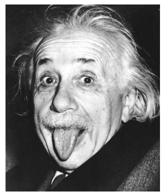
CHAPITRE 17

Compléments sur les fonctions de plusieurs variables

Do not worry too much about your difficulties in mathematics, I can assure you that mine are still greater.

ALBERT EINSTEIN



L'objectif de ce chapitre est d'étendre les résultats sur les fonctions de plusieurs variables du premier semestre. Le cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ et le lien avec l'algèbre bilinéaire permettra ainsi d'obtenir des conditions suffisantes à des extrema *locaux*. La notion de convexité de fin de chapitre complètera l'étude en donnant des conditions suffisantes pour avoir des extrema *globaux*.
On étend aussi l'étude à des fonctions non nécessairement définies sur $\mathbb{R}^n$ mais sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

1 Rappels sur les fonctions d'une variable réelle

Dans la suite, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Avec la continuité

Rappelons la définition de l'image d'une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, noté $f(\mathrm{I})$, comme l'ensemble des réels qui admettent un antécédent par f. Autrement dit,

$$f(\mathrm{I}) = \left\{ y \in \mathbb{R} \,|\, \exists\, x \in \mathrm{I},\ f(x) = y \right\} = \left\{ f(x) \,|\, x \in \mathrm{I} \right\}.$$

THÉORÈME — **image d'un segment**

Pour toute application continue $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ où I est un segment de $\mathbb{R}$, l'image $f(\mathrm{I})$ est aussi un segment. Alors, f admet un minimum et un maximum et

$$f(\mathrm{I}) = \left[\min_{\mathrm{I}} f, \max_{\mathrm{I}} f \right].$$

Remarque. On dit alors que f est bornée et atteint ses bornes. Il existe α, β tels que

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

Exercice 1

✧ *Les questions sont indépendantes*

p. 23

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose f continue et g bornée. Justifier que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont deux fonctions bornées.
2. Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que :
$$\forall x \in [0;1], \quad f(x) > 0.$$
Justifier : $$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall x \in [0;1], \quad f(x) > \varepsilon.$$

Avec la dérivée

THÉORÈME — **condition nécessaire pour un extrema**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

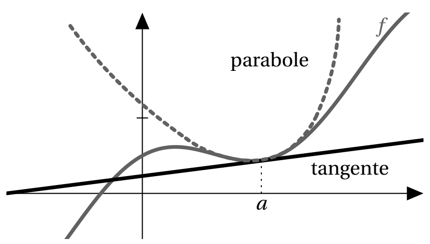
Si
- *f admet un extremum local en a,*
- *f est dérivable en a, et*
- *a appartient à un intervalle ouvert inclus dans I,* ***alors*** $f'(a) = 0$.

Remarque. La réciproque est fausse : tout point critique ne donne pas un extremum. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ en 0 fournit un contre-exemple.

Avec les dérivées successives

THÉORÈME — **formule de Taylor-Young**

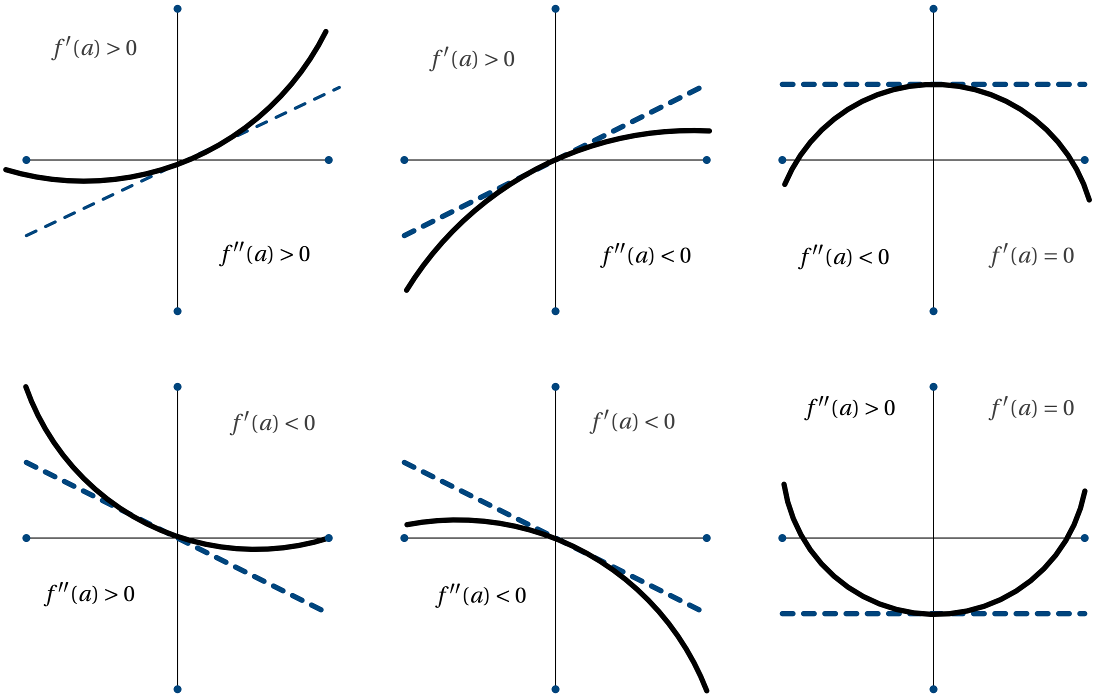
Soient $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I})$, $a \in \mathrm{I}$ et $n \in \mathbb{N}$. Au voisinage du réel a,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$



Exemples.
- $n = 1$
$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{équation de la tangente}} + o(x-a).$$
- $n = 2$
$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{\text{équation d'une parabole si } f''(a) \neq 0} + o_a\big((x-a)^2\big).$$

Allure du graphe d'une fonction au voisinage d'un point
En reprenant le cas $n = 2$, au voisinage de a, la courbe représentative de f est « proche » de la courbe d'équation
$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$$

Lorsque $f''(a) \neq 0$, la courbe est une parabole.
Distinguons suivant le signe de $f'(a)$ et $f''(a)$. En gras, la parabole, en pointillés, la tangente.



Exercice 2

✦✦ **Égalité de Taylor-Lagrange**
Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I et $a \in$ I. Justifier que pour tout $x \in$ I, il existe c compris entre a et x tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(c).$$

p. 23

On pourra introduire la fonction définie sur I *par* $\varphi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) + (x-t)^2\lambda/2$ *pour un réel* λ *choisi afin d'avoir* $\varphi(a) = 0$.

Avec la convexité

THÉORÈME — **condition suffisante pour un minimum global**

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *et* a *appartenant à un intervalle ouvert inclus dans* I.

Si
- *f est convexe.*
- *f est dérivable en a.*
- *a est un point critique ($f'(a) = 0$).*

Alors, *f admet un minimum global en a.*

Remarque. On a un énoncé similaire dans le cas d'une fonction concave où on obtient un maximum global.

