DS 6 - sujet A

THÈMES : COMPLÉMENTS V.A À DENSITÉ, ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice

Matrices symétriques positives et définies positives

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique est positive si

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad {}^tXMX \geqslant 0.$$

On dit aussi que A est définie positive si en plus de la condition précédente, on a

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad \left({}^tXMX = 0 \iff X = 0_{n,1}\right).$$

On note respectivement $\mathscr{S}_n^+$ et $\mathscr{S}_n^{++}$, le sous-ensemble des matrices symétriques positives et des matrices symétriques définies positives.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que $A \in \mathscr{S}_n^+$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.

2. Donner et prouver un énoncé similaire pour $\mathscr{S}_n^{++}$.

3. Justifier que si $A \in \mathscr{S}_n^+$ alors il existe une matrice symétrique S telle que $S^2 = A$.

4. **Étude du cas $n = 2$.** Soit $A = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

- **a)** Justifier que A est diagonalisable. Notons λ_1, λ_2, les deux valeurs propres de A (éventuellement confondues).
- **b)** Exprimer Tr(A) à l'aide de λ_1 et λ_2. Justifier ensuite que $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$.
- **c)** Conclure en montrant que

$$A \in \mathscr{S}_2^{++} \iff \left(r > 0 \quad \text{et} \quad rt > s^2\right).$$

5. En déduire un premier programme python qui prend en argument une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et teste si la matrice est symétrique et définie positive.

6. Commenter le fonctionnement de ce second programme ? Est-ce un programme efficace ?

Editeur

```
def test(A): # A est une matrice symétrique
    [n,p]=np.shape(A)
    for i in range(5000):
        x=rd.random([n,1])
        if np.dot(np.dot(np.transpose(x),A),x)<0:
            return 'NON'
    return 'OUI'
```

Problème A

Construction de l'adjoint et applications

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y \rangle$ et la norme de x est notée $\|x\|$.
On rappelle qu'un hyperplan est un espace de dimension $\dim E - 1$ et qu'une partie F de E est stable par un endomorphisme si pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$.

Partie I : construction de l'adjoint

On considère un endomorphisme f de E. On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

7. Vérifier que l'on a :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{E}, \qquad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle \quad \text{puis} \quad \langle (f^*\circ f)(x), x\rangle = \|f(x)\|^2.$$

8. Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{E}, \qquad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

Partie II : Existence d'un hyperplan stable

- **Étude d'un premier exemple** ($n = 3$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$)
  On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9. Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

- **Étude d'un deuxième exemple** ($n = 3$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$)
  On considère maintenant l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

10. **a)** Déterminer les valeurs propres de f.
b) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est stable par f.

- **Retour au cas général**
  On considère dans la suite de cette partie un endomorphisme f de E qui possède au moins une valeur propre λ réelle et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan de E stable par f.

11. Montrer que λ est valeur propre de f^*.
12. On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ. Montrer que $(\operatorname{Vect}(u))^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.

Partie III : Réduction avec des matrices orthogonales

Soit f un endomorphisme de E et A sa matrice dans une base orthonormée.

13. **a)** Montrer que l'endomorphisme $f^*\circ f$ est symétrique et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
b) Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E constituée de vecteurs propres de $f^*\circ f$.

On note Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

14. Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ (non nécessairement distincts) tels que la matrice diagonale

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{bmatrix}$$

de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{Q}\Delta^2\,{}^t\mathrm{Q}$.

15. Montrer que la famille $\left(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n)\right)$ est une famille orthogonale et que pour tout entier j de $[\![1,n]\!]$, $\left\|f(e'_j)\right\| = \mu_j$.

- Dans la suite du problème, on suppose que A est inversible.

16. Vérifier que les nombres réels $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sont tous non nuls.
17. Montrer que la famille $\mathscr{C} = \left(\frac{1}{\mu_1} f(e'_1), \frac{1}{\mu_2} f(e'_2), \dots, \frac{1}{\mu_n} f(e'_n)\right)$ est une base orthonormée de E.
18. Soit R la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{R}\Delta\,{}^t\mathrm{Q}$.

Problème B

Loi d'un maximum d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

Partie 1 : préliminaire

Dans cette partie, x désigne un réel appartenant à $[0,1[$.

19. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$. En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

20. **a)** Montrer que $\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) Établir alors que la série de terme général x^p/p est convergente et que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

21. Après avoir vérifié que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, montrer que la série de terme général $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente.

22. Conclure en montrant $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Partie 2

On considère une variable aléatoire X de densité f, nulle sur $]-\infty,0[$, continue sur $[0,+\infty[$ et strictement positive sur $[0,+\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de X.

23. **a)** Justifier que, pour tout réel x, on a : $1-\mathrm{F}(x) > 0$. On définit alors la fonction g par :

$$g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln\big(1-\mathrm{F}(x)\big) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

b) Montrer que g peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire Y.

- **Étude d'un cas particulier**

24. **a)** Montrer qu'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle vérifie les conditions imposées dans cette partie.

b) On suppose ici que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Expliciter une densité de la loi de Y.

c) Reconnaître la loi de λY, en déduire l'espérance et la variance de Y.

Partie 3

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $\left(\mathrm{X}_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, mutuellement indépendantes, ayant toutes la même loi que X (c'est-à-dire de densité f, nulle sur $]-\infty,0[$, continue sur $[0,+\infty[$, strictement positive sur $[0,+\infty[$, et de fonction de répartition notée F).

On se propose, à partir de cette suite, de construire une variable aléatoire Z ayant comme densité la fonction g, nulle sur $]-\infty,0[$, et définie pour tout réel x positif par : $g(x) = -f(x)\ln(1-\mathrm{F}(x))$.

Pour ce faire, on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombre réels positifs, définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

25. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

On considère dès lors une variable aléatoire N, définie elle aussi sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, indépendante des variables X_i, et dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}(\mathrm{N}=n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

On considère la variable aléatoire $\mathrm{Z} = \mathrm{Max}\big(\mathrm{X}_0,\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_\mathrm{N}\big)$, ce qui signifie que :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathrm{Z}(\omega) = \mathrm{Max}\big(\mathrm{X}_0(\omega),\mathrm{X}_1(\omega),\ldots,\mathrm{X}_{\mathrm{N}(\omega)}(\omega)\big).$$

26. Justifier que la fonction de répartition F_Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{F}_\mathrm{Z}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\mathrm{F}(x)\big)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

On pourra dans un premier temps, expliciter $\mathbf{P}_{[\mathrm{N}=n]}(\mathrm{Z} \leqslant x)$.

27. En déduire, à l'aide de la fonction F, une expression explicite de F_Z sur $[0,+\infty[$.

28. Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et qu'elle admet bien la fonction g comme fonction densité.

Problème C

Lien entre loi normale et loi de Student

Partie I : Un calcul d'intégrales

29. Déterminer pour quelles valeurs du réel α l'intégrale J_α converge, où

$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha}.$$

30. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\alpha} J_\alpha.$$

En déduire que pour tout réel α supérieur ou égal à 1, on a $J_{\alpha+1} = \dfrac{2\alpha-1}{2\alpha} J_\alpha$.

31. Calculer J_1. Pour n entier supérieur ou égal à 1, calculer J_n.

Partie II : Loi de Student à n degrés de liberté

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g_n par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g_n(t) = \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

32. On pose $k_n = 2\sqrt{n}\, J_{\frac{n+1}{2}}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n = \frac{1}{k_n} g_n$ soit une densité de probabilité.
On pourra utiliser le changement de variable $y = t/\sqrt{n}$.

- **Espérance et variance**
  Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, de densité f_n. On dit alors que X suit une loi de Student à n degrés de liberté.

33. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $n > 1$, et la calculer.

34. Montrer que X admet une variance si et seulement si $n > 2$. Exprimer alors $\mathbf{V}(X)$ en fonction de k_n, n et $J_{\frac{n-1}{2}}$, puis vérifier que

$$\mathbf{V}(X) = \frac{n}{n-2}.$$

35. • **Convergence de** $(f_n(t))_n$

a) Pour tout réel t fixé, calculer la limite de $g_n(t)$ lorsque $n \to +\infty$.

b) En admettant la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

calculer la limite de k_{2n+3} lorsque $n \to +\infty$. En remarquant que $J_{(n+1)/2} \sim J_{n+1}$, calculer la limite de $f_n(t)$ lorsque $n \to +\infty$ et t est un réel fixé. Que reconnaît-on ?

Partie III : Nouvelle définition de la loi de Student à n degrés de liberté

Dans la suite, on admet le résultat suivant :

THÉORÈME

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ désignent $n+1$ variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et toutes de loi normale centrée réduite alors la variable

$$T_n = \sqrt{n}\,\frac{X_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}}$$

suit une loi de Student à n degrés de liberté.

- **Test avec python**

36. Écrire un programme `Student` qui prend argument n et simule une variable aléatoire de Student à n degrés de liberté.

- **Nouveau calcul de l'espérance et de la variance d'une loi de Student**

  Soient $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, $n+1$ variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et toutes de loi normale centrée réduite. On pose

$$U_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \quad \text{et} \quad T_n = \sqrt{n}\,\frac{X_0}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} {X_i}^2}}.$$

37. Justifier que

$$\mathbf{E}(T_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(T_n) = \frac{n}{2}\mathbf{E}\left(\frac{1}{U_n}\right).$$

38. Justifier que $({X_1}^2/2)$ suit une loi gamma de paramètre $1/2$.

39. En déduire que U_n est une variable à densité et préciser une densité.

40. À l'aide de la formule de transfert, calculer $\mathbf{E}(1/U_n)$, retrouver le résultat sur la variance de la question 35.

On pourra utiliser sans le justifier que pour tout réel x, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

La chat - Geluck

– FIN –

DS 6 - sujet *

THÈMES : COMPLÉMENTS V.A À DENSITÉ, ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème A
Endomorphismes symétriques

- Notations :

→ n et m sont des entiers naturels vérifiant $1 \leqslant m \leqslant n$.

→ E et F désignent les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ munis de leur structure euclidienne canonique. On note id_E l'application identité de E. Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aussi bien dans E que dans F et la norme euclidienne est notée $\|.\|$.

→ Si u est un endomorphisme de E, on note $\mathrm{Sp}(u)$ le spectre de u et $E_\lambda(u)$ l'espace propre associé à la valeur propre λ.

→ Un endomorphisme symétrique de E est dit positif si

$$\forall x \in E, \qquad \langle u(x), x \rangle \geqslant 0 \qquad (\bullet)$$

On note $S^+(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs de E.

→ Un endomorphisme symétrique de E est dit défini positif si il vérifie $(\bullet)$ et

$$\forall x \in E, \qquad \Big(\langle u(x), x \rangle = 0 \iff x = 0_E \Big).$$

On note $S^{++}(E)$ le sous-ensemble constitué des endomorphismes symétriques définis positifs.

La dernière partie est largement indépendante des autres parties.

Partie I - Généralités

1. Justifier que si $u \in S^{++}(E)$, alors l'application $\varphi_u : (x, y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer qu'un endomorphisme symétrique de E est dans $S^+(E)$ (respectivement $S^{++}(E)$) si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^+_*$).
3. Montrer que si $u \in S^{++}(E)$, alors u est bijectif et $u^{-1} \in S^{++}(E)$.
4. Soit $u \in S^+(E)$. Justifier que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \setminus \{0\}$, $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$. En déduire que

$$E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u).$$

5. Soit $u \in S^+(E)$. Justifier que pour tout $x \in E$

$$\|x\|^2 \min \mathrm{Sp}(u) \leqslant \langle x, u(x) \rangle \leqslant \|x\|^2 \max \mathrm{Sp}(u).$$

Partie II - Composée de deux endomorphismes symétriques positifs

On se propose dans cette partie de montrer que si u et v sont des éléments de $S^+(E)$, alors $u \circ v$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Soient u et v des éléments de $S^+(E)$.

6. On suppose dans cette question seulement que $v \in S(E)^{++}$. Justifier que l'endomorphisme $u \circ v$ est symétrique pour le produit scalaire φ_v. En déduire que $u \circ v$ est diagonalisable.

