DS 9

THÈME : THÉORÈME DES MOMENTS ET APPLICATIONS

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème

L'objet du problème est d'établir le théorème des moments et d'obtenir diverses caractérisations de la loi exponentielle.
Si on admet le théorème des moments, les parties I, II et III sont indépendantes.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles. On rappelle que deux variables aléatoires X et Y prenant des valeurs positives ou nulles sont indépendantes si et seulement si, pour tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, on a :

$$\mathbf{P}\big([X \leqslant a] \cap [Y \leqslant b]\big) = \mathbf{P}\big([X \leqslant a]\big)\mathbf{P}\big([Y \leqslant b]\big).$$

Partie I
Théorème des moments

Dans la suite, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;1]$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$m_n(f) = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- L'objectif de la première partie est d'établir le théorème des moments :

THÉORÈME

Soit φ*, une application continue sur* $[0;1]$ *telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad m_n(\varphi) = 0.$$

Alors φ *est l'application nulle.*

A. Preuve

Pour cela, on considère une fonction réelle φ continue sur $[0,1]$. On note M le maximum de la fonction $|\varphi|$ sur $[0,1]$. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel v de $[0,1]$, on note $Y_{n,v}$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et v.
Soit n un entier naturel non nul, x un réel de $]0,1[$, ε un réel strictement positif vérifiant les inégalités

$$0 < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < 1.$$

1. Comparer, pour tout réel v de $[x+\varepsilon, 1]$, les événements $\left[Y_{n,v} \leqslant nx\right]$ et $\left[\left|Y_{n,v} - nv\right| \geqslant n(v-x)\right]$ et en déduire les inégalités :

$$\mathbf{P}\left(\left[Y_{n,v} \leqslant nx\right]\right) \leqslant \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

2. Justifier d'une façon analogue, pour tout réel v de $[0, x-\varepsilon]$, l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left(\left[Y_{n,v} > nx\right]\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. Établir les inégalités :

$$\left|\int_{x+\varepsilon}^{1} \varphi(v)\mathbf{P}\left([\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx]\right)\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}(1-x)}{4n\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \left|\int_{0}^{x-\varepsilon} \varphi(v)\left(1-\mathbf{P}\left([\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx]\right)\right)\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}x}{4n\varepsilon^2}.$$

4. En déduire l'inégalité :

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\mathbf{P}\left([\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx]\right)\mathrm{d}v\right| \leqslant \left(\frac{1}{4n\varepsilon^2}+2\varepsilon\right)\mathrm{M}.$$

5. Établir que, pour tout réel x de $]0,1[$, on a, pour tout entier naturel n assez grand, l'inégalité :

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\mathbf{P}\left([\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx]\right)\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{9\mathrm{M}}{4\sqrt[3]{n}}.$$

- On suppose maintenant que la fonction φ vérifie, pour tout entier naturel n, $m_n(\varphi) = 0$.

6. Justifier, pour tout polynôme P à coefficient réels, l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(v)\mathrm{P}(v)\mathrm{d}v = 0$.

7. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x de $]0,1[$, on a l'égalité :

$$\int_0^x \varphi(v)\mathrm{d}v = 0.$$

8. Montrer que la fonction φ est nulle.

B. Deux applications

9. On peut définir sur E, le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par

$$\forall\, f,g \in \mathrm{E}, \qquad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On note aussi F, le sous-espace vectoriel constitué par les restrictions à $[0;1]$ des fonctions polynomiales.
Déterminer $\mathrm{F}^{\perp}$. A-t-on $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$? Commenter.

10. Soient X et Y, deux variables aléatoires à densité sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0;1]$. On suppose que X et Y admettent des densités continues sur $\mathbb{R}$.

a) Justifier que X et Y admettent des moments à tout ordre.

b) On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{E}(\mathrm{X}^n) = \mathbf{E}(\mathrm{Y}^n).$$

Justifier que X et Y ont même loi.

C. Compléments

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère maintenant une application φ continue sur $[0;1]$ telle que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $m_k(\varphi) = 0$. On souhaite montrer que φ s'annule au moins n fois.
Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que φ s'annule exactement m fois aux points $x_1, \ldots, x_m$ avec $m \leqslant n$ tout en changeant de signe.

a) Justifier qu'il existe un polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que la fonction $t \in [0;1] \mapsto \mathrm{Q}(t)\varphi(t)$ soit positive.

b) En déduire une contradiction.

Partie II
Caractérisations des lois exponentielles

Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, positives ou nulles, admettant toutes la même densité (nulle sur l'intervalle $]-\infty,0[$) dont on note f la restriction à l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose que la fonction f est continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$.
On note F la restriction à l'intervalle $[0,+\infty[$ de la fonction de répartition commune à toutes ces variables.
On suppose de plus que X_1 (et donc chaque variable X_i) admet une espérance.

On rappelle qu'une variable aléatoire X prenant des valeurs positives ou nulles suit une loi exponentielle si et seulement si elle vérifie la propriété, dite d'absence de mémoire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad \mathbf{P}_{[\mathrm{X}>x]}\left([\mathrm{X} > x+y]\right) = \mathbf{P}([\mathrm{X} > y]).$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note I_n l'application définie, pour tout ω de Ω, par

$$\mathrm{I}_n(\omega) = \min_{i\in[\![1;n]\!]} \mathrm{X}_i(\omega)$$

et on admet que I_n est une variable aléatoire qui admet une espérance.

12. Déterminer à l'aide de F, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de I_n.

- Dans la prochaine question, on suppose que la loi de X_1 (qui est la loi commune à tous les X_i) est exponentielle de paramètre λ strictement positif.

13. **a)** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, la variable nI_n a même loi que X_1.
b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de I_n est $1/(n\lambda)$.

L'objet des questions suivantes est d'établir que chacune de ces propriétés est caractéristique de la loi exponentielle.

- Dans les 3 prochaines questions, on suppose que, pour tout entier naturel n non nul, nI_n a même loi que X_1.

14. Établir, pour tout entier naturel n non nul et tout réel x positif ou nul, l'égalité :

$$F(x) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$$

15. Déterminer, pour tout réel x positif ou nul, la valeur de : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)$.

16. Montrer que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre $F'(0)$.

- On revient au cas général.

17. Montrer que la fonction F réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. On note F^{-1} sa réciproque.

18. À l'aide d'un changement de variable, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$\mathbf{E}(I_n) = n\int_0^1 F^{-1}(u)(1-u)^{n-1}\,du$$

19. **a)** Établir, pour tout réel u de $[0, 1[$, les inégalités :

$$0 \leqslant (1-u)F^{-1}(u) \leqslant \int_u^1 F^{-1}(t)\,dt$$

b) En déduire que la fonction G définie sur $[0, 1]$ par $G(u) = (1-u)F^{-1}(u)$ si u est élément de $[0, 1[$ et par $G(1) = 0$ est continue.
c) Établir, pour tout entier n au moins égal à 2, les égalités :

$$\mathbf{E}(I_n) = n\int_0^1 G(u)(1-u)^{n-2}\,du \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(I_n) = n\int_0^1 G(1-v)v^{n-2}\,dv.$$

On suppose maintenant qu'il existe un réel λ strictement positif tel que, pour tout entier naturel n non nul, l'espérance de I_n est égale à $\frac{1}{n\lambda}$.
On note F_λ la restriction à $[0, +\infty[$ de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ et G_λ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $G_\lambda(u) = (1-u)F_\lambda^{-1}(u)$ si u est élément de $[0, 1[$ et par $G_\lambda(1) = 0$.

