DS 8 - Concours blanc B

THÈMES : ANALYSE, ALGÈBRE ET PROBABILITÉ

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice I - Fonctions de plusieurs variables

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Dans la suite, on identifie matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et vecteur de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par

$$\forall\, X = (x_i)_{i\in[\![1;n]\!]},\ Y = (y_i)_{i\in[\![1;n]\!]},\qquad \langle X, Y\rangle = {}^t XY = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Soit $\|\cdot\|$, la norme associée à ce produit scalaire. De plus, on note

$$B = \left\{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X\| \leqslant 1\right\}$$

et on considère l'application F de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall X = (x_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{R}^n,\qquad F(X) = \sum_{\substack{1<i,j<n\\ i\neq j}} x_i x_j.$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $F(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 = 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

Partie I
Optimisation sur B

1. Exprimer F(X) à l'aide de $S_1(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et de $S_2(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$.
2. Montrer que F possède un maximum et un minimum sur B que l'on notera respectivement M et m.
3. Justifier que $m = -1$.
4. **a)** Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
   b) En déduire que la valeur de M en fonction de n.
   c) Déterminer tous les $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $F(X) = M$.

Partie II
Preuve avec de l'algèbre bilinéaire

Pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $\mathbb{R}^n$, on pose : $\qquad \varphi(X,Y) = \dfrac{1}{2}\sum_{\substack{1<i,j<n\\ i\neq j}}\left(x_iy_j + x_jy_i\right).$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $\varphi(X,Y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.

5. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ exprimer F(X) à l'aide de φ.
6. **a)** Écrire la matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i, j) \in [\![1,n]\!]^2$ par $a_{ij} = \varphi\left(e_i, e_j\right)$.
   On pourra commencer par le cas $n = 3$.
   b) Vérifier que pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $\left(\mathbb{R}^n\right)^2$, on a $\varphi(X,Y) = {}^tYAX = {}^tXAY$.
7. Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathscr{U} = (u_1, u_2,\dots,u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.

8. Soient λ_1 et λ_n, respectivement la plus petite et la plus grande valeur de A.

a) Pour $X \in \mathbb{R}^n$, comparer les trois réels $\lambda_1\, {}^t XX$, $\lambda_n\, {}^t XX$ et ${}^t XAX$.

b) Expliciter le spectre de A et retrouver alors le résultat établi à la partie I.

Exercice II - Convergence en loi dans le paradoxe des anniversaires

Dans la suite, on admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x par

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- **Étude d'une loi**

9. **a)** Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

10. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance, une variance et les calculer.

11. On considère une variable aléatoire V suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.

a) Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

b) Écrire une fonction python nommée `simulX()`, prenant en entrée le paramètre $a > 0$ et retournant une simulation de la variable aléatoire X.

- **Définition de** T_n

Pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue, dans U_n, des tirages d'une boule avec remise. On suppose que tous les tirages dans U_n sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

12. Écrire un programme python `simulT()` qui prend en argument n et simule T_n.

13. Justifier : $\mathbf{P}(T_n > n+1) = 0$.

14. Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leqslant n$: $\mathbf{P}(T_n > k)$.

- **Exemple de convergence en loi**

On considère la variable aléatoire $Y_n = T_n/\sqrt{n}$.

On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 2}$. Soit $y \in [0;+\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$. On a donc : $k_n \leqslant y\sqrt{n} < 1 + k_n$.

15. Justifier $\mathbf{P}\left(Y_n > y\right) = \mathbf{P}(T_n > k_n)$.

16. Montrer que

$$\mathbf{P}\left(Y_n > y\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-k_n}\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}.$$

17. **a)** Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \mapsto -t + (t-1)\ln(1-t)$ en 0.

