que ${\mathrm{J}_n}^2=\mathrm{J}_n$ et J_n est symétrique. C'est donc la matrice d'un projecteur orthogonal dans la base canonique. Comme $\mathrm{rg}(\mathrm{J}_n)=1$ (le noyau est donc de dimension $n-1$) et $\mathrm{J}_n\mathrm{U}=\mathrm{U}$ (où U est la matrice colonne ne contenant que des 1), on peut donc affirmer que J_n est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(1,1,\dots,1)$.

2.2 Expression et calcul explicite du projeté

THÉORÈME **expression du projeté dans une b.o.n**

Soit F*, un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien* $(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *et* p_{F}*, le projecteur orthogonal sur* F.

Si $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}=(e_1,\dots,e_p)$ *est une base orthonormée de* F,

alors $\forall\, u\in\mathrm{E},\quad p_{\mathrm{F}}(u)=\sum_{i=1}^{p}\langle u,e_i\rangle\, e_i.$

Preuve. On peut compléter $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ en une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E. Notons $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$. Soit $u\in\mathrm{E}$.

• *Rédaction 1.*

$$u=\sum_{i=1}^{n}\langle u,e_i\rangle e_i=\underbrace{\sum_{i=1}^{p}\langle u,e_i\rangle e_i}_{\in\mathrm{F}}+\underbrace{\sum_{i=p+1}^{n}\langle u,e_i\rangle e_i}_{\in\mathrm{F}^\perp}.$$

Par définition de projecteur orthogonal, p projette sur F parallèlement à $\mathrm{F}^\perp$,

$$p_{\mathrm{F}}(u)=\sum_{i=1}^{p}\langle u,e_i\rangle e_i.$$

• *Rédaction 2.*

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{F}}(u)&=\sum_{i=1}^{n}\langle p_{\mathrm{F}}(u),e_i\rangle\, e_i\\
&=\sum_{i=1}^{n}\langle u,p_{\mathrm{F}}(e_i)\rangle\, e_i\quad\text{car } p_{\mathrm{F}} \text{ est symétrique}\\
&=\sum_{i=1}^{p}\langle u,p_{\mathrm{F}}(e_i)\rangle\, e_i+\sum_{i=p+1}^{n}\langle u,p_{\mathrm{F}}(e_i)\rangle\, e_i\\
p_{\mathrm{F}}(u)&=\sum_{i=1}^{p}\langle u,e_i\rangle\, e_i.
\end{aligned}$$

En effet, par définition du projecteur, si $i \in \llbracket 1;p \rrbracket$, $p_F(e_i) = e_i$ et si $i \in \llbracket p+1;n \rrbracket$, $p_F(e_i) = 0_E$.

Exemples.

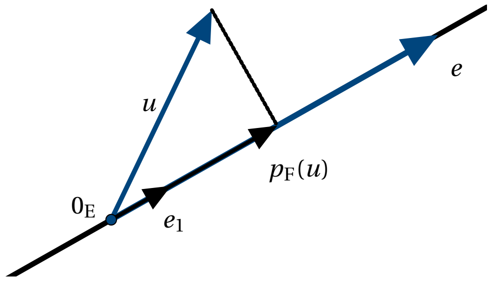
- **Projection sur une droite vectorielle**

Considérons le cas où F est une droite vectorielle. Il existe donc $e \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$F = \mathrm{Vect}(e).$$

La famille constituée d'un unique vecteur $(e_1) = (e/\|e\|)$ est une base de F et d'après ce qui précède

$$p_F(u) = \langle u, e_1\rangle\, e_1 = \frac{\langle u, e\rangle}{\|e\|^2}\, e.$$



