TD 8

Thème : Endomorphismes / matrices symétriques

Décomposition spectrale, calcul et application

Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible.

- **Existence de la décomposition**

1. Montrer que ${}^t\mathrm{MM}$ est une matrice symétrique de valeurs propres strictement positives. En déduire qu'il existe une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives S telle que ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{S}^2$.

2. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale O telle que $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$.

- **Unicité de la décomposition**
Il existe un unique couple (O, S)*,* O *orthogonale,* S *symétrique à valeurs propres strictement positives, tel que* $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$*. Pour s'en convaincre, on a vu en exercice que la matrice* S *est unique (le refaire si besoin). La matrice* O *l'est donc tout autant et on a bien l'unicité du couple* (O, S)*.*

- **Algorithme par la méthode de Newton**
Dans la suite, on dit qu'une suite de matrices $(\mathrm{A}_k)_k$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A si pour tout couple $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, la suite des coefficients $([\mathrm{A}_k]_{i,j})_k$ converge vers le coefficient $[\mathrm{A}]_{i,j}$. On admet [1] le résultat suivant :
Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. La suite $(\mathrm{M}_k)_k$ de matrices de $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{M}_0 = \mathrm{M} \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_{k+1} = \frac{1}{2}\mathrm{M}_k \left(\mathrm{I}_n + \left({}^t\mathrm{M}_k\mathrm{M}_k\right)^{-1}\right)$$

est bien définie, converge vers O, où $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$ est la décomposition polaire de M. De plus, la suite $\left({}^t\mathrm{M}_k\mathrm{M}\right)_k$ converge vers S.

3. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice M_k est inversible.

4. Proposer un programme python qui prend en argument M et renvoie une approximation du couple (O, S) obtenue par décomposition polaire.

- **Application**
Soit $\left(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
Un endomorphisme f de E est appelé *contraction* si pour tout x de E, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

5. Donner un exemple de contraction de E.

6. On suppose dans cette question que l'endomorphisme f est symétrique.

a) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de f, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. Montrer que pour tout x de E :

$$\|\mathrm{P}(f)(x)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |\mathrm{P}(\lambda)| \cdot \|x\|$$

où $\mathrm{Sp}(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f.

- On suppose désormais que f est un endomorphisme bijectif de E, et on note M sa matrice associée dans une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E.

7. Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de S, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

1. mais on pourrait le démontrer (DS11 de l'année dernière).

- **Exemple**
  Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $\qquad \mathrm{M}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.

  On note $(\mathrm{S}_{a,b}, \mathrm{O}_{a,b})$ le couple obtenue dans la décomposition polaire.

8. **a)** Expliciter la matrice $\mathrm{S}_{a,b}$ dans cet exemple.

b) Justifier ensuite que $\det(\mathrm{O}_{a,b}) = 1$ et qu'il existe un réel θ tel que $\mathrm{O}_{a,b} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

9. On pose $\mathrm{J} = \mathrm{M}(0,1)$. On pose ensuite $\exp(\theta \mathrm{J}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!} (\theta \mathrm{J})^k$.

Démontrer que
$$\mathrm{O}_{a,b} = \exp(\theta \mathrm{J}).$$

Lemme du théorème spectral

On se propose dans la suite d'établir le résultat préliminaire et admis dans la preuve du théorème spectral : toute matrice symétrique réelle admet un valeur propre [2].

- **Résultat 1**
  Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et $\delta \in \mathbb{R}_*^+$.

1. Justifier que $\mathrm{A}^2 + \delta \mathrm{I}_n$ est une matrice inversible.

2. Soit R, un polynôme de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. Déduire de la question 1 que $\mathrm{R}(\mathrm{A})$ est inversible.

- **Résultat 2 - Polynôme minimal**

3. Justifier que toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur non nul.

4. Démontrer qu'il existe un polynôme non nul annulateur de A de degré minimal et unitaire. Notons Π_A, un tel polynôme.

5. *(facultatif).* Montrer que pour tout polynôme P annulateur de A, il existe Q polynôme tel que $\mathrm{P} = \Pi_\mathrm{A} \cdot \mathrm{Q}$. En déduire que le polynôme Π_A est unique.