2 Fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$

2.1 Fermés, ouverts et bornés

Dans la suite, on considère le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

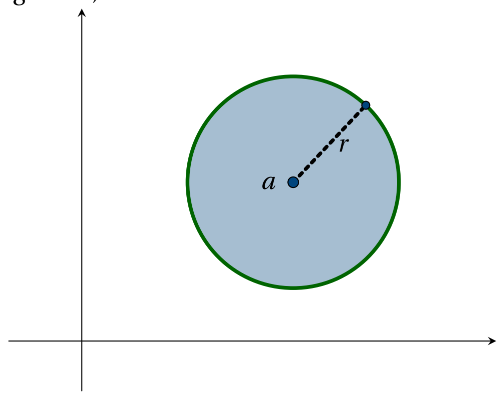
DÉFINITION **boule ouverte**

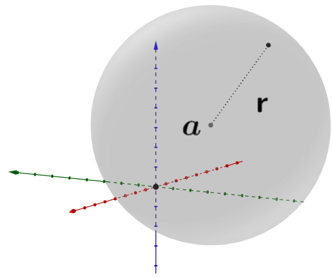
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_*^+$, on définit la ***boule ouverte*** *de centre a et de rayon r par :*

$$\mathscr{B}(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x-a\| < r\right\}.$$

C'est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ situés à une distance strictement inférieure à r du point a.

À gauche, une boule ouverte dans $\mathbb{R}^2$ et à droite dans $\mathbb{R}^3$. Il faut exclure dans les deux cas la « frontière ».





DÉFINITION **partie ouverte**

Une partie $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R}^n$ est dite ***ouverte*** *si, en chaque point de $\mathscr{O}$, il existe une boule ouverte centrée en ce point et contenue dans $\mathscr{O}$. Autrement dit,*

$$\forall a \in \mathscr{O}, \quad \exists r \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathscr{B}(a,r) \subset \mathscr{O}.$$

Exemples.
→ $\mathbb{R}^n$ est une partie ouverte puisqu'une boule ouverte en un point quelconque de $\mathbb{R}^n$ est toujours contenue dans $\mathbb{R}^n$.
→ Toute boule ouverte est un ouvert.
→ $\mathbb{R}^n$ privé d'un ensemble fini de points est ouvert.
→ Soient $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \dots, \mathrm{I}_n$, n intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. La partie $\mathrm{I}_1 \times \mathrm{I}_2 \times \dots \times \mathrm{I}_n$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ (on parle de pavé ouvert).

Remarques.
→ Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
→ Une intersection *finie* d'ouverts reste un ouvert. Par contre, comme le montre l'exemple de

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathscr{B}(a, 1/n) = \{a\},$$

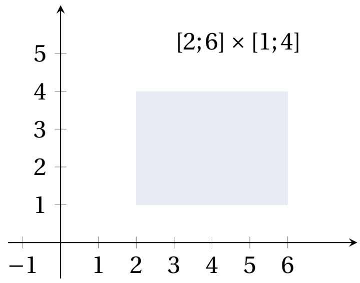
cela devient faux pour une intersection infinie.

DÉFINITION **partie fermée**

Une partie F de $\mathbb{R}^n$ est dite ***fermée*** *de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $\overline{\mathrm{F}}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

Remarques.
→ Il existe des parties ni ouvertes, ni fermées. Par exemple, $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+$.
→ L'ensemble vide est une partie ouverte puisque l'on ne peut pas trouver une seule boule ouverte centrée en un point de $\varnothing$ et, par suite, non contenue dans $\varnothing$. Par passage au complémentaire, $\mathbb{R}^n$ est aussi une partie fermée (et ouverte).
→ En reprenant la remarque précédente, et par passage au complémentaire, une union finie de parties fermées reste une partie fermée et une intersection quelconque de parties fermées est une partie fermée.

Exemple. On montre que si $I_1, I_2, \dots, I_n$ sont des intervalles fermés de $\mathbb{R}$. La partie $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.
On parle de pavé fermé.



PROPOSITION **conditions suffisantes pour une partie ouverte/fermée**

Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}$.
- *La partie $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) < r\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
- *La partie $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leqslant r\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*
- *La partie $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = r\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

Résultat admis.

Exemples.
- Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on définit la partie de $\mathbb{R}^n$:

$$\overline{\mathscr{B}}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \leqslant r\}.$$

Nous avons vu que la norme $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|$ est une application continue sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x-a\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Comme $\overline{\mathscr{B}}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leqslant r\}$, $\overline{\mathscr{B}}(a,r)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. On parle de **boule fermée** centrée en a et de rayon r.
- De même, la **sphère**

$$\mathscr{S}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = r\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| = r\}$$

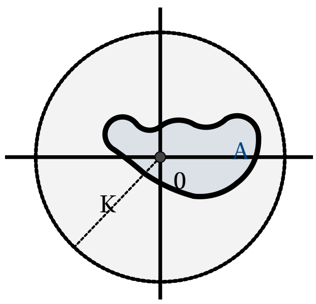
est une partie fermée.

DÉFINITION **partie bornée**

Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.
*La partie A est dite **bornée** s'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leqslant K$.*

Remarque. Autrement dit, une partie A de $\mathbb{R}^n$ est bornée si elle est incluse dans une boule de centre l'origine :

$$\exists K \in \mathbb{R}_*^+, \qquad A \subset \mathscr{B}(0,K).$$



Exercice 3

Exemples

✦ 1. Parmi les parties suivantes, préciser les parties ouvertes, fermées, bornées.

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+2y=5\right\}, \quad A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0 \text{ et } x+y<1\right\}$$
$$A_3 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u,x\rangle \geqslant 0\}, \quad A_4 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u,x\rangle = 0\} \quad \text{où} \quad u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

p. 24

✦✦ 2. Justifier que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
On pourra exprimer le sous-espace comme intersection de parties du type A_4.

2.2 Rappels et compléments sur le cas $\mathscr{C}^1$

Les définitions vues au premier semestre s'étendent à une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ si les dérivées partielles sont continues en chaque point de $\mathcal{O}$.
On rappelle que pour tout $a \in \mathcal{O}$, la fonction f admet en a un unique développement limité à l'ordre 1.
C'est-à-dire, il existe $\varepsilon : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ telle que, pour $h \in \mathbb{R}^n$ avec $a + h \in \mathcal{O}$,

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla(f)(a), h \rangle + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

3.1 Définitions et exemples

DÉFINITION — **dérivées partielles d'ordre 2**

Soient un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$, une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{O}$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$.
*On suppose que la dérivée partielle première $\partial_j f$ est définie sur $\mathcal{O}$. Si la dérivée partielle $\partial_i \left(\partial_j f\right)$ est définie en a, on dit que f admet une **dérivée partielle d'ordre 2 d'indice** (i, j) **en** a et on note $\partial^2_{i,j} f(a)$ pour $\partial_i \left(\partial_j f\right)(a)$.*

Remarque. Si la dérivée partielle $a \in \mathcal{O} \mapsto \partial_i \left(\partial_j f\right)$ est définie sur $\mathcal{O}$, on dit que f admet, sur $\mathcal{O}$, une dérivée partielle d'ordre 2 d'ordre (i, j) et on note

$$\partial^2_{i,j} f = \partial_i \left(\partial_j f\right).$$

On obtient alors une nouvelle fonction de plusieurs variables $\partial^2_{i,j} f : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}$.

Exercice 4

✧ Calculer $\partial^2_{1,2} f$ et $\partial^2_{1,1} f + \partial^2_{2,2} f + \partial^2_{3,3} f$ dans les deux cas suivants :

I. $f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2{x_3}^2 - x_2 + x_1 + x_1 x_2$ **II.** $f : x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\} \mapsto 1/\|x\|$.

p. 24

DÉFINITION — **fonction de classe $\mathscr{C}^2$**

Soient un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$.
*On dit que f est une fonction de **classe** $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$*

Si
- *La fonction f admet des dérivées partielles d'ordre 2 d'indice (i, j) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.*
- *Les dérivées partielles sont des fonctions continues de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$.*

Exemple. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ car les dérivées partielles d'ordre 2 existent et restent polynomiales (donc continues sur $\mathbb{R}^n$).