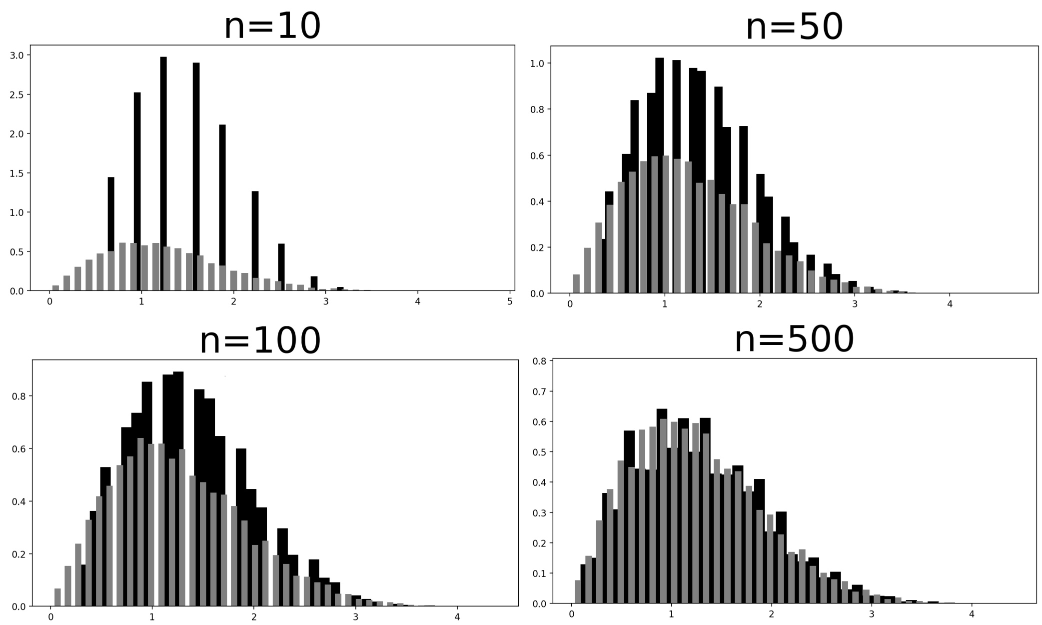
b) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-k_n + (k_n - n)\ln\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right) = -\frac{y^2}{2}$.

18. **a)** Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.

b) Tester la cohérence du résultat à l'aide du code et résultat suivant.

Editeur

```python
n= ...
m=10000
E=np.zeros([2,m])
for i in range(m):
    E[0,i]= simuYn(n)
    E[1,i]= simulX(1)
plt.hist(E[0,:],40,density=True,color='black')
plt.hist(E[1,:],40,density=True,color='grey', rwidth=0.6)
plt.show()
```



Problème A - Matrices d'Ehrenfest

La première partie de ce problème détermine quelques propriétés des matrices d'Ehrenfest. La seconde partie étudie un modèle de diffusion de particules à travers une membrane poreuse. Dans ce problème, n est un entier naturel non nul pair ($n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$). On désigne par A_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 0 & n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & n-1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & n & 0 \end{bmatrix}.$$

Plus formellement, pour $i \in [\![1; n+1]\!]$ et $j \in [\![1; n+1]\!]$, le terme situé sur la ligne i et la colonne j de A_n est

$$\begin{cases} \frac{n-i+1}{n} & \text{si } j = i+1 \\ \frac{i-1}{n} & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on pose $\mathrm{B}_n = n\,{}^t\mathrm{A}_n$.

Partie I
Lien avec les fonctions hyperboliques

- **Exemple pour** $n = 2$

19. Calculer ${\mathrm{B}_2}^3$. Expliciter ${\mathrm{B}_2}^k$ pour k entier naturel.

20. Déterminer les éléments propres (valeurs propres et espaces propres) de la matrice B_2. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

- **Cas général**

On va généraliser les résultats obtenus pour $n = 2$ en ce qui concerne les éléments propres de B_n. Pour x réel, on pose

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}.$$

On admet les résultats suivants, concernant les fonctions ch et sh :

→ Pour tout réel $x, \exp(x) = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

→ Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

Pour p entier naturel avec $0 \leqslant p \leqslant n$ et x réel, on pose $f_p(x) = \mathrm{sh}^p(x)\,\mathrm{ch}^{n-p}(x)$ et on désigne par F_n le sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même, engendré par la famille $\mathscr{B}_n = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$.
Pour p entier relatif, on définit la fonction e_p sur $\mathbb{R}$ par $e_p(x) = \exp(px)$.

- **Une base**

21. Soit $k \in [\![0;p]\!]$.

a) En remarquant que pour x réel, $\exp((n-2k)x) = \left(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)\right)^k (\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^{n-2k}$, montrer que e_{n-2k} est dans F_n.

b) En déduire que e_{2k-n} est aussi dans F_n.