- **Projection sur un hyperplan**

Soit H un hyperplan de E. L'orthogonal $H^\perp$ est donc de dimension 1 et on peut considérer u_0, un vecteur non nul unitaire de $H^\perp$ (u_0 est un vecteur normal à H, voir exercice 4).
Soit q le projecteur sur la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u_0) = H^\perp$ orthogonal. D'après ce que précède

$$\forall\, u \in E, \qquad q(u) = \langle u, u_0\rangle\, u_0.$$

Or $p_H = \mathrm{id}_E - q$ est le projecteur orthogonal sur H. Donc

$$\forall\, u \in E, \qquad p_H(u) = u - \langle u, u_0\rangle\, u_0.$$

Remarque. Retour sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

- *Orthonormalisation de deux vecteurs.*
  Considérons les deux vecteurs u_1, u_2 non colinéaires. Posons p_1 le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u_1)$ puis

  $$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad v_2 = u_2 - p_1(u_2), \quad e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

  Alors les vecteurs (e_1, e_2) forment une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) = \mathrm{Vect}(u, v)$.

- *Cas général de n vecteurs.*
  Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E non nécessairement orthonormée. Pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, posons p_k, le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. On définit ensuite la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E par la récurrence

  $$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \llbracket 2; k-1 \rrbracket, \quad e_{k+1} = \frac{u_{k+1} - p_k(u_{k+1})}{\left\|u_{k+1} - p_k(u_{k+1})\right\|}$$

  La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est bien définie, elle constitue une base orthonormée de E avec

  $$\forall\, k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \qquad \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

En pratique, pour le calcul du projeté, on préféra toutefois la méthode suivante qui ne nécessite pas le calcul en amont d'une base orthonormée.

Méthode

Comment calculer un projeté ?

Soient $u \in \mathrm{E}$ et F, un sous-espace vectoriel de E. Calculons $p_{\mathrm{F}}(u)$, le projeté orthogonal de u sur F.

- *Étape 1*
  On trouve une base $\left(u_1,\ldots,u_p\right)$ de F (non nécessairement orthonormée).
- *Étape 2*
  Comme $p_{\mathrm{F}}(u) \in \mathrm{F}$, il existe un unique p-uplet $(\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $p_{\mathrm{F}}(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$. On remarque ensuite que
  $$\begin{cases} \left\langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_1 \right\rangle = 0 \\ \left\langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_2 \right\rangle = 0 \\ \qquad \vdots \\ \left\langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_p \right\rangle = 0. \end{cases}$$
  On explicite alors le système linéaire d'inconnues $(\lambda_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$
  $$\begin{cases} \langle u, u_1 \rangle = \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_1 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle = \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_2 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle u_i, u_2 \rangle \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \left\langle u, u_p \right\rangle = \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_p \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\langle u_i, u_p \right\rangle. \end{cases}$$
- *Étape 3*
  On résout le système linéaire précédent à p équations pour trouver les p inconnues $(\lambda_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$. On conclut par le calcul de $p_{\mathrm{F}}(u) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminons le projeté de $u = (0,-1,4)$ sur l'espace vectoriel
$$\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\right\}.$$

- *Étape 1*. Soit $\mathrm{X} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a
$$\begin{aligned} \mathrm{X} \in \mathrm{F} \iff x - 2y + 3z = 0 &\iff x = 2y - 3z \\ &\iff \mathrm{X} = (2y - 3z, y, z) = y \cdot (2,1,0) + z \cdot (-3,0,1) \\ &\iff \mathrm{X} = y \cdot u_1 + z \cdot u_2. \end{aligned}$$

Où on a posé $u_1 = (2,1,0)$ et $u_2 = (-3,0,1)$. Ainsi,
$$\mathrm{X} \in \mathrm{F} \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

On conclut, (u_1, u_2) est une famille génératrice de F. Les vecteurs u_1 et u_2 sont non colinéaires, la famille (u_1, u_2) est libre. Par conséquent, (u_1, u_2) est une base de F.