Remarque. Comme pour le cas $\mathscr{C}^1$, les combinaisons linéaires, les produits et quotients de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ ou encore la composition par une fonction d'une variable de classe $\mathscr{C}^2$ restent de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$.

DÉFINITION — la matrice hessienne

Soit $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles d'ordre 2 pour tout couple $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$.
*La **matrice hessienne** de f au point $a \in \mathcal{O}$, notée $\nabla^2 f(a) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est définie par*

$$\nabla^2 f(a) = \left[\partial^2_{i,j} f(a)\right]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} = \begin{bmatrix} \partial^2_{1,1} f(a) & \partial^2_{1,2} f(a) & \cdots & \partial^2_{1,n} f(a) \\ \partial^2_{2,1} f(a) & \partial^2_{2,2} f(a) & \cdots & \partial^2_{2,n} f(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^2_{n,1} f(a) & \partial^2_{2,2} f(a) & \cdots & \partial^2_{n,n} f(a) \end{bmatrix}.$$

Remarque. Le symbole « ∇ » se lit « nabla ».

Exemples.
- *Matrice hessienne pour un polynôme à deux variables de degré 2.*

Considérons la fonction polynomiale (de classe $\mathscr{C}^2$) définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f.$$

On vérifie que $$\partial_1 f(x,y) = 2ax + cy + d, \quad \partial_2 f(x,y) = 2by + cx + e$$

puis $$\partial_{1,1} f(x,y) = 2a, \quad \partial_{12} f(x,y) = c, \quad \partial_{2,2} f(x,y) = 2b, \quad \partial_{2,1} f = c.$$

Il vient : $$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2a & c \\ c & 2b \end{bmatrix}.$$

- Posons $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$. Si on note $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, on a

$$g(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2 = \sum_{i=1}^n {x_i}^2.$$

La fonction g est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et pour tous $i,\ j \in [\![1;n]\!]$

$$\partial_i g(x) = 2x_i \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \partial^2_{i,i} g(x) = 2 & \\ \partial^2_{i,j} g(x) = 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ainsi $\nabla^2 g(x) = 2\mathrm{I}_n$.

3.2 Le théorème de Schwarz

THÉORÈME — de Schwarz

Soit f définie sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$.

Si *f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$,*

alors *pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et pour tout point $a \in \mathcal{O}$, on a* $\partial^2_{j,i} f(a) = \partial^2_{i,j} f(a)$.

Résultat admis.

Remarque. D'après le théorème de Schwarz, la matrice hessienne d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ est symétrique réelle. En particulier, la matrice est diagonalisable dans une base orthonormée (théorème spectral).

Exercice 5

✦ Soit f la fonction définie par *d'après EDHEC 2020*

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\qquad f(x,y,z)=x\mathrm{e}^{x\left(y^2+z^2+1\right)}.$$

p. 24

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le seul point critique a de f.
3. Former la hessienne de f au point a et vérifier qu'elle est diagonale.

3.3 Forme quadratique et développement limité d'ordre 2

Préliminaires

• **Formes quadratiques**
Rappelons que la forme quadratique associée à une matrice symétrique $\mathrm{A}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$q(h)={}^t\mathrm{HAH}$$

où H est la matrice des coordonnées de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

• **Signe d'une forme quadratique**
Nous avons vu aussi que le signe de la forme quadratique est précisé par le signe des valeurs propres de la matrice associée. Plus précisément

i) $\forall u\in\mathrm{E},\quad q(u)\geqslant 0 \iff \mathrm{Sp(A)}\subset\mathbb{R}^+$;

ii) $\forall u\in\mathrm{E},\quad q(u)\leqslant 0 \iff \mathrm{Sp(A)}\subset\mathbb{R}^-$.

On a vu un énoncé plus précis encore connu sous le nom d'encadrement de Rayleigh

$$\forall h\in\mathbb{R}^n,\quad \|h\|^2\min\mathrm{Sp(A)}\leqslant q(h)\leqslant \|h\|^2\max\mathrm{Sp(A)}.$$

• **Formes quadratiques et matrices hessiennes**
Soient $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f:\mathscr{O}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.
On peut considérer la forme quadratique associée à la matrice hessienne de f en a, notée $q_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ et définie par

$$\forall h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n,\qquad q_a(h)={}^t\mathrm{H}\left(\nabla^2 f(a)\right)\mathrm{H},\quad \text{où } \mathrm{H}=\begin{bmatrix} h_1\\ \vdots\\ h_n\end{bmatrix}.$$

Cela s'écrit aussi :

$$q_a(h)=\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\partial^2_{i,j}f(a)\,h_ih_j=\sum_{i=1}^{n}\partial^2_{ii}f(a)\,{h_i}^2+2\sum_{i<j}\partial^2_{i,j}f(a)\,h_ih_j.$$

• **Dérivées directionnelles d'ordre 2**
Soit $h\in\mathbb{R}^n$ tel que le segment $[a;a+h]$ soit inclus dans $\mathscr{O}$. On pose pour tout $t\in[0;1]$,

$$g_{a,h}(t)=f(a+th).$$

En reprenant le résultat du premier semestre sur les dérivées directionnelles, $g_{a,h}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ avec pour tout $t\in[0;1]$,

$$g'_{a,h}(t)=\left\langle\nabla f(a+th),h\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}h_i\partial_i f(a+th)\quad\text{où}\quad h=(h_1,\dots,h_n).$$

À l'aide de la seconde expression, on vérifie que $g_{a,h}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0;1]$ avec

$$g''_{a,h}(t)=q_{a+th}(h).$$

En particulier

$$g''_{a,h}(0)=q_a(h).$$

Preuve. Pour i fixé, posons
$$\mathrm{F}_i : x \in \mathscr{O} \mapsto \partial_i f(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{G}_i : t \in [0;1] \mapsto \mathrm{F}_i(a+th).$$
Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$ et par te théorème sur les dérivées directionnelles
$$\begin{aligned} \mathrm{G}_i'(t) &= \langle \nabla \mathrm{F}_i(a+th), h\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j \mathrm{F}_i(a+th)\cdot h_j = \sum_{j=1}^n h_j \partial^2_{ji} f(a+th). \end{aligned}$$
Par somme de fonctions dérivables
$$\begin{aligned} \forall t \in [0;1], \quad g'_{a,h}(t) &= \sum_{i=1}^n h_i \mathrm{G}_i(t). \\ g''_{a,h}(t) &= \sum_{i=1}^n h_i \mathrm{G}_i'(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \partial^2_{ji} f(a+th) = q_{a+th}(h). \end{aligned}$$
■

Ensuite, en reprenant le résultat de l'exercice 2, page 3, il prouve l'existence de $\theta \in [0;1]$ tel que
$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2} q_{a+\theta h}(h).$$
Preuve. Il existe $\theta \in [0;1]$ tel que
$$g_{a,h}(t) = g_{a,h}(0) + g'_{a,h}(0)\,t + \frac{1}{2} t^2 g''(\theta).$$
En remplaçant, il vient
$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2} q_{a+\theta h}(h).$$
■

Développement limité d'ordre 2

THÉORÈME **développement limité d'ordre 2**

Soient $\mathscr{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.
Alors pour tout $a \in \mathscr{O}$, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de $0_{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathbb{R}^n$, une fonction $\varepsilon : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $h \in \mathscr{V}$,
$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \quad \text{et} \quad \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$
où q_a est la forme quadratique associée à $\nabla^2 f(a)$.

