TD 10

Révisions analyse ECG1

Problème - Essec 2001 maths I

On étudie dans ce problème la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathrm{S}_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad \mathrm{S}_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}.$$

Dans la partie I, on détermine la limite S de la suite (S_n). Dans les parties II et III, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de (S_n) vers S.

PARTIE I

On considère pour tout nombre entier $p \geqslant 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\mathrm{I}_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Convergence de la suite $(\mathrm{J}_p/\mathrm{I}_p)$

a) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$:

$$\frac{2}{\pi}\,t \leqslant \sin(t).$$

Représenter graphiquement cette inégalité.

b) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \mathrm{J}_p \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(\mathrm{I}_p - \mathrm{I}_{p+1}\right).$$

c) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1}.
On pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$ dans l'intégration par parties.

d) Déduire des résultats précédents que $\mathrm{J}_p/\mathrm{I}_p$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

2. Convergence et limite de la suite (S_n)

a) Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_p $(p \geqslant 1)$.

b) En déduire la relation suivante pour $p \geqslant 1$:

$$\frac{\mathrm{J}_{p-1}}{\mathrm{I}_{p-1}} - \frac{\mathrm{J}_p}{\mathrm{I}_p} = \frac{1}{2p^2}$$

c) Calculer J_0 et I_0, puis exprimer la limite S de la suite (S_n) à l'aide de π.

d) Anticiper la réponse de la machine à la suite de commandes suivantes :

Editeur

```
import numpy as np
n=5000
N=np.linspace(1,n,n)
print(np.sqrt(6*np.sum(N**(-2))))
```

PARTIE II

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling. On désigne par :

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \text{ pour } k \geqslant 1$$

- Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

3. Sommation de séries télescopiques

a) Établir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b) Établir pour toute fonction f appartenant à E la convergence de la série $\Sigma(\Delta f)(p)$ avec $p \geqslant 1$ et calculer pour tout nombre entier naturel n les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) \quad ; \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p)$$

c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geqslant 1$.

d) Établir pour tout nombre entier naturel $k \geqslant 1$ la convergence de la série $\Sigma f_k(p)$ et vérifier pour tout nombre entier naturel n que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

4. Accélération de la convergence de (S_n)

a) Établir la relation suivante pour $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$: $\displaystyle \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)! f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p)$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \leqslant \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}$$

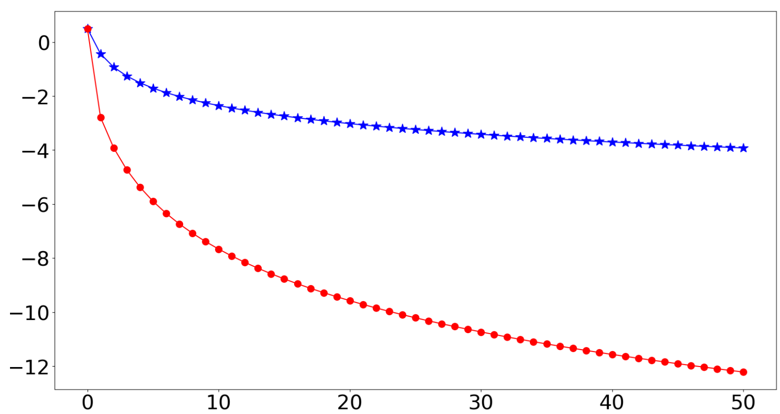
c) En déduire, l'entier $q \geqslant 1$ étant fixé, une suite $(\mathrm{S}_n{}')$ de nombres rationnels telle que :

$$0 \leqslant \frac{\pi^2}{6} - \mathrm{S}'_n \leqslant \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}$$

Expliciter S'_n et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Écrire en python une fonction d'argument n, calculant et affichant S'_n pour $q = 2$.

e) On affiche ci-après deux courbes associées respectivement à $\big(\ln(\mathrm{S} - \mathrm{S}_n)\big)_{n \in [\![0;50]\!]}$ et $\big(\ln(\mathrm{S} - \mathrm{S}'_n)\big)_{n \in [\![0;50]\!]}$.
Reconnaître la courbe associée à $\big(\ln(\mathrm{S} - \mathrm{S}'_n)\big)_{n \in [\![0;50]\!]}$.