20. **a)** Quelle est, pour n entier naturel au moins égal à 2 , la valeur de : $n\displaystyle\int_0^1 G_\lambda(1-v)v^{n-2}\,dv$?
b) À l'aide du résultat de la partie I, montrer que G et G_λ sont égales.
c) En déduire que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre λ.

Partie III
Caractérisation de la loi exponentielle à l'aide des deux premiers records

On pose $R_1 = X_1$. On note R_2 l'application définie, pour tout élément ω de Ω, par :

$$R_2(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } n \text{ est le plus petit des entiers } k \text{ tels que } X_k(\omega) > X_1(\omega) \\ X_1(\omega) & \text{si un tel entier n'existe pas.} \end{cases}$$

On admet que R_2 est une variable aléatoire.

A. Simulation

21. On suppose qu'il existe un programme `simuX()` qui permet de simuler la variable X. Écrire un programme Python qui simule la variable $R_2 - R_1$.

22. Écrire un programme `phi` qui prend en argument $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et renvoie une approximation de $\varphi(x, y) = \mathbf{P}\left([R_1 \leqslant x] \cap [R_2 - R_1 > y]\right)$.

B. Préliminaire

23. Exprimer l'événement $[R_2 = R_1]$ à l'aide de la suite d'événements $\left([X_k \leqslant X_1]\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

24. Établir, pour tout réel t positif ou nul et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=2}^{n+1}\left[X_k \leqslant X_1\right]\right) \leqslant (F(t))^{n+1} + 1 - F(t).$$

25. Soit ε un réel strictement positif. En choisissant un réel t de façon convenable et à l'aide de l'inégalité précédente, montrer que, pour tout entier n assez grand, on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=2}^{n+1}\left[X_k \leqslant X_1\right]\right) \leqslant 2\varepsilon$$

Comment énoncer le résultat obtenu ?

26. En déduire que, presque sûrement, $R_2 > R_1$.

C. La caractérisation

Pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls on pose de nouveau : $\varphi(x,y) = \mathbf{P}\left([R_1 \leqslant x] \cap [R_2 - R_1 > y]\right)$.

- Soit (x, y) un couple de réels positifs ou nuls et h un réel strictement positif.

27. Justifier l'égalité :

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left[x < X_1 \leqslant x+h\right] \cap \left(\bigcap_{i=2}^{j}\left[X_i \leqslant X_1\right]\right) \cap \left[X_{j+1} > y + X_1\right]\right).$$

28. En déduire les inégalités :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{1-F(x)}\left(1-F(x+y+h)\right) \leqslant \varphi(x+h,y)-\varphi(x,y) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{1-F(x+h)}\left(1-F(x+y)\right).$$

-

29. Calculer, pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls, la limite de $\dfrac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h}$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures et, en admettant que le résultat tient encore pour la limite quand h tend vers 0 par valeurs inférieures, en déduire l'égalité :

$$\partial_1\varphi(x,y) = \frac{f(x)}{1-F(x)}\left(1-F(x+y)\right).$$

- Dans cette question on suppose que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre λ strictement positif.

30. **a)** Établir, pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls, l'égalité : $\varphi(x,y) = \left(1-e^{-\lambda x}\right)e^{-\lambda y}$.
On pourra s'appuyer de l'égalité précédente et considérer aussi $\varphi(0,y)$.

b) En déduire la loi de $R_2 - R_1$ puis l'indépendance des variables R_1 et $R_2 - R_1$.
On pour regarder la limite de $\varphi(n,y)$ *lorsque* $n \to +\infty$.

- Réciproquement, et dans la suite du sujet, on suppose que les variables R_1 et $R_2 - R_1$ sont indépendantes et on note G la fonction de répartition de $R_2 - R_1$.

31. Établir, pour tout couple (x, y) de réels positifs ou nuls, l'égalité : $\dfrac{1-F(x+y)}{1-F(x)} = 1 - G(y)$.

32. En déduire que les fonctions G et F sont égales puis, à l'aide de la propriété d'absence de mémoire, montrer que la loi de X_1 est exponentielle.

Exercice - entropie d'une variable aléatoire

Partie A
Entropie de Shanon

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

- On définit la fonction h sur $]0;1[$ par $h(x) = -x\ln(x)$.
- On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des variables aléatoires X, à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et telles que pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}(X=k) \neq 0$ et définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
- Pour toute variable aléatoire X de $\mathscr{E}$, on note :

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} h(p_i) \quad \text{où pour tout } i \in [\![1;n]\!] \quad p_i = \mathbf{P}(X=i).$$

33. On note U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Déterminer H(U).

- **Python**

34. Écrire un programme python qui prend en argument une matrice ligne $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}$ puis

→ teste si pour tout indice $i \in [\![1;n]\!]$, $p_i > 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$,

→ renvoie la valeur de $\sum\limits_{i=1}^{n} h(p_i)$.

L'objectif de la suite est de déterminer les variables $X \in \mathscr{E}$ telles que $H(X)$ soit maximale.

- **Condition d'ordre 2 - étude locale**

Soit $\mathscr{O}$ l'ensemble des $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in]0,1[^{n-1}$ vérifiant $1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{n-1} > 0$. Pour $(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \in \mathscr{O}$, on pose

$$h_n(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) = h(1 - p_1 - p_2 - \dots - p_{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} h(p_k).$$

35. **a)** Justifier que $\mathscr{O}$ est un ouvert et que h_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{O}$.

b) Expliciter la matrice hessienne de h_n.
On pourra exprimer le résultat sous la forme $D + \alpha J$ *où* D *est une matrice diagonale,* α *un réel et* J *la matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *ne contenant que des* 1.

c) Justifier que h_n admet un unique point critique que l'on déterminera. Justifier que ce dernier est un maximum local.

- **Étude globale**

36. Soit $X \in \mathscr{E}$. Soit $(q_1, q_2, \dots, q_n) \in [0;1]^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1$.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\ln(x) \leqslant x - 1$ et que $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.

b) En déduire que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $-p_k \ln(p_k) + p_k \ln(q_k) \leqslant q_k - p_k$

37. En appliquant ce résultat avec $q_k = 1/k$, justifier que pour tout $X \in \mathscr{E}$, $H(X) \leqslant \ln(n)$ avec égalité si et seulement si X suit une loi uniforme.

Partie B

Généralisation : Entropie de Renyi

Soit $X \in \mathscr{E}$. Pour tout $\alpha \in]1;+\infty[$, on pose

$$H_R(\alpha, p_1, \dots, p_n) = \frac{1}{1-\alpha} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i{}^{\alpha} \right) \quad \text{où pour tout } i \in [\![1;n]\!] \quad p_i = \mathbf{P}(X = i).$$

On notera simplement $H_R(\alpha, X)$ pour $H_R(\alpha, p_1, \dots, p_n)$.

38. **a)** Vérifier que H_R admet une dérivation partielle suivant la première variable avec pour tout $\alpha \in]1;+\infty[$

$$\partial_1 H_R(\alpha, X) = \frac{1}{1-\alpha^2} \sum_{i=1}^{n} q_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right) \quad \text{où} \quad q_i = \frac{p_i{}^{\alpha}}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{\alpha}}.$$

b) En déduire la décroissance de $\alpha \in]1;+\infty[\mapsto H_R(\alpha, X)$ où $X \in \mathscr{E}$ est fixée.