Preuve. Dans un premier temps, on pose
$$\mathscr{V} = \{h \in \mathbb{R}^n \mid a+h \in \mathscr{O}\}.$$
On définit la fonction ε par $\varepsilon(0_{\mathbb{R}^n}) = 0$ et pour $h \in \mathscr{V} \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
$$\varepsilon(h) = \frac{1}{\|h\|^2}\left(f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h\rangle - \frac{1}{2} q_a(h)\right).$$
Justifions la continuité de ε en $0_{\mathbb{R}^n}$. Pour $h \in \mathscr{V} \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, l'énoncé précédent prouve l'existence de $\theta \in [0;1]$ tel que
$$|\varepsilon(h)| = \frac{1}{2\|h\|^2} \left| q_{a+\theta h}(h) - q_a(h) \right|.$$
En revenant à l'expression de la forme quadratique à l'aide des dérivées partielles, on obtient
$$\begin{aligned} |\varepsilon(h)| &= \frac{1}{2\|h\|^2} \left| \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]} h_i h_j \left(\partial^2_{i,j} f(a+\theta h) - \partial^2_{i,j} f(a)\right) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\|h\|^2} \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]} \left| h_i h_j \left(\partial^2_{i,j} f(a+\theta h) - \partial^2_{i,j} f(a)\right) \right| \quad \text{inégalité triangulaire} \\ |\varepsilon(h)| &\leqslant \frac{1}{2} \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]} \left| \partial^2_{i,j} f(a+\theta h) - \partial^2_{i,j} f(a) \right| \quad \text{car pour tout indice } i,\ |h_i| \leqslant \|h\|. \end{aligned}$$

> Lorsque $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$, le terme de droite tend vers 0 (les dérivées partielles d'ordre 2 sont continues). Ainsi $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et l'énoncé est prouvé. ■

Exemple. Posons $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy + xe^y$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ avec

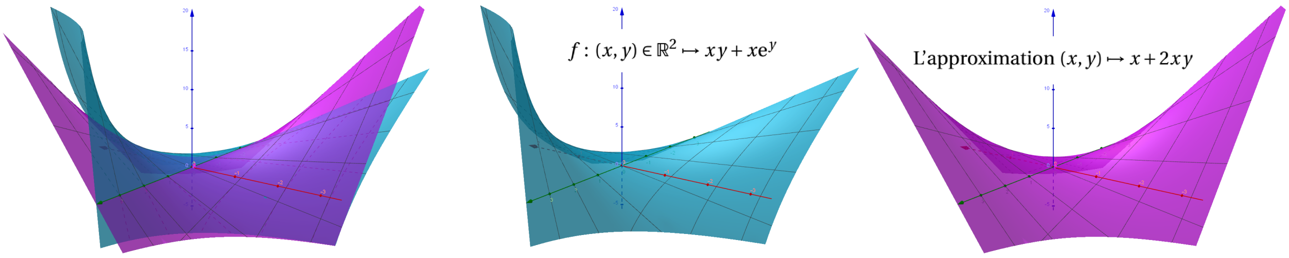
$$\partial_1 f(x, y) = y + \mathrm{e}^y, \quad \partial_2 f(x, y) = x + x\mathrm{e}^y$$
$$\partial^2_{1,1} f(x, y) = 0, \quad \partial^2_{1,2} f(x, y) = \partial^2_{21} f(x, y) = 1 + \mathrm{e}^y, \quad \partial_{2,2} f^2(x, y) = x\mathrm{e}^y.$$

La matrice hessienne est alors : $$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1+\mathrm{e}^y \\ 1+\mathrm{e}^y & x\mathrm{e}^y \end{bmatrix}.$$

En particulier $$\nabla f^2(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \forall\, h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad q_{(0,0)}(h) = 4h_1h_2.$$

Le développement limité d'ordre 2 devient

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), h\rangle + \frac{1}{2} q_{(0,0)}(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &= 0 + \big\langle (1,0), (h_1, h_2)\big\rangle + \frac{1}{2}\cdot 4h_1h_2 + \|h\|^2\varepsilon(h) = h_1 + 2h_1h_2 + \|h\|^2\varepsilon(h). \end{aligned}$$



4 Applications à l'optimisation

4.1 Rappels : extrema locaux/globaux

DÉFINITION — **extrema locaux**

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

- *On dit que f a un **maximum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \Big(\|x - a\| < r \quad \Rightarrow \quad f(a) \geqslant f(x) \Big).$$

- *On dit que f a un **minimum local** en a s'il existe $r > 0$ tel que*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \Big(\|x - a\| < r \quad \Rightarrow \quad f(a) \leqslant f(x) \Big).$$

- *On dit que f a un **extremum local** si f a un maximum local ou un minimum local.*

Exemple. Reprenons l'exercice précédent :

$$f(x, y) = \frac{1}{8} - \frac{1}{32}\left(u^2 - uv + v^2\right) + o\left(u^2 + v^2\right)$$

Comme $u^2 - uv + v^2 = \left(u - \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 > 0$, pour $(u, v)(0,0)$, il s'agit en ce minimum local.

4.2 Condition d'existence d'extremum

L'énoncé suivant généralise le théorème d'existence du minimum et du maximum pour une fonction continue sur un segment.

THÉORÈME **sur un fermé borné**

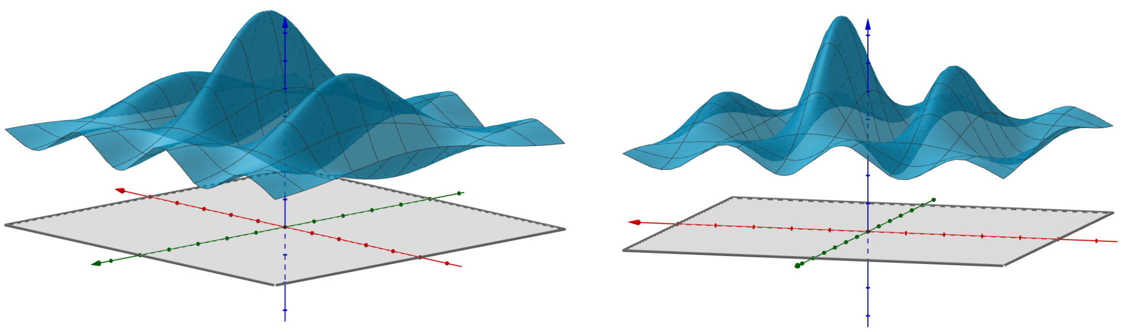
Une fonction continue sur une partie fermée bornée admet un maximum global et un minimum global.

Résultat admis.

Remarque. On peut traduire mathématiquement. Soit $f : \mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue. Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathscr{O}, \quad f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

Ci-dessous, un exemple d'une fonction continue de deux variables définies sur un fermé borné.



4.3 Condition nécessaire d'ordre 1

L'énoncé du premier semestre s'étend au cas d'un ouvert en reprenant la preuve.

THÉORÈME **condition d'ordre 1**

Soient $f : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{O}$ et $a \in \mathscr{O}$.

Si
- *$\mathscr{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
- *f a un extremum en $a \in \mathbb{R}^n$.*

***Alors** a est un point critique de f, c'est-à-dire $\nabla f(a) = 0$.*

Exercice 6

✦✦ Prouver cet énoncé. p. 24

Attention. Comme pour le cas d'une variable :

- L'énoncé précédent n'est valable que sur un ouvert.
- La réciproque est fausse. On parle alors de **point col**.