7. On note u_1 et w les endomorphismes de $\mathrm{Im}(u)$ induits par u et $u \circ v$ respectivement.

$$u_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(u) & \to & \mathrm{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad w : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Im}(u) & \to & \mathrm{Im}(u) \\ x & \mapsto & u \circ v(x) \end{array} \right. .$$

a) Montrer que u_1 est un élément de $S^{++}(\mathrm{Im}(u))$.
b) Montrer que w est un endomorphisme symétrique positif relativement à $\varphi_{u_1^{-1}}$ où $\varphi_{u_1^{-1}}$ est le produit scalaire sur $\mathrm{Im}(u)$ défini dans les notations.
c) Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme w est diagonalisable, que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.
d) Soit $x \in \mathrm{Im}(u \circ v) \cap \mathrm{Ker}(u \circ v)$. Justifier successivement que $\langle v(x), x \rangle = 0$, $v(x) = 0_E$ puis

$$E = \mathrm{Im}(u \circ v) \oplus \mathrm{Ker}(u \circ v).$$

8. Conclure en montrant que $u \circ v$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Partie III - Étude d'un cas particulier avec l'adjoint

Dans la suite, a désigne un élément de $S^{++}(E)$ et f un élément de $\mathscr{L}(E)$.
On considère un endomorphisme f de E. On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

9. Vérifier que l'on a :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \qquad \langle f(x), y \rangle = \left\langle x, f^*(y) \right\rangle.$$

10. Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \qquad \langle f(x), y \rangle = \left\langle x, f^*(y) \right\rangle.$$

11. Montrer que $f^* \circ f \in S^+(E)$.
12. Montrer que $a^{-1} \circ f^* \circ f$ est un endomorphisme diagonalisable de E et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.
On note ρ sa plus grande valeur propre.
13. Montrer que :

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\|^2 \leqslant \rho \, \langle a(x), x \rangle.$$

Partie IV - Minimisation d'une fonctionnelle quadratique

A - Minimisation théorique dans le cas général

Désormais f désigne un élément de $S^{++}(E)$, b est un élément fixé de E. De plus, J est l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, \qquad J(x) = \frac{1}{2} \left\langle f(x), x \right\rangle - \langle b, x \rangle.$$

On considère un sous-espace vectoriel V de E et on s'intéresse à la minimisation de la restriction de J à V. Pour rappel, pour $x \in V$, $J(x)$ est un minimum de la restriction de J à V si

$$\forall y \in V, \qquad J(y) \geqslant J(x).$$

- **Existence du minimum**

14. Montrer que si $\|x\|$ tend vers $+\infty$ et $x \in V$, alors $J(x)$ tend vers $+\infty$.
On admet (pour l'instant) que cela permet de justifier l'existence d'un minimum de la restriction de J *à* V.

- **Unicité du point où est atteint le minimum**
Soit (x, y) un élément de V^2 tel que $x \neq y$.

15. Montrer que :

$$J\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{J(x) + J(y)}{2}.$$

16. En déduire que la restriction de J à V atteint son minimum en un seul point. On le note x_V.

- Soient $x \in V$ et $(t, h) \in \mathbb{R} \times V$.

17. **a)** Simplifier $J(x + th) - J(x)$.

b) En déduire que la restriction de J à V est minimale en x si et seulement si

$$f(x) - b \in V^{\perp}.$$

c) Préciser x_V lorsque $V = E$ à l'aide de f et b.

B - Minimisation en pratique avec $E = V = \mathbb{R}^n$

On se place dans la suite dans le cas où $E = V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note $A = (a_{ij})_{i,j}$, la matrice de f dans la base canonique et $b = (b_1, \dots, b_n)$.

18. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

a) Exprimer $J(x)$ en fonction des x_i, $a_{i,j}$ et b_i.

b) Montrer que J est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, et vérifier que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla J(x) = f(x) - b.$$

c) Vérifier que J admet un unique point critique m dans $\mathbb{R}^n$. Justifier que $J(m)$ est le minimum de J sur $\mathbb{R}^n$.

On note λ_n (resp. λ_1), la plus grande (resp. plus petite) valeur propre de f. On considère un réel α de $]0, 1/\lambda_n]$ et un vecteur m_0 de $\mathbb{R}^n$, et l'on définit par récurrence des vecteurs m_p de $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad m_{p+1} = m_p - \alpha \nabla J(m_p).$$

19. Soit a, h deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que

$$J(a+h) = J(a) + \langle \nabla J(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle.$$

20. **a)** Montrer que pour tout entier naturel p :

$$J(m_{p+1}) = J(m_p) - \alpha \left\|\nabla J(m_p)\right\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}\left\langle f\left(\nabla J(m_p)\right), \nabla J(m_p)\right\rangle.$$

b) En déduire que pour tout entier naturel p :

$$J(m_{p+1}) \leqslant J(m_p) - \alpha\left(1 - \frac{\alpha\lambda_n}{2}\right)\left\|\nabla J(m_p)\right\|^2.$$

21. **a)** Montrer que la suite de réels $\left(J(m_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

On admet que $\left(J(m_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $J(m)$, où m a été défini à la question 18.

b) Montrer que pour tout entier naturel p,

$$\left\|m_p - m\right\|^2 \leqslant \frac{2}{\lambda_1}\left(J(m_p) - J(m)\right).$$

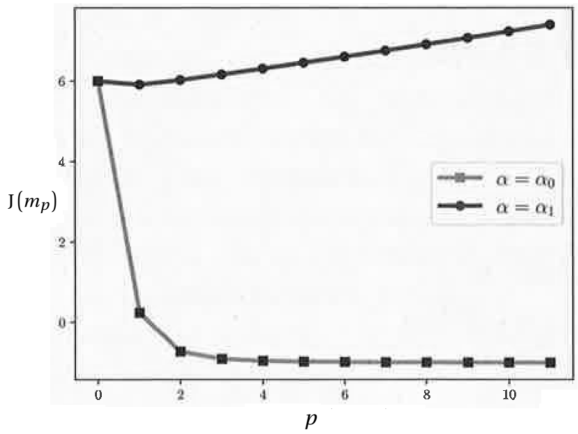
c) En déduire que $\lim\limits_{p\to+\infty} \left\|m_p - m\right\| = 0$.

22. Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et que $u = (2, 1)$ et on considère f,l'endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^2$ défini par

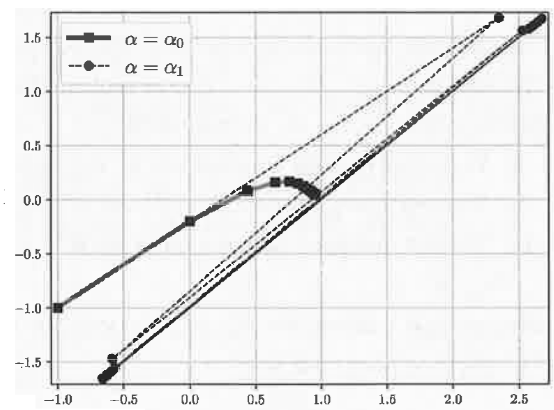
$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (2x + y, x + 2y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dans la figure ci-dessous, on a représenté l'évolution des suites $\left(J(m_p)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(m_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ en prenant deux paramètres différents ($\alpha_0 = 0,2$ et $\alpha_1 = 0,67$).

Dans la figure de gauche, on représente l'évolution de $J(m_p)$ en fonction de p, et dans la figure de droite on a représenté l'évolution de points m_p dans le plan, en reliant les points successifs.



Évolution de $J(m_p)$ en fonction de p



Évolution des points m_p

Commenter ces courbes, et déterminer qualitativement lequel des deux α ne vérifie pas les hypothèses de l'énoncé (il n'y en a qu'un seul).

a) Conjecturer la valeur de m, sachant que m est à coordonnées entières.

b) Vérifier que les conditions de l'énoncé sont bien vérifiées, et que les résultats expérimentaux sont en adéquation avec ce qui a été démontré dans les questions précédentes.

Problème B
Étude des lois stables, événements exceptionnels

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
L'objet de ce problème est la recherche et l'étude de lois possédant une propriété, dite de stabilité, qui intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes satisfaisant une certaine invariance d'échelle.

- Soit X une variable aléatoire réelle. On dit qu'une suite $\left(X_k\right)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires est une suite de copies de X si $\left(X_k\right)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables indépendantes ayant toutes même loi que X.
- On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi stable si il existe une suite réelle strictement positive $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour toute suite $\left(X_k\right)_{k\geqslant 1}$ de copies de X et pour tout entier n supérieur ou égal $1, X_1+\ldots+X_n$ et $a_n X$ ont même loi. On vérifie facilement l'unicité de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ si X n'est pas nulle presque sûrement. On dira alors que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est la suite associée à la loi de X.

On admettra que

$$\forall A \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \arctan A + \arctan \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2}$$

où l'expression arctan désigne la fonction réciproque de la restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

I. Un résultat sur certaines suites positives

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

- pour tout couple d'entiers $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $u_{mn} = u_m u_n$,
- il existe un réel strictement positif A tel que, pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, si $m \leqslant n$, alors $u_m \leqslant A u_n$.

On veut montrer qu'il existe un réel positif α tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^\alpha$.

23. **a)** Montrer que $u_1 = 1$.

b) Montrer que, pour tout couple $(r,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $u_{r^k} = {u_r}^k$.

24. Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Montrer qu'il existe un réel α_r tel que, pour tout entier n de la forme r^k, où k est un entier positif, $u_n = n^{\alpha_r}$. Exprimer α_r en fonction de r et de u_r.

25. Soit $(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^{*2}, r_2 > r_1 \geqslant 2$. On introduit alors les réels α_{r_1} et α_{r_2} définis selon la question précédente.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier ℓ tel que ${r_2}^k \leqslant {r_1}^\ell < {r_2}^{k+1}$.

b) En déduire que $\left({r_2}^k\right)^{\alpha_{r_2}} \leqslant A\left({r_2}^{k+1}\right)^{\alpha_{r_1}}$ et $\left({r_2}^k\right)^{\alpha_{r_1}} \leqslant A\left({r_2}^{k+1}\right)^{\alpha_{r_2}}$

c) En faisant tendre k vers l'infini, déduire l'égalité $\alpha_{r_1} = \alpha_{r_2}$. Conclure.

II. Deux exemples de lois stables

26. Soit X, une variable aléatoire de loi normale centrée $\mathscr{N}(0, \sigma^2)$.
Justifier que X suit une loi stable. Préciser la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ associée.

- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy de paramètre $a \in \mathbb{R}_*^+$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$ si une densité est donnée par

$$f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}.$$

On admet[1] que si X et X′ désignent deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé avec $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$, $X' \hookrightarrow \mathscr{C}(a')$ alors

$$X + X' \hookrightarrow \mathscr{C}(a+a').$$

27. Soient $\lambda, a \in \mathbb{R}_*^+$ et $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$, reconnaître la loi de λX. Que dire si $\lambda \in \mathbb{R}_*^-$?

28. Soient $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$. En déduire que X suit une loi stable.

1. Voir le sujet de l'année dernière.

III. Les événements exceptionnels / les cygnes noirs

Du fait de la décroissance rapide à l'infini de la fonction densité des variables gaussiennes, celles-ci n'accordent que peu d'importance aux valeurs extrêmes. Aussi, pour inclure, dans un modèle mathématique, l'éventualité de phénomènes extrêmes, on est amené à privilégier des lois dont la fonction densité décroît moins vite à l'infini. Le but de cette partie est d'étudier ce qu'il en est pour la loi de Cauchy.
Dans cette partie, $\left(X_i\right)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Cauchy de paramètre 1.
On dira qu'un événement exceptionnel s'est produit avant l'instant n, si il existe un entier k inférieur ou égal à n tel que, pour tout entier i inférieur ou égal à n et différent de k, $\left|X_k\right| > 2\left|X_i\right|$. Autrement dit, à l'instant n, la variable la plus forte de l'histoire (en valeur absolue) est supérieure au double de chacune des autres variables. On appellera E_n un tel événement. Ainsi,

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n}\left(\bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} \left[\left|X_k\right| > 2\left|X_i\right|\right]\right).$$

29. Montrer que :

$$\mathbf{P}(E_n) = n\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=2}^{n}\left[|X_1| > 2\left|X_i\right|\right]\right).$$

30. En déduire que :

$$\forall A\in\mathbb{R}_*^+,\qquad \mathbf{P}(E_n) \geqslant n\mathbf{P}\left([|X_1|>2A] \cap \left[\bigcap_{i=2}^{n}\left[\left|X_i\right| < A\right]\right]\right).$$

31. Montrer que si $X \hookrightarrow \mathscr{C}(1)$ alors pour tout $A\in\mathbb{R}_*^+$, $\qquad \mathbf{P}(|X|>A) = \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{A}$.

32. Soient $\lambda>0$, et n assez grand pour que $\frac{\pi\lambda}{2n} < \frac{\pi}{2}$. En choisissant $A = \frac{1}{\tan\frac{\pi\lambda}{2n}}$, montrer que

$$\mathbf{P}(E_n) \geqslant n\mathbf{P}\left(|X_1| > \frac{2}{\tan\frac{\pi\lambda}{2n}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} \qquad (\bullet)$$

33. **a)** Soient $\varepsilon\in\mathbb{R}_*^+$ et $\lambda\in\mathbb{R}_*^+$. Montrer que, pour tout entier n assez grand, $\mathbf{P}(E_n) > \dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda} - \varepsilon$.
On pourra étudier la limite lorsque $n\to+\infty$ du membre de droite dans l'inégalité $(\bullet)$.
b) En déduire que, pour tout entier n assez grand, $\mathbf{P}(E_n) > \frac{1}{6}$.

- **Estimation de $\mathbf{P}(E_n)$ avec python**

34. **a)** Soit F, la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi de Cauchy de paramètre 1. Justifier que $F : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ réalise une bijection et expliciter F^{-1}.
b) Démontrer que si U suit une loi uniforme sur $]0;1[$, alors $F^{-1}(U)$ suit une loi de Cauchy de paramètre 1.