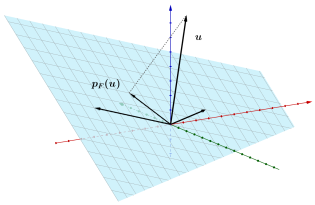
- *Étape 2*. Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $p_{\mathrm{F}}(u) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Précisons que
$$\langle u_1, u_2 \rangle = -6, \quad \langle u_1, u_1 \rangle = 5 \quad \langle u_2, u_2 \rangle = 10 \quad \text{et} \quad \langle u, u_1 \rangle = -1, \quad \langle u_2, u_2 \rangle = 4,$$
$$\left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_1 \right\rangle = 5\lambda_1 - 6\lambda_2 \quad \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_2 \right\rangle = -6\lambda_1 + 10\lambda_2.$$

On obtient le système linéaire
$$\begin{cases} \langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p_{\mathrm{F}}(u), u_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_1 \right\rangle = \langle u, u_1 \rangle \\ \left\langle p_{\mathrm{F}}(u), u_2 \right\rangle = \langle u, u_2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} 5\lambda_1 - 6\lambda_2 &= -1 \\ -6\lambda_1 + 10\lambda_2 &= 4. \end{cases}$$

- *Étape 3.* On constate que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ est l'unique solution et

$$p_F(u) = u_1 + u_2 = (-1, 1, 1).$$

Le schéma ci-contre représente le plan F, le vecteur u et son projeté.



Exercice 7

✦ Exemple

Soient $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et $F = \mathbb{R}_1[x]$.

Donner l'expression du projeté orthogonal de $Q(x) = 1 + x + x^2$ sur F.

p. 17

3 Applications à l'optimisation

3.1 Distance à un sous-espace vectoriel

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ et $u \in E$. On définit (sous réserve d'existence), la distance du vecteur u à F par

$$d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\|.$$

Notons que $u \in F$ si et seulement si $d(u, F) = 0$.

THÉORÈME **caractérisation du projeté par minimisation de la norme**

Soient F *un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien* $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$, p_F *la projection orthogonale sur* F *et* $u \in E$. *Alors la distance* $d(u, F)$ *est bien définie et*

$$d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\| = \big\|u - p_F(u)\big\|.$$

De plus, le minimum est atteint seulement pour $v = p_F(u)$.

Preuve. Soient $u \in E$ et $v \in F$,

$$u - v = \big(u - p(u)\big) + \big(p(u) - v\big).$$

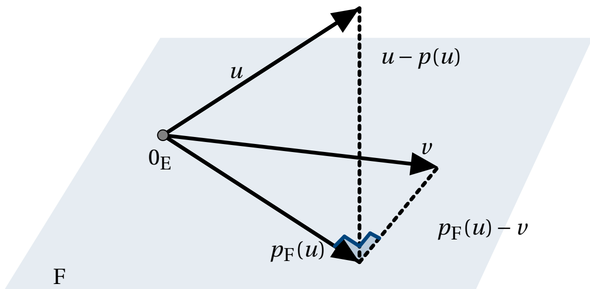
Or, $u - p(u)$ est orthogonal à F, donc $u - p(u)$ est orthogonal à $p(u) - v \in F$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\|u - v\|^2 = \|u - p(u)\|^2 + \|p(u) - v\|^2 \geqslant \|u - p(u)\|^2.$$

D'où l'inégalité avec égalité si et seulement si

$$\|p(u) - v\| = 0,$$

c'est-à-dire $v = p(u)$. ■



Remarques.
- Le projeté orthogonal de u sur F est caractérisé par

$$\forall\, v \in F, \quad \|u - v\| \geqslant \|u - p(u)\|.$$

Autrement dit : pour tout $u \in E$,

$$v = p_F(u) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(v \in F \quad \text{et} \quad \|u - v\| = \min_{w \in F} \|u - w\|\right).$$

- Les vecteurs $u - p(u)$ et $p(u)$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\|u - p(u)\|^2 + \|p(u)\|^2 = \|u\|^2 \quad \text{d'où} \quad d(u, F)^2 = \|u - p(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|p(u)\|^2.$$

Exercice 8

✦ **Exemples**

Soient $\big(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$, un espace euclidien, $u_0 \in \mathrm{E}\setminus\{0_\mathrm{E}\}$ et un hyperplan H.