22. **a)** Justifier que la famille ci-dessous est libre

$$\mathscr{E}_n = \left(e_{-2p}, e_{-2(p-1)}, \dots e_{-2}, e_0, e_2, \dots, e_{2(p-1)}, e_{2p}\right).$$

b) Que peut-on en déduire sur la dimension de F_n ?

c) Montrer que la famille $\mathscr{B}_n$ est une base de F_n.

23. Montrer que l'application $\varphi_n : f \mapsto f'$ réalise un endomorphisme de F_n et reconnaître la matrice de φ_n dans la base $\mathscr{B}_n$.

24. Soit λ un réel. Quelles sont les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = \lambda f$?
On pourra calculer la dérivée de $x \mapsto \exp(-\lambda x) f(x)$.

25. À l'aide de la question précédente, montrer que le spectre de φ_n est donné par

$$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{-2p, -2(p-1), \dots, -2, 0, 2, \dots, 2(p-1), 2p\right\}.$$

26. La matrice B_n est-elle diagonalisable ?

27. Montrer que la matrice ligne

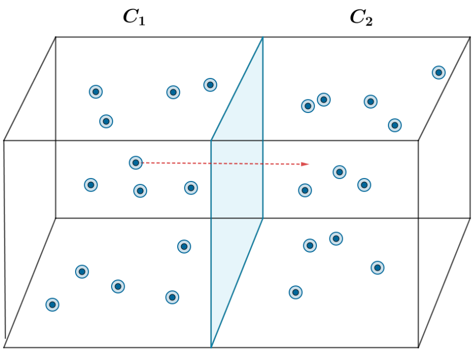
$$\frac{1}{2^n}\begin{bmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

est l'unique matrice ligne $\mathrm{L} = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_{n+1} \end{bmatrix}$ telle que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \ell_i = 1$ et $\mathrm{LA}_n = \mathrm{L}$.

Partie II
Diffusion de particules

Une boîte contient n particules ; cette boîte est séparée en deux boîtes notées C_1 et C_2 par une membrane poreuse. On modélise le passage des particules d'une boîte à l'autre de la façon suivante. À chaque instant entier, on choisit une des n particules avec équiprobabilité et on la transfère dans l'autre boîte. Les tirages sont supposés indépendants. On admet qu'il existe un espace probabilisé $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ tel que pour tout k de $\mathbb{N}$, le nombre de particules dans la boîte C_1 à l'instant k définit une variable aléatoire X_k sur $\mathscr{E}$. On note enfin, pour k dans $\mathbb{N}$, L_k la matrice ligne :

$$\mathrm{L}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(\mathrm{X}_k = 0) & \mathbf{P}(\mathrm{X}_k = 1) & \cdots & \mathbf{P}(\mathrm{X}_k = n) \end{bmatrix}.$$



28. Vérifier que $\mathrm{L}_{k+1} = \mathrm{L}_k \mathrm{A}_n$. En déduire L_k en fonction de A_n, k et L_0.

29. On suppose dans cette question que X_0 suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Préciser L_0. Quelle est la loi suivie par X_k ? Quelle est son espérance et sa variance ?

- On revient au cas général.

30. **a)** Déterminer une matrice colonne U telle que $\mathrm{L}_k \mathrm{U} = \mathbf{E}(\mathrm{X}_k)$.
On admet qu'un calcul direct donne $n\mathrm{A}_n\mathrm{U} = (n-2)\mathrm{U} + n\mathrm{V}$ où V est une matrice colonne de $n+1$ lignes ne contenant que des 1.

b) Montrer que pour tout k entier naturel : $\mathbf{E}\left(\mathrm{X}_{k+1}\right) = \left(\frac{n-2}{n}\right)\mathbf{E}\left(\mathrm{X}_k\right) + 1.$

c) En déduire l'espérance de X_k en fonction de n, k et $\mathbf{E}(\mathrm{X}_0)$.

31. Quelle est la limite de $\mathbf{E}\left(\mathrm{X}_k\right)$ lorsque k tend vers $+\infty$? Ce résultat vous semble-t-il conforme à l'intuition ?

32. Soit $i \in [\![0;n]\!]$. Vérifier que $\mathbf{E}\left(\mathrm{X}_{k+1} \mid [\mathrm{X}_k = i]\right) = \left((n-2)i + n\right)/n$. Retrouver la formule de la question 30.b).