35. En déduire un programme python qui prend en argument $p\in\mathbb{N}^*$ et renvoie une matrice ligne à p coefficients dont chaque coefficient est une réalisation d'une loi de Cauchy de paramètre 1.

36. **a)** Écrire un programme python qui prend en argument un réel x et une matrice ligne $L = [\ell_1,\cdots,\ell_p]$ et qui renvoie 1 si x est strictement supérieur au double de tous les coefficients de L (pour tout $i\in[\![1;p]\!]$, $x>2\ell_i$), dans le cas contraire le programme renvoie 0.
b) En utilisant la relation démontrée à la question 29, en déduire un programme qui prend en argument n et renvoie une approximation de $\mathbf{P}(E_n)$.

IV. Le nombre a_n est une puissance de n

Soit X une variable aléatoire suivant une loi stable. Soit $\left(X_k\right)_{k\geqslant1}$ une suite de copies de X et $\left(a_k\right)_{k\geqslant1}$ la suite associée à la loi de X.

- **Le cas symétrique**

Une variable aléatoire X est dite symétrique si elle a la même loi que la variable $-X$. Autrement dit, pour tout intervalle $I\subset\mathbb{R}$, $\mathbf{P}(X\in I) = \mathbf{P}(-X\in I)$ (exemple : une variable gaussienne centrée).

Dans cette section, on suppose X presque sûrement non nulle et symétrique.

37. **a)** Montrer que $\mathbf{P}(X>0) = \frac{1}{2}\left(1-\mathbf{P}(X=0)\right)$.
b) Montrer qu'il existe $\mu>0$ tel que $\mathbf{P}(X>\mu)>0$.

38. **a)** Montrer que, pour tout couple $(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}$, $a_{m+n}X$ a même loi que $a_mX_1 + a_nX_2$.
b) En déduire que, pour tout k-uplet d'entiers $\left(m_1,\ldots,m_k\right)$ non nuls, $a_{m_1+\ldots+m_k}X$ a même loi que $a_{m_1}X_1+\ldots+a_{m_k}X_k$.
c) En prenant tous les entiers m_i égaux à un même entier ℓ, montrer que $a_{k\ell} = a_k a_\ell$.

39. **a)** En considérant l'événement $[X_1 \geqslant 0] \cap [X_2 > t]$, montrer en utilisant la question 39.a), que pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, et pour tout $t > 0$,

$$\mathbf{P}\left(X > \frac{a_n}{a_{m+n}} t\right) \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{P}(X > t).$$

b) En utilisant la question 38., montrer que l'ensemble $\mathscr{E} = \left\{\dfrac{a_n}{a_{n+m}} : (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}$ est majoré.

c) En déduire l'existence d'un réel α tel que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = n^{\alpha}$.

B. On suppose que X suit une loi stable à densité, mais on ne suppose plus que X est symétrique.

40. **a)** Montrer que la variable $X_1 - X_2$ est symétrique.

b) Montrer que $X_1 - X_2$ suit une loi stable. Soit $(b_n)_{n \geqslant 1}$ la suite associée à la loi de $X_1 - X_2$. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = b_n$. Conclure.

Bonus Reconnaître Augustin Cauchy et Carl Friedrich Gauss. Préciser les siècles.



– FIN –

DS 6 A - solution

Exercice

1.2.3 Exercice du cours.

4.a) La matrice A est symétrique donc diagonalisable.

4.b) Dans ce cas, la matrice A est semblable à la matrice

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

La trace est invariante par similitude, donc

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(D) = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Considérons maintenant la fonction

$$x \mapsto P(x) = \det(A - xI_2).$$

En développant, on constate que P est une fonction polynomiale de degré 2. Le coefficient dominant est 1 et le coefficient constant est $P(0) = \det(A)$. De plus, P admet deux racines données par les valeurs propres λ_1, λ_2. On donc aussi

$$P(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

On obtient alors

$$\det(A) = P(0) = \lambda_1\lambda_2.$$

> On peut montrer que le déterminant est aussi invariant de similitude. On retrouve $\det(A) = \det(D) = \lambda_1\lambda_2$.

4.c) D'après ce qui précède

$$\begin{cases} r + t & = \mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ rt - s^2 & = \det(A) = \lambda_1\lambda_2. \end{cases}$$

La matrice A est définie positive si et seulement si son spectre est inclus strictement dans $\mathbb{R}_*^+$ si et seulement si

$$r + t > 0 \quad \text{et} \quad rt - s^2 > 0.$$

Notons que si $rt > s^2$ alors $rt > 0$ et r et t sont de même signe. On obtient bien alors l'équivalence

$$A \in \mathscr{S}_2^{++} \iff r > 0, \quad rt > s^2.$$

5.

```
def positive(A):
    if A[0,1]!=A[0,1]:
        return 'La matrice n est pas symé
            trique'

    if A[0,0]>0 and A[0,0]*A[1,1]>A
        [0,1]**2:
        return 'La matrice est symétrique
            définie positive'
    return 'La matrice est symétrique mais
        pas définie positive'
```

6. Le programme tire au hasard des matrices colonnes (dont les coefficients sont tirés au hasard dans $[0;1]$) et teste si l'inégalité

$${}^t XAX > 0$$

est vérifiée. Lorsque le test répond `'NON'`, il est certain que la matrice n'est pas définie positive. Par contre, lorsque le programme 'OUI', on peut seulement affirmer qu'il y a une grande probabilité que la matrice soit définie positive. Notons que plus la taille de la matrice est importante, plus le nombre de tests doit être important.

Problème A

d'après EDHEC 2013

7. Soient x, $y \in E$. Notons

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f), \quad x = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ et } y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$$

de sorte que $\mathscr{B}$ étant une b.o.n

$$\begin{aligned} \langle f(x), y\rangle &= {}^t(MX)Y \\ &= {}^tX{}^tMY = {}^tX\left({}^tMY\right) \\ \langle f(x), y\rangle &= \left\langle x, f^*(y)\right\rangle. \end{aligned}$$

- Ensuite, pour $x \in E$, en appliquant la formule précédente avec $y \leftarrow f(x)$

$$\left\langle f^* \circ f(x), x\right\rangle = \left\langle f(x), f(x)\right\rangle = \left\|f(x)\right\|^2.$$

8. Considérons un second endomorphisme de E noté g tel que

$$\forall x, y \in E, \qquad \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$

Dès lors pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} \left\|f^*(x) - g(x)\right\|^2 &= \left\langle f^*(x) - g(x), f^*(x) - g(x)\right\rangle \\ &= \left\|f^*(x)\right\|^2 + \|g(x)\|^2 - 2\left\langle f^*(x), g(x)\right\rangle. \end{aligned}$$

Or

$$\left\|f*(x)\right\|^2 = \left\langle f^*(x), f^*(x)\right\rangle = \left\langle x, f \circ f^*(x)\right\rangle = \left\langle g(x), f^*(x)\right\rangle.$$

De même

$$\|g(x)\|^2 = \langle g(x), g(x)\rangle = \langle x, f \circ g(x)\rangle = \left\langle f^*(x), g(x)\right\rangle.$$

Par conséquent $\left\|f^*(x) - g(x)\right\|^2 = 0$ et $f^*(x) = g(x)$. Ce résultat étant valable pour tout $x \in E$

$$f^* = g.$$

L'unicité est prouvée.

9.• On a en notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de M

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} M &= \dim \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) \\ &= \dim \operatorname{Vect}(C_2, C_3) \quad (\text{car } C_1 = 0_{n,1}) \\ \operatorname{rg} M &= 2 \end{aligned}$$

car C_1 et C_2 sont non colinéaires. Ainsi

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - 1.$$

L'image est bien un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

• On a pour tout $x \in \operatorname{Im} f$, $f(x) \in \operatorname{Im} f$. L'image de f est donc stable par f.
Ce qui conclut.

10.a) On constate que

$$\operatorname{rg}(f - \mathrm{id}_E) = \operatorname{rg}(M - I_3) = 1$$

donc d'après la formule du rang, 1 est valeur propre et $\dim E_1(f) = 2$. De plus

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc 4 est valeur propre. Par un compte de dimension, il n'y a pas d'autre valeur propre que 1 et 4.

10.b) On a vu que

$$\dim \ker(f - \mathrm{id}_E) = \dim \mathbb{R}^3 - 1.$$

C'est donc bien un hyperplan.

• Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. On a donc $f(x) = x$ et

$$f(f(x)) = f(x) = f(x) - x = 0_E.$$

D'où $f(x) \in \operatorname{Ker} f - \mathrm{id}_E$. D'où la stabilité par f.

Plus généralement, tout espace propre de f est stable par f.

• En conclusion, f admet bien une hyperplan stable.

11. Une matrice est inversible si et seulement si sa transposée l'est. Par conséquent, avec $M = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$. La matrice $M - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si

$$^t(M - \lambda I_n) = {}^tM - \lambda I_n$$

est non inversible. Dit autrement λ est valeur propre de M (et de f) si et seulement si λ est valeur propre de ${}^tM$ (et de f^*).

12. On sait que dans le cadre d'un espace euclidien

$$\dim \operatorname{Vect}(u)^{\perp} = \dim E - \dim \operatorname{Vect}(u) = \dim E - 1.$$

C'est donc un hyperplan.

• Soit $x \in \operatorname{Vect}(u)^{\perp}$. Montrons que $f(x) \in \operatorname{Vect}(u)^{\perp}$. Pour cela, il suffit de vérifier que $\langle f(x), u\rangle = 0$. Or

$$\begin{aligned} \langle f(x), u\rangle &= \langle x, f^*(u)\rangle \\ &= \langle x, \lambda u\rangle = \lambda\langle x, u\rangle = 0 \end{aligned}$$

car $x \in \operatorname{Vect}(u)^{\perp}$. Ce qui conclut.

13.a) Soient $x, y \in E$. Par définition de l'adjoint

$$\begin{aligned} \langle f^* \circ f(x), y\rangle &= \langle f(x), f(y)\rangle \\ &= \langle x, f^* \circ f(y)\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi $f^* \circ f$ est un endomorphisme symétrique. De plus pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(f^* \circ f)$ et x un vecteur propre associé à λ.

$$f^* \circ f(x) = \lambda x$$

et à l'aide de la question 7

$$\lambda \underbrace{\|x\|^2}_{>0} = \langle f^* \circ f(x), x\rangle = \|f(x)\|^2 \geqslant 0.$$

D'où $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\operatorname{Sp}(f^* \circ f) \subset \mathbb{R}^+$.

13.b) C'est une conséquence du théorème spectral.

14. Les relations

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad f^* \circ f(e'_i) = \lambda_i e'_i$$

se traduisent matriciellement

$$^tAA E'_i = \lambda_i E'_i \quad \text{où} \quad E'_i = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_i).$$

Dans ce cas

$$Q = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = [E'_1, E'_2, \ldots, E'_n]$$

est orthogonale ($\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$ sont orthonormées) et par la formule de changement de bases

$$\begin{aligned} {}^tAA &= P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^* \circ f) {P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}}^{-1} \\ &= QD{}^tQ \qquad (\text{car } Q^{-1} = {P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}}^{-1} = {}^tQ) \end{aligned}$$

avec $\qquad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

car $\mathscr{B}'$ est une base constituée de vecteurs propres de $f^* \circ f$. Si on pose

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$$

bien possible car $\operatorname{Sp}(f^* \circ f) \subset \mathbb{R}^+$. On a bien $\Delta^2 = D$ et

$$^tAA = Q\Delta^2 {}^tQ.$$

15. Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$ avec $i \neq j$

$$\begin{aligned} \langle f(e'_i), f(e'_j)\rangle &= \langle e'_i, f^* \circ f(e'_j)\rangle \\ &= \langle e'_i, \lambda_j e'_j\rangle = 0 \end{aligned}$$

car $\mathscr{B}'$ est une famille orthogonale. La famille $\left(f\left(e'_i\right)\right)_i$ est donc bien orthogonale. De plus,

$$\begin{aligned}\left\|f\left(e'_j\right)\right\|^2 &\left\langle f\left(e'_j\right), f\left(e'_j\right)\right\rangle \\ &= \left\langle e'_j, f^* \circ f\left(e'_j\right)\right\rangle \\ \left\|f\left(e'_j\right)\right\|^2 &= \lambda_j \left\langle e'_j, e'_j\right\rangle = \lambda_j.\end{aligned}$$

Comme $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ et $\left\|f\left(e_j\right)\right\| \geqslant 0$, on a bien

$$\left\|f\left(e'_j\right)\right\| = \mu_j.$$

16. Comme A est inversible, ${}^t\mathrm{A}$ puis ${}^t\mathrm{AA}$ aussi. On en déduit que 0 n'appartient pas au spectre de $f^* \circ f$

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad \lambda_i \neq 0$$

puis $$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad \mu_j = \sqrt{\lambda_i} \neq 0.$$

17. D'après la question 15, on a directement

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!], \qquad \left\langle \frac{1}{\mu_i} f\left(e'_i\right), \frac{1}{\mu_j} f\left(e'_j\right)\right\rangle = \delta_{ij}.$$

D'où le résultat.
Comme $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ et $\left\|f\left(e_j\right)\right\| \geqslant 0$, on a bien

$$\left\|f\left(e'_j\right)\right\| = \mu_j.$$

18. À l'aide de la formule de changement de bases

$$\begin{aligned}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{AQ} &= \mathrm{P}_{\mathscr{C}\mathscr{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}\mathscr{B}'}(f).\end{aligned}$$

Or par construction, pour tout $e'_j \in \mathscr{B}'$

$$f\left(e'_j\right) = \mu_j \underbrace{\frac{1}{\mu_j} f\left(e'_j\right)}_{\in\mathscr{C}}.$$

Matriciellement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(f) = \Delta$. D'où

$$\mathrm{R}^{-1}\mathrm{AQ} = \Delta \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \mathrm{R}\Delta\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{R}\Delta{}^t\mathrm{Q}.$$

Précisons que R est orthogonale en tant que matrice de passage entre deux bases orthonormées.