6. Justifier que si λ est une racine de Π_A, alors λ est une valeur propre de A.

- **Résultat 3**
  On rappelle que pour tout polynôme P, il existe :
  - a, un réel ;
  - des réels $(\lambda_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$ et des entiers naturels $(m_i)_{i \in [\![1;r]\!]}$;
  - des polynômes $(\mathrm{R}_j)_{j \in [\![1;p]\!]}$ de degré 2, unitaire et de discriminant négatif

  tels que
  $$\mathrm{P} = a \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i) \cdot \prod_{j=1}^{p} \mathrm{R}_j.$$

7. À l'aide des trois résultats, montrer que pour toute matrice A symétrique admet une valeur propre réelle.

On montre ainsi que la matrice admet un polynôme annulateur non nul scindé à racines simples. On a vu en exercice que cela prouve la diagonasabilité de la matrice. C'est le théorème spectral.

2. La preuve classique utilise les nombres complexes. Ces derniers sont hors-programme en ECG.

Indications exercice 1.

2. Justifier que S est inversible. Poser ensuite $\mathrm{O} = \mathrm{MS}^{-1}$ et vérifier que O est orthogonale.

3.a) Soit N est une matrice carrée inversible. Justifier que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{I}_n + {}^t\mathrm{NN})$ alors $\lambda \geqslant 1$.
3.b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice M_k est inversible.

6.a) Raisonner par double implication. Justifier que f admet une b.o.n $(e_1, \ldots, e_n)$ composée de vecteurs propres de f.
7. Soient g et h, les endomorphismes associés à O et S dans la base $\mathcal{B}$.
7.a) Justifier que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|g(x)\| = \|x\|$. En déduire que $\|f(x)\| = \|h(x)\|$.
7.b) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de S, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

8.bi) Justifier qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

8.bii) En déduire l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

8.biii) Montrer qu'il existe un réel θ tel que

$$\mathrm{O}_{a,b} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

8.a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. Préciser $\cos^{(n)}(0)$ en fonction de la parité de n.
8.b) À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, justifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Donner une formule similaire pour $\sin(x)$.

Indications exercice 2.

2. Mettre le polynôme R sous forme canonique.

Éléments de solution

Décomposition polaire

1. On a la symétrie de M par

$$^t\left(^t\mathrm{MM}\right) = {}^t\mathrm{M}^t\left(^t\mathrm{M}\right) = {}^t\mathrm{MM}.$$

Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Notons $x \in \mathrm{E}$ tel que X soit la matrice de x dans la base $\mathcal{B}$.
D'une part

$$^t\mathrm{X}^t\mathrm{MMX} = \lambda^t\mathrm{XX} = \lambda\|x\|^2$$

et $$^t\mathrm{X}^t\mathrm{MMX} = {}^t(\mathrm{MX})\mathrm{MX} = \|f(x)\|^2$$

Comme $\|x\|^2 \neq 0$, on a bien $\lambda \geqslant 0$.
D'après le théorème spectral, il existe P orthogonale et D diagonale telles que $\mathrm{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ avec $d_i \geqslant 0$ et

$$^t\mathrm{MM} = \mathrm{PD}^t\mathrm{P}.$$

On vérifie que

$$\mathrm{S} = \mathrm{P}\Delta^t\mathrm{P} \quad \text{avec} \quad \Delta = \operatorname{diag}\left(\sqrt{d_1}, \ldots, \sqrt{d_n}\right)$$

convient.

2. Si S n'est pas inversible, son carré $^t\mathrm{MM}$ ne l'est pas non plus. Par contraposée de la propriété : "Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont inversibles alors AB aussi", on peut affirmer que $^t\mathrm{M}$ ou M n'est pas inversible. Ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi S est inversible et on peut poser

$$\mathrm{O} = \mathrm{MS}^{-1}.$$

Avec S symétrique, on obtient

$$\begin{aligned} ^t\mathrm{OO} &= {}^t\left(\mathrm{MS}^{-1}\right)\mathrm{MS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}{}^t\mathrm{MMS}^{-1} \\ &= \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{I}_n. \end{aligned}$$

La matrice O est orthogonale.