1. Exprimer la distance d'un vecteur x à la droite $\mathrm{Vect}(u_0)$.
2. Faire de même avec la distance à H. On exprimera le résultat à l'aide d'un vecteur $u_0 \in \mathrm{H}^\perp$ (un vecteur normal, exercice 4).

p. 17

Exemple. Justifions que la fonction de deux variables

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad f(x,y) = 4(x-1)^2+(x+y)^2+(x-2y+1)^2$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$. Considérons dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et la norme $\|\cdot\|$ associée. On a

$$f(x,y) = \Big\|\big(2(x-1)\,,\,x+y\,,\,x-2y+1\big)\Big\|^2 = \Big\|(2x\,,\,x+y\,,\,x-2y)-(2,0,-1)\Big\|^2.$$

Si on pose $u=(2,0,-1)$ et si on définit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{F} = \big\{\,(2x, x+y, x-2y)\ \mid\ x,y\in\mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)\quad\text{ où }\quad\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & (2,1,1)\\ u_2 & = & (0,1,-2),\end{array}\right.$$

alors on a $f(x,y) = \|v-u\|^2$ avec $v=(2x,x+y,x-2y)\in\mathrm{F}$. Le théorème de minimisation s'applique, il existe donc bien un minimum, il est atteint pour $v = p_\mathrm{F}(u)$ où p_F est le projecteur orthogonal sur F.
Calculons le projeté $p_\mathrm{F}(u) = xu_1+yu_2$ et

$$\left\{\begin{array}{l}\langle u-p_\mathrm{F}(u),u_1\rangle = 0\\ \langle u-p_\mathrm{F}(u),u_2\rangle = 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\langle u,u_1\rangle = \big\langle p_\mathrm{F}(u),u_1\big\rangle\\ \langle u,u_2\rangle = \big\langle p_\mathrm{F}(u),u_2\big\rangle.\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}3 = 6x+(-1)y\\ 2=(-1)x+5y\end{array}\right.$$

car $\qquad \langle u,u_1\rangle = 3,\quad \langle u,u_2\rangle = 2,\quad \langle u_1,u_2\rangle=-1,\quad \langle u_1,u_1\rangle = 6\quad$ et $\quad\langle u_2,u_2\rangle = 5.$

La résolution de ce système donne $x=17/29$ et $y=15/29$ pour un minimum global qui vaut $f(17/29,15/29)\simeq 2{,}2$.

Exercice 9

✦✦ Justifier que la quantité

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_{-1}^{1}\left(t^2-at-b\right)^2\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et la calculer.

p. 17

3.2 Problème des moindre carrés, droite de régression

Projeté sur l'image et moindre carrés

Soit f une application linéaire $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, b un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. Lorsque f n'est pas surjective ($p<n$), il se peut que b n'appartienne pas à l'image de f et l'équation $f(x)=b$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}^p$, n'admet pas de solution. On cherche alors un vecteur x dont l'image « est la plus proche » de b. Plus précisément, on munit l'espace d'arrivée de sa structure euclidienne canonique et on veut justifier l'existence de

$$\min_{x\in\mathbb{R}^p}\|f(x)-b\|$$

et trouver un (le ?) vecteur x réalisant le minimum. On constate qu'il s'agit de rechercher

$$\min_{y\in\mathrm{Im}\,f}\|y-b\|.$$

Comme $\mathrm{Im}\,f$ est un sous-espace vectoriel de E, le théorème de minimisation prouve l'existence du minimum qui est atteint en un unique point :

$$y = p(b)\quad\text{ où } p \text{ désigne le projeteur orthogonal sur } \mathrm{Im}\,f.$$

Précisons que si f est injectif (le rang de f est alors p), y étant unique, on un a bien un unique antécédent x tel que $f(x)$ soit « le plus proche » de b. Noter que y est unique mais si f n'est pas injective, x n'est pas unique. Tout vecteur $x+x_\mathrm{K}$ avec $x_k\in\mathrm{Ker}\,f$ convient.