Problème B

d'après EDHEC 2009

---

19. Comme $t \leqslant x < 1$, on a $t \neq 1$ et d'après les résultats sur les sommes géométriques

$$\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

En intégrant la relation précédente

$$\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, on a aussi

$$\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{n}\int_0^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Finalement, on retrouve bien

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{t^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^p}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

20.a) Commençons par encadrer l'intégrande. Pour tout $t \in [0;x]$

$$0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{x^n}{1-0} = x^n.$$

d'où $$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x x^n\,\mathrm{d}t = x\cdot x^n = x^{n+1}.$$

Comme $x \in [0;1[$, $x^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient par le théorème d'encadrement

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

20.b) Par passage à la limite en utilisant les deux questions précédentes

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{t^p}{p} = -\ln(1-x).$$

On en déduit que la série $\sum \frac{t^p}{p}$ converge et

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{t^p}{p} = -\ln(1-x).$$

21. Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \leqslant x^{n+1}.$$

Pour $x \in [0;1[$, la série géométrique $\sum x^{n+1}$ est convergente. Par le critère de comparaison la série $\sum x^{n+1}/(n(n+1))$ est donc aussi convergente.

22. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^n}{n} - \sum_{k=2}^{\mathrm{N}+1}\frac{x^k}{k} \\ &= x\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^n}{n} - \sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1}\frac{x^k}{k} + x.\end{aligned}$$

On peut passer à la limite en utilisant les questions précédentes

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} -x\ln(1-x) - (-\ln(1-x)) + x.$$

C'est-à-dire
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=x+(1-x)\ln(1-x).$$

23.a) Soit $x\in\mathbb{R}_*^+$
$$\begin{aligned}1-F(x)=1-\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_{x}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

L'intégrande étant positive et le bornes dans le bon sens, on peut déjà affirmer que $1-F(x)\geqslant 0$. Si $1-F(x)=0$, comme f est continue positive sur $[x;+\infty[$, on en déduire que f est identiquement nulle sur $[x;+\infty[$. Absurde, par hypothèse f est strictement positive sur $[x;+\infty[$. Finalement
$$1-F(x)>0.$$

23.b) ⟶ g est positive.
Pour $x\geqslant 0$, on a $1-F(x)\leqslant 1$ et $\ln(1-F(x))\leqslant 0$. Puisque f est positive (c'est une densité, on a $g(x)-f(x)\ln(1-F(x))\geqslant 0$.
Si $x\in\mathbb{R}^-$, on a directement $g(x)=0\geqslant 0$.

⟶ g est continue sur $\mathbb{R}^*$.
En effet, g est constante sur $\mathbb{R}_*^-$, donc continue sur cet intervalle. Et g peut s'écrire comme une composition et un produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_*^+$, elle est donc aussi continue sur cet intervalle.

⟶ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,\mathrm{d}t=1.$
Soit $A\in\mathbb{R}^+$, intégrons par parties
$$\int_{-\infty}^{A}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{A}-f(t)\ln(1-F(t))\,\mathrm{d}t$$
en considérant les fonctions $\mathscr{C}^1$
$$u:t\mapsto 1-F(t),\qquad v:t\mapsto -\ln(1-F(t)).$$
On obtient
$$\begin{aligned}\int_{0}^{A}f(t)\ln(1-F(t))\,\mathrm{d}t&=\left[(1-F(t))\ln(1-F(t))\right]_0^A+\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\\&=(1-F(A))\ln(1-F(A))+\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Lorsque $A\to+\infty$, on a $1-F(A)\to 0$. Or, nous savons, par croissances comparées et composition que
$$(1-F(A))\ln(1-F(A))\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$
On a aussi $\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=1.$

D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{A}g(t)\,\mathrm{d}t\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}1.$

Ce qui conclut.

24.a) Une densité d'une loi exponentielle de paramètre λ est donnée par
$$f:t\mapsto\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t\geqslant 0\\ 0 & \text{si } t<0.\end{cases}$$
Cette densité est bien nulle sur $]-\infty,0[$, et continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$. Elle vérifie donc les conditions imposées dans cette partie.

24.b,c) Dans ce cas, pour tout réel x
$$g(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}\lambda x & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
Par transformation affine, on vérifie qu'une densité de λY est donnée par
$$x\mapsto\frac{1}{\lambda}g\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\begin{cases}xe^{-x} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
Sachant que $\Gamma(2)=1!=1$, on reconnaît alors la densité d'une loi $\gamma(2)$. On sait alors que λY admet une espérance et une variance avec
$$\mathbf{E}(\lambda Y)=2\quad\text{et}\quad\mathbf{V}(\lambda Y)=2.$$
On en déduit que
$$\mathbf{E}(Y)=\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}(\lambda Y)=\frac{2}{\lambda}\quad\text{et}\quad\mathbf{V}(Y)=\frac{1}{\lambda^2}\mathbf{V}(\lambda Y)=\frac{2}{\lambda^2}.$$

25. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Par télescopage
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{N+1}.$$
Par passage à la limite, la série $\sum 1/(n(n+1))$ converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

26. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in\mathbb{R}$
$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[N=n]}(Z\leqslant x)&=\mathbf{P}_{[N=n]}\mathbf{P}(\max(X_0,\dots X_n)\leqslant x)\\&=\mathbf{P}\mathbf{P}(\max(X_0,\dots X_n)\leqslant x)\quad(\text{indépendance } N, X_i)\\&=\mathbf{P}([X_0\leqslant x]\cap\dots\cap[X_n\leqslant x])\\&=\prod_{i=0}^{n}\mathbf{P}(X_i\leqslant x)\quad(\text{indépendance})\end{aligned}$$
$$\mathbf{P}_{[N=n]}\mathbf{P}(Z\leqslant x)=F(x)^{n+1}\quad(\text{égalité en loi}).$$
De plus, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([N=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :
$$\begin{aligned}F_Z(x)&=\mathbf{P}(Z\leqslant x)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(N=n)\mathbf{P}_{[N=n]}(Z\leqslant x)\\F_Z(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{F(x)^{n+1}}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

> Retenir ici la démarche d'appliquer la formule des probabilités totales pour se ramener à un cas classique du cours.

27. D'après la question 22., on obtient
$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad F_Z(x)=F(x)+\big(1-F(x)\big)\ln\big(1-F(x)\big).$$

28. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0;1[$, donc par somme et composition de fonctions continues, F_Z l'est également.

De plus, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0, et donc de même, par opérations usuelles, F_Z est $\mathscr{C}^1$ sauf éventuellement en 0. Par définition, Z est une variable à densité. Une densité f_Z est obtenue par dérivation là où c'est possible. On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= f(x) - \left(1 - F(x)\right)\frac{f(x)}{1-F(x)} - f(x)\ln\left(1-F(x)\right) \\ &= -f(x)\ln\left(1-F(x)\right). \end{aligned}$$

En particulier, pour $x < 0$, on a $f_Z(x) = 0$.

Problème C

d'après Ecricome 2005 pour les parties I et II

---

29. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^\alpha}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$. On a donc une intégrale généralisée en $+\infty$. Or

$$\frac{1}{\left(1+t^2\right)^\alpha} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2\alpha}}.$$

Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^\infty 1/t^{2\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$. D'après le critère d'équivalence d'intégrales généralisées de fonctions positives, J_α converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

30. Soit $A \in \mathbb{R}_*^+$. Intégrons par parties sachant que les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^{\alpha+1}} &= \left[-\frac{1}{2\alpha}\frac{t}{\left(1+t^2\right)^\alpha}\right]_0^A + \int_0^A \frac{1}{2\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^\alpha} \\ &= -\frac{1}{2\alpha}\frac{A}{\left(1+A^2\right)^\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^\alpha}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite $A \to +\infty$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^\alpha} \\ &= \frac{1}{2\alpha}J_\alpha. \end{aligned}$$

- Ensuite

$$\begin{aligned} J_{\alpha+1} &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^{\alpha+1}} \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1+t^2}{\left(1+t^2\right)^{\alpha+1}} - \frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^{\alpha+1}}\right)\mathrm{d}t \\ &= J_\alpha - \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{\left(1+t^2\right)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \\ J_{\alpha+1} &= J_\alpha - \frac{1}{2\alpha}J_\alpha = \frac{2\alpha-1}{2\alpha}J_\alpha. \end{aligned}$$

31. Soit $A \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^A = \mathrm{Arctan}(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Par passage à la limite

$$J_1 = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

On a ensuite le produit télescopique

$$\frac{J_n}{J_1} = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{J_{k+1}}{J_k} = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-1)}{2k}.$$

Or $\prod_{k=1}^{n-1} 2k = 2^{n-1}(n-1)!$ et

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n-1}(2k-1) &= \prod_{\substack{i=1\\ i \text{ impair}}}^{2n-2} i = \frac{\prod_{i=1}^{2n-2} i}{\prod_{\substack{i=1\\ i \text{ pair}}}^{2n-2} i} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{2n-2} i}{\prod_{k=1}^{n-1}(2k)} = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$J_n = \frac{(2n-2)!}{\left(2^{n-1}(n-1)!\right)^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

32. La fonction f_n est bien positive et continue sur $\mathbb{R}$. Justifions que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Le changement de variable affine

$$y = \frac{t}{\sqrt{n}}, \quad \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{d}t$$

dans l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{d}t$$

donne $$2\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+y^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{n}\,J_{\frac{n+1}{2}}.$$

D'après ce qui précède, on a donc bien les convergences de ces intégrales et donc l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{n}\,J_{\frac{n+1}{2}} = k_n.$$

Ainsi $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

La fonction f_n est bien une densité de probabilité.

33. La variable X admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

converge absolument. Comme l'intégrande $t \in \mathbb{R} \mapsto t f_n(t)$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$ et positive sur $\mathbb{R}^+$, il suffit de justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Or

$$t f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k_n}\frac{t}{t^{n+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k_n}\frac{n^{\frac{n+1}{2}}}{t^n}.$$

Par le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale recherchée est de même nature que l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n}$. On a donc existence d'une espérance si et seulement si $n > 1$.

Dans le cas de convergence, l'imparité de $t \mapsto t f_n(t)$ donne alors

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Il est nécessaire de justifier la convergence de l'intégrale avant d'utiliser l'argument de parité.

34. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\mathrm{X}) &= \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n}\mathrm{J}_{\frac{n+1}{2}}} \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^{\frac{n+1}{2}}} dy \\
&= \frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{n}\mathrm{J}_{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{2\left(\frac{n+1}{2}-1\right)} \mathrm{J}_{\frac{n+1}{2}-1} \\
&= \frac{1}{\mathrm{J}_{\frac{n+1}{2}}} \frac{n}{n-1} \mathrm{J}_{\frac{n-1}{2}} \\
&= \frac{2\times\frac{n-1}{2}}{2\times\frac{n-1}{2}-1} \frac{n}{n-1} \\
\mathbf{V}(\mathrm{X}) &= \frac{n}{n-2}.
\end{aligned}$$

35.a) Soit $t \in \mathbb{R}$

$$g_n(t) = \exp\left(-\frac{(n+1)}{2}\right)\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right).$$

Comme $t^2/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{t^2}{n}.$$

Par produit

$$-\frac{(n+1)}{2}\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} -\frac{n+1}{n}\frac{t^2}{2} \sim -\frac{t^2}{2}.$$

Équivalent que l'on peut traduire ici par

$$-\frac{(n+1)}{2}\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{t^2}{2}.$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on obtient

$$g_n(t) = \exp\left(-\frac{(n+1)}{2}\right)\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Un calcul classique. Tout ce qui pourra être compris par le correcteur par une sommation d'équivalents ou une composition d'équivalents sera durement sanctionné.