Exercice 7

✧

1. Donner le domaine de définition de f définie par $f(x,y) = x^{\ln(x)} + y^{\ln(y)}$.
2. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et préciser Les dérivées partielles.
3. Montrer que f a au plus un extremum.
4. Est-ce un minimum, un maximum ?

p. 24

4.4 Condition suffisante d'ordre 2

THÉORÈME — **condition d'ordre 2**

Si a est un point critique de f :

- ***Si*** $\mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f(a)\right) \subset \mathbb{R}_+^*$, ***alors*** *$f$ admet un minimum local en a.*
- ***Si*** $\mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f(a)\right) \subset \mathbb{R}_-^*$, ***alors*** *$f$ admet un maximum local en a.*
- ***Si*** $\mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f(a)\right)$ *contient deux réels non nuls de signes distincts,* ***alors*** *f n'admet pas d'extremum en a.*

Preuve. • Traitons le premier cas. Reprenons le développement limité d'ordre 2. Pour $h \in \mathscr{V}$

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

Or a est un point critique,

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 \varepsilon(h).$$

En utilisant l'encadrement de Rayleigh avec $\alpha = \min \mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f(a)\right) > 0$, il vient

$$f(a+h) - f(a) \geqslant \frac{1}{2}\alpha\|h\|^2 + \|h\|^2\varepsilon(h) \geqslant \|h\|^2\left(\frac{\alpha}{2} + \varepsilon(h)\right).$$

Comme $\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, il existe $r \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\mathscr{B}(0,r) \subset \mathscr{V}$ et

$$\forall\, h \in \mathscr{B}(0;r), \quad |\varepsilon(h)| \leqslant \frac{\alpha}{4}.$$

Dans ce cas
$$f(a+h) - f(a) \geqslant \frac{\|h\|^2\alpha}{4} \geqslant 0.$$

Il y a un minimum local.

- Le second point se déduit du premier en considérant $-f$.
- Soient u, v deux vecteurs propres respectivement de $\lambda > 0$ et $\mu < 0$. On vérifie que

$$q_a(u) = \lambda\|u\|^2 > 0 \quad \text{et} \quad q_a(v) = \mu\|v\|^2 < 0.$$

On peut supposer que $u, v \in \mathscr{V}$ (quitte à diminuer la norme). On a vu que la fonction d'une variable $g_{a,u}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0;1]$, la formule de Taylor-Young donne alors pour tout $t \in [0;1]$

$$g_{a,u}(t) = g_{a,u}(0) + g_{a,u}{}'(0)\cdot t + g_{a,u}{}''(0)\cdot\frac{t^2}{2} + o_0(t).$$

D'où en remplaçant (avec a, point critique)

$$f(a+tu) - f(a) = \underbrace{q_a(u)\cdot\frac{t^2}{2}}_{>0} + o_0(t).$$

Ainsi pour t suffisamment petit $f(a+tu) - f(a) > 0$.
De la même manière, on montre que pour t suffisamment petit $f(a+tv) - f(a) < 0$. Il n'y a donc pas d'extremum local en a. ■

Remarque. Les réciproques sont fausses. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4$ admet bien un minimum au point $(0,0)$, pourtant la matrice hessienne est nulle en $(0,0)$ et le spectre est réduit à $\{0\}$ qui n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ **Attention.** La seule connaissance de la matrice hessienne au point a ne permet pas de justifier que l'extremum est global.

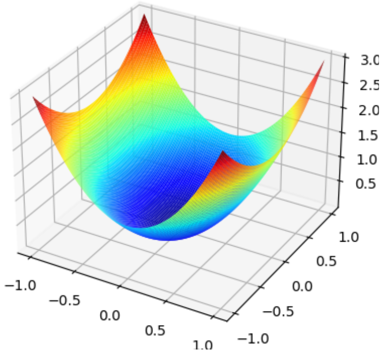
Illustration dans $\mathbb{R}^2$

Posons pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f_{\alpha,\beta}(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2$. La matrice Hessienne en point critique $(0,0)$ est

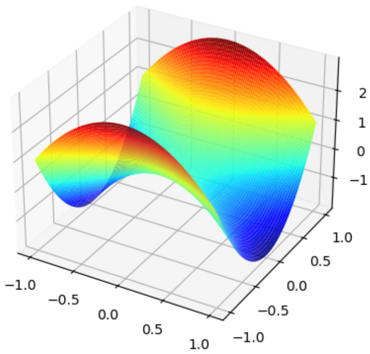
$$\mathrm{H}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{bmatrix}.$$

Trois cas sont bien à distinguer :

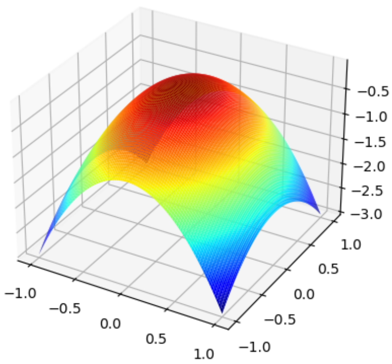
I. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$,



II. α, β de signes opposés,



III. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^-$.



Vocabulaire. Le deuxième cas correspond à un **point col** ou encore à un **point selle**.

Exemples

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}.$$

Justifions que la fonction f admet un minimum local en $(1,1)$. Commençons par tracer les courbes de niveaux :

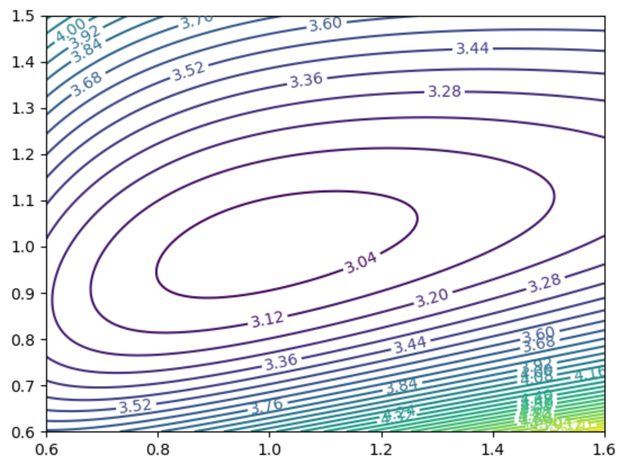
Editeur

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x,y):
    return x/y**2+y**2+1/x

x=np.linspace(0.4,1.6,200)
y=np.linspace(0.5,1.5,200)
X , Y = np.meshgrid(x,y)
Z = f(X,Y)