- **Simulation avec python**

33. On suppose les particules numérotées de 1 à n et on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice ligne aléatoire $\mathrm{M}_k = (m_i^k)_{i \in [\![1;n]\!]}$ par

$$\forall\, i \in [\![1;n]\!], \qquad m_i^k = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ème particule est dans } \mathrm{C}_1 \\ -1 & \text{si la } i\text{-ème particule est dans } \mathrm{C}_2 \end{cases}$$

On suppose aussi qu'à l'étape 0, toutes les particules sont dans la première boîte.

Écrire une fonction python qui prend en argument k et renvoie une simulation de la matrice M_k.

Problème B - Série à paramètre, la fonction ζ

Préliminaires

La constante γ d'Euler

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le terme général H_n de la série harmonique : $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On introduit les suites de terme général, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n+1)$ et $v_n = \mathrm{H}_n - \ln n$.

34. **a)** Justifier que pour tout $t \in]0;1]$,

$$\ln(1+t) \leqslant t \quad \text{et} \quad t + \ln(1-t) \leqslant 0.$$

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b) Montrer qu'il existe un réel $\gamma \in]0,1[$ tel que :

$$\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o_{n\to+\infty}(1)$$

Le réel γ est appelé constante d'Euler.

35. Justifier que $|v_n - \gamma| \leqslant 1/n$. En déduire un programme python qui renvoie une approximation de γ à 10^{-5}-près.

Partie I

Régularité de la fonction ζ

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

36. **a)** Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On désigne alors par ζ la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

b) Montrer que la fonction ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$.

37. **a)** Montrer que :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{(k+1)^x} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{k^x}.$$

puis que :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}, \qquad \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leqslant \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Déterminer alors les limites de ζ lorsque x tend vers 1 et lorsque x tend vers $+\infty$.

38. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on désigne par $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

a) Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$, la série de terme général $u_n(x)$ converge et préciser sa somme $\mathrm{U}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par U_n la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \qquad \mathrm{U}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U_n est continue en 1 , puis que :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

En déduire alors que :

$$\lim_{x\to1} \left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1}\right) = \gamma$$

où γ est la constante d'Euler.

39. **a)** Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$, les séries de terme général : $\ln(n) f_n(x)$ et $\ln(n)^2 f_n(x)$ sont convergentes.

b) Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]1, +\infty[, \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad h \geqslant \frac{1-x}{2}, \qquad \left| f_n(x+h) - f_n(x) + h \ln n f_n(x) \right| \leqslant \frac{h^2}{2} \ln^2 n f_n\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

c) En déduire que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \forall h \in \mathbb{R}^*, \quad h \geqslant \frac{1-x}{2}, \qquad \left| \frac{\zeta(x+h) - \zeta(x)}{h} + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) f_n(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(n)^2 f_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

puis que ζ est dérivable sur $]1, +\infty[$. Déterminer alors une expression de ζ'.

Partie II
Estimation avec python

40. • **Approximation de $\zeta(s)$ à partir de la définition**

a) Écrire une fonction python `ApproxZeta1` qui prend en arguments N et $s \in [1; +\infty[$ et renvoie la matrice ligne

$$\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_N \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad s_k = \sum_{n=1}^{k} n^{-s}.$$

• **Deuxième exemple**

On admet qu'en regroupant les termes, on a $\zeta(s) = \dfrac{1}{1-2^{1-s}} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

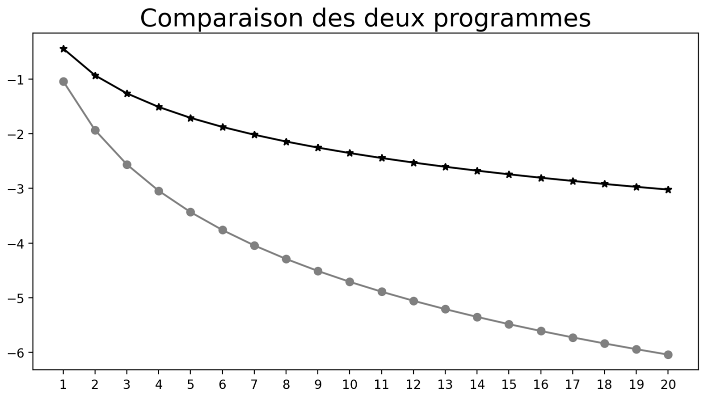
b) En déduire une seconde fonction `ApproxZeta2()` qui prend en arguments N et $s \in [1; +\infty[$ et renvoie la matrice ligne

$$\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & \dots & t_N \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad t_k = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

c) Sachant que $\zeta(2) = \pi^2/6$, quel programme vous semble le plus efficace ?