39. **a)** En étudiant $\alpha \in [1;+\infty[\mapsto \ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i{}^{\alpha}\right)$, démontrer que

$$\ln \sum_{i=1}^{n} p_i{}^{\alpha} = (\alpha - 1)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)\right) + o_1(\alpha - 1).$$

b) En déduire que

$$\lim_{\alpha \to 1} H_R(\alpha, X) = H(X).$$

- **Application : probabilité de collision**

40. Soient $X, Y \in \mathscr{E}$ deux variables aléatoires de même loi et indépendantes. Justifier que

$$\mathbf{P}(X = Y) = e^{-H_R(2,X)} \geqslant e^{-H(X)}.$$

– FIN –

DS 9

Problème

adapté de HEC 2003

1. Soit $v \in [x+\varepsilon, 1]$. Soit $\omega \in \Omega$.

$$\begin{aligned}\omega \in \left[\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right] \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Y}_{n,v}(\omega) \leqslant nx.\\ &\Rightarrow \quad nv - \mathrm{Y}_{n,v}(\omega) \geqslant nv - nx = n(v-x).\end{aligned}$$

Comme $n(v-x) \geqslant 0$, cela implique

$$\left|nv - \mathrm{Y}_{n,v}(\omega)\right| \geqslant n(v-x).$$

C'est-à-dire

$$\omega \in \left[\left|\mathrm{Y}_{n,v} - nv\right| \geqslant n(v-x)\right]$$

On a bien l'inclusion

$$\left[\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right] \subset \left[\left|\mathrm{Y}_{n,v} - nv\right| \geqslant n(v-x)\right].$$

Par croissance de la probabilité

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right) &\leqslant \mathbf{P}\left(\left|\mathrm{Y}_{n,v} - nv\right| \geqslant n(v-x)\right)\\ &\leqslant \mathbf{P}\left(\left|\mathrm{Y}_{n,v} - \mathbf{E}\left(\mathrm{Y}_{n,v}\right)\right| \geqslant n(v-x)\right).\end{aligned}$$

Car $\mathrm{Y}_{n,v} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,v)$. On poursuit avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right) \leqslant \frac{\mathbf{V}\left(\mathrm{Y}_{n,v}\right)}{(n(v-x))^2} = \frac{v(1-v)}{n^2\varepsilon^2}$$

car $v - x \geqslant \varepsilon > 0$. Or

$$\frac{1}{4} - v(1-v) = v^2 - 2 \times \frac{1}{2} v + \frac{1}{4} = \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

D'où $$\mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right) \leqslant \frac{1}{4n^2\varepsilon^2}.$$

2. On a maintenant pour $\omega \in \left[\mathrm{Y}_{n,v} > nx\right]$

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}_{n,v}(\omega) > nx \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Y}_{n,v} - nv > n(x-v) \geqslant 0\\ &\Rightarrow \quad \left|\mathrm{Y}_{n,v} - nv\right| > n(x-v).\end{aligned}$$

On a l'inclusion

$$\left[\mathrm{Y}_{n,v} > nx\right] \subset \left[\left|\mathrm{Y}_{n,v} - nv\right| > n(x-v)\right].$$

On conclut comme précédemment.

3. On a par inégalité triangulaire (avec $x + \varepsilon \leqslant 1$)

$$\begin{aligned}\left|\int_{x+\varepsilon}^1 \varphi(v)\mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right) \mathrm{d}v\right| &\leqslant \int_{x+\varepsilon}^1 |\varphi(v)| \mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right) \mathrm{d}v\\ &\leqslant \mathrm{M} \int_{x+\varepsilon}^1 \mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right) \mathrm{d}v\\ &\leqslant \mathrm{M} \times \frac{1}{4n\varepsilon^2} \times \int_{x+\varepsilon}^1 1 \,\mathrm{d}v\\ &\quad \text{(d'après q.1 avec } v \in [x+\varepsilon, 1])\\ &\leqslant \frac{\mathrm{M}}{4n\varepsilon^2}\left(1 - (x+\varepsilon)\right)\end{aligned}$$

$$\left|\int_{x+\varepsilon}^1 \varphi(v)\mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right) \mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{4n\varepsilon^2}(1-x).$$

La seconde inégalité se démontre de la même manière en utilisant la question 2 et

$$\mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_{n,v} > nx\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right).$$

4. Notons $p(v) = \mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_{n,v} \leqslant nx\right)$. D'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned}&\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)p(v)\,\mathrm{d}v\\ &= \int_0^x \varphi(v)\left(1 - p(v)\right)\mathrm{d}v - \int_x^1 \varphi(v)p(v)\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Encadrons la première intégrale sachant que :

$$\begin{aligned}&\int_0^x \varphi(v)\left(1-p(v)\right)\mathrm{d}v\\ &= \int_0^{x-\varepsilon} \varphi(v)\left(1-p(v)\right)\mathrm{d}v + \int_{x-\varepsilon}^x \varphi(v)\left(1-p(v)\right)\mathrm{d}v\end{aligned}$$

avec les majorations

$$\left|\int_0^{x-\varepsilon} \varphi(v)\left(1-p(v)\right)\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{4n\varepsilon^2} x \quad \text{q.3}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int_{x-\varepsilon}^x \varphi(v)\left(1-p(v)\right)\mathrm{d}v\right| &\leqslant \int_{x-\varepsilon}^x \underbrace{\left|\varphi(v)\left(1-p(v)\right)\right|}_{\leqslant \mathrm{M}\cdot 1}\mathrm{d}v\\ &\leqslant (x - (x-\varepsilon))\mathrm{M} = \varepsilon\mathrm{M}.\end{aligned}$$

Pour la seconde intégrale, on écrit

$$\int_x^1 \varphi(v)p(v)\,\mathrm{d}v = \int_x^{x+\varepsilon} \varphi(v)p(v)\,\mathrm{d}v + \int_{x+\varepsilon}^1 \varphi(v)p(v)\,\mathrm{d}v.$$

Avec la question 3

$$\left|\int_{x+\varepsilon}^1 \varphi(v)p(v)\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{4n\varepsilon^2}(1-x)$$

et par inégalité triangulaire

$$\left|\int_x^{x+\varepsilon} \varphi(v)p(v)\,\mathrm{d}v\right| \leqslant \varepsilon\mathrm{M}.$$

En regroupant les différentes majorations

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)p(v)\,\mathrm{d}v\right|$$
$$\leqslant \frac{M}{4n\varepsilon^2}(1-x) + M\varepsilon + \frac{M}{4n\varepsilon^2}x + M\varepsilon = \frac{M}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon M.$$

5. Étudions la fonction

$$g : \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{1}{4n\varepsilon^2} + 2\varepsilon$$

La fonction g est dérivable avec pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$

$$g'(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^{-3}}{2n} + 2.$$

Si on pose $\varepsilon_0 = 1/\sqrt[3]{4n}$. On en déduit que g est croissante sur $]0, \varepsilon_0[$ et décroissante sur $[\varepsilon_0; +\infty[$. Il y a donc un maximum atteint en ε_0 valant

$$g(\varepsilon_0) = \varepsilon_0\left(\frac{1}{4n\varepsilon_0^3} + 1\right) = 3\varepsilon_0 = \frac{3}{4\sqrt[3]{4n}}.$$

Quantité que l'on peut majorer par $9/(4\sqrt[3]{n}$.

| Une idée récurrente, à retenir.