35.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$k_{2n+3} = 2\sqrt{2n+3}\mathrm{J}_{n+1} \sim 2\sqrt{2n}\mathrm{J}_{n+1},$$

Or par la formule de Stirling

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_{n+1} &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}(2n/\mathrm{e})^{2n}}{2^{2n}\left(\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n\right)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&\sim \frac{2\sqrt{\pi n}\cdot 2^{2n}\cdot n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{2^{2n}2\pi n\cdot n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}\frac{\pi}{2} \\
\mathrm{J}_{n+1} &\sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Puis $$k_{2n+3} \underset{n\infty}{\sim} 2\cdot\sqrt{2n}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = \sqrt{2\pi}.$$

D'où $$k_{2n}+3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}.$$

ou encore $$k_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}.$$

De plus, en reprenant la définition de J_α, on vérifie que

$$\mathrm{J}_n \leqslant \mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}} \leqslant \mathrm{J}_{n+1}$$

Ce qui donne

$$\frac{2n}{2n-1} = \frac{\mathrm{J}_n}{\mathrm{J}_{n+1}} \leqslant \frac{\mathrm{J}_{n+1/2}}{\mathrm{J}_{n+1}} \leqslant 1.$$

On en déduit par encadrement que

$$\frac{\mathrm{J}_{n+1/2}}{\mathrm{J}_{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Ce que l'on peut réécrire $\mathrm{J}_{n+1} \sim \mathrm{J}_{n+1/2}$. On en déduit

$$\frac{k_{2n+1}}{k_{2n}} = \frac{2\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{2n}}\frac{\mathrm{J}_{n+1}}{\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}} \sim 1$$

et $k_{2n} \sim k_{n+1} \sim \sqrt{2\pi}$. D'après les résultats sur les suites extraites, la suite $(k_n)_n$ est convergente et

$$k_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}.$$

Concluons, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f_n(t) = \frac{g_n(t)}{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

On reconnaît l'expression de la densité continue de la bi normale centrée réduite.

Cela calcul prouve la convergence en loi de la suite de variables $(\mathrm{T}_n)_n$ vers une variable aléatoire T suivant une loi normale centrée réduite.

36.

```
def student(n):
    x=rd.normal(0,1)
     # renvoie une réalisation de X0
    Y=rd.normal(0,1,n) # renvoie une ré
        alisation de X1...Xn
    d=np.sqrt(np.sum(Y**2)) # ici Y**2 est
         compris comme le carré de chaque
        coefficient de Y
    return np.sqrt(n)*x/d
```

37. Par définition

$$\mathrm{T}_n = \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\mathrm{X}_0}{\sqrt{\mathrm{U}_n}}.$$

Par le lemme des coalitions X_0 et $1\sqrt{\mathrm{U}_n}$ sont indépendantes donc T_n admet une espérance et

$$\mathbf{E}(\mathrm{T}_n) = \sqrt{\frac{n}{2}}\quad \mathbf{E}(\mathrm{X}_0)\times\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{U}_n}}\right) = 0$$

car X_0 suit une loi normale centrée : $\mathbf{E}(\mathrm{X}_0) = 0$.

- De plus, d'après la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathrm{T}_n) &= \mathbf{E}\left(\mathrm{T}_n{}^2\right) - \mathbf{E}(\mathrm{T}_n)^2 = \mathbf{E}\left(\mathrm{T}_n{}^2\right)\\ &= \frac{n}{2}\mathbf{E}\left(\frac{\mathrm{X}_0{}^2}{\mathrm{U}_n}\right)\\ &= \frac{n}{2}\mathbf{E}\left(\mathrm{X}_0{}^2\right)\cdot\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathrm{U}_n}\right) \quad \text{(indépendance)}\\ \mathbf{V}(\mathrm{T}_n) &= \frac{n}{2}\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathrm{U}_n}\right).\end{aligned}$$

En effet

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{X}_0{}^2\right) = \mathbf{V}(\mathrm{X}_0) + \mathbf{E}(\mathrm{X}_0)^2 = 1 + 0^2 = 1.$$

38. La variable $\mathrm{X}_1^2/2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Notons G sa fonction de répartition. Pour $x \in \mathbb{R}_*^-$

$$\mathrm{G}(x) = 0.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(x) &= \mathbf{P}\left(\mathrm{X}_1{}^2/2 \leqslant x\right) = \mathbf{P}\left(\mathrm{X}_1{}^2 \leqslant 2x\right)\\ &= \mathbf{P}\left(-\sqrt{2x} \leqslant \mathrm{X}_1 \leqslant \sqrt{2x}\right)\\ &= \Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(-\sqrt{2x})\\ \mathrm{G}(x) &= 2\Phi(\sqrt{2x}) - 1.\end{aligned}$$

La fonction G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car :

- G est constante sur $\mathbb{R}_*^-$.
- G est composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

De plus G est continue à droite 0 en tant que fonction de répartition et

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{G}(x) = \mathrm{G}(0) = \lim_{x\to 0^-} 0 = \lim_{x\to 0^-} \mathrm{G}(x)$$

La fonction G est continue en 0. Finalement, G est la fonction de répartition d'une variable à densité et une densité est obtenue par dérivation (là où c'est possible).

$$\begin{aligned}g(x) &= 0 \quad \text{si } x \leqslant 0\\ g(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}\cdot\Phi'(\sqrt{2x}) \text{ si } x > 0\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{1/2}\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

> Noter qu'il n'est pas nécessaire de justifier que $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$. En effet, g est à densité et nulle sur $\mathbb{R}^-$. L'égalité
>
> $$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}}$$
>
> impose déjà la constante et $\sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$.

39. Comme les variables $\mathrm{X}_i{}^2/2$ sont mutuellement indépendantes et de loi gamma $\gamma(1/2)$, on sait alors que

$$\mathrm{U}_n \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

40. Une fonction de densité de la loi $\gamma(n/2)$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_n(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leqslant 0\\ \dfrac{1}{\Gamma(n/2)}t^{n/2-1}\mathrm{e}^{-t}.\end{cases}$$

D'après la formule de transfert

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathrm{U}_n}\right) &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{t}g_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\Gamma(n/2)}\int_0^{+\infty} t^{(n/2-1)-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\Gamma(n/2-1)}{\Gamma(n/2)}\\ \mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathrm{U}_n}\right) &= \frac{1}{n/2-1} = \frac{2}{n-2}.\end{aligned}$$

En reprenant a question 37

$$\mathbf{V}(\mathrm{T}_n) = \frac{n}{2}\frac{2}{n-2} = \frac{n}{n-2}.$$

On pourra compléter l'étude du problème par une 4ème partie qui donne une preuve du théorème pour $k = 1$.
Voir le sujet d'Ecricome pour la solution.

Partie IV : Obtention d'une loi de Cauchy à partir de lois normales

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

- Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, de fonction de répartition F. On notera G la fonction de répartition de la variable aléatoire $|Y|$.

1. On suppose dans cette question que Y est une variable aléatoire de densité f, continue sur $\mathbb{R}$.
Exprimer une densité de $-Y$ à l'aide de f, et montrer que Y et $-Y$ ont même loi (c'est-à-dire même fonction de répartition) si et seulement si f est paire. On suppose cette condition vérifiée. Exprimer G à l'aide de F, et montrer que $|Y|$ est une variable aléatoire à densité. Exprimer une densité g de $|Y|$ en fonction de f.
2. Inversement, on suppose dans cette question que $|Y|$ est une variable aléatoire de densité g et que Y et $-Y$ ont même loi. Montrer que pour tout réel x, $\mathbf{P}(Y = x) = 0$, puis exprimer $F(x)$ en fonction de $F(-x)$. Exprimer $F(x)$ en fonction de G et de x (on pourra distinguer deux cas : $x < 0$ et $x \geqslant 0$). En déduire que Y est une variable à densité, et exprimer une densité f de Y en fonction de g.

3. Soit c un réel strictement positif. À l'aide du changement de variable $u = e^{2t}$, montrer que l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2t} e^{-\frac{ce^{2t}}{2}}\, dt \text{ converge et la calculer.}$$

4. Soient X et X′ deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\mathbf{R}^*$, de même densité φ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$
a. Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln|X|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est la densité de la variable aléatoire $-Z$?
b. Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln\left|\frac{X}{X'}\right|$ est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x}+1}.$$
c. Déterminer une densité de la variable aléatoire $\left|\frac{X}{X'}\right|$, puis reconnaître la loi de $\frac{X}{X'}$.

DS 6 * - solution

Problème A

1. Justifions les différents points de la définition.

→ *Symétrie*
Comme u est un endomorphisme symétrique.

$$\varphi_u\langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \langle u(y), x\rangle = \varphi_u(y, x)$$

car $\langle,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.

→ *Bilinéarité*
La linéarité de u donne la linéarité à gauche de φ_u. La symétrie de φ_u justifie la linéarité à droite. Finalement φ_u est bien une forme bilinéaire.

→ *Définie positive*
Les conditions sur $S^{++}(E)$ permet directement de dire que φ_u est définie positive.

Finalement φ_u est bien un produit scalaire sur E.

2. Exercice du cours.

3. Soient $x, y \in E$. Il existe $a, b \in E$ tels que $u(a) = x$, $u(b) = y$

$$\begin{aligned}\left\langle u^{-1}(x), y\right\rangle &= \left\langle u^{-1}(u(a)), u(b)\right\rangle \\ &= \langle a, u(b)\rangle \\ &= \langle u(a), b\rangle \quad \text{symétrie de } u \\ \left\langle u^{-1}(x), y\right\rangle &= \left\langle x, u^{-1}(y)\right\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi u^{-1} est un endomorphisme symétrique.

- Justifions que u^{-1} est définie positif.

→ *Rédaction 1*
Rappelons le lien entre le spectre de u et celui de u^{-1}. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $x \in E \setminus \{0_E\}$

$$u(x) = \lambda x \iff \frac{1}{\lambda}x = u^{-1}(x).$$

Dès lors $\qquad \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}\left(u^{-1}\right).$

Précisons que u étant bijectif, 0 ne peut être valeur propre. On en déduit que si le spectre de u est inclus dans $\mathbb{R}^+$, il en va de même pour u^{-1}. Ainsi

$$u^{-1} \in S^{++}(E).$$

→ *Rédaction 2*
Soit $x \in E$. Posons $a = u^{-1}(x)$.

$$\left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle = \langle a, u(a)\rangle \geqslant 0$$

car $u \in S^+(E)$. De plus u étant tant défini

$$\begin{aligned}\langle a, u(a)\rangle = 0 \quad &\iff \quad 0_E = a = u^{-1}(x) \\ &\iff \quad x = 0_E.\end{aligned}$$

D'où $\qquad u \in S^{++}(E).$

4. Soit $x \in \mathbb{R}^n_\lambda(u)$ avec $\lambda \neq 0$. La condition $u(x) = \lambda x$ peut alors se réécrire

$$u\left(\frac{1}{\lambda}x\right) = x.$$

Le vecteur x admet au moins un antécédent par u, il appartient à l'image de u. On en déduit l'inclusion

$$E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u).$$

Par somme, on a aussi

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{0\}} E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u) \qquad (\bullet)$$

Or, u est un endomorphisme symétrique. Il est donc diagonalisable (dans une base orthonormée). C'est-à-dire

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E.$$

En isolant la valeur propre 0 et en rappelant que la sous-espace propre pour la valeur propre 0 est simplement le noyau

$$\ker(u) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{0\}} E_\lambda(u)\right) = E.$$

En particulier, on a les dimensions

$$\dim(\ker(u)) + \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{0\}} E_\lambda(u)\right) = \dim(E)$$

et la formule du rang donne

$$\dim(\ker(u)) + \sim \mathrm{Im}(u) = \dim(E).$$

Avec l'inclusion $(\bullet)$, on a l'égalité

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\setminus\{0\}} E_\lambda(u) = \mathrm{Im}(u)$$

et aussi

$$\ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E.$$

5. Revoir l'exercice sur l'encadrement de Rayleigh pour un endomorphisme symétrique.

6. Soient $x, y \in \mathrm{E}$

$$\begin{aligned}\varphi_v(x, u\circ v(y)) &= \langle v(x), u\circ v(y)\rangle \\ &= \langle u\circ v(x), v(y)\rangle \text{ symétrie de } u \\ &= \langle v(y), u\circ v(x)\rangle \\ \varphi_v(x, u\circ v(y)) &= \varphi_v(y, u\circ v(x)).\end{aligned}$$

Ainsi $u\circ v$ est un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire φ_v. D'après le théorème spectral, $u\circ v$ est diagonalisable.

> Noter que $u\circ v$ n'est pas toujours un endomorphisme symétrique pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On a vu en exercice que c'était le cas si et seulement si u et v commutent.

7.a) Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ la restriction du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ à $\operatorname{Im} u$. Soient $x, y \in \operatorname{Im} u$. Par symétrie de u

$$\begin{aligned}\left\langle u_1(x), y\right\rangle_1 &= \langle u(x), y\rangle \\ &= \langle x, u(y)\rangle = \left\langle x, u_1(y)\right\rangle_1.\end{aligned}$$

Ainsi u_1 est un endomorphisme symétrique pour $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$. On a aussi

$$\langle u_1(x), x\rangle_1 = \langle u(x), x\rangle \geqslant 0.$$

Avec égalité si et seulement si $x = 0$. D'où $u_1 \in \mathrm{S}^{++}(\operatorname{Im}(u))$.