Editeur

```
N=20
E1=np.log(np.abs(ApproxZeta1(N,2)-np
    .pi**2/6))
E2=np.log(np.abs(ApproxZeta2(N,2)-np
    .pi**2/6))
plt.plot(np.arange(1,N+1),E1,'*-',
    color='black')
plt.plot(np.arange(1,N+1),E2,'o-',
    color='grey')
plt.show()
```



Bonus Quel est le prénom du phycisien(ne) autrichien(ne) Ehrenfest dont on a étudié le modèle au problème A ?

Tatiana ou Paul

– FIN –

DS 8 - Concours blanc B

Exercice I

1. On a

$$\begin{aligned} S_1(X)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1\leqslant i j\leqslant n} x_i x_j \\ S_1(X)^2 &= S_2(X) + F(X). \end{aligned}$$

D'où $\qquad F(X) = S_1(X)^2 - S_2(X).$

2. La fonction F est polynomiale donc continue sur le fermé borné B. D'après le cours, F admet un minimum et un maximum sur B.

3. Notons que $X \in B$ si et seulement si $S_2(X) \leqslant 1$. Ainsi pour $X \in B$

$$F(X) = S_1(X)^2 - 1 \geqslant -1 \qquad (\star)$$

En particulier pour $X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,\ldots 0) \in \mathbb{R}^n$, on a $S_1(X_0) = 0$,

$$X_0 \in B \quad \text{et} \quad F(X_0) = -1.$$

On en déduit que F admet un minimum et que ce dernier vaut -1.

4.a) Pour tous $(x_i)_{i\in[\![1;n]\!]}, (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est liée.

4.b)c) Avec le choix $y_i = 1$, on obtient

$$|S_1(X)| = \left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \leqslant \sqrt{n}\|X\|.$$

Ou encore $\qquad S_1(X)^2 \leqslant n\|X\|^2$

et si $X \in B$, $\qquad S_1(X)^2 \leqslant n.$

- Précisons le cas d'égalité, on a $S_1(X)^2 = n$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$X = \lambda(1,\ldots,1).$$

La condition $S_2(X) = 1$ pour avoir égalité dans $(\star)$ impose $\lambda = \pm 1/\sqrt{n}$. Finalement, pour tout $X \in B$

$$F(X) = S_1(X)^2 - 1 \leqslant n - 1 = M$$

avec égalité si et seulement si

$$X = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n.$$

5. Vérifier que $F(X) = \varphi(X,X)$.

6.a) Pour $n = 3$,

$$\varphi(x,y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_2y_1$$

pour tout $i \in [\![1;3]\!]$

$$\varphi\left(e_i,e_i\right) = 0 \quad \varphi(e_1,e_2) = \varphi(e_2,e_1) = 1,$$

$$\varphi(e_1,e_3) = \varphi(e_3,e_1) = 1, \quad \varphi(e_2,e_3) = \varphi(e_3,e_2) = 1.$$

D'où pour $n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$, on a pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$ avec $i \neq j$

$$\varphi\left(e_i,e_i\right) = 0 \quad \varphi\left(e_i,e_j\right) = 1$$

et $A = J - I_n$ où $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contient que des 1.

6.b) Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^{n2}$

$$\begin{aligned} {}^tYAX &= \left(\sum_{i=1}^n y_i\,{}^te_i\right)(J - I_n)\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j y_i\,{}^te_i(J - I_n)e_j. \end{aligned}$$

Vérifier ensuite que

$${}^te_i(J - I_n)e_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est-à-dire

$${}^te_i(J - I_n)e_j = \varphi\left(e_i,e_j\right).$$

D'où

$$\begin{aligned} {}^tYAX &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j y_i\,{}^te_i(J - I_n)e_j \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j y_i \varphi\left(e_i,e_j\right) \\ & \varphi(X,Y). \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de la bilinéarité de φ. Puis par symétrie de φ

$${}^tYAX = \varphi(X,Y) = \varphi(Y,X) = {}^tXAY.$$

7. C'est une application du théorème spectral car A est symétrique.

8.a) Reprendre l'exercice sur l'encadrement de Rayleigh.