- Soit $x \in]0;1[$ fixé. Comme

$$\varepsilon_0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

il existe un rang n_0 à partir duquel, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait bien

$$0 < x - \varepsilon_0 < x < x + \varepsilon_0 < 1.$$

Dans ce cadre, l'inégalité de la question 4 est bien valide et avec le choix optimum de $\varepsilon = \varepsilon_0$, on a bien

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\mathrm{d}v - \int_0^1 \varphi(v)\mathbf{P}\left(\left[Y_{n,v} \leqslant nx\right]\right)\mathrm{d}v\right| \leqslant Mg(\varepsilon_0) \leqslant \frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}.$$

6. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Par conséquent, par linéarité de l'intégrale

$$\int_0^1 \varphi(v)P(v)\,\mathrm{d}v = \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\int_0^1 \varphi(v)v^k\,\mathrm{d}v}_{=0} = 0$$

7. Soit $x \in]0;1[$. On sait que

$$\mathbf{P}\left(Y_{n,v} \leqslant nx\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor} \mathbf{P}\left(Y_{n,v} = k\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor} \binom{n}{k} v^k(1-v)^{n-k}.$$

Sous cette forme, on reconnaît un polynôme en v. D'après ce qui précède

$$\int_0^1 \varphi(v)\mathbf{P}\left(Y_{n,v} \leqslant nx\right)\mathrm{d}v = 0.$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v - 0\right| \leqslant \frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$$

Le résultat s'en déduit.

8. La fonction $\psi : x \mapsto \int_0^x \varphi(v)\,\mathrm{d}v$ est la primitive de φ qui s'annule en 0. Par conséquent

$$\varphi = \psi'.$$

Comme ψ est l'application nulle, ψ' aussi. Ce qui conclut.

9. Les fonctions $e_k : t \in [0,1] \mapsto t^k$ appartiennent à F, donc si $f \in F^\perp$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est orthogonal à e_k. Or

$$0 = \langle f, e_k\rangle = \int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t = m_k(f).$$

D'après le théorème des moments, f est l'application nulle (notée 0_E). Comme $0_E \in F^\perp$, on a

$$F^\perp = \{0_E\}.$$

La relation $E = F \oplus F^\perp$ n'est pas vérifiée. C'est possible car E est de dimension infinie.

10.a) Les variables X et Y sont à valeurs dans $[0;1]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |X^n| \leqslant 1, \quad |Y^n| \leqslant 1.$$

Par domination, X^n et Y^n admettent une espérance. Ce qui conclut.

10.b) D'après le théorème de transfert, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 t^n f_X(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}\left(X^n\right) = \mathbf{E}\left(Y^n\right) = \int_0^1 t^n f_Y(t)\,\mathrm{d}t$$

où f_X, f_Y désignent respectivement une densité continue de X et Y. D'où

$$\int_0^1 t^n\left(f_X(t) - f_Y(t)\right)\mathrm{d}t = 0.$$

D'après le théorème des moments avec $\varphi = f_X - f_Y$ continue sur $[0;1]$. Puis $f_X = f_Y$. Les variables X et Y ont même loi.

11.a) On suppose les réels x_i ordonnés :

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m.$$

À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction φ est de signe constant sur $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ (pour $i \in [\![0; m-1]\!]$). Précisons qu'il y a un changement de signe au niveau de chaque x_i. C'est aussi le cas du polynôme

$$Q : t \mapsto \prod_{i=1}^{m}\left(x - x_i\right).$$

Dès lors, la fonction $t \in [0;1] \mapsto \varphi(t)Q(t)$ est de signe constant. Quitte à changer Q en $-Q$, on peut supposer ce signe positif. Le polynôme $\pm Q$ est donc bien solution car $m \leqslant n$, $Q \in \mathbb{R}_n[x]$.

11.b) En reprenant le raisonnement de la question 6,

$$\int_0^1 \varphi(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

L'integrande étant continue et de signe constant, l'intégrande est nulle. On en déduit que

$$\forall t \in [0;1], \qquad \varphi(t)Q(t) = 0$$

puis

$$\forall t \in [0;1] \setminus \{x_i | i \in [\![1;m]\!]\}, \qquad \varphi(t) = 0.$$

Absurde, il y a trop de valeurs d'annulation.

> Noter que la continuité de φ impose aussi
> $$\forall t \in [0;1], \qquad \varphi(t) = 0.$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
F_{I_n}(x) &= \mathbf{P}(I_n \leqslant x)\\
&= 1 - \mathbf{P}(I_n > x)\\
&= 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > x]\right)\\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i > x) \quad \text{indépendance.}\\
&= 1 - \mathbf{P}(X_i > x)^n \quad \text{égalité en loi}\\
F_{I_n}(x) &= 1 - (1 - F(x))^n.
\end{aligned}$$

> Noter que
> $$0 \leqslant I_n \leqslant X_1.$$
> La variable I_n admet donc bien une espérance par domination.

13.a) Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
F_{nI_n}(x) &= \mathbf{P}(nI_n \leqslant x)\\
&= \mathbf{P}\left(I_n \leqslant \frac{x}{n}\right)\\
&= 1 - \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right)\right)^n\\
F_{nI_n}(x) &= 1 - e^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^-$, $F_n(x) = 0$. On retrouve la fonction de répartition de $\mathscr{E}(\lambda)$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, nI_n suit une loi $\mathscr{E}(\lambda)$.

13.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{E}(I_n) = \frac{1}{n}\mathbf{E}(nI_n) = \frac{\lambda}{n}.$$

14. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. En reprenant la question 12

$$\begin{aligned}
F_{nI_n}(x) &= \mathbf{P}(I_n \leqslant x/n)\\
&= F_{I_n}\left(\frac{x}{n}\right) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n.
\end{aligned}$$

Comme nI_n et X_1 ont même loi, ils ont même fonction de répartition

$$F(x) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$$

15. Comme f est continue et strictement positive,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t < \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

La quantité $n\ln\underbrace{\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)}_{>0}$ est bien définie.

Par continuité à droite de la fonction de répartition

$$F\left(\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} F(0) \quad \text{car} \quad \frac{x}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0^+.$$

Or X, est à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et à densité, $F(0) = 0$. À l'aide de l'équivalent du logarithme en 1

$$\ln\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -F\left(\frac{x}{n}\right).$$

De plus, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $F'(0) = f(0) \neq 0$ et

$$\begin{aligned}
F(t) &= F(0) + F'(0)(t-0) + o_0(t)\\
&= tF'(0) + o_0(t)\\
F(t) &\sim_0 tF'(0).
\end{aligned}$$

On a donc aussi l'équivalent

$$F\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{x}{n}F'(0).$$

On en déduit que

$$n\ln\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} F\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -xF'(0).$$

Que l'on traduit par

$$n\ln\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -xF'(0).$$

> Attention à l'ordre des équivalents. Par exemple la rédaction :
> $$F\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{x}{n}F'(0)$$
> puis $$\ln\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{x}{n}F'(0)$$
> est fausse car elle suggère une composition d'équivalent (ici par $t \mapsto \ln(1-t)$).