7.b) Soient $x,\ y \in \operatorname{Im}(u)$

$$\begin{aligned}\varphi_{u_1^{-1}}(w(x), y) &= \left\langle u_1^{-1}\circ u\circ v(x), y\right\rangle_1 \\ &= \left\langle u\circ v(x), u_1(y)\right\rangle_1 \\ \varphi_{u_1^{-1}}(w(x), y) &= \left\langle v(x), v\circ {u_1}^{-1}(y)\right\rangle_1.\end{aligned}$$

Or $u_1^{-1}(y) \in \operatorname{Im} u$ et

$$u\circ u_1^{-1}(y) = u_1\circ u_1^{-1}(y) = y.$$

D'où

$$\begin{aligned}\varphi_{u_1^{-1}}(w(x), y) &= \langle v(x), y\rangle \\ &= \langle x, v(y)\rangle \\ &= \left\langle u\circ u_1^{-1}(x), v(y)\right\rangle \\ &= \left\langle u_1^{-1}(x), u\circ v(y)\right\rangle \\ \varphi_{u_1^{-1}}(w(x), y) &= \varphi_{u_1^{-1}}(x, w(y)).\end{aligned}$$

L'endomorphisme w est donc bien symétrique pour ce produit scalaire.

- Notons que l'on a aussi pour tout $x \in \operatorname{Im} u$

$$\varphi_{u_1^{-1}}(w(x), x) = \langle x, v(x)\rangle \geqslant 0.$$

Ainsi w est positif.

7.c) D'après le théorème spectral, w est diagonalisable et la question 2 précise que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

7.d) Soit $x \in \operatorname{Im}(u\circ v)\cap\operatorname{Ker}(u\circ v)$. On a en particulier $x \in \operatorname{Im} u$ et en reprenant le calcul précédent

$$\varphi_{u^{-1}}(w(x), x) = \langle v(x), x\rangle.$$

Comme $w(x) = u\circ v(x) = 0$, on a bien

$$\langle v(x), x\rangle = 0.$$

Soit $(e_1\dots e_n)$ une b.o.n constituée de vecteurs propres de v, on a

$$0 = \langle v(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i\left\langle e_i, x\right\rangle^2}_{\geqslant 0}.$$

D'où, pour tout indice i, $\lambda_i\left\langle e_i, x\right\rangle^2 = 0$. Si $\lambda_i \neq 0$, on a donc $\left\langle e_i, x\right\rangle = 0$. Dit autrement, x est combinaison linéaire de vecteurs propres associés à la valeur propre 0 (si il y en a, sinon on a directement $x = 0_{\mathrm{E}}$). D'où

$$x \in \mathrm{E}_0(v)$$

puis $$v(x) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Ensuite, on note z un antécédent de x par $u\circ v$ et $y = v(z)$.

$$\begin{aligned}\langle u(y), y\rangle = \langle u\circ v(z), v(z)\rangle &= \langle x, v(z)\rangle \\ &= \langle v(x), z\rangle = 0.\end{aligned}$$

En reprenant le raisonnement précédent, on a

$$v(y) = u\circ v(z) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Finalement $x = 0_{\mathrm{E}}$. Le noyau et l'image de $u\circ v$ sont en somme directe.

- On conclut par la formule du rang.

8. Comme w est diagonalisable, en reprenant la démonstration de la question 4 :

$$\operatorname{Im} u = \ker w \oplus \operatorname{Im} w$$

où $\operatorname{Im} w$ peut s'exprimer comme somme directe des sous-espaces propres de w associés aux valeurs propres non nulles. On peut donc considérer une base $\mathscr{B}_w$ de $\operatorname{Im} w$ constituée de vecteurs propres de w. On en déduit que c'est aussi une base de $\operatorname{Im} u\circ v$ constituée de vecteurs propres de $u\circ v$. On considère aussi une base $\mathscr{B}_{\mathrm{K}}$ de $\operatorname{Ker} u\circ v$. Précisons que $\mathscr{B}_{\mathrm{K}}$ est une base de vecteurs propres de $u\circ v$ (associés à la valeur propre 0). Comme la somme $\operatorname{Ker} u\circ v \oplus \operatorname{Im} u\circ v$ est directe, la concaténation des familles $\mathscr{B}_w$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{K}}$ est une base de

$$\operatorname{Ker} u\circ v \oplus \operatorname{Im} u\circ v = \mathrm{E}.$$

On en déduit que $u\circ v$ est diagonalisable car il existe une base de E constituée de vecteurs propres de $u\circ v$.

9. Soient $x,\ y \in \mathrm{E}$. Notons

$$\mathrm{M} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f), \quad x = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ et } y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$$

de sorte que $\mathscr{B}$ étant une b.o.n

$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= {}^t(\mathrm{MX})\mathrm{Y} \\ &= {}^t\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{MY} = {}^t\mathrm{X}\left({}^t\mathrm{MY}\right) \\ \langle f(x), y\rangle &= \left\langle x, f^*(y)\right\rangle.\end{aligned}$$

- Ensuite, pour $x \in \mathrm{E}$, en appliquant la formule précédente avec $y \leftarrow f(x)$

$$\left\langle f^*\circ f(x), x\right\rangle = \left\langle f(x), f(x)\right\rangle = \left\|f(x)\right\|^2.$$

10. Considérons un second endomorphisme de E noté g tel que
$$\forall x,\, y \in \mathrm{E}, \qquad \langle f(x), y\rangle = \langle x, g(y)\rangle.$$
Dès lors pour tout $x \in \mathrm{E}$
$$\begin{aligned}\left\|f^*(x)-g(x)\right\|^2 &= \left\langle f^*(x)-g(x), f^*(x)-g(x)\right\rangle \\ &= \left\|f^*(x)\right\|^2 + \|g(x)\|^2 - 2\left\langle f^*(x), g(x)\right\rangle.\end{aligned}$$
Or
$$\left\|f*(x)\right\|^2 = \left\langle f^*(x), f^*(x)\right\rangle = \left\langle x, f\circ f^*(x)\right\rangle = \left\langle g(x), f^*(x)\right\rangle.$$
De même
$$\|g(x)\|^2 = \langle g(x), g(x)\rangle = \langle x, f\circ g(x)\rangle = \left\langle f^*(x), g(x)\right\rangle.$$
Par conséquent $\left\|f^*(x)-g(x)\right\|^2 = 0$ et $f^*(x) = g(x)$. Ce résultat étant valable pour tout $x \in \mathrm{E}$
$$f^* = g.$$
L'unicité est prouvée.

11. Soient $x,\, y \in \mathrm{E}$
$$\begin{aligned}\left\langle f^*\circ f(x), y\right\rangle &= \langle f(x), f(y)\rangle \\ &= \left\langle x, f^*\circ f(y)\right\rangle.\end{aligned}$$
L'endomorphisme f est bien symétrique. De plus
$$\left\langle f^*\circ f(x), x\right\rangle = \langle f(x), f(x)\rangle = \|f(x)\|^2 \geqslant 0.$$
Finalement $f^*\circ f \in \mathrm{S}^+(\mathrm{E})$.

12. Résumons :

- $f^*\circ f$ est symétrique;
- a^{-1} est symétrique car a l'est (question 3).

D'après le résultat de la première partie (question 8). L'endomorphisme $a^{-1}\circ f^*\circ f$ est diagonalisable et à spectre dans $\mathbb{R}^+$.

13. Soit $x \in \mathrm{E}$
$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \langle f(x), f(x)\rangle \\ &= \left\langle x, f^*\circ f(x)\right\rangle \quad \text{symétrie de } f \\ &= \left\langle a^{-1}\circ a(x), f^*\circ f(x)\right\rangle \\ &= \left\langle a(x), a^{-1}\circ f^*\circ f(x)\right\rangle \text{ symétrie de } a^{-1} \\ \|f(x)\|^2 &= \varphi_a\left(x, a^{-1}\circ f^*\circ f(x)\right).\end{aligned}$$
En reprenant la question 5 avec l'endomorphisme $u = a^{-1}\circ f^*\circ f$, symétrique pour le produit scalaire φ_a
$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 = \varphi_a\left(x, a^{-1}\circ f^*\right) &= \varphi_a(x, u(x)) \\ &\leqslant \max \mathrm{Sp}\, u \cdot \left\|\varphi_a(x)\right\|^2 \\ \|f(x)\|^2 \leqslant \rho\cdot\langle a(x), x\rangle.\end{aligned}$$

14. Soit $x \in \mathrm{E}$. À l'aide de la question 5, et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\begin{aligned}\mathrm{J}(x) &= \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle - \langle b, x\rangle \\ &\geqslant \frac{1}{2}\min \mathrm{Sp}(f)\cdot\|x\|^2 - \|b\|\cdot\|x\|.\end{aligned}$$
Le résultat s'en déduit par minoration.

15. Soient $x,\, y \in \mathrm{V}$
$$\begin{aligned}&\mathrm{J}(x)+\mathrm{J}(y)-2\mathrm{J}\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ =&\frac{1}{2}\left(\langle f(x), x\rangle + \langle f(y), y\rangle - 2\left\langle f\left(\frac{x+y}{2}\right), \frac{x+y}{2}\right\rangle\right) \\ &-\langle b, x\rangle - \langle b, y\rangle + 2\left\langle b, \frac{x+y}{2}\right\rangle \\ =&\frac{1}{2}\left(\langle f(x), x\rangle + \langle f(y), y\rangle - \frac{1}{2}\langle f(x+y), x+y\rangle\right) \\ =&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle + \frac{1}{2}\langle f(y), y\rangle - \frac{1}{2}\langle f(x), y\rangle - \frac{1}{2}\langle f(y), x\rangle\right) \\ =&\frac{1}{4}\left(\langle f(x), x\rangle + \langle f(y), y\rangle - 2\langle f(x), y\rangle\right)\end{aligned}$$
par symétrie de f. Or on constate que ce terme vaut aussi
$$\frac{1}{4}(\langle f(x-y), x-y\rangle) \geqslant 0$$
avec égalité si et seulement si $x-y=0$, si et seulement si $x=y$.

17.a) Dans ce cas
$$\begin{aligned}&\mathrm{J}(x+th)-\mathrm{J}(x) \\ =&\frac{1}{2}\langle f(x+th), x+th\rangle - \langle b, x+th\rangle - \frac{1}{2}\langle f(x), x\rangle + \langle b, x\rangle \\ =&\frac{1}{2}\left(\langle f(th), x\rangle + \langle f(x), th\rangle\right) - t\langle b, h\rangle \\ =&t\langle f(x), h\rangle - t\langle b, h\rangle. \\ =&t\langle f(x)-b, h\rangle.\end{aligned}$$

17.b) Dès lors, $\mathrm{J}(x)$ est un minimum pour la restriction à V si et seulement si
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall h \in \mathrm{V}, \qquad t\left\langle f(x)-b, h\right\rangle \geqslant 0.$$
En prenant $t=1, t=-1$, on a nécessairement
$$\forall h \in \mathrm{V}, \qquad \left\langle f(x)-b, h\right\rangle = 0.$$
C'est-à-dire $\quad f(x)-b \in \mathrm{V}^{\perp}$.

17.c) Si $\mathrm{V}=\mathrm{E}$, alors
$$f(x_{\mathrm{V}})-b \in \mathrm{E}^{\perp} = \left\{0_{\mathrm{E}}\right\}.$$
D'où $f(x_{\mathrm{V}}) = b$ et $x_{\mathrm{V}} = f^{-1}(b)$ car f est bijective.

| La partie B est adaptée du sujet Ecricome 2023.

18.a) Vérifier que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\mathrm{J}(x) = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j - \sum_{i=1}^n b_ix_i.$$

18.b) Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$
$$q(x) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$

En particulier q est polynomiale, donc de classe $\mathscr{C}^1$. Explicitons $\partial_k q$ où $k \in [\![1;n]\!]$. Pour cela, on explicite $q(x)$ en isolant les termes contenant x_k.

$$q(x) = a_{kk}{x_k}^2 + \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n} a_{ik}x_i x_k + \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} a_{kj}x_k x_j + \underbrace{\dots}_{\text{termes sans } x_k}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\partial_k q(x) &= 2a_{kk}x_k + \sum_{\substack{i=1\\i\neq k}} a_{ik}x_i + \sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} a_{kj}x_j + 0\\ &= 2\sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i \text{ par symétrie de A}\\ \partial_k q(x) &= 2a(x)_k \quad k\text{-ème coordonnée de } a(x).\end{aligned}$$

Comme

$$\mathrm{J}(x) = \frac{1}{2}q(x) - \langle b, x\rangle = \frac{1}{2}q(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k x_k$$

on vérifie que J est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale avec pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

$$\partial_k \mathrm{J}(x) = a(x)_k - b_k.$$

La k-ème coordonnée de $\nabla\mathrm{J}(x)$ s'identifie à la k-ème coordonnée de $a(x) - b$. On a bien

$$\nabla\mathrm{J}(x) = a(x) - b.$$

18.c) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. x est un point critique si et seulement si

$$\begin{aligned}\nabla\mathrm{J}(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) - b = 0\\ &\Longleftrightarrow \quad x = f^{-1}(b)\end{aligned}$$

car f est bijective. Il y a donc bien un unique point critique m. Or J admet un minimum, ce minimum est donc atteint en un point critique. C'est donc en m.