Donnons une version matricielle :

THÉORÈME **problème des moindre carrés, pseudo-solution**

Soient n, $p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant p$, $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Alors il existe un unique vecteur $\mathrm{X}_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|$ où $\|\cdot\|$ désigne ici la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Preuve. Considérons l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{X} & \mapsto & \mathrm{AX}. \end{array} \right.$$

L'application f est clairement linéaire. De plus, la formule du rang donne

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\, f\right) = \dim\left(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right) - \mathrm{rg}(f) = p - \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 0.$$

On en déduit que le noyau est trivial et l'application f est injective. Ensuite, pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$\|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\| = \|f(\mathrm{X})-\mathrm{B}\|.$$

Le théorème précédent conclut. Il existe $\mathrm{X}_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(\mathrm{X}_0)$ minimise la norme avec

$$f(\mathrm{X}_0) = p_{\mathrm{Im}\, f}(\mathrm{B}).$$

Le vecteur $f(\mathrm{X}_0)$ est unique, puis par injectivité de f, X_0 est unique. ■

Remarque. Le second exercice qui suit permet de justifier que le vecteur X_0 est l'unique solution du système de Cramer ${}^t\mathrm{AAX} = {}^t\mathrm{AB}$. On parle alors de **pseudo-solution**.

Exercice 10

✧ **Exemple**

On pose $$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

p. 17

Justifier et calculer l'unique matrice colonne X telle que la norme $\|\mathrm{AX}-\mathrm{B}\|$ soit minimale.

Exercice 11

✦✦ Reprenons les notations du théorème et justifions la remarque précédente.

1. **a)** Justifier que $\mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{AA}\right) = \mathrm{Ker}(\mathrm{A})$, puis $\mathrm{rg}({}^t\mathrm{AA}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.
b) En déduire que ${}^t\mathrm{AA}$ est une matrice inversible.

2. **a)** Vérifier que pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\left\langle \mathrm{X}, {}^t\mathrm{A}(\mathrm{AX}_0 - \mathrm{B}) \right\rangle = 0$.
b) En déduire que ${}^t\mathrm{AAX}_0 = {}^t\mathrm{AB}$.

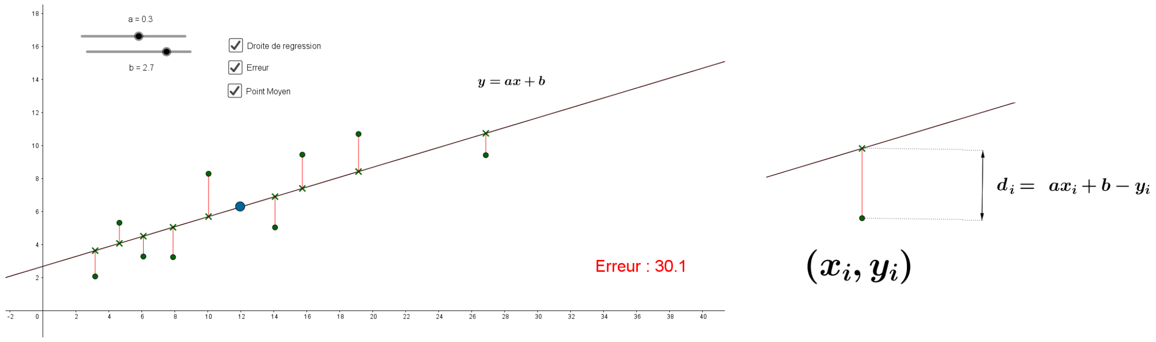
p. 18

On a donc bien une unique solution donnée par $\mathrm{X}_0 = \left({}^t\mathrm{AA}\right)^{-1}\mathrm{AB}$. Pour une seconde démonstration, voir l'exercice 19, p.13, partie II.