graphe = plt.contour(X,Y,Z,20)
# Le 20 pour 20 lignes de niveau
plt.show()
```



On vérifie que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Les dérivées partielles premières sont données par

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = -\frac{2x}{y^3} + 2y$$

et les dérivées d'ordre 2 par

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \frac{2}{x^3}, \quad \partial^2_{2,1} f(x,y) = \partial^2_{1,2} f(x,y) = -\frac{2}{y^3}, \quad \partial^2_{2,2} f(x,y) = \frac{6x}{y^4} + 2.$$

De plus, on vérifie qu'on a un unique point critique donné par $\mathrm{A} = (1,1)$. Enfin, la matrice hessienne de f au point A est la matrice H définie par

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

On trouve deux valeurs propres strictement positives. On a un minimum local.

Exercice 8

✦ Soit f la fonction définie sur $\mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par : *D'après Oraux HEC E*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + 2y^2\right).$$

p. 25

1. Démontrer qu'il existe dans $\mathcal{O}$ un unique point-col pour f.
2. La fonction f admet-elle sur $\mathcal{O}$ un maximum global ? un minimum global ?

• Complétons l'étude de la dimension 2 avec *les notations de Monge* (hors programme).
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2$. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on notera $\mathrm{H}_{(a,b)}$ la matrice hessienne de l'application au point (a,b).

$$\mathrm{H}_{(a,b)} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}.$$

Exercice 9

✦✦ Supposons que $(a,b) \in \mathcal{O}$ est un point critique de f. Justifier que

- si $rt - s^2 < 0$, alors $f(a,b)$ est un point col.
- si $rt - s^2 > 0$, alors $f(a,b)$ est un extremum local. Dans ce cas, si $r < 0$, alors $f(a,b)$ est un maximum local et, si $r > 0$, alors $f(a,b)$ est un minimum local.

p. 25

Remarque. Nous verrons au chapitre suivant le cas d'une fonction définie sur un fermé borné.

4.5 Convexité, condition suffisante dans le cas d'extremum global

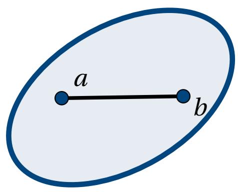
DÉFINITION **partie convexe**

Une partie C *de* $\mathbb{R}^n$ *est dite* ***convexe*** *si, pour tout couple* (a,b) *d'éléments de* C, *le segment* $[a,b]$ *est tout entier inclus dans* C. *Autrement dit,* C *est convexe lorsque*

$$\forall\, a, b \in \mathrm{C}, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad \lambda a + (1-\lambda) b \in \mathrm{C}.$$

Exemple. $\mathbb{R}^n$ est une partie convexe.

Graphiquement, tout segment dont les extrémités sont dans C est inclus dans C.



THÉORÈME **convexité, extremum global**

Soient $\mathcal{O}$ *est un ouvert convexe de* $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ *et* a*,un point critique de* f.

- ***Si*** *pour tout* $x \in \mathcal{O}$, $\mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f(x)\right) \subset \mathbb{R}^+$, ***alors*** f *admet un minimum global en* a.
- ***Si*** *pour tout* $x \in \mathcal{O}$, $\mathrm{Sp}\left(\nabla^2 f(x)\right) \subset \mathbb{R}^-$, ***alors*** f *admet un maximum global en* a.

Exercice 10

✦✦✦ **Preuve**
On conserve les mêmes notations et hypothèses. Soit $t \in \mathrm{I} \setminus \{0\}$. À l'aide des résultats préliminaires sur la fonction $g_{a,h}$, justifier que

p. 26

$$f(a+th) = f(a) + \langle \nabla f(a), th \rangle + \int_0^t (t-u) q_{a+uh}(h)\, \mathrm{d}u.$$

Conclure sur le théorème.

Exemple. Soit $f(x,y,z) = 11x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 10xy + 10xz - 6yz + 1$.
⇀ La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ et on vérifie que la matrice hessienne en (x,y,z) est

$$\nabla^2 f(x,y,z) = 2 \begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

⇀ Utilisons Python pour obtenir rapidement le spectre :

Editeur

```python
import numpy as np

H= 2*np.array
    ([[11,-5,5],[-5,3,-3],[5,-3,3]])