Nous verrons le fait que $\mathbb{R}^n$ soit une partie ouverte est une des conditions d'application du théorème.

19.

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(a+h) =& \frac{1}{2}\langle f(a+h), a+h\rangle - \langle b, a+h\rangle\\ =& \frac{1}{2}\langle f(a), a\rangle + \frac{1}{2}\langle f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle a, f(h)\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle\\ &- \langle b, a\rangle - \langle b, h\rangle\\ =& \mathrm{J}(a) + \langle f(a), h\rangle - \langle b, h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle\\ & \qquad \text{(par symétrie de } f\text{)}\\ =& \mathrm{J}(a) + \langle f(a) - b, h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle\\ \mathrm{J}(a+h) =& \mathrm{J}(a) + \langle \nabla\mathrm{J}(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle f(h), h\rangle.\end{aligned}$$

20.a) Avec le choix $a = m_p$ et $h = -\alpha\nabla\mathrm{J}(m_p)$, on obtient bien le résultat demandé.

20.b) En reprenant la question 5

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle f(h), h\rangle \leqslant \lambda_n \|h\|^2.$$

D'où

$$\mathrm{J}(m_{p+1}) \leqslant \mathrm{J}(m_p) - \alpha\|\nabla\mathrm{J}(m_p)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}\lambda_n\|\nabla\mathrm{J}(m_p)\|^2.$$

Ce qui donne le résultat.

21.a) Comme $\alpha\left(1 - \frac{\alpha\lambda_n}{2}\right)\|\nabla\mathrm{J}(m_p)\|^2 \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{J}(m_{p+1}) \leqslant \mathrm{J}(m_p).$$

La suite de réels $\left(\mathrm{J}(m_p)\right)_p$ est décroissante et minorée par $\mathrm{J}(m)$. D'après le théorème de convergence monotone, on a bien convergence de la suite $\left(\mathrm{J}(m_p)\right)_p$.

21.b) En reprenant la question 5

$$\lambda_1\|m_p - m\|^2 \leqslant \langle f(m_p) - m, m_p - m\rangle$$

et la question 19 avec $a = m$, $h = m_p - m$

$$\mathrm{J}(m_p) = \mathrm{J}(m) + \langle \underbrace{\nabla\mathrm{J}(m)}_{=0_{\mathbb{R}^n}}, m_p - m\rangle + \frac{1}{2}\langle f(m_p) - m, m_p - m\rangle.$$

Le résultat s'en déduit.

21.c) Il suffit d'appliquer le théorème d'encadrement.

22.a) Pour $\alpha = \alpha_0$, la suite $(m_p)_p$ semble converger (c'est-à-dire que les suites des coordonnées $(m_{p,1})_p$, $(m_{p,2})_p$ semblent converger) avec

$$m_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} (1,0).$$

Pour $\alpha = \alpha_1$, on constate que la suite $(\mathrm{J}_m)_p$ n'est pas décroissante et ne semble pas converger vers 0 alors que cela semble être le cas. La valeur $\alpha = \alpha_1 = 0.67$, ne vérifie pas les hypothèses de l'énoncé.

22.b) Dans cet exemple, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$\underset{\text{can}}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

On vérifie que $\qquad \mathrm{Sp}(f) = \{1;3\}$.

La plus grande valeur propre est donc 3 et α doit appartenir à $[0;1/3[$ pour être dans les conditions de l'énoncé. Précisons aussi que f est symétrique (par exemple, sa matrice dans la base canonique, orthonormée est symétrique).

Problème B

d'après HEC 2004 II

23.a) Testons avec $m = n = 1$.

$$u_1 = u_1 \cdot u_1.$$

D'où $u_1 = 1$ ou $u_1 = 0$. Il faut exclure le second cas car la suite u est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. D'où

$$u_1 = 1.$$

23.b) Soit r fixé. Procéder par récurrence sur

$$\mathscr{P}(k) : \quad u_{r^k} = {u_r}^k.$$

Pour l'hérédité, écrire

$$u_{r^{k+1}} = u_{r \cdot r^k} = u_r \cdot u_{r^k}.$$

24. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n = r^k$. On a donc $\ln(n) = k\ln(r)$ et

$$\begin{aligned} u_n = u_{r^k} = {u_r}^k &= u_r^{\ln(n)/\ln(r)} \\ &= \mathrm{e}^{\ln(n)/\ln(r) \cdot \ln(u_r)} \\ &= n^{\ln(u_r)/\ln(r)} \\ u_n = n^{\alpha_r} \quad &\text{où} \quad \alpha_r = \frac{\ln(u_r)}{\ln(r)}. \end{aligned}$$

25.a) Notons que la condition

$${r_2}^k \leqslant {r_1}^\ell < {r_2}^{k+1}$$

se réécrit (par passage au logarithme, strictement croissant)

$$k\ln(r_2) \leqslant \ell\ln(r_1) < (k+1)\ln(r_2)$$

ou encore ($\ln(r_1 > 0)$)

$$k\frac{\ln(r_2)}{\ln(r_1)} \leqslant \ell < k\frac{k\ln(r_2)}{\ln(r_1)} + \frac{\ln(r_2)}{\ln(r_1)}.$$

Le réel $\alpha = k\ln(r_2)/\ln(r_1)$ est fixé et la condition de l'énoncé $r_2 > r_1 > 1$ impose

$$\frac{\ln(r_2)}{\ln(r_1)} > 1.$$

Ainsi l'intervalle $[\alpha, \alpha + \ln(r_2)/\ln(r_1)[$ a une longueur strictement supérieure à 1, il contient nécessairement un entier. Par exemple.

$$l = \lfloor \alpha \rfloor + 1.$$

25.b) D'après la question 24

$$\left({r_2}^k\right)^{\alpha_{r_2}} = u_{{r_2}^k} \quad \text{et} \quad \left({r_1}^\ell\right)^{\alpha_r} = u_{{r_1}^\ell}.$$

Avec la seconde condition sur la suite u sachant ${r_2}^k \leqslant {r_1}^\ell$

$$u_{{r_2}^k} \leqslant \mathrm{A}u_{{r_1}^\ell},$$

c'est-à-dire $$\left({r_2}^k\right)^{\alpha_{r_2}} \leqslant \mathrm{A}\left({r_1}^\ell\right)^{\alpha_{r_1}}.$$

Or la fonction $t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto t^{\alpha_{r_1}} = \exp\left(\alpha_{r_1}\ln(t)\right)$ est strictement croissante, ${r_1}^\ell \leqslant {r_2}^{k+1}$ impose

$$\left({r_1}^\ell\right)^{\alpha_{r_1}} \leqslant \left({r_2}^{k+1}\right)^{\alpha_{r_1}}$$

On a bien $$\left({r_2}^k\right)^{\alpha_{r_2}} \leqslant \left({r_2}^{k+1}\right)^{\alpha_{r_1}}.$$

- Pour la seconde inégalité, on procède de même

$$\begin{aligned} \left({r_2}^k\right)^{\alpha_{r_1}} \leqslant \left({r_1}^\ell\right)^{\alpha_{r_1}} &\leqslant u_{{r_1}^\ell} \\ &\leqslant u_{r_2^{k+1}} \leqslant \left(r_2^{k+1}\right)^{\alpha_{r_2}}. \end{aligned}$$

25.c) On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \left(r_2^k\right)^{(\alpha_{r_2} - \alpha_{r_1})} \leqslant \mathrm{A}r_2^{\alpha_{r_1}}.$$

Comme $r_2 > 1$, ${r_2}^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Si $\alpha_{r_2} - \alpha_{r_1} > 0$, on aurait par composition

$$\left(r_2^k\right)^{(\alpha_{r_2} - \alpha_{r_1})} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ce qui est absurde. D'où $\alpha_{r_2} - \alpha_{r_1} \leqslant 0$ ou encore

$$\alpha_{r_2} \leqslant \alpha_{r_1}.$$

On a aussi avec la seconde inégalité

$$\left({r_2}^k\right)^{\alpha_{r_1} - \alpha_{r_2}} \leqslant \mathrm{A}r_2^{\alpha_{r_2}}$$

En reprenant le même raisonnement

$$\alpha_{r_1} \leqslant \alpha_{r_2}.$$

D'où l'égalité demandée : $\alpha_{r_1} = \alpha_{r_2}$.

- On en déduit que α_r ne dépend pas de r. On peut noter simplement α cette valeur commune.

$$\forall r \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}, \qquad \alpha_r = \alpha.$$

Notons que la relation est encore vraie pour $r = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec les choix $r = n$, $k = 1$, on obtient bien

$$u_n = n^\alpha.$$

26. Soit $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de copies de X. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{X}_k \hookrightarrow \mathscr{N}\left(0, \sigma^2\right).$$

Par indépendance des variables et stabilité des lois normales par somme

$$\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_n \hookrightarrow \mathscr{N}\left(0, n\sigma^2\right)$$

De plus, par transformation affine

$$\sqrt{n}\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{N}\left(0, n\sigma^2\right).$$

On en déduit que X suit une loi stable et la suite associée est $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

27. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Notons $\mathrm{F}_{\lambda\mathrm{X}}$ la fonction de répartition de $\lambda\mathrm{X}$.

→ Si $\lambda > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\lambda\mathrm{X}}(x) = \mathbf{P}(\lambda\mathrm{X} \leqslant x) &= \mathbf{P}(\mathrm{X} \leqslant x/\lambda) \\ &= \mathrm{F}_\mathrm{X}(x/\lambda). \end{aligned}$$

On en déduit que $F_{\lambda X}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composition avec une fonction affine, λX est donc une variable à densité avec une densité définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f_{\lambda X}(x) &= \frac{1}{\lambda} F_X'(x/\lambda) \\ &= \frac{a}{\lambda\pi\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 + a^2\right)} \\ f_{\lambda X}(x) &= \frac{\lambda a}{\pi\left(x^2 + (\lambda a)^2\right)}. \end{aligned}$$

→ Si $\lambda < 0$, on a maintenant

$$\begin{aligned} F_{\lambda X}(x) &= \mathbf{P}(X \geqslant x/\lambda) = 1 - \mathbf{P}(X < x/\lambda) \\ &= 1 - \mathbf{P}(X \leqslant x/\lambda) \quad \text{(X à densité)} \\ F_{\lambda X}(x) &= 1 - F_X(x/\lambda). \end{aligned}$$

De même λX est une variable à densité et une densité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f_{\lambda X}(x) &= -\frac{1}{\lambda} f_x\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ &= -\frac{1}{\lambda\pi} \frac{a}{\left(\left(\frac{x}{x}\right)^2 + a^2\right)} \\ f_{\lambda X}(x) &= \frac{a|\lambda|}{\pi\left(x^2 + (|\lambda| a)^2\right)}. \end{aligned}$$

28. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de copies de $X \hookrightarrow \mathscr{C}(a)$. Par récurrence sur le résultat admis et l'indépendance des variables $(X_k)_k$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathscr{C}(na).$$

Puis d'après la question précédente

$$nX \hookrightarrow \mathscr{C}(na).$$

La variable X est donc stable, $(n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite associée.

29. Les événements étant 2 à 2 disjoints dans la définition de l'événement E_n

$$\mathbf{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} \left(|X_k| > 2|X_i|\right)\right)$$

Par symétrie du problème, on peut se limiter à $k = 1$

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} \left(|X_k| > 2|X_i|\right)\right) = \mathbf{P}\left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq 1}} \left(|X_1| > 2|X_i|\right)\right)$$

> Plus précisément, on montre que la loi du n-uplet $(X_1,\ldots,X_n)$ ne dépendant pas de l'ordre des variables car les variables X_i sont indépendantes et de même loi.

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(E_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\neq 1}} \left(|X_k| > 2|X_i|\right)\right) \\ &= n\mathbf{P}\left(\prod_{2\leqslant i\leqslant n} \left(|X_1 > 2\ |X_i|\right)\right). \end{aligned}$$

30. Soit $A \in \mathbb{R}_*^+$, on a pour tout $i \in [\![2; n]\!]$

$$[|X_1| > 2A] \cap \left[|X_i| < A\right] \subset \left[|X_1| > 2\left|X_i\right|\right].$$

D'où

$$\bigcap_{i=2}^{n} [|X_1| > 2A] \cap \left[|X_i| < A\right] \subset \bigcap_{i=2}^{n} \left[|X_1| > 2\left|X_i\right|\right].$$

En isolant $[|X_1| > 2A]$ dans le premier ensemble

$$[|X_1| > 2A] \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n} [|X_i| < A]\right) \subset \bigcap_{i=2}^{n} [|X_1| > 2|X_i|].$$

Par croissance de la probabilité

$$\mathbf{P}\left([|X_1| > 2A] \bigcap_{i=2}^{n} \left[|X_i| < A\right]\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=2}^{n} [|X_1| > 2|X_i|]\right).$$

On conclut à l'aide de la question précédente.