Régression linéaire

Considérons n points de $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ non alignés verticalement. On cherche la droite qui « approxime » au mieux ces n points. Si on note $y = ax + b$, l'équation d'une droite, on cherche à minimiser l'erreur

$$\mathrm{E}_r = \sum_{i=1}^{n} {d_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i\right)^2.$$



Traduisons matriciellement le problème. Posons

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{de sorte que} \quad \mathrm{AX} - \mathrm{B} = \begin{bmatrix} ax_1 + b - y_1 \\ ax_2 + b - y_2 \\ \vdots \\ ax_n + b - y_n \end{bmatrix}.$$

Si on considère le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la norme associée

$$\mathrm{E}_r = \|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|^2.$$

Les deux colonnes de la matrice A forment une famille libre (les points ne sont pas alignés verticalement). La matrice A est donc de rang 2. D'après le théorème précédent, il existe un seul vecteur minimisant $\|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|$. Calculons ce vecteur X_0 à l'aide de la remarque. On a

$${}^t\mathrm{AA} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n {x_i}^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

Justifions que ${}^t\mathrm{AA}$ est inversible.

$$\det\left({}^t\mathrm{AA}\right) = n\sum_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ aux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $u_0 = (1, \dots, 1)$, il vient :

$$\langle u_0, x\rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n\sum_{i=1}^n {x_i}^2$$

Cette inégalité est en fait stricte car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Le déterminant est donc non nul et la matrice ${}^t\mathrm{AA}$ est inversible. L'inverse est donné par

$$\left({}^t\mathrm{AA}\right)^{-1} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \begin{bmatrix} n & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n {x_i}^2 \end{bmatrix}.$$

De plus, on calcule

$${}^t\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}.$$

Ceci permet d'expliciter le vecteur X, puis ses composantes a et b :

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n\sum_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {x_i}^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}.$$

Si $\bar{x}$ (resp. $\bar{y}$) et σ_x (resp. σ_y) désignent la moyenne et l'écart-type empirique de la série statistique $\{x_i \mid i \in [\![1;n]\!]\}$ (resp. $\{y_i \mid i \in [\![1;n]\!]\}$), $\mathrm{Cov}(x,y)$ désigne la covariance empirique de x et y et $\rho_{x,y}$ désigne le coefficient de corrélation empirique, alors la droite de régression linéaire de y en x a pour équation :

$$y - \bar{y} = \rho_{x,y}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}).$$

Remarque. Nous verrons une seconde démonstration de ce résultats par le calcul différentiel.

Exercices

Exercice 12. ✦ Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{H} = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

≫ Solution p. 18

Exercice 13. ✦ On place dans $\mathbb{R}^5$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathscr{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ où

$$f_1 = e_1 + e_2 - e_3, \quad f_2 = e_3 + e_5 \quad \text{et} \quad f_3 = e_2 - e_3.$$

Donner la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F.

≫ Solution p. 18

Exercice 14. ✦✦ **À bonne distance d'Attila**
On considère $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{AB}\right) \in \mathbb{R}.$$

Soit H, le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle.

1. Donner la dimension de $\mathrm{H}^{\perp}$. Préciser une base.
2. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $\min\limits_{\mathrm{A} \in \mathrm{H}} \|\mathrm{A} - \mathrm{J}\|$.

≫ Solution p. 18

Exercice 15. ✦✦✦ **CNS pour un projecteur orthogonal**
Soient $\left(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ un espace euclidien et p, un projecteur de E.

1. Montrer l'équivalence entre les énoncés :

   i) Le projecteur p est orthogonal **ii)** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \langle x, p(x) \rangle \geqslant 0.$

   Indication. On pourra considérer $\lambda x + y$ où $x \in \mathrm{Ker}\, p$, $y \in \mathrm{Im}\, p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Même question avec les énoncés :

   i) Le projecteur p est orthogonal **iii)** $\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$

≫ Solution p. 18

Exercice 16. ✦✦ **Matrice d'un projecteur orthogonal**
Soient $\left(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$, un espace euclidien et F, un sous-espace vectoriel de E.
Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $\left(u_1, \ldots, u_p\right)$ une base orthonormée de F. On note $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_p$ les vecteurs colonnes des coordonnées de $u_1, \ldots, u_p$ dans la base $\mathscr{B}$. Montrer que la matrice du projeté orthogonal sur F, noté p_{F}, dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(p_{\mathrm{F}}\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{U}_i \, {}^t\mathrm{U}_i.$$

≫ Solution p. 19

Exercice 17. ✦✦✦ **Deux approches pour un même problème de minimisation**
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 24x^2 + 2y^2 + z^2 + 12xy + 2yz + 4zx - 240x - 48y - 12z.$$