Sp=np.linalg.eigvals(H)
```

Console

```
>>> # script executed
>>> Sp
array([32.,  2.,  0.])
```

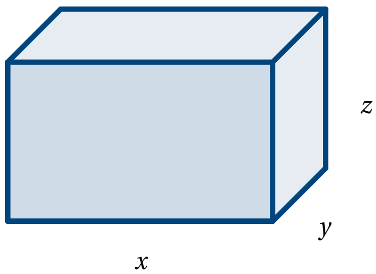
⇀ On vérifie que f admet un point critique donné par $\mathrm{A} = (0,1,1)$.
⇀ Concluons : en tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice hessienne a un spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$. On peut donc en déduire que f admet en A un minimum global.

4.6 Exemple détaillé sur un ouvert

Modélisation

On souhaite minimiser la surface d'un pavé de volume 1. Notons x, y, z les longueurs des cotés. L'aire de la surface a pour expression $2(xy+xz+yz)$. Le volume vaut $xyz = 1$ et $z = 1/(xy)$. Finalement, on cherche à minimiser sur $\mathscr{O} = \mathbb{R}_*^{+2}$, la fonction f définie par

$$f(x,y) = xy + xz + yz = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$



Précisons que f n'admet pas de maximum global puisque

$$f(x,1) = x + \frac{1}{x} + 1 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Les dérivées successives

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{O}$ en tant que fraction rationnelle qui ne s'annule pas sur $\mathscr{O}$. Pour tout $(x,y) \in \mathscr{O}$

$$\partial_1 f(x,y) = y - \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = x - \frac{1}{y^2}.$$

Noter que la symétrie (pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(y,x)$) impose $\partial_1 f(x,y) = \partial_2 f(y,x)$. On a aussi $\partial_{1,1} f_1(x,y) = \frac{2}{x^3}$. Par symétrie $\partial_{2,2} f(x,y) = \frac{2}{y^3}$. Puis $\partial_{1,2} f(x,y) = 1$ et par le théorème de Schwarz $\partial_{21} f(x,y) = 1$. La matrice hessienne

est
$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2/x^3 & 1 \\ 1 & 2/y^3 \end{bmatrix}.$$

Étude du ou des points critiques

Soit $(x,y) \in \mathscr{O}$.
$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \left\{ \begin{array}{l} \partial_1 f(x,y) = 0 \\ \partial_2 f(x,y) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y - 1/x^2 = 0 \\ x - 1/y^2 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 1/x^2 \\ x = 1/y^2 = x^4 \end{array} \right.$$

Comme $x > 0$, la seconde ligne impose $x = 1$. Puis, $y = 1$. On a un unique point critique $(1,1)$ avec $f(1,1) = 3$.

Étude locale au niveau du point critique

La matrice hessienne au point critique est
$$\nabla^2 f(a) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\nabla^2 f(1,1)$ est symétrique réelle, elle est diagonalisable (dans une base orthonormée). Précisons les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 en remarquant que
$$\nabla^2 f(1,1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}\left(\nabla^2 f(1,1)\right) = \lambda_1 + \lambda_2 = 4, \quad \text{puis,} \quad \lambda_1 = 1.$$

D'où $\operatorname{Sp}\left(\nabla^2 f(1,1)\right) = \{1;3\} \subset \mathbb{R}_*^+$. Finalement, $3 = f(1,1)$ est un minimum local.

Étude globale

La fonction f est positive donc minorée. D'après le théorème de la borne inférieure, on peut poser $\alpha = \inf\limits_{(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2} f(x,y)$.

Posons maintenant la partie de $\mathbb{R}^2$
$$\mathscr{K} = \left[\frac{1}{\alpha+1}\,;(\alpha+1)^2\right] \times \left[\frac{1}{\alpha+1}\,;(\alpha+1)^2\right].$$

- Soit $(x,y) \notin \mathscr{K}$. Plusieurs cas sont possibles :
  - Si $x < \frac{1}{\alpha+1}$, alors
  $$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \alpha + 1.$$
  - Si $y < \frac{1}{\alpha+1}$, on a de même $f(x,y) \geqslant \alpha+1$.
  - Si les deux cas précédents ne sont pas vérifiés, on a
  $$\left(x \geqslant (x+1)^2 \text{ et } y \geqslant \frac{1}{a+1}\right) \quad \text{ou} \quad \left(x \geqslant \frac{1}{a+1} \text{ et } y \geqslant (a+1)^2\right)$$
  Ainsi $$f(x,y) \geqslant xy \geqslant (\alpha+1)^2 \cdot \frac{1}{\alpha+1} \geqslant \alpha + 1.$$

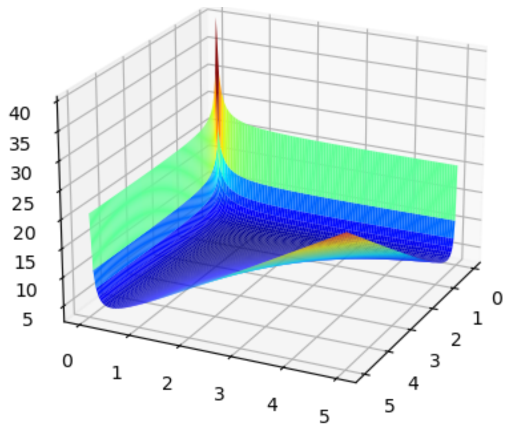
Dans tous les cas : $$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2 \setminus \mathscr{K}, \quad f(x,y) \geqslant \alpha + 1$$

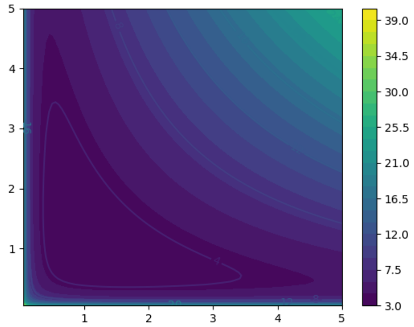
- $\mathscr{K}$ est un fermé borné et f est continue sur $\mathscr{K}$, il existe donc un minimum atteint en un certain pont $a \in \mathscr{K}$:
$$\forall (x,y) \in \mathscr{K}, \quad f(x,y) \geqslant f(a).$$

Précisons que $f(a) \leqslant \alpha+1$ car sinon, on aurait pour tout $(x,y) \in \mathscr{O}$, $f(x,y) \geqslant \alpha+1$. En contradiction avec la définition de $\mathscr{K}$.
- Résumons :

- Pour tout $(x,y) \in \mathscr{K}$, $f(x,y) \geqslant f(a)$.
- Pour tout $(x,y) \in \mathscr{O} \setminus \mathscr{K}$, $f(x,y) > \alpha + 1 \geqslant f(a)$.

Concluons : $f(a)$ est un minimum global. Résultat que l'on peut vérifier avec Python.





Astuce par une inégalité de convexité

À l'aide de la concavité du logarithme, on prouve l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall\ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \qquad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Soit $(x,y) \in \mathscr{O}$. Pour $n = 3$, $a_1 = 1/x$, $a_2 = 1/y$ et $a_3 = xy$

$$\frac{1}{3}(1/x + 1/y + xy) \geqslant \sqrt[3]{xy \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}}$$

D'où
$$f(x,y) \geqslant 3 = f(a).$$

Remarque. Mythe fondation de Carthage.

Sacchi, Andrea, la mort de Didon, 17ème

Exercices

Exercice 11. ✧

1. **a)** Préciser l'ensemble de définition de f définie par $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$.

   b) Est-ce un ouvert, un fermé, ni l'un ni l'autre ?

2. Préciser les lignes de niveau de f.

≫ Solution p. 27

Exercice 12. ✦ Déterminer les minima globaux de $f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2\right) - x_1$ où α et β sont des réels.

Exercice 13. ✦ ✎

1. Justifier que l'équation $x - \ln(x) = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$ a deux solutions α, β avec $\alpha \in]0;1[$ et $\beta \in [2;4]$.
2. On considère maintenant la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathscr{O} =]0,+\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y.$$

   a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

   b) Montrer que la fonction f admet exactement deux points critiques : $A = \left(\alpha, \ln(\alpha)\right)$ et $B = \left(\beta, \ln(\beta)\right)$.

   c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, expliciter $\det\left(\nabla^2 f(A) - \lambda I_2\right)$. En déduire la nature local du point critique A.

   d) Même question pour B.

≫ Solution p. 27

Exercice 14. ✦✦

1. Donner le plus grand ouvert $\mathscr{O}$ telle que l'expression $f(x,y) = x^y - y^x$ Soit bien définie.
2. Justifier que f admet un unique point critique et préciser sa nature (extremum/point selle).

≫ Solution p. 27

Exercice 15. ✦✦ On définit la partie $\mathscr{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 8\right\}$ et la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. Déterminer les points critiques de f. Préciser la valeur de f en ces points.
2. **a)** Justifier que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\;f(x,y) \geqslant \dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^2 - 4\left(x^2+y^2\right)$.

   b) 🔍 En déduire que si $(x,y) \notin \mathscr{B}$, alors $f(x,y) \geqslant 0$.

   c) Justifier que f admet un minimum m_0 sur $\mathscr{B}$.

3. En déduire que m_0 est un minimum global de f. Préciser sa valeur.

≫ Solution p. 28

Exercice 16. ✦✦✦ *Oraux HEC 2008*

Soit f la fonction définie par :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. La fonction f a-t-elle des extrema locaux ? globaux ?

≫ Solution p. 29

Exercice 17. ✦ *EML Lyon2020 E*

On considère la fonction F de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ définie par :

$$F(x,y) = x^2 y + x^2 - \frac{y^2}{2} - 2x.$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F en tout point (x, y) de $]0,+\infty[^2$.

2. Montrer que la fonction F admet un unique point critique du type (α, α^2) où $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Écrire la matrice hessienne, notée H, de la fonction F au point (α, α^2).

4. Montrer que la matrice H admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1 et λ_2, vérifiant $\lambda_1\lambda_2 = -6\alpha^2 - 2$.

5. La fonction F présente-t-elle des extrema locaux sur $]0,+\infty[^2$?

≫ Solution p. 29

Exercice 18. ✦✦ ✎ *D'après ESCP 01*

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 . On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. Déterminer le rang de J_n et en déduire ses valeurs propres. La matrice J_n est-elle diagonalisable ?

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f_n(x_1,\dots,x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\exp\left(-\sum_{i=1}^n {x_i}^2\right).$$

2. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que f_n possède deux points critiques a et $b = -a$, avec a dont les coordonnées sont positives.

4. Justifier que la hessienne de f_n en a est $\mathrm{H}_n(a) = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(n\mathrm{I}_n + \mathrm{J}_n)$.

5. Établir que f_n possède un extremum local en a. Quelle est sa nature ? Donner sa valeur. On admet que f_n possède un extremum local de nature et de valeur opposées en b.

6. **a)** Étudier la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$, par : $\forall t \geqslant 0,\ h(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$.

b) Montrer que, pour tout $(x_1,\dots,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^n {x_k}^2.$$

c) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et b des extremums globaux.

≫ Solution p. 30

Compléments

Exercice 19. ✦✦✦ Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On note $\mathscr{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{B}$ la boule unité ouverte :