PARTIE III

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S en effectuant un développement limité de S_n suivant les puissances de $1/n$.

f) Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels (u_n) telle que $u_0 = 1$ et

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{u_{n-p}}{p!} = 0 \text{ pour tout nombre entier } n \geqslant 2$$

Établir que les u_n sont rationnels et donner u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme de fraction irréductible.

5. Étude des polynômes de Bernoulli

a) On considère la suite de polynômes (U_n) définie par :

$$\mathrm{U}_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{U}_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p}x^p}{p!} \text{ pour tout nombre entier } n \geqslant 1$$

- Préciser $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3, \mathrm{U}_4$.
- Montrer que ${\mathrm{U}_n}' = \mathrm{U}_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ et $\mathrm{U}_n(0) = \mathrm{U}_n(1)$ pour $n \geqslant 2$.

b) On considère une suite de polynômes (V_n) définie par :

$$\mathrm{V}_0 = 1, \quad \mathrm{V}_n' = \mathrm{V}_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_n(0) = \mathrm{V}_n(1) \text{ pour } n \geqslant 2$$

- Établir que $\mathrm{V}_n^{(p)}(0) = \mathrm{V}_{n-p}(0)$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$ et en déduire la formule suivante :

$$\mathrm{V}_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\mathrm{V}_{n-p}(0)x^p}{p!}$$

- Établir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\mathrm{V}_{n-p}(0)}{p!} = 0.$
- Établir enfin que $\mathrm{V}_n = \mathrm{U}_n$ pour tout nombre entier naturel n.

c) En déduire l'égalité $\mathrm{U}_n(x) = (-1)^n \mathrm{U}_n(1-x)$ pour tout nombre entier naturel n. Montrer alors que $u_{2p+1} = 0$ si $p \geqslant 1$.

6. Accélération de la convergence de (S_n)

a) Établir pour $p \geqslant 1$ la relation suivante, d'abord en supposant $q = 1$, puis $q \geqslant 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{q} (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right) = (2q+2)! \int_0^1 \frac{\mathrm{U}_{2q+1}(x)\,\mathrm{d}x}{(x+p)^{2q+3}}.$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{(2q+1)! \mathrm{M}_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

où M_{2q+1} désigne le maximum de la fonction continue $x \to |\mathrm{U}_{2q+1}(x)|$ sur le segment $[0,1]$.

c) En déduire, l'entier $q \geqslant 1$ étant fixé, une suite $({\mathrm{S}_n}'')$ de nombres rationnels telle que :

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - \mathrm{S}_n'' \right| \leqslant \frac{(2q+1)! \mathrm{M}_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

Expliciter S_n'' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Écrire en python une fonction d'argument n, calculant et affichant S_n'' pour $q = 2$.

PARTIE IV compléments

Les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$

7. **a)** Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ convergent.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1[, \qquad \frac{1}{t-1} = -\sum_{k=0}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{t-1}.$$

8. **a)** On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_k = \displaystyle\int_0^1 t^k \ln t \,\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_k converge et déterminer sa valeur.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ converge. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

9. **a)** En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Montrer de même que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice : Extrait Problème 2 EMLyon 2024

On considère, pour tout entier $n \geqslant 2$, la fonction h_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_n(t) = \begin{cases} n^2 t & \text{si } 0 < t \leqslant \frac{1}{n} \\ n^2\left(\frac{2}{n} - t\right) & \text{si } \frac{1}{n} < t \leqslant \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } t \notin \left]0, \frac{2}{n}\right] \end{cases}$$

1. Représenter l'allure de la courbe de h_n.
Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$, h_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

2. Soit $t \in [0,1]$ fixé. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n(t)$?

3. Vérifier alors que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 h_n(t)\mathrm{d}t \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} h_n(t)\mathrm{d}t}$$

Le résultat de cette question permet d'observer que certaines permutations de limites et d'intégrales ne sont pas licites.

– FIN –

Éléments de solution

Les solutions des questions rajoutées ou modifiées.

4.d) Pour $q = 2$

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \\ &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

4.e) L'objectif étant d'accélérer la convergence, on s'attend à ce que $(S - S'_n)_n$ tende "plus rapidement" vers 0 que $(S - S_n)_n$. Avec le logarithme, $\big(\ln(S - S'_n)\big)_n$ tend plus rapidement vers $-\infty$ que $\big(\ln(S - S_n)\big)_n$. La courbe associée à $\big(\ln(S - S'_n)\big)_n$ est donc vraisemblablement la courbe rouge avec les points.