1. **a)** Vérifier que F admet un unique point critique, noté A.

b) On admet (par le calcul) que $\mathrm{F}(x, y, z) = (2x + y + z - 6)^2 + (4x + y - 18)^2 + 4(x - 9)^2 - 684$.
En déduire que F admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$. Préciser la valeur du minimum.

c) Calculer $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Justifier la convergence et exprimer en fonction de F, l'intégrale :

$$\mathrm{I}(a,b,c) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \mathrm{d}t.$$

e) En déduire l'existence et la valeur de

$$\mathrm{I} = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \mathrm{I}(a,b,c).$$

2. Pour tous P, Q $\in \mathbb{R}_3[x]$, on pose

$$\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t$$

On vérifie que cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[x]$.

a) En utilisant la question 1, calculer la distance du polynôme $\mathrm{P}_0(x) = x^3$ au sous-espace $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Comment retrouver ce résultat en calculant le projeté orthogonal de P_0 sur $\mathbb{R}_2[x]$?

≫ Solution p. 19

Exercice 18. ✦✦✦ **Partition de l'unité**

Soit $\left(\mathrm{E},\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien.

1. Soient p, q deux projecteurs orthogonaux tels que

$$\forall x\in \mathrm{E},\qquad \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

a) Justifier que $p\circ q = q\circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.

b) En déduire que $p+q$ est un projecteur orthogonal.

2. Soient maintenant $p_1, p_2, \dots, p_n$ des projecteurs orthogonaux tels que $\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathrm{E}$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\|p_i(x)\right\|^2 = \|x\|^2.$$

b) En déduire que pour toute partie non vide I de $[\![1;n]\!]$ l'endomorphisme $\sum_{i\in\mathrm{I}} p_i$ est un projecteur orthogonal.

≫ Solution p. 20

Exercice 19. ✦✦✦ **Sujet de révision** *extrait de ESSEC 2012*

Soient m, $n\in\mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Ainsi si

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{bmatrix} \quad\text{et}\quad \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}),$$

le produit scalaire de X et Y s'obtient par la relation ${}^t\mathrm{XY} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$ et la norme euclidienne de Y par : $\|\mathrm{Y}\|_m^2 = {}^t\mathrm{YY} = \sum_{i=1}^{m} {y_i}^2$.

1. *Question préliminaire.*
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k non nulle et $\left(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,\dots,\mathrm{U}_k\right)$ une base orthonormée de vecteurs colonnes de F.
On envisage la projection orthogonale sur F représentée par sa matrice P dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Montrer que $\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{U}_i{}^t\mathrm{U}_i$ et vérifier que P est une matrice symétrique.

2. **Partie I.** *Décomposition spectrale de la matrice* ${}^t\mathrm{AA}$ *associée à une matrice* A *de* $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
On envisage dans toute cette partie une matrice A appartenant à $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

a) Préciser la taille de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$ et vérifier que $\operatorname{Ker}\mathrm{A}\subset\operatorname{Ker}{}^t\mathrm{AA}$.

b) Montrer que si $\mathrm{X}\in\operatorname{Ker}{}^t\mathrm{AA}$ alors $\|\mathrm{AX}\|_m = 0$ et établir que $\operatorname{Ker}\mathrm{A} = \operatorname{Ker}{}^t\mathrm{AA}$. Montrer que A et ${}^t\mathrm{AA}$ sont nulles simultanément.

c) Justifier l'égalité : $\operatorname{Im}{}^t\mathrm{A} = \operatorname{Im}{}^t\mathrm{AA}$.