$$\mathscr{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\right\}, \qquad \mathscr{B} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\right\}.$$

On suppose que f est constante sur $\mathscr{S}$. Démontrer l'existence de $a \in \mathscr{B}$ tel que $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

≫ Solution p. 30

Problème 20. ✦ ✎ **Dérivation d'une intégrale à paramètre**

On considère les fonctions f, définie sur $\mathscr{F} = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$ et g, définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\sqrt{1+xt} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **a)** Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) En déduire que la fonction g est bien définie sur $[0;+\infty[$.

c) Justifier que g est croissante sur $[0,+\infty[$.

2. **a)** Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{F}$ et préciser $\partial_1 f(x,t)$ et $\partial^2_{1,1} f(x,t)$.

b) Montrer que pour tout $(x,t) \in \mathscr{F}$,

$$\left|\partial^2_{1,1} f(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{4}\mathrm{e}^{-t^2}.$$

c) Soit $x_0 \in [0;+\infty[$, montrer que, pour $(x,t) \in \mathscr{F}$

$$\left|f(x,t) - f(x_0,t) - (x-x_0)\,\partial_1 f(x_0,t)\right| \leqslant \frac{t^2}{8}\mathrm{e}^{-t^2}|x-x_0|^2.$$

d) En déduire l'existence d'une constate $C \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $x_0 \in [0;+\infty[$,

$$\left| g(x) - g(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x_0, t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant C \, |x - x_0|^2.$$

e) Conclure en montrant que g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que g' est définie par

$$\forall x \in [0;+\infty[, \qquad g'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_1 f(x,t) \, \mathrm{d}t.$$

f) Retrouver le sens de variation de g.

≫ Solution p. 30

Exercice 21. ✦✦ ✎ *EML Lyon 2007*

On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

2. On définit les fonctions $F : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ et $G :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x,y) = F(xy) - F(x) - F(y).$$

a) Montrer que G est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[^2$, puis exprimer, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x,y) en fonction de x, y, $f(x)$, $f(y)$, $f(xy)$, $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(xy)$.

b) Établir que G admet $(1,1)$ comme unique point critique.

c) Est-ce que G admet un extremum local ?

≫ Solution p. 31

Exercice 22. ✦✦ **Maximum de vraisemblance - cas continu avec deux paramètres**

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}_*^+$ deux paramètres inconnues. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathscr{N}(m; v)$. On note $f_{m,v}$ la densité continue sur $\mathbb{R}$ de X.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels fixés. On définit les fonctions L et ℓ sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$ par

$$\forall (m,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \qquad L(m,v) = \prod_{k=1}^n f_{m,v}(x_k) \quad \text{et} \quad \ell(m,v) = \ln\big(L(m,v)\big).$$

1. Expliciter $f_{m,v}$, puis $\ell(m,v)$ pour $(m,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$.

2. La fonction ℓ est de classe $\mathscr{C}^2$, préciser les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

3. En déduire l'unique point critique de ℓ. *On pourra introduire les notations*

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 \right).$$

4. Conclure en montrant que L admet un maximum local atteint en un unique point $(\hat{m}, \hat{v})$.

5. Proposer des estimateurs pour m et v en partant de $(\hat{m}, \hat{v})$.

≫ Solution p. 31

Exercice 23. ✦✦ ✎ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^n {x_k}^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et préciser les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sur $\mathbb{R}^n$.

2. a) Déterminer le seul point critique $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.

b) Vérifier que la hessienne de f en ce point s'écrit sous la forme $H = 2(I_n + J)$ où J désigne la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

c) Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de J. Que dire sur les valeurs propres de J ?

d) En déduire que $f(a)$ est un minimum local de f.

3. Est-ce que $f(a)$ est un minimum global ?

≫ Solution p. 32

Exercice 24. ✦✦✦ **Problème des moindres carrés**
Soient $x = (x_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, $y = (y_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$. On définit les moyennes empiriques et variance empirique par :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right) - \overline{x}^2$$

On suppose $\sigma_x\sigma_y \neq 0$ et on définit aussi la covariance et le coefficient de corrélation empiriques de x et y par :

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\cdot\overline{y}, \quad \rho(x,y) = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, \qquad \mathrm{F}(a,b) = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i + b - y_i\right)^2.$$

1. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et préciser les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, puis vérifier que la matrice hessienne de F peut s'exprimer sous la forme :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, \qquad \nabla^2\mathrm{F}(a,b) = \frac{2}{n}\begin{bmatrix}\sigma_x^2+\overline{x}^2 & \overline{x}\\ \overline{x} & 1\end{bmatrix}.$$

2. **a)** Justifier que F admet un unique point critique $(\hat{a},\hat{b})$ que l'on exprimera en fonction de $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x^2 et $\mathrm{Cov}(x,y)$.
b) Vérifier que $\mathrm{F}(\hat{a},\hat{b}) = n\sigma_y^2\left(1-\rho^2(x,y)\right)$.

3. Montrer que $\mathrm{F}(\hat{a},\hat{b})$ correspond à un minimum global de F. *On pourra s'inspirer de l'exercice 9, p.14.*

4. Montrer que l'on a : $|\rho(x,y)| \leqslant 1$. Que dire de x et y lors du cas d'égalité $|\rho(x,y)| = 1$?

≫ Solution p. 32

Exercice 25. ✦✦✦ **Existence d'une valeur propre pour une matrice symétrique et quotient de Rayleight**
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On identifie dans la suite, vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit S une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\mathrm{R_S} : \begin{cases} \mathbb{R}^n\setminus\{0_n\} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \quad \dfrac{\langle \mathrm{S}x, x\rangle}{\|x\|^2}. \end{cases}$$

1. **a)** Justifier que la restriction de $\mathrm{R_S}$ à $\mathscr{S} = \left\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\right\}$ admet un minimum et un maximum.
b) En remarquant que, pour tous $\alpha\in\mathbb{R}^*$, $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}$, $\mathrm{R_S}(x) = \mathrm{R_S}(\alpha x)$, montrer que l'application $\mathrm{R_S}$ admet un minimum et un maximum global sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}$.

2. On note $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $\mathrm{D}(x) = \|x\|^2$ et $\mathrm{N}(x) = \langle \mathrm{S}x, x\rangle$.
a) Vérifier que D et N sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\partial_1\mathrm{D}(x) = 2\langle x, e_1\rangle \quad \text{et} \quad \partial_1\mathrm{N}(x) = 2\langle \mathrm{S}x, e_1\rangle.$$

b) En déduire que $\mathrm{R_S}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et que le gradient en x est donné par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}, \qquad \nabla\mathrm{R_S}(x) = \frac{2}{\|x\|^2}\left(\mathrm{S}x - \mathrm{R_S}(x)\,x\right).$$

c) Soit x_0 un point où le maximum de $\mathrm{R_S}$ est atteint. Montrer que x_0 est vecteur propre de S.

≫ Solution p. 33

Exercice 26. ✦✦ ✎ Soient l'ouvert $\mathscr{O} = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ et la fonction f définie sur $\mathscr{O}$ par

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right).$$

1. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathscr{O}$. Préciser les dérivées partielles d'ordre 1.

2. Déterminer les points critiques de f et donner la valeur de f en ces points.

3. a) Montrer que si a est un point critique de f alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que :

$$\nabla^2 f(a) = \alpha(n\mathrm{I}_n - \mathrm{J})$$

où J la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

b) Déterminer les valeurs propres de $n\mathrm{I} - \mathrm{J}$. Peut-on en déduire la nature des points critiques de f ?

L'objectif de la suite est de prouver que f admet un minimum global au point critique en utilisant des inégalités plus ou moins classiques.

4. *Première méthode : inégalité de Cauchy-Schwarz*
Expliciter l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Conclure.

5. *Deuxième méthode : inégalité arithmético-géométrique*
On démontre que pour une fonction concave $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, on a

$$\forall\ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathrm{I}^n,\ \forall\ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in [0;1]^n,\ \text{tels que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k).$$

a) À partir de la fonction logarithme, montrer que

$$\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

b) Conclure sur la nature du point critique.

6. *Troisième méthode : inégalité de Tchebychev pour les sommes*

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$. En étudiant le signe de la somme double $\sum_{i,j \in [\![1;n]\!]} \left(a_i - a_j\right)\left(b_i - b_j\right)$, montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

b) Conclure.

≫ Solution p. 34