3. Procédons par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \quad \mathrm{M}_k \text{ est inversible.}$$

⇀ *Initialisation.* Comme $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}$, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée par hypothèse sur M.
⇀ *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie.
On a vu à la première question que les valeurs propres de $^t\mathrm{M}_k\mathrm{M}_k$ sont positives. Dès lors, celles de $\mathrm{I}_n + {}^t\mathrm{M}_k\mathrm{M}_k$ sont plus grandes que 1. En particulier, 0 n'est pas valeur propre et cette matrice est inversible. D'après $\mathcal{P}(k)$, M_k est aussi inversible. On en déduit, par produit, que M_{k+1} est inversible. La propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est établie.
⇀ *Conclusion.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, M_k est inversible.

4.

```
def polaire(M):
    n,p=np.shape(M)
    k=20
    Mi=M
    for i in range(k):
        A=np.dot(np.transpose(Mi),Mi)
        A=np.eye(n)+al.inv(A)
        Mi=(1/2)*np.dot(Mi,A)
    S=np.dot(np.transpose(Mi),M)
    return Mi,S
```

Un petit test :

```
M=np.array([[1,2],[3,4]])
O,S=polaire(M)
print(S)
print(O)

>>>
[[2.05798302 2.40098019]
 [2.40098019 3.77296887]]
[[-0.51449576  0.85749293]
 [ 0.85749293  0.51449576]]
```

On vérifie que $\mathrm{M} = \mathrm{O}$:

```
print(np.dot(O,S))

>>>
[[1. 2.]
 [3. 4.]]
```

et que O est presque orthogonale :

```
print(np.dot(np.transpose(O),O))

>>>
[[1.00000000e+00 5.55111512e-17]
 [5.55111512e-17 1.00000000e+00]]
```

5. L'endomorphisme identité ou l'endomorphisme nul.

6.a) Raisonnons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si f est une contraction alors pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et x un vecteur propre associé ($f(x) = \lambda x$ et $x \neq 0_\mathrm{E}$), on a

$$|\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|f(x)\| \leqslant \|x\|.$$

D'où $|\lambda| \leqslant 1$ car $\|x\| \neq 0$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons que $\mathrm{Sp}(f) \subset]-1;1[$. D'après le théorème spectral, f admet une b.o.n composée de vecteurs propres. Notons la $(e_1 \ldots e_n)$. Soit

$x \in \mathrm{E}$
$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i$$
puis
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, \lambda_i e_i$$
et par le théorème de Pythagore (les vecteurs e_i sont deux à deux orthogonaux)
$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \, \lambda_i{}^2 \, \|e_i\|^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \qquad \text{car } \lambda_i \in [-1;1], \text{ et } \|e_i\| = 1 \\ \|f(x)\|^2 &\leqslant \|x\|^2. \end{aligned}$$
Ce qui conclut.

6.b) Soit $x \in \mathrm{E}$. Décomposons ce vecteur dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ définie précédemment
$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i \\ \mathrm{P}(f)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, \mathrm{P}(f)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, \mathrm{P}(\lambda_i) e_i \end{aligned}$$
D'où, pour $\mathrm{M} = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |\mathrm{P}(\lambda)|$,
$$\begin{aligned} \|\mathrm{P}(f)(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \, \mathrm{P}(\lambda_i)^2 \\ &\leqslant \mathrm{M}^2 \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 = \mathrm{M}^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$
Ce qui conclut.

7. Soient g et h les endomorphismes de E tels que O et S soient les matrices de g et h dans la base B. Justifions que
$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \|g(x)\| = \|x\|.$$
En effet
$$\begin{aligned} \|g(x)\|^2 &= \langle g(x), g(x) \rangle = {}^t(\mathrm{OX})(\mathrm{OX}) \\ &= {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{OOX} = {}^t\mathrm{XX} = \|x\|^2. \end{aligned}$$
De plus, h est symétrique car S est symétrique et $\mathcal{B}$ est orthonormée.
Notons enfin que
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathrm{E} \qquad f(x) &= g \circ h(x) \\ \|f(x)\| &= \|g(h(x))\| = \|h(x)\|. \end{aligned}$$
Ainsi f est une contraction si et seulement si h est une contraction. Or d'après la question 6.a), cela équivaut à $|\lambda| \leqslant 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{S})$.