16. Par continuité de l'exponentielle

$$\begin{aligned}
\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right)\\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp(-xF'(0)).
\end{aligned}$$

D'où

$$1 - \left(1 - F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - e^{-xF'(0)}.$$

Par unicité de la limite

$$F(x) = 1 - e^{-xF'(0)}.$$

Précisons que ce résultat est valable pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Pour $x \in \mathbb{R}^-$, on a directement $F(x) = 0$. On sait alors que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(F'(0))$.

17. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}^+$ (X est à densité), F est strictement croissante ($F' = f > 0$),

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad F(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1.$$

On conclut par le théorème de la bijection.

18. On a vu que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_{I_n}(x) = 1-(1-F(x))^n.$$

On constate que F_{I_n} est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ par composition et continue sur $\mathbb{R}$. Donc I_n est à densité et une densité g est obtenue par dérivation (là ou c'est possible, ici $\mathbb{R}^*$).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = nf(x)(1-F(x))^{n-1}.$$

Nous savons aussi que I_n admet une espérance et on peut l'exprimer à l'aide du théorème de transfert

$$\mathbf{E}(I_n) = \int_0^{+\infty} xnf(x)(1-F(x))^{n-1}\,dx.$$

Effectuons le changement de variable $u = F(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec

$$\frac{du}{dx} = F'(x) = f(x) \iff du = f(x)\,dx.$$

Il vient

$$\mathbf{E}(I_n) = n\int_0^1 F^{-1}(u)(1-u)^{n-1}\,du$$

car $\qquad F(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad F(0)=0.$

19.a) Soit $v \in [0,1[$, par croissance de F^{-1} (une conséquence du théorème de la bijection car F est aussi croissante), on a pour tout $t \in [u;1]$

$$0 \leqslant F^{-1}(u) \leqslant F^{-1}(t).$$

Par croissance de l'intégrale (avec $u \leqslant 1$)

$$0 \leqslant \underbrace{\int_u^1 F^{-1}(u)\,dt}_{=(1-u)F^{-1}(u)} \leqslant \int_u^1 F^{-1}(t)\,dt.$$

D'où le résultat.

19.b) Par produit G est continue sur $[0;1[$. En tant que reste d'une intégrale convergente

$$\int_u^1 F^{-1}(t)\,dt \underset{u\to 1^-}{\longrightarrow} 0.$$

Par encadrement $(1-u)F^{-1}(u) \underset{u\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ ou encore

$$G(u) \underset{u\to 1^-}{\longrightarrow} 0 = G(1).$$

On en déduit la continuité de G en 1. Ce qui conclut.

19.c) En reprenant la question 18

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(I_n) &= n\int_0^1 F^{-1}(u)(1-u)\cdot(1-u)^{n-2}\,du\\ &= n\int_0^1 G(u)(1-u)^{n-2}\,du.\end{aligned}$$

La seconde égalité s'en déduit à l'aide du changement de variable affine $v = 1-u$.

20.a) *Rédaction 1 par le calcul. Trop long mais instructif.*
Explicitons F_λ^{-1}. Soient $u \in [0;1[$ et $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}u = F_\lambda(t) = 1-e^{-\lambda t} &\iff e^{-\lambda t} = 1-u\\ &\iff -\lambda t = \ln(1-u)\\ &\iff t = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}.\end{aligned}$$

Ainsi $\qquad F_\lambda^{-1}(u) = t = -\dfrac{\ln(1-u)}{\lambda}$

puis $\qquad G_\lambda(u) = -\dfrac{(1-u)\ln(1-u)}{\lambda}.$

Enfin

$$\begin{aligned}n\int_0^1 G_\lambda(1-v)v^{n-2}\,dv &= -\frac{n}{\lambda}\int_0^1 v\ln(v)v^{n-2}\,dv\\ &= -\frac{n}{\lambda}\int_0^1 \ln(v)v^{n-1}\,dv.\end{aligned}$$

Effectuons une intégration par parties sur $[\varepsilon,1]$ où $\varepsilon \in]0;1[$. *L'intégrale est généralisée en 0, d'où l'apparition du terme* ε.

$$\int_\varepsilon^1 \ln v\cdot v^{n-1}\,dv = \left[\frac{1}{n}v^n\ln v\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{v^n}{n}\frac{1}{v}\,dv.$$

D'après les croissances comparées, le crochet tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0^+$, d'où

$$\int_0^1 \ln v\cdot v^{n-1}\,dv = -\frac{1}{n}\int_0^1 v^{n-1}\,dv = -\frac{1}{n^2}.$$

Finalement

$$n\int_0^1 G_\lambda(1-v)v^{n-2}\,dv = \frac{1}{n\lambda}.$$

- *Rédaction 2.*

Remarquons que si $\tilde{I_n} = \min(\tilde{X}_1, \ldots \tilde{X}_n)$ où les variables $X_i \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ en étant indépendantes, la question 18 donne

$$\mathbf{E}(\tilde{I_n}) = n\int_0^1 G_\lambda(1-v)v^{n-2}\,dv$$

et la question 13.b,

$$\mathbf{E}(\tilde{I_n}) = \frac{1}{n\lambda}.$$

D'où l'égalité.

20.b,c) La condition donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$n\int_0^1 G_\lambda(1-v)v^{n-2}\,dv = \mathbf{E}(I_n) = n\int_0^1 G(1-v)v^{n-2}\,dv.$$

En posant $k = n-2$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 G_\lambda(1-v)v^k\,dv = \int_0^1 G(1-v)v^k\,dv$$

puis $\qquad \displaystyle\int_0^1 \big(G_\lambda(1-v) - G(1-v)\big)v^k\,dv = 0.$

Or la fonction $v \in [0;1] \mapsto G_\lambda(1-v) - G(1-v)$ est continue (question 19.b). Par le théorème des moments, cette fonction est nulle.

$$\forall v \in [0;1], \qquad G_\lambda(1-v) = G(1-v)$$

puis

$$\forall u \in [0;1], \qquad G_\lambda(u) = G(u)$$
$$\forall u \in [0;1[, \qquad F_\lambda^{-1}(u) = F^{-1}(u).$$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$, $u = F_\lambda(t)$.

$$t = F_\lambda^{-1}\left(F_\lambda(t)\right) = F^{-1}\left(F_\lambda(t)\right) \quad \text{puis} \quad F(t) = F_\lambda(t).$$

Cette égalité s'étend à $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, X_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ.