31. Soit $A \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X| > A) &= 1 - \mathbf{P}(|X| \leqslant A) \\ &= 1 - 2\mathbf{P}(X \in [0; A]) \end{aligned}$$

par parité de la densité f_1. Puis

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X| > A) &= 1 - 2\int_0^A f_1(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^A \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\left[\arctan(t)\right]_0^A \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(A)\right) \\ \mathbf{P}(|X| > A) &= \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{A}\right) \end{aligned}$$

en reprenant le résultat sur la fonction arctangente donné dans le préliminaire.

32. Avec $A_n = 1/\tan\left(\frac{\pi\lambda}{2n}\right)$, on a par indépendances des variables (X_i).

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left([|X_1| > 2A_n) \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n} \left[|X_i| < A_n\right)\right)\right. \\ =&\mathbf{P}(|X_1| > 2A_n) \prod_{i=2}^{n} \mathbf{P}\left(|X_i| < A_n\right) \\ =&\mathbf{P}(|X_1| > 2A_n)\,\mathbf{P}(|X_2| < A_n)^{n-1} \quad \text{(égalité en loi).} \end{aligned}$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_2| < A_n) &= 1 - \mathbf{P}(|X_2| > A_n) \quad (X_2 \text{ à densité}) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{A_n}\right) \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\lambda\pi}{2n} = 1 - \frac{\lambda}{n}. \end{aligned}$$

D'où le résultat en reprenant la question 30.

33.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} = e^{(n-1)\ln(1-\lambda/n)}$$

or $\lambda/n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où

$$\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \sim -\frac{\lambda}{n}$$
$$\text{et } (n-1)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \sim -\frac{(n-1)\lambda}{n} \sim -\lambda \neq 0.$$

On en déduit la limite

$$(n-1)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\lambda.$$

Par continuité de la fonction exponentielle

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

> Un calcul classique. Tout ce qui pourra être compris par le correcteur par une sommation d'équivalents ou une composition d'équivalents sera durement sanctionné.

- De plus, la fonction arctangente étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a d'après la formule de Taylor-Young

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \arctan(0) + \arctan'(0)\cdot x + o_0(x)\\ &= x + o_0(x).\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\qquad \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$

Notons aussi l'équivalent pour la fonction tangente

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{1} = x.$$

Sachant que $\tan\left(\frac{\pi\lambda}{2n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{\pi\lambda}{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(|X_1| > \frac{2}{\tan\left(\frac{\pi\lambda}{2n}\right)}\right) &= \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{\tan\frac{\pi\lambda}{2n}}{2}\right)\\ &\sim \frac{2}{\pi}\tan\left(\frac{\pi\lambda}{2n}\right)\times\frac{1}{2}\\ &\sim \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi\lambda}{2n}\times\frac{1}{2} = \frac{\lambda}{2n}.\end{aligned}$$

On obtient par produit

$$n\mathbf{P}\left(|X_1| > \frac{2}{\tan\frac{\pi\lambda}{2n}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

On en déduit le résultat par définition de la limite.

33.b) Étudier la fonction $g = \lambda \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}$ et vérifier que g admet un maximum atteint pour $\lambda = 1$. Avec

$$g(1) = \frac{1}{2\mathrm{e}} > \frac{1}{6} \quad \text{car} \quad \mathrm{e} < 3.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} - \varepsilon > \frac{1}{6}$$

Le résultat s'en déduit avec la question précédente.

34. Voir exercice sur la méthode d'inversion.

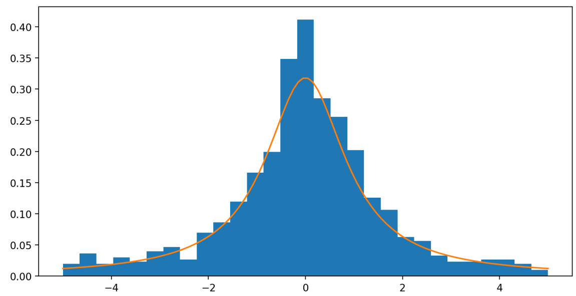
35.

```
def simuC():
    u=rd.random()
    return np.tan(np.pi*(u-1/2))

def Cauchy(p):
    C=np.zeros(p)
    for i in range(p):
        C[i]=simuC()
    return C
```

> On peut tester ce programme en affichant un histogramme d'un échantillon ainsi que la courbe de la densité f_1.

```
plt.hist(Cauchy(1000),np.linspace(-5,5,30)
    ,density=True)
x=np.linspace(-5,5,100)
y=1/(np.pi*(x**2+1))
plt.plot(x,y)
plt.show()
```



36.a)

```
def comparaison(x,L):
    n=len(L)
    R=1
    for i in range(n):
        if x <= L[i]:
            return 0
    return R

def estimation(n):
    compteur=0
    m=5000
    for i in range(m):
        x = np.abs(simuC()) # simulation
            de X1
        L= np.abs(Cauchy(n-1) )#
            Simulation de [X2 ... Xn]
        compteur+=comparaison(x,L)
    return n*compteur/m
```

37.a) Comme $([X>0],[X=0],[X<0])$ est un système complet d'événements

$$\mathbf{P}(X>0) + \mathbf{P}(X=0) + \mathbf{P}(X<0) = 1.$$

Par symétrie de X, $\mathbf{P}(X>0) = \mathbf{P}(X<0)$. D'où :

$$\frac{1}{2}(1-\mathbf{P}(X=0)) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}(X>0) + \mathbf{P}(X<0)) = \mathbf{P}(X>0).$$

37.b) Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout $\mu \in \mathbb{R}_*^+$, on ait $\mathbf{P}(X>\mu) = 0$, c'est-à dire :

$$\forall \mu \in \mathbb{R}_*^+, \qquad F_X(\mu) = 1 - \mathbf{P}(X>\mu) = 1.$$

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$F_X\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Par continuité à droite de F_X

$$F_X(0) = \lim_{n\to+\infty} F_X\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

On en déduit que $\mathbf{P}(X > 0) = 0$ et en reprenant la question précédente

$$\mathbf{P}(X = 0) = 1.$$

Absurde. On a supposé que X n'est pas presque sûrement nulle.

38.a) Soient m, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{m+n}X$ a la même loi que

$$\begin{aligned} &X_1 + X_2 + \cdots + X_{m+n} \\ &= X_1 + \cdots + X_m + Y_1 + \cdots + Y_n. \end{aligned}$$

Où on a noté $Y_i = X_{i+m}$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. Or $X_1 + \ldots + X_m$ a la même loi que $a_m X$ ou même $a_m X_1$ par stabilité de la variable X.
Les variables $Y_1, \ldots, Y_n$ étant indépendantes de même loi que X. Par stabilité,

$$Y_1 + \ldots + Y_n$$

a la même loi que $a_n X$ ou encore $a_n X_2$. Par indépendance, les vecteurs aléatoires

$$(X_1 + \ldots + X_m, Y_1 + \ldots + Y_n) \quad \text{et} \quad (a_n X_1, a_n X_2)$$

ont même loi. La fonction $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y$ étant continue

$$X_1 + \cdots + X_m + Y_1 + \cdots + Y_n \quad \text{et} \quad a_m X_1 + a_n X_2$$

ont même loi. Ce qui conclut.

38.b) Il suffit de procéder par récurrence à partir du résultat précédent.

38.c) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ avec $m_i = \ell$, on a d'après ce qui précède

$$a_{k\ell}X \text{ a la même loi que } a_\ell \sum_{i=1}^{k} X_i$$

Or par stabilité de X

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \text{ a la même loi que } a_k X.$$

D'où $\qquad a_{k\ell}X$ a la même loi que $a_\ell a_k X$.

X n'étant pas presque sûrement nulle, on en déduit que $a_{k\ell} = a_k a_\ell$.

39.a) Comme a_n et a_m sont strictement positifs

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}([X_1 \geqslant 0] \cap [X_2 > t]) \\ =&\mathbf{P}([a_n X_1 \geqslant 0] \cap [a_m X_2 > a_m t]) \\ \leqslant&\mathbf{P}([a_n X_1 + a_m X_2 > a_m t]). \end{aligned}$$

Or par stabilité de X, cette probabilité vaut

$$\mathbf{P}(a_{n+m}X > a_m t) = \mathbf{P}\left(X > \frac{a_m t}{a_{n+m}}\right).$$

D'autre part, par indépendance de X_1 et X_2

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([X_1 \geqslant 0] \cap [X_2 > t]) &= \mathbf{P}(X_1 \geqslant 0)\mathbf{P}(X_2 > t) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(X > t). \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

39.b) Posons $\mu \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\mathbf{P}(X > \mu) > 0$ Dans ce cas, pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{P}\left(X > \frac{a_n}{a_{n+m}}\mu\right) \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{P}(X > \mu) > 0.$$

Dit autrement, pour tout $x \in \mathscr{E}$

$$\mathbf{P}(X > x\mu) \geqslant \frac{1}{2}\mathbf{P}(X > \mu) \quad (\bullet)$$

Si l'ensemble $\mathscr{E}$ n'est pas majoré, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{E}$ tels que

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par composition, sachant que $F_X(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

$$\mathbf{P}(X > x_n\mu) = 1 - F_X(x_n\mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - 1 = 0.$$

Absurde si on a la contrainte $(\bullet)$.
Finalement, $\mathscr{E}$ est une partie majorée.

39.c) Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{a_n}{a_{n+m}} \leqslant M.$$

C'est-à-dire $\qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n \leqslant M a_{n+m}.$

Condition que l'on peut reformuler par

$$\forall\, n,\, m \in \mathbb{N}^*, \qquad m \leqslant n \quad a_m \leqslant M a_n.$$

De plus, on a vu que pour n, $m \in \mathbb{N}^*$

$$a_{nm} = a_n a_m.$$

On est donc dans le cas de la partie I et la suite $(a_n)_n$ est une puissance de n

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \qquad a_n = n^\alpha.$$

40.a) Les couples (X_1, X_2) et (X_2, X_1) ont la même loi par indépendance. En effet

$$\begin{aligned} F_{(X_1,X_2)}(t_1, t_2) &= \mathbf{P}(X_1 \leqslant t_1, X_2 \leqslant t_2) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leqslant t_1)\mathbf{P}(X_2 \leqslant t_2) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \mathbf{P}(X_2 \leqslant t_1)\mathbf{P}(X_1 \leqslant t_2) \quad \text{(égalité en loi)} \\ F_{(X_1,X_2)}(t_1, t_2) &= F_{(X_2,X_1)}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Comme $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

$$g(X_1, X_2) \quad \text{et} \quad g(X_2, X_1)$$

ont même loi. Dit autrement $X_1 - X_2$ et $-(X_1 - X_2) = X_2 - X_1$ ont même loi. La variable est symétrique.

40.b) Soient $Y = X_1 - X_2$ et $(Y_k)_k$ une suite de copies de Y. Soient $(X_{1,k})_k$ et $(X_{2,k})$ des copies respectivement de X_1 et X_2 toutes mutuellement indépendantes telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Y_k et $X_{1,k} - X_{2,k}$ ont même loi.

Ainsi $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ a la même loi que

$$\sum_{k=1}^{n} X_{1,k} - X_{2,k} = \sum_{k=1}^{n} X_{1,k} - \sum_{k=1}^{n} X_{2,k}$$

qui a aussi la même loi que

$$a_n X_1 - a_n X_2 = a_n (X_1 - X_2)$$

(voir question précédente pour les détails). Dès lors $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ a la même loi que $a_n Y$. Par unicité de la suite associée $(b_n)_n = (a_n)_n$. En particulier, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$b_n = n^{\alpha}.$$

Bonus Dans l'ordre de la gauche à la droite.

- *Benoît Mandelbrot, né le 20 novembre 1924 à Varsovie (Pologne) et mort le 14 octobre 2010 à Cambridge (États-Unis), est un mathématicien polono-franco-américain. Il est le découvreur des fractales, nouvelle classe d'objets mathématiques, dont fait partie l'ensemble de Mandelbrot.*
  Il a également travaillé sur des applications originales de la théorie de l'information, telles que la démonstration de la loi de Zipf, et sur des modèles statistiques financiers. Jugeant le modèle Black-Scholes trop simpliste — il est fondé sur une distribution normale aux variations modérées — et tenant son application pour partie responsable de la crise bancaire et financière de l'automne 2008, il propose un modèle fondé sur les lois stables de Lévy, puis sur une approche fractale.[2]
  Comme nous venons de le voir, la loi de Cauchy est justement une loi stable. Il est alors pertinent de l'utiliser en finance. Comme elle n'a pas de forte décroissance en $\pm\infty$ comme la loi normale, la loi de Cauchy permet mieux de gérer les phénomènes exceptionnels. Des phénomènes exceptionnels qui ont néanmoins des conséquences très importantes[3].
- En second Carl Friedrich Gauss, né le 30 avril 1777 à Brunswick et mort le 23 février 1855 à Göttingen, est un mathématicien, astronome et physicien allemand.
- Et en dernier, le mathématicien français Augustin Louis Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857.

2. Source wikipédia
3. Voir par exemple le concept des "Cygnes noirs" introduit par l'écrivain et statisticien Nassim Taleb