3. **a)** Établir que la matrice ${}^t\mathrm{AA}$ est diagonalisable et en calculant $\|\mathrm{AX}\|_m^2$ pour X vecteur propre de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$, montrer que ses valeurs propres sont des réels positifs.

b) On désigne par $\left(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\right)$ la liste des valeurs propres distinctes de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$, classée dans l'ordre croissant.
On rappelle que

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}\left({}^t\mathrm{AA}\right) \text{ où } \mathrm{E}_{\lambda_i}\left({}^t\mathrm{AA}\right) = \mathrm{Ker}\left({}^t\mathrm{AA} - \lambda_i \mathrm{I}_n\right).$$

Pour i entier naturel compris entre 1 et p, on note P_i la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{E}_{\lambda_i}\left({}^t\mathrm{AA}\right)$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Vérifier que pour i et j distincts compris entre 1 et p, $\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j$ est la matrice nulle.

Justifier les relations : $\mathrm{I}_n = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}_i$ et ${}^t\mathrm{AA} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathrm{P}_i$. Cette dernière écriture s'appelle la décomposition spectrale de ${}^t\mathrm{AA}$.

4. *Exemples*

a) Déterminer la décomposition spectrale de ${}^t\mathrm{AA}$ lorsque A est la matrice 3,3 égale à

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) On envisage la matrice ligne $\mathrm{A} = (a_1 a_2 \cdots a_n)$ où les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont fixés, non tous nuls simultanément. Ainsi, $\mathrm{A}{}^t\mathrm{A}$ est un réel. Montrer que le polynôme $\mathrm{X}^2 - \left(\mathrm{A}{}^t\mathrm{A}\right)\mathrm{X}$ est annulateur pour la matrice ${}^t\mathrm{AA}$. Préciser la liste des valeurs propres et la décomposition spectrale de la matrice ${}^t\mathrm{AA}$.

Partie II. *Pseudo solution d'une équation linéaire.*

On s'intéresse dans cette partie à l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ où $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Une matrice X appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite solution de cette équation si elle vérifie la relation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$. Elle est dite pseudo solution de cette équation si elle vérifie :

$$\forall \mathrm{Z} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|\mathrm{AX} - \mathrm{B}\|_m \leqslant \|\mathrm{AZ} - \mathrm{B}\|_m$$

5. On suppose que l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet au moins une solution. Montrer que X est une pseudo solution si et seulement si elle est solution de l'équation.

6. On suppose que X est une pseudo solution de l'équation. Montrer que, pour tout réel λ et toute matrice Y de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda^2 \|\mathrm{AY}\|_m^2 + 2\lambda {}^t\mathrm{Y}{}^t\mathrm{A}(\mathrm{AX} - \mathrm{B}) \geqslant 0.$$

En déduire que ${}^t\mathrm{AAX} = {}^t\mathrm{AB}$.

7. Montrer que tout X de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la relation ${}^t\mathrm{AAX} = {}^t\mathrm{AB}$ est pseudo solution et en déduire qu'il existe toujours au moins une pseudo-solution de l'équation.

8. *Exemple*

Déterminer toutes les pseudo-solutions de l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ lorsque :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Parmi celles-ci, préciser celle dont la norme euclidienne est minimale.

9. Donner une condition sur le rang de A pour que l'équation admette une unique pseudo solution.

≫ Solution p. 20

Les exotiques

Exercice 20. ✦✦✦ Dans la suite, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soient $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$, n variables aléatoires centrées et admettant un moment d'ordre 2. On pose

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{X}_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{C_X} = \left(\mathrm{Cov}\left(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j\right)\right)_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Soit $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Exprimer la variance $\mathbf{V}\left(\langle u, \mathrm{X}\rangle\right)$ à l'aide de $\mathrm{C_X}$ et u.
($\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne ici le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).

2. Soient H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathrm{H}^\perp$.
Montrer que l'événement $[\mathrm{X} \in \mathrm{H}]$ est presque sûr si et seulement si $u \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{C_X}$.

≫ Solution p. 20

Exercice 21. ✦✦✦ Soient $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2$, deux variables aléatoires indépendantes et suivant une loi normale centrée réduite. Soit M, un point de coordonnées $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et Δ_a la droite d'équation $y = ax$. On pose

$$\mathrm{Y} = \inf_{u \in \Delta_a} \|\mathrm{M} - u\|^2.$$

Justifier que Y admet une espérance et la calculer.

≫ Solution p. 21