TD 11

Révisions analyse ECG1

I Nature d'une série de maxima

D'après EMLyon 2011, partie IV

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n admet un maximum, noté M_n, et calculer M_n. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mu_n = \sqrt{n} M_n \quad \text{et} \quad a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n.$$

2. Former le développement limité de a_n, à l'ordre 2 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$.

4. Établir que la suite $(\mu_n)_{n \geqslant 1}$ converge et que sa limite est strictement positive.

5. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} M_n$?

II Comparaison séries/intégrales

Oral ESCP 2001, n°9

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

a) Montrer que f est positive et tend vers 0 en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout réel $h > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$h \sum_{n=1}^{N} f(nh) \leqslant \int_0^{Nh} f(x)\,dx \leqslant h \sum_{n=0}^{N-1} f(nh).$$

c) En déduire que, pour tout réel $h > 0$, la série de terme général $f(nh)$ converge et que :

$$-hf(0) + h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh).$$

d) Montrer que, quand h tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \underset{h \to 0^+}{\sim} \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. **a)** Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} t^{n^2}$ converge pour tout réel $t \in]-1, 1[$.

b) Montrer que, quand t tend vers 1 par valeurs inférieures,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-t}}.$$

III Tracé de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}} \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}.$$

En déduire que
$$\left|\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}\right| \leqslant \frac{x}{n}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

Dans la suite, on note Φ, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2. En déduire une inégalité sur n afin d'avoir une valeur approchée de $\Phi(x)$ à 10^{-4} près ?

3. Proposer, en langage Python, une fonction `I(f, a, b, n)` qui prend en entrée une fonction f à valeurs réelles, deux réels a et b et un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ calculée avec n rectangles.

4. En déduire une fonction qui renvoie une approximation de $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$, puis de $\Phi(x)$.

5. Donner un programme qui trace le graphe de Φ sur $[-5;5]$.

IV Exemple de suite implicite

D'après EDHEC 2018, épreuve annulée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = 1 - x - x^n.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x possède une seule solution, notée u_n.

2. **a)** Vérifier que u_n appartient à $]0;1[$.

b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite $(u_n)_n$ est croissante.

c) Conclure que la suite $(u_n)_n$ converge et que sa limite appartient à $[0;1]$.

d) Montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.

b) Établir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln v_n}{nv_n}\right)}{-\ln v_n} = 0 \quad \text{puis} \quad \ln v_n \underset{+\infty}{\sim} -\ln n.$$

c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et ${v_n}^2$.

– FIN –

Éléments de solution

Exercice 3

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$. Soient $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0; n]\!]$ et t un réel vérifiant

$$\frac{k}{n}x \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n}x$$

par décroissance de f

$$f\left(\frac{k}{n}x\right) \geqslant f(t) \geqslant f\left(\frac{k+1}{n}x\right)$$

puis par intégration sur $[kx/n; (k+1)x/n]$

$$\int_{\frac{kx}{n}}^{\frac{(k+1)x}{n}} f\left(\frac{k}{n}x\right)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\frac{kx}{n}}^{\frac{(n+1)x}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{\frac{kx}{n}}^{\frac{k+1}{n}x} f\left(\frac{k+1}{n}x\right)\,\mathrm{d}t.$$

On simplifie les termes extrémaux car l'intégrande est constante

$$\left(\frac{(k+1)x}{n} - \frac{kx}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}x\right) \geqslant \int_{\frac{kx}{n}}^{\frac{k+1}{n}x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \left(\frac{(k+1)x}{n} - \frac{kx}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}x\right),$$

soit

$$\frac{x}{n} f\left(\frac{k}{n}x\right) \geqslant \int_{\frac{kx}{n}}^{\frac{k+1}{n}x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{x}{n} f\left(\frac{k+1}{n}x\right).$$

En sommant pour $k \in [\![0; n-1]\!]$ et par la relation de Chasles, il vient

$$\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}x\right) \geqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}x\right).$$

En remplaçant par l'expression de f et avec le changement d'indice $k \leftarrow k+1$ dans la seconde somme, on retrouve bien la première relation.

- On retranche par $\frac{x}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}x\right)$ pour obtenir

$$0 \geqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}x\right) \geqslant \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}x\right) - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}x\right).$$

Par télescopage, il reste

$$0 \geqslant \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}x\right) \geqslant \frac{x}{n}\big(f(x) - f(0)\big).$$

D'où le résultat en prenant garde au signe.

2. On définit h sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$.

En divisant par $1/\sqrt{2\pi}$ dans la seconde relation de la question 1, on a

$$\left|\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{kx}{n}\right)\right| \leqslant \frac{x}{\sqrt{2\pi}n}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

Puis, avec $\Phi(0) = 1/2$ et

$$\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x) - \Phi(0),$$

on obtient

$$\left|\Phi(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{kx}{n}\right)\right)\right| \leqslant \frac{x}{\sqrt{2\pi}n}.$$

Dès lors, si on pose

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{kx}{n}\right)$$

et $n \geqslant 10^4 x/\sqrt{2\pi}$ de sorte que $\frac{x}{\sqrt{2\pi}n} \leqslant 10^{-4}$, on a

$$\big|\Phi(x) - \mathrm{S}_n(x)\big| \leqslant 10^{-4}.$$

Le réel $\mathrm{S}_n(x)$ est une approximation de $\Phi(x)$ à 10^{-4}-près.

3.

```
def I(f,a,b,n):
    S=0
    pas  = (b-a)/n
     # Largeur du rectangle
    for k in range(n):
        S += f(a + k*pas)
     # On somme les hauteurs
    S=pas*S
    return S
```

4. Pour calculer la somme

$$\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{kx}{n}\right),$$

il suffit de définir la fonction h et d'utiliser le programme précédent. Ensuite, pour gérer le cas où x est négatif, on peut utiliser

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$

On obtient alors

```
def h(t):
    return np.exp(-t**2/2)/(2*np.pi)
        **(1/2)

def ApproxPhi(x):
    n=int(10**4*np.abs(x)/(2*np.pi)**(1/2)
        ) +1
    # on veut un entier, on prend donc la
        partie entière supérieure
    S= 1/2+I(h,0,np.abs(x),n)
    if x>0 :
        return S
    else :
        return 1-S
```

5. Et pour avoir le graphe :

```
x=np.linspace(-3,3,100)
Phi=np.zeros(100)
for i in range(100):
    Phi[i]= ApproxPhi(x[i])
plt.plot(x,Phi,'k',linewidth=3)
plt.show()
```