$$\lambda_1 {}^t XX \leqslant {}^t XAX \leqslant \lambda_n {}^t XX.$$

8.b) Vérifier que $\mathrm{Sp}(J) = \{0; n\}$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{-1; n-1\}$. D'où

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{et} \quad \lambda_n = n-1.$$

Pour $x \in B$, ${}^t XX = 1$

$$-1 \leqslant {}^t XAX = \varphi(X, X) = F(X) \leqslant n-1$$

avec égalité pour X vecteur propre de -1 ou $n-1$ (que l'on choisit de norme 1). On retrouve l'existence du minimum et maximum de F sur B avec

$$m = -1, \quad M = n-1.$$

Exercice II

Extrait de EML 2012. Voir corrigé en ligne. Ci-dessous, des commentaires et les solutions des questions python.

10.b) *Il n'est pas nécessaire de justifier la convergence par les critères d'équivalence ou de négligeabilité. En rédigeant proprement, le calcul prouve l'existence (la convergence) et les valeurs de l'espérance et de la variance.*

11.b)

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
import numpy.random as rd
def simulX(a):
    u=rd.random()
    return a*np.sqrt(-2*np.log(u))
```

12.

```
def simuT(n):
    Tableau=np.zeros(n)
    A=rd.randint(0,n)
# numéro de la première boule
    Tableau[A]=1
    N=2
    B=rd.randint(0,n)
# numéro de la boule suivante
    while Tableau[B]==0:
        Tableau[B]=1
        N+=1
        B=rd.randint(0,n)
    return N
```

15. *Des maladresses ici, vous êtes nombreux à penser que variables discrètes signifient à valeurs entières. On a seulement une implication.*

17.a) *Il est particulièrement maladroit de chercher à appliquer Taylor-Young ici. C'est justement les règles de calcul sur les DLs qui permettent d'éviter le calcul (souvent pénible) des dérivées successives.*

18.b) Les résultats sont bien en accord. En effet, plus n est grand plus l'histogramme obtenu à partir de Y_n est proche de l'histogramme obtenu à partir de X pour $a = 1$.

