
TD 10

RÉVISIONS ANALYSE ECG1
Problème - Essec 2001 maths I

On étudie dans ce problème la suite (S_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}.$$

Dans la partie I, on détermine la limite S de la suite (S_n) . Dans les parties II et III, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de (S_n) vers S .

PARTIE I

On considère pour tout nombre entier $p \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t) dt \quad \text{et} \quad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p}(t) dt.$$

1. Convergence de la suite (J_p/I_p)

a) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$\frac{2}{\pi} t \leq \sin(t).$$

Représenter graphiquement cette inégalité.

b) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geq 0$:

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} (I_p - I_{p+1}).$$

c) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1} .

On pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$ dans l'intégration par parties.

d) Dédire des résultats précédents que J_p/I_p tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

2. Convergence et limite de la suite (S_n)

a) Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_p ($p \geq 1$).

b) En déduire la relation suivante pour $p \geq 1$:

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$$

c) Calculer J_0 et I_0 , puis exprimer la limite S de la suite (S_n) à l'aide de π .

d) Anticiper la réponse de la machine à la suite de commandes suivantes :

Editeur

```
import numpy as np
n=5000
N=np.linspace(1,n,n)
print(np.sqrt(6*np.sum(N**(-2))))
```

PARTIE II

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling. On désigne par :

→ E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} et de limite nulle en $+\infty$.

→ f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+k)} \quad \text{pour } k \geq 1$$

→ Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

3. Sommation de séries télescopiques

a) Établir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

b) Établir pour toute fonction f appartenant à E la convergence de la série $\sum (\Delta f)(p)$ avec $p \geq 1$ et calculer pour tout nombre entier naturel n les sommes suivantes :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} (\Delta f)(p) \quad ; \quad \sum_{p=n+1}^{+\infty} (\Delta f)(p)$$

c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.

d) Établir pour tout nombre entier naturel $k \geq 1$ la convergence de la série $\sum f_k(p)$ et vérifier pour tout nombre entier naturel n que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

4. Accélération de la convergence de (S_n)

a) Établir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$: $\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q (k-1)! f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p)$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}$$

c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S'_n) de nombres rationnels telle que :

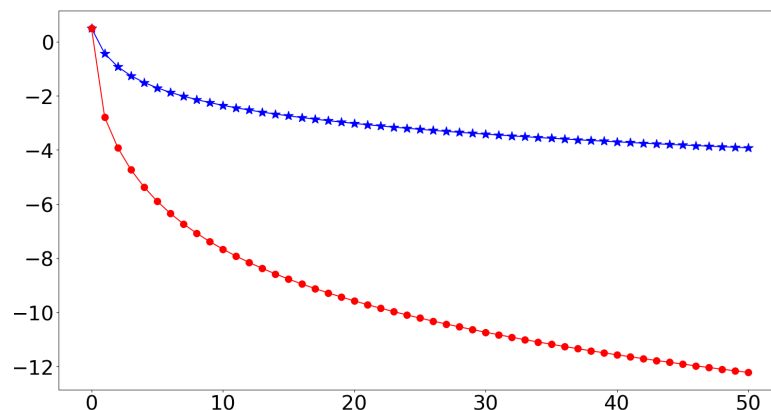
$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}$$

Expliciter S'_n et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

d) Écrire en python une fonction d'argument n , calculant et affichant S'_n pour $q = 2$.

e) On affiche ci-après deux courbes associées respectivement à $(\ln(S - S_n))_{n \in [0;50]}$ et $(\ln(S - S'_n))_{n \in [0;50]}$.

Reconnaitre la courbe associée à $(\ln(S - S'_n))_{n \in [0;50]}$.



PARTIE III

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S en effectuant un développement limité de S_n suivant les puissances de $1/n$.

- f) Démontrer qu'il existe une et une seule suite de nombres réels (u_n) telle que $u_0 = 1$ et

$$\sum_{p=1}^n \frac{u_{n-p}}{p!} = 0 \text{ pour tout nombre entier } n \geq 2$$

Établir que les u_n sont rationnels et donner u_1, u_2, u_3, u_4 sous forme de fraction irréductible.