21.

```
def simuR2():
    x=simuX()
    y=simuX()
    n=1
    arret=5000 # test d'arrêt s'il y a
        trop d'appels à la fonction, on
        renvoie X1
    while y<x and n<arret:
        n+=1
        y=simuX()
    if n==arret:
        return 0 # ici R2=R1
    return y-x
```

• *En anticipant sur la suite, le test d'arrêt est un peu superflu car le programme s'arrête presque sûrement.*

22. On modifie le code précédent pour renvoyer R_1 et $R_2 - R_1$.

```
def simuR1R2():
    x=simuX()
    y=simuX()
    n=1
    arret=5000 # test d'arrêt s'il y a
        trop d'appels à la fonction, on
        renvoie X1
    while y<x and n<arret:
        n+=1
        y=simuX()
    if n==arret:
        return x,0
    return x,y-x
```

On s'appuie ensuite sur la loi des grands nombres pour estimer la probabilité.

```
def estimation(x,y):
    c=0 # compteur
    m=5000 # Nbre de tests
    for i in range(m):
        r1,diff=simuR1R2()
        if r1<=x and diff<=y:
            c+=1
    return c/m
```

23. L'événement $[R_2 = R_1] = [R_2 = X_1]$ est réalisé s'il n'existe pas d'entier naturel non nul k tel que $X_k > X_1$ D'où

$$\overline{\bigcup_{k\geqslant 2} [X_k > X_1]} = \bigcap_{k\geqslant 2} \overline{[X_k > X_1]} = \bigcap_{k\geqslant 2} [X_k \leqslant X_1].$$

24. Notons A_n l'événement $\bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leqslant X_1]$. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Les événements $([X_1 \leqslant t], [X_1 > t])$ forment un système complet d'événements et la formule des probabilités totales donne

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n) &= \mathbf{P}(A_n \cap [X_1 \leqslant t]) + \mathbf{P}(A_n \cap [X_1 > t]) \\ &\leqslant \mathbf{P}(A_n \cap [X_1 \leqslant t]) + \mathbf{P}([X_1 > t]) \quad (\bullet) \end{aligned}$$

Or on a l'inclusion

$$\begin{aligned} A_n \cap [X_1 \leqslant t] &\subset \bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leqslant X_1] \cap [X_1 \leqslant t] \\ &\subset \bigcap_{k=1}^{n+1} [X_k \leqslant t]. \end{aligned}$$

Par croissance de la probabilité

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n \cap [X_1 \leqslant t]) &\leqslant \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} [X_k \leqslant t]\right) \\ &\leqslant \prod_{k=1}^{n+1} \mathbf{P}(X_k \leqslant t) \quad \text{indépendance} \\ &\leqslant \mathbf{P}(X_1 \leqslant t)^{n+1} \quad \text{égalité en loi} \end{aligned}$$
$$\mathbf{P}(A_n \cap [X_1 \leqslant t]) \leqslant F(t)^{n+1}.$$

En rappelant que $\mathbf{P}(X_1 > t) = 1 - \mathbf{P}(X_1 \leqslant t) = 1 - F(t)$, l'inégalité demandée s'en déduit en reprenant $(\bullet)$.

25. Comme $F(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$, il existe $t_0 \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad t \geqslant t_0 \quad \Rightarrow \quad 1 - F(t) \leqslant \varepsilon.$$

Fixons un tel t_0. On sait de plus que $F(t_0) \in]0;1[$ et

$$F(t_0)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad F(t)^{n+1} \leqslant \varepsilon.$$

En reprenant la question 24 avec ce t_0 et $n \geqslant N$

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leqslant X_1]\right) \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

On vient de prouver que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leqslant X_1]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

26. Posons de nouveau pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \bigcap_{k=2}^{n+1} [X_k \leqslant X_1]$$

de sorte que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit une suite décroissante pour l'inclusion. D'après le théorème de convergence monotone dans sa version probabiliste

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0.$$

En reprenant la question 23

$$\mathbf{P}(R_2 = R_1) = 0$$

ou encore $\mathbf{P}(R_2 > R_1) = 1$.

27. Notons l'inclusion

$$[x \leqslant X_1 \leqslant x+h] \cap \left(\bigcap_{i=2}^{j} [X_i \leqslant x]\right) \cap \left[X_{j+1} > y + x + h\right]$$
$$\subset [x \leqslant X_1 \leqslant x+h] \cap \left(\prod_{i=2}^{j} [X_i \leqslant X_1]\right) \cap \left[X_{j+1} > y + X_1\right]\Big).$$

Par croissance de la probabilité et en sommant sur $j \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left([x \leqslant X_1 \leqslant x+k] \cap \left(\prod_{i=2}^{j} [X_i \leqslant x]\right) \cap \left[X_{j+1} > y + x + h\right]\right)$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left([x \leqslant X_1 \leqslant x+h] \cap \left(\prod_{i=2}^{j} [X_i \leqslant X_1]\right) \cap \left[X_{j+1} > y + X_1\right]\right).$$

Or la somme de gauche se simplifie par indépendance

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}([x \leqslant X_1 \leqslant x+h])\, \mathbf{P}\left(\prod_{i=2}^{j} [X_i \leqslant x]\right) \mathbf{P}\left(X_{j+1} > y + x + h\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \big(F(x+h) - F(x)\big) F(x)^{j-1} \big(1 - F(x+y+h)\big)$$
$$= \big(F(x+h) - F(x)\big)\big(1 - F(x+y+h)\big) \sum_{j=1}^{+\infty} F(x)^{j-1}$$
$$= \frac{(F(x+h) - F(x))(1 - F(x+y+h))}{1 - F(x)}$$

en reconnaissant une somme géométrique de raison $F(x) \in]-1;1[$.

- L'inégalité de droite se démontre de manière similaire en partant de l'inclusion.

$$[x \leqslant X_1 \leqslant x+h] \cap \left(\prod_{i=2}^{j} [X_i \leqslant X_1]\right) \cap \left[X_{j+1} > y + X_1\right]\Big)$$
$$\subset [x \leqslant X_1 \leqslant x+h] \cap \left(\bigcap_{i=2}^{j} [X_i \leqslant x+h]\right) \cap \left[X_{j+1} > y + x\right].$$

Comme $[R_1 \leqslant x+h] \cap [R_2 - R_1 > y]$ contient l'événement

$$[R_1 \leqslant x] \cap [R_2 - R_1 > y]$$

$$\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)$$
$$= \mathbf{P}\Big(\big([R_1 \leqslant x+h] \cap [R_2 - R_1 > y]\big) \setminus [R_1 \leqslant x] \cap [R_1 - R_2 > y]\Big)$$
$$= \mathbf{P}\big([x \leqslant R_1 \leqslant x+h] \cap [R_2 - R_1 > y]\big).$$
$$= \mathbf{P}\big([x \leqslant X_1 \leqslant x+h] \cap [R_2 \geqslant X_1 + y]\big).$$

Appliquons maintenant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\left(R_2 = X_{j+1}\right)_{j \in \mathbb{N}}$. Notons que l'on pourra omettre le cas $j = 0$ car la probabilité $\mathbf{P}(R_2 = X_1)$ est nulle (q26.)

$$\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left([x \leqslant X_1 \leqslant x+h] \cap [R_2 \geqslant X_1 + y] \cap \left[R_2 = X_{j+1}\right]\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left([x \leqslant X_1 \leqslant x+h] \cap \left[X_{j+1} \geqslant X_1 + y\right] \cap \left[R_2 = X_{j+1}\right]\right).$$

On conclut en constatant que $\left[X_{j+1} \geqslant x + y\right] \cap R_2$ vaut aussi

$$\left[X_{j+1} \geqslant X_1 + y\right] \cap \left(\left[X_{j+1} > X_1\right] \cap \left(\prod_{i=2}^{j} [X_i \leqslant X_1]\right)\right)$$
$$= \left[X_{j+1} \geqslant X_1 + y\right] \cap \left(\prod_{i=2}^{j} [X_i \leqslant X_1]\right)$$

car $y \geqslant 0$.