8.a) On a
$${}^t\mathrm{M}_{a,b}\mathrm{M}_{a,b} = (a^2 + b^2)\mathrm{I}_n.$$
En reprenant la démarche de la question 1, on pose
$$\mathrm{S}_{a,b} = \sqrt{a^2 + b^2}\, \mathrm{I}_n.$$

8.b) Comme a, b ne sont pas simultanément nuls, $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et
$$\mathrm{O}_{a,b} = \mathrm{M}_{a,b}\mathrm{S}_{a,b}{}^{-1}.$$
C'est-à-dire
$$\mathrm{O}_{a,b} = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}.$$
On a bien $\det(\mathrm{O}_{a,b}) = 1$.

Notons de plus que $a^2 \leqslant a^2 + b^2$, puis
$$-1 \leqslant \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leqslant 1.$$
De plus la fonction cosinus est continue à valeurs dans $[-1;1]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(\theta).$$
Notons que par parité du cosinus, on a aussi
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(-\theta).$$
Ensuite
$$\begin{aligned} \sin(\theta)^2 &= 1 - \cos(\theta)^2 \\ &= 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \\ \sin(\theta)^2 &= \frac{b^2}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$
D'où
$$\sin(\theta) = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
Quitte à changer θ en $-\theta$, il existe bien un réel θ tel que
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin(\theta).$$
Ce qui conclut.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ entre 0 et x appliquée à la fonction cosinus infiniment dérivable,
$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{(2n+1)!} |x|^{2n+1}$$
où $\mathrm{M} = \max_{[0;x] \cup [x;0]} \left|\cos^{(2n+1)}(x)\right|$. Comme les dérivée k ième du cosinus valent $\pm\sin$ ou $\pm\cos$, la dérivée $(n+1)$-ième est majorée par 1. Ainsi, $\mathrm{M} \leqslant 1$. De plus,
$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est impair} \\ (-1)^p \text{ si } k = 2p \end{cases}$$

Il vient :

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}.$$

Puis,

$$\left| \cos(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Par les croissances comparées :

$$\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut par le théorème d'encadrement :

$$\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}.$$

De manière similaire, on prouve que pour tout réel x

$$\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

Revenons la matrice J. On démontre par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{J}^{2p} = \mathrm{I}_n, \quad \mathrm{J}^{2p+1} = \mathrm{J}, \quad \mathrm{J}^{2p+2} = -\mathrm{I}_n, \quad \mathrm{J}^{2p+3} = -\mathrm{J}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\theta^k}{k!} \mathrm{J}^k &= \sum_{p=0}^{n} \frac{\theta^{2p}}{2p!} \mathrm{J}^{2p} + \sum_{p=0}^{n} \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} \mathrm{J}^{2p+1} \\ &= \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p \theta^{2p}}{2p!} \right) \mathrm{I}_2 + \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p \theta^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \mathrm{J} \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \cos(\theta)\mathrm{I}_2 + \sin(\theta)\mathrm{J}.\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Lemme du théorème spectral

---

1. Notons $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\| \cdot \|$, la norme associée.

Soit $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker} \mathrm{A}^2 + \delta \mathrm{I}_n$. On a

$$\mathrm{A}^2\mathrm{X} + \delta \mathrm{X} = 0_{n,1}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\|\mathrm{AX}\|^2 &= \langle \mathrm{AX}, \mathrm{AX} \rangle \\ &= {}^t(\mathrm{AX})(\mathrm{AX}) = {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{A}\mathrm{A}\mathrm{X} \\ &= {}^t\mathrm{X}\mathrm{A}^2\mathrm{X} = -\delta {}^t\mathrm{X}\mathrm{X} \\ \|\mathrm{AX}\|^2 &= -\delta \|\mathrm{X}\|^2.\end{aligned}$$

Nécessairement $\|\mathrm{X}\| = 0$ et $\mathrm{X} = 0_{n,1}$. En conclusion, le noyau de la matrice $\mathrm{A}^2 + \delta \mathrm{I}_n$ est triviale. La matrice est bien inversible.