```
E[1,i]= simulX(1) # donc a=1
```

Problème A

---

19. Pour $n = 2$

$$A_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{puis} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que

$${B_2}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{et} \qquad {B_2}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = 4B_2 = 2^{3-1}B_2.$$

$$\text{puis} \qquad {B_2}^4 = B_2{B_2}^3 = B_2\,(4B_2) = 4{B_2}^2 = 2^2{B_2}^2.$$

$${B_2}^5 = B_2\left(2^2{B_2}^2\right) = 2^2{B_2}^3 = 2^{5-1}B_2.$$

On conjecture que pour $k = 0$, ${B_2}^k = I_3$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$

$${B_2}^k = \begin{cases} 2^{k-1}B_2 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2^{k-2}{B_2}^2 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Conjecture que l'on prouve ensuite par récurrence.

20. On a vu que ${B_2}^3 - 4B_2 = 0_3$. Dit autrement

$$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$$

est un polynôme annulateur de B_2. On en déduit que

$$\mathrm{Sp}\,(B_2) \subset \{-2; 0; 2\}.$$

En remarquant que la première et dernière colonnes de B_2 sont égales :

$$B_2X_0 = 0_3 \quad \text{où} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \neq 0_{3,1}.$$

Ensuite si on pose les matrices non nulles

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_{-2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

on a $B_2X_2 = 2X_2$, $B_2X_{-2} = -2X_{-2}$. D'où l'égalité

$$\mathrm{Sp}\,(B_2) = \{-2; 0; 2\}.$$

Comme B_2 est une matrice $(3,3)$, les espaces propres sont de dimension 1 et pour toute valeur propre λ

$$E_\lambda\,(B_2) = \mathrm{Vect}\left(X_\lambda\right).$$

La démonstration proposée ici utilise un polynôme annulateur donné par la question précédente. Une autre méthode consiste à étudier le rang de $B_2 - \lambda I_3$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.

21.a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\exp((n-2k)x) &= 1^k \times \left(\mathrm{e}^x\right)^{n-2k} \\ &= \left(\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)\right)^k \left(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\right)^{n-2k}.\end{aligned}$$

On développe avec la formule du binôme :

$$\begin{aligned}&= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{ch}^{2i}(x)(-1)^{k-i}\,\mathrm{sh}^{2(k-i)}(x)\right) \\ &\quad \times \left(\sum_{j=0}^{n-2k} \binom{n-2k}{j} \mathrm{ch}^{j}(x)\,\mathrm{sh}^{n-2k-j}(x)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-2k} \mu_{k,i,j}\,\mathrm{ch}^{2i+j}(x)\,\mathrm{sh}^{n-(2i+j)}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-2k} \mu_{k,i,j} f_{n-(2i+j)}(x)\end{aligned}$$

où $\mu_{k,i,j}$ est un réel qui s'expriment avec des coefficients binomiaux. On obtient

$$e_{n-2k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-2k} \mu_{k,i,j} \underbrace{f_{n-(2i+j)}}_{\in \mathrm{F}_n} \in \mathrm{F}_n$$

car F_n est stable par combinaison linéaire.

21.b) Comme ch et sh sont respectivement des fonctions paire et impaire, on a aussi

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \qquad x \in \mathbb{R} \mapsto f_k(-x) \in \mathrm{F}_n$$

Ainsi si $f \in \mathrm{F}_n$, alors $x \in \mathbb{R} \mapsto f(-x) \in \mathrm{F}_n$. D'où

$$e_{2k-n} : x \mapsto e_{n-2k}(-x) \in \mathrm{F}_n.$$

22.a) Considérons $n+1$ réels r_i ordonnés

$$r_0 < r_1 < \ldots < r_n.$$

Justifions que la famille $\left(e_{r_i}\right)_{i \in [\![0;n]\!]}$ est libre. Le résultat demandé s'en déduisant.
Supposons qu'il existe $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot e_{r_i} = \mathbf{0} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathrm{e}^{r_i x} = 0$$

En divisant par $\mathrm{e}^{r_n x} \neq 0$, c'est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mathrm{e}^{-(r_n - r_i)x} + \lambda_n = 0$$

Comme $r_n - r_i > 0$ pour $i \in [\![0;n-1]\!]$, $\mathrm{e}^{-(r_n-r_i)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Par passage à la limite, on trouve $\lambda_n = 0$. Par une récurrence, on justifie que chaque coefficient λ_i est nul. La famille est libre.

22.b) On en déduit que

$$\dim \mathrm{F}_n \geqslant \mathrm{Card}\,\mathscr{E}_n = 2p+1 = n+1.$$

Or F_n est engendré par les $n+1$ vecteurs de $\mathscr{B}_n$

$$\dim \mathrm{F}_n \leqslant \mathrm{Card}\,\mathscr{B}_n = n+1.$$

D'où l'égalité $\qquad \dim \mathrm{F}_n = n+1.$

22.c) La famille $\mathscr{B}_n$ est une famille génératrice de F_n avec autant de vecteurs que la dimension de F_n. On sait alors que c'est une base de F_n.

23. Par linéarité de la dérivation, φ_n est bien linéaire.

Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$