29. Comme F est dérivable en x.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{x + h - x} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} F'(x) = f(x).$$

Par continuité de F en $x + y$

$$1 - F(x+y+h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 1 - F(x+y).$$

Par produit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h(1 - F(x))}(1 - F(x+y+h)) \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{f(x)}{1 - F(x)}(1 - F(x+y)).$$

De même, on montre que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h(1 - F(x+h))}(1 - F(x+y)) \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{f(x)}{1 - F(x)}(1 - F(x+y)).$$

D'après le théorème d'encadrement

$$\frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h} \underset{h \to 0^+}{\longrightarrow} \frac{f(x)}{1 - F(x)}(1 - F(x+y)).$$

Il est admis que le résultat est valable lorsque $h \to 0^-$. Avec les limites à gauche et droite

$$\frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{f(x)}{1 - F(x)}(1 - F(x+y)).$$

On retrouve la définition de la dérivée partielle et

$$\partial_1 \varphi(x, y) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}\big(1 - F(x+y)\big).$$

30.a) On peut expliciter la dérivée partielle dans le cas d'une loi exponentielle

$$\partial_1 \varphi(x, y) = \frac{\lambda e^{-x\lambda}}{e^{-x\lambda}}\left(e^{-(x+y)\lambda}\right) = \lambda e^{-(x+y)\lambda}.$$

En intégrant, il existe une fonction $c : y \in \mathbb{R}^+ \longmapsto c(y)$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \varphi(x, y) = -e^{-(x+y)\lambda} + c(y).$$

En particulier pour $x = 0$

$$\varphi(0, y) = -e^{-y\lambda} + c(y)$$

or

$$\varphi(0, y) = \mathbf{P}\big([R_1 \leqslant 0] \cap [R_2 - R_1 > y]\big)$$
$$\leqslant \mathbf{P}(R_1 \leqslant 0) = 0.$$

D'où $\varphi(0, y) = 0$ et $c(y) = e^{-y\lambda}$. Finalement

$$\varphi(x, y) = -e^{-\lambda(x+y)} + e^{-\lambda y}$$
$$= \left(1 - e^{-\lambda x}\right) e^{-\lambda y}.$$

30.b) À l'aide du théorème de convergence monotone, on vérifie que

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi(n,y)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left([R_1\leqslant n]\cap[R_2-R_1>y]\right)\right)$$
$$=\mathbf{P}\left(R_2-R_1>y\right).$$

Or on a aussi

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi(n,y)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-e^{-n\lambda}\right)\left(e^{-\lambda y}\right)=e^{-\lambda y}.$$

Par unicité de la limite

$$\forall y\in\mathbb{R}^+,\qquad \mathbf{P}\left(R_2-R_1>y\right)=e^{-\lambda y}$$

puis $\qquad \mathbf{P}\left(R_2-R_1\leqslant y\right)=1-e^{-\lambda y}.$

Notons que pour $y\in\mathbb{R}^-$

$$\mathbf{P}\left(R_2-R_1\leqslant y\right)=0.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ, comme la fonction de répartition caractérise la loi

$$R_2-R_1\hookrightarrow\mathscr{E}(\lambda).$$

Enfin pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(R_1\leqslant x\right)R\left(R_2-R_1\leqslant y\right)\\ =&\left(1-e^{-\lambda x}\right)\left(1-e^{-\lambda y}\right)=1-e^{-\lambda x}+\left(1-e^{-\lambda y}\right)e^{-\lambda y}\\ =&1-e^{-\lambda x}-\varphi(x,y)\\ =&\mathbf{P}\left(R_1\leqslant x\right)-\mathbf{P}\left([R_1\leqslant x]\cap[R_2-R_1>y]\right)\\ =&\mathbf{P}\left([R_1\leqslant x]\cap\left(\Omega\setminus[R_2-R_1>y]\right)\right)\\ =&\mathbf{P}\left([R_1\leqslant x]\cap[R_2-R_1\leqslant y]\right).\end{aligned}$$

D'après le rappel en début d'énoncé, R_1 et R_2-R_1 sont indépendantes.

31. Dans ce cas, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^{+2}$

$$\varphi(x,y)=F(x)\big(1-G(y)\big).$$

En dérivant par rapport à la première variable

$$\partial_1\varphi(x,y)=F'(x)\big(1-G(y)\big)=f(x)\big(1-G(y)\big).$$

Le résultat s'en déduit à l'aide de la question 29 et en rappelant que $f(x)\neq 0$.

32. En particulier pour $x=0$, on obtient

$$\forall y\in\mathbb{R}^+,\qquad 1-F(y)=1-G(y).$$

Comme les variables sont positives, l'égalité s'étend à $y\leqslant 0$. On obtient alors

$$\forall y\in\mathbb{R},\qquad F(y)=G(y).$$

Ensuite

$$\begin{aligned}1-F(x+y)&=(1-G(y))(1-F(x))\\&=(1-F(y))(1-F(x)).\end{aligned}$$

D'où $\qquad \mathbf{P}(X>x+y)=\mathbf{P}(X>y)\mathbf{P}(X>x).$

et pour $x,y\in\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X>x+y)&=\frac{\mathbf{P}([X>x+y]\cap[X>y])}{\mathbf{P}(X>y)}\\&=\frac{\mathbf{P}([X>x+y])}{\mathbf{P}(X>y)}=\mathbf{P}(X>x).\end{aligned}$$

La variable X est sans mémoire, elle suit donc une loi exponentielle.

Exercice

---

33. On a

$$H(U)=\sum_{i=1}^{n}h\left(\frac{1}{n}\right)=nh\left(\frac{1}{n}\right)=-n\cdot\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)=\ln(n).$$

34.

```
def h(x):
    return -np.ln(x)*x

def entropie(P):
    s=np.sum(P)
    if s!=1 :
        return 'Erreur'
    for i in range(n):
        if P[i]<=0:
            return 'Erreur'
    H=0
    for i in range(len(P)):
        H+=h(P[i])
    return H
```

35.a) Comme l'intervalle $]0;1[$ est ouvert, on sait que

$$]0;1[^{n-1}=]0;1[\times\ldots\times]0;1[$$

est aussi ouvert. De plus, la fonction polynomiale

$$\varphi:\left(p_1,\ldots,p_{n-1}\right)\mapsto 1-\sum_{i=1}^{n-1}p_i$$

est continue. On sait alors que

$$\left\{\left(p_1,\ldots,p_{n-1}\right)\in\mathbb{R}^{n-1}\quad|\quad\varphi\left(p_1,\ldots,p_{n-1}\right)>0\right\}$$

est un ouvert. Par intersection de deux ouverts, $\mathscr{O}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^{n-1}$.

- Les applications coordonnées

$$(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\mapsto x_k$$

sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;1[^{n-1}$ et à valeurs dans $]0;1[$. La fonction h est aussi de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;1[$. Par composition,

$$(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\mapsto h\left(x_k\right)$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{O}$. Il en va de même pour

$$(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathscr{O}\mapsto h\left(1-x_1-\ldots-x_{n-1}\right).$$

Par somme h_n est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{O}$.

35.b) Soit $i\in[\![1,n]\!]$

$$\partial_i h_n\left(p_1,\ldots,p_{n-1}\right)=h'\left(p_i\right)-h'\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}p'_k\right)$$

- Pour $j \in [\![1,n]\!]$.