2. Sans perte de généralité, on peut supposer que R est un polynôme unitaire. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(x) &= x^2 + bx + c \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4c}{4} \\ \mathrm{R}(x) &= \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}.\end{aligned}$$

La matrice $\tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A} + \frac{b}{2}\mathrm{I}_n$ est symétrique et $\delta = -\Delta/4 > 0$. Donc

$$\mathrm{R}(\mathrm{A}) = \tilde{\mathrm{A}}^2 + \delta \mathrm{I}_n$$

est inversible d'après la question 1.

3. La famille $\left(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \ldots, \mathrm{A}^{n^2}\right)$ est liée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car le nombre de vecteurs est strictement supérieur à $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$. Il existe donc des réels $a_0, a_1, \ldots a_{n^2}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^{n^2} a_i \mathrm{A}^i = 0_n$$

Le polynôme non nul $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ est annulateur de A.

4. Soit C la partie de $\mathbb{N}$ constituée par tous les degrés des polynômes annulateurs non nul. Cette partie admet un plus petit élément n_0. Soit Q un polynôme annulateur (non nul) de degré n_0. Le polynôme $\frac{1}{q}\mathrm{Q}$ où q est le coefficient dominant de Q convient.

5. Soit Π_A un polynôme minimal de A. D'après la division euclidienne des polynômes, il existe $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathbb{R}[x]$ tels que

$$\mathrm{P} = \Pi_\mathrm{A} \cdot \mathrm{Q} + \mathrm{R} \quad \text{et} \quad \deg \mathrm{R} < \deg \Pi_\mathrm{A}$$

puis $$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \Pi_\mathrm{A}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A}) + \mathrm{R}(\mathrm{A})$$

et $\mathrm{R}(\mathrm{A}) = 0_n$ car P et Π_A sont annulateurs de A. Le polynôme R est donc annulateur non nul avec un degré strictement inférieur à Π_A. R est donc nul et $\mathrm{P} = \Pi_\mathrm{A}\mathrm{Q}$.

6. Raisonnons par l'absurde on supposant que Π_A admet une racine réelle α qui ne soit pas une valeur propre de A. Soit $\tilde{\mathrm{Q}} \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\tilde{\mathrm{Q}}(x)(x - \alpha) = \Pi_\mathrm{A}(x)$. On a donc

$$\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{A}) \circ (\mathrm{A} - \alpha \mathrm{I}_n) = \Pi_\mathrm{A}(\mathrm{A}) = 0_n.$$

Comme $\alpha \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, $\mathrm{A} - \alpha \mathrm{I}_n$ est une matrice inversible. $(\mathrm{A} - \alpha \mathrm{I}_n)^{-1}$ a un sens et

$$\tilde{\mathrm{Q}}(\mathrm{A}) = 0_n \cdot (\mathrm{A} - \alpha \mathrm{I}_n)^{-1} = 0_n.$$

On en déduit que $\tilde{Q}$ est annulateur de A. Absurde, car

$$\deg \tilde{Q} < \deg \Pi_A$$

et Π_A est, par hypothèse, un polynôme annulateur de degré minimal. En conclusion, toute racine de Π_A est valeur propre de A.

7. Raisonnons par l'absurde en supposant que A n'admet pas de valeurs propres réelles. Dans ce cas le polynôme minimal de A n'admet pas de racines (question 6). Il s'écrit sous la forme

$$\Pi_A = aR_1 \times \ldots \times R_P \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}^*$$

où R_i désigne un polynôme de degré 2 avec un discriminant négatif. D'après la question 2, on sait que par produit

$$aR_1(A) \times \ldots \times R_p(A)$$

est une matrice inversible. Or cette matrice est aussi $\Pi_A(A) = 0_n$. Absurde. En conclusion A admet une valeur propre réelle.