5. Étude des polynômes de Bernoulli

- a) On considère la suite de polynômes (U_n) définie par :

$$U_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad U_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{u_{n-p} x^p}{p!} \text{ pour tout nombre entier } n \geq 1$$

- Préciser U_1, U_2, U_3, U_4 .
- Montrer que $U_n' = U_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $U_n(0) = U_n(1)$ pour $n \geq 2$.

- b) On considère une suite de polynômes (V_n) définie par :

$$V_0 = 1, \quad V_n' = V_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \quad \text{et} \quad V_n(0) = V_n(1) \text{ pour } n \geq 2$$

- Établir que $V_n^{(p)}(0) = V_{n-p}(0)$ pour $0 \leq p \leq n$ et en déduire la formule suivante :

$$V_n(x) = \sum_{p=0}^n \frac{V_{n-p}(0) x^p}{p!}$$

- Établir la formule suivante pour tout nombre entier $n \geq 2$: $\sum_{p=1}^n \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = 0$.
 - Établir enfin que $V_n = U_n$ pour tout nombre entier naturel n .
- c) En déduire l'égalité $U_n(x) = (-1)^n U_n(1-x)$ pour tout nombre entier naturel n . Montrer alors que $u_{2p+1} = 0$ si $p \geq 1$.

6. Accélération de la convergence de (S_n)

- a) Établir pour $p \geq 1$ la relation suivante, d'abord en supposant $q = 1$, puis $q \geq 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2} \right) + \sum_{k=1}^q (2k)! u_{2k} \left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}} \right) = (2q+2)! \int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x) dx}{(x+p)^{2q+3}}$$

- b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^q \frac{(2k)! u_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leq \frac{(2q+1)! M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

où M_{2q+1} désigne le maximum de la fonction continue $x \rightarrow |U_{2q+1}(x)|$ sur le segment $[0, 1]$.

- c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S_n'') de nombres rationnels telle que :

$$\left| \frac{\pi^2}{6} - S_n'' \right| \leq \frac{(2q+1)! M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$$

Expliciter S_n'' et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

- d) Écrire en python une fonction d'argument n , calculant et affichant S_n'' pour $q = 2$.

PARTIE IV compléments

Les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ et $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt$

7. a) Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ et $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt$ convergent.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, 1[, \quad \frac{1}{t-1} = - \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{t-1}.$$

8. a) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = \int_0^1 t^k \ln t dt$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_k converge et déterminer sa valeur.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} dt$ converge. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{t-1} dt$.

9. a) En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Montrer de même que :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt = \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice : Extrait Problème 2 EMLyon 2024

On considère, pour tout entier $n \geq 2$, la fonction h_n définie sur \mathbb{R} par :

$$h_n(t) = \begin{cases} n^2 t & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ n^2 \left(\frac{2}{n} - t \right) & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } t \notin \left] 0, \frac{2}{n} \right] \end{cases}$$

1. Représenter l'allure de la courbe de h_n .

Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$, h_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

2. Soit $t \in [0, 1]$ fixé. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t)$?

3. Vérifier alors que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(t) dt \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) dt}$$

Le résultat de cette question permet d'observer que certaines permutations de limites et d'intégrales ne sont pas licites.

Éléments de solution

Les solutions des questions rajoutées ou modifiées.

4.d) Pour $q = 2$

$$\begin{aligned}
 S'_n &= \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^q \frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \\
 &= \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}
 \end{aligned}$$

4.e) L'objectif étant d'accélérer la convergence, on s'attend à ce que $(S - S'_n)_n$ tende "plus rapidement" vers 0 que $(S - S_n)_n$. Avec le logarithme, $(\ln(S - S'_n))_n$ tend plus rapidement vers $-\infty$ que $(\ln(S - S_n))_n$. La courbe associée à $(\ln(S - S'_n))_n$ est donc vraisemblablement la courbe rouge avec les points.