→ Si $i \neq j$

$$\partial^2_{j,i} h_n(p_1 \dots p_{n-1}) = h''\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\right)$$

→ Si $i = j$

$$\partial^2_{i,i} h_n(p_1, \dots, p_{n-1}) = h''(p_i) + h''\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\right).$$

On peut expliciter ces dérivées partielles en notant que

$$\forall x \in]0;1[, \qquad h''(x) = -\frac{1}{x}.$$

Finalement

$$\nabla^2 h_n(p_1, \cdots, p_{n-1}) = \mathrm{D} + \alpha \mathrm{J}$$

où

$$\mathrm{D} = \mathrm{diag}\left(-\frac{1}{p_1}, \dots, -\frac{1}{p_{n-1}}\right) \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{-1}{1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k}.$$

35.c) Le gradient de h_n est (en notant $p_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k$)

$$\nabla h_n(p_1, \dots, p_{n-1}) = (h'(p_1) - h'(p_n), \dots, h'(p_{n-1}) - h'(p_n)).$$

Ainsi $(p_1, \dots p_{n-1}) \in \mathcal{O}$ est point critique si et seulement

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \qquad h'(p_i) - h'(p_n) = 0.$$

On en déduit

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \qquad \ln(p_i) = \ln(p_n) \qquad (h'(x) = 1 + \ln x).$$

Comme la fonction logarithme est injective

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad p_i = p_n.$$

Nécessairement : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $p_i = \frac{1}{n}$ car $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. On vérifie que le spectre de J est $\{0;n\}$, d'où le spectre

$$\nabla^2 h_n\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = -n(\mathrm{I}_n + \mathrm{J})$$

est alors $\{-n(n+1), -n(n+1)\} \subset \mathbb{R}_-^+$. On sait alors que le point critique est un maximum local.

> On peut être plus précis en remarquant que $\mathcal{O}$ est une partie convexe et pour tout $x \in \mathcal{O}$
>
> $$\mathrm{Sp}\left(\nabla^2 h_n(x)\right) \subset \mathbb{R}^-.$$
>
> On sait alors que le point critique donne un maximum global sur $\mathcal{O}$.

36.a) C'est une conséquence directe de la stricte concavité du logarithme.

36.b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$

$$\begin{aligned} -p_k \ln(p_k) + p_k \ln(q_k) &= p_k \ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right) \\ &\leqslant p_k\left(\frac{q_k}{p_k} - 1\right) \\ &\leqslant q_k - p_k \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $q_k = p_k$.

37.) Pour $q_k = 1/n$,

$$-p_k \ln(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} - p_k.$$

C'est-à-dire $\qquad h(p_k) - p_k \ln(n) \leqslant \frac{1}{n} - p_k.$

En sommant pour $k \in [\![1,n]\!]$

$$\sum_{k=1}^{n} h(p_k) - \ln(n) \sum_{k=1}^{n} p_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - p_k.$$

D'où $\qquad \mathrm{H}(\mathrm{X}) - \ln(n) \leqslant 0$

et $\qquad \mathrm{H}(\mathrm{X}) \leqslant \ln(n) = \mathrm{H}(\mathrm{U}).$

On a en plus $\mathrm{H}(\mathrm{X}) = \mathrm{H}(\mathrm{U})$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $p_k = \frac{1}{n}$ (cas d'égalité avec $x = 1$). Ce qui conclut.

38.a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction

$$\alpha \in [1;+\infty[\mapsto p_i^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln p_i}$$

est dérivable par composition avec pour dérivée

$$\alpha \in [1;+\infty[\mapsto \ln p_i \mathrm{e}^{\alpha \ln p_i} = \ln p_i \cdot p_i^\alpha.$$

On en déduit que par somme, composition et quotient $\mathrm{H_R}$ admet une dérivée partielle suivant α avec pour tout réel $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathrm{H_R}(\alpha, \mathrm{X}) &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha\right) + \frac{1}{1-\alpha} \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln p_i \cdot p_i^\alpha}{\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha} \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)^2}\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{n} (1-\alpha) \ln p_i \cdot \frac{p_i^\alpha}{\sum_{j=1}^{n} p_j^a}\right) \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)^2}\left(\ln\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^\alpha\right) + \sum_{i=1}^{n} \ln p_i^{1-\alpha} \cdot q_i\right) \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\ln\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^\alpha\right) + \ln p_i^{1-\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{(1-\alpha)^2} \sum_{i=1}^{n} q_i \ln\left(p_i^{1-\alpha} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^\alpha\right)\right) \end{aligned}$$

$$\partial_1 \mathrm{H_R}(\alpha, x) = \frac{1}{(1-\alpha)^2} \sum_{i=1}^{n} q_i \ln\left(\frac{p_i}{q_i}\right).$$

38.b) En reprenant la question 36.b)

$$p_k \ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right) \leqslant q_k - p_k$$

en échangeant les rôles de p_k et q_k.

$$q_k \ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \leqslant p_k - q_k.$$

Puis par somme

$$\sum_{k=1}^{n} q_k \ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k - q_k = 1 - 1 = 0.$$

Ainsi $\partial_1 \mathrm{H_R}(\alpha, x) \leqslant 0$ pour tout α dans l'intervalle $]1;+\infty[$. Ce qui conclut.

38.a) On a vu que $g : \alpha \in [1;+\infty[\mapsto \ln\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha}\right)$ est dérivable avec

$$g'(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln p_i \cdot p_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha}} \quad \text{puis} \quad g'(1) = -\mathrm{H}(\mathrm{X})$$

Le résultat s'en déduit par la formule de Taylor-Young (g est de classe $\mathscr{C}^1$)

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \underbrace{g(1)}_{=0} + g'(1)(\alpha-1) + 0_1(\alpha-1) \\ &= \mathrm{H}(\mathrm{X})(1-\alpha) + o_1(\alpha-1). \end{aligned}$$

38.b) Ainsi

$$\mathrm{H_R}(\alpha, \mathrm{X}) = \frac{g(\alpha)}{1-\alpha} = \mathrm{H}(x) + o_1(1) \underset{\alpha\to 1^+}{\longrightarrow} \mathrm{H}(\mathrm{X}).$$

39. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([\mathrm{Y}=k])_{k\in[[1;n]]}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([\mathrm{X}=\mathrm{Y}] \cap [\mathrm{Y}=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}([\mathrm{X}=k] \cap [\mathrm{Y}=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{X}=k)\mathbf{P}(\mathrm{Y}=k) \quad \text{indépendance} \\ \mathbf{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y}) &= \sum_{k=1}^{n} {p_k}^2 \quad \text{égalité en loi.} \end{aligned}$$

Or on a aussi

$$\mathrm{H_R}(2, \mathrm{X}) = -\ln\left(\sum_{i=1}^{n} {p_i}^2\right) = -\ln(\mathbf{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y}))$$

D'où $\mathbf{P}(\mathrm{X}=\mathrm{Y}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{H_R}(2,\mathrm{X})}$ et par décroissance de $\alpha \mapsto \mathrm{H_R}(\alpha, \mathrm{X})$

$$\mathrm{H_R}(2, \mathrm{X}) \leqslant \lim_{\alpha\to 1^+} \mathrm{H_R}(\alpha, \mathrm{X}) = \mathrm{H}(\mathrm{X})$$

et
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{H_R}(2,\mathrm{X})} \geqslant \mathrm{e}^{-\mathrm{H}(\mathrm{X})}.$$

Ce qui termine ce sujet !