$$\begin{aligned}\varphi_n\left(f_p\right) &= f_p' \\ &= p\,\mathrm{ch}\cdot\mathrm{sh}^{p-1}\,\mathrm{ch}^{n-p} + (n-p)\,\mathrm{sh}^{p}\cdot\mathrm{sh}\,\mathrm{ch}^{n-p-1} \\ &= p\,\mathrm{sh}^{p-1}\,\mathrm{ch}^{n-(p-1)} + (n-p)\,\mathrm{sh}^{p+1}\,\mathrm{ch}^{n-(p+1)} \\ &= p f_{p-1} + (n-p) f_{p+1}.\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}\varphi_n\left(f_0\right) &= f_0' = n\,\mathrm{sh}\,\mathrm{ch}^{n-1} = n f_1 \\ \varphi_n\left(f_n\right) &= n\,\mathrm{ch}\,\mathrm{sh}^{n-1} = n f_{n-1}.\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $f \in \mathscr{B}_n$, $\varphi_n(f) \in \mathrm{F}_n$. Comme $\mathscr{B}_n$ est génératrice et φ_n linéaire, pour tout $f \in \mathrm{F}_n$, $\varphi_n(f) \in \mathrm{F}_n$. On a donc bien un endomorphisme.

- Les calculs précédents donnent directement

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{B}_n}\left(\varphi_n\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{B}_n.$$

24. Posons $h : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda x} f(x)$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned}h'(x) &= -\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} f(x) + \mathrm{e}^{-\lambda x} f'(x) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda x}\left(-\lambda f(x) + f'(x)\right) = 0\end{aligned}$$

La fonction h est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h(x) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{\lambda x}$$

Réciproquement les fonctions de ce type sont solutions.

25. Soit $k \in [\![0;p]\!]$

$$\varphi_n\left(e_{n-2k}\right) = e_{n-2k}' = (n-2k)e_{n-2k}$$

Comme $e_{n-2k} \neq \mathbf{0}$, on a un vecteur propre pour la valeur propre $(n-2k)$. Il en va de même avec e_{2k-n} avec pour valeur propre $2k-n$. Ainsi

$$\left\{\pm(n-2k) \mid k \in [\![0;p]\!]\right\} \subset \mathrm{Sp}\left(\varphi_n\right).$$

L'ensemble de gauche contient $2p+1 = n+1$ éléments et φ_n est un endomorphisme de F_n de dimension $n+1$, il n'a donc pas plus de $n+1$ valeurs propres distinctes. L'inclusion précédente est donc une égalité.

Noter que les vecteurs $e_{\pm(n-2k)}$ étant associés à des valeurs propres distinctes, on retrouve le fait qu'ils forment une famille libre (question 22.a)).

26. La matrice $B_n \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ a $n+1$ valeurs propres (le spectre de B_n est aussi celui de φ_n). On sait alors que B_n est diagonalisable et les espaces propres sont tous de dimension 1.

27. Par la formule du binôme de Newton, on a bien

$$\sum_{i=0}^{n} \ell_i = 1.$$

On a aussi $\varphi(e_n) = n e_n$ et si on pose $\tilde{e}_n = (1/2^n) e_n$

$$\varphi(\tilde{e}_n) = n\tilde{e}_n \qquad (\star)$$

Or on a aussi par la formule du binôme

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{nx} &= \big(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\big)^n \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \mathrm{sh}^p(x)\,\mathrm{ch}^{n-p}(x). \end{aligned}$$

D'où
$$e_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} f_p$$

que l'on reformule par

$$\tilde{e}_n = \sum_{p=0}^{n} \ell_p f_p$$

et
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}(\tilde{e}_n) = {}^t\mathrm{L}.$$

L'égalité $(\star)$ se traduit matriciellement

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}(\varphi_n)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}(\tilde{e}_n) &= n\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_n}(\tilde{e}_n) \\ \mathrm{B}_n{}^t\mathrm{L} &= n{}^t\mathrm{L} \end{aligned}$$

Or en revenant à la définition de B_n

$$n{}^t\mathrm{A}_n{}^t\mathrm{L} = n{}^t\mathrm{L}$$

puis en transposant
$$\mathrm{LA}_n = \mathrm{L}.$$

• Prouvons l'unicité. Soit $\mathrm{L}' = [\ell'_i]$ une matrice ligne vérifiant les deux conditions

$$\sum_{i=0}^{n} \ell'_i = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{L}'\mathrm{A}_n = \mathrm{L}'.$$

On a encore $\mathrm{B}_n{}^t\mathrm{L}' = n{}^t\mathrm{L}'$. Or on a vu que les espaces propres de B_n sont de dimension 1, L' et L sont donc colinéaires. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{L}' = \alpha\mathrm{L}$. C'est-à-dire

$$\forall i \in [\![1; n+1]\!], \qquad \ell'_i = \alpha \ell_i$$

et
$$\alpha = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \ell_i = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha\ell_i = \sum_{i=1}^{n+1} \ell'_i = 1.$$

En conclusion $\mathrm{L} = \mathrm{L}'$, l'unicité est prouvée.

28. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\mathrm{X}_k(\Omega) = [\![0; n]\!]$, les événements $[\mathrm{X}_k = j]$ pour $j \in [\![0, n]\!]$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a pour tout $i \in [\![0; n]\!]$

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_{k+1} = i) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{X}_k = j)\,\mathbf{P}_{[\mathrm{X}_k = j]}(\mathrm{X}_{k+1} = i) \qquad (\bullet)$$

Or entre les instants k et $k+1$, il n'y a qu'une particule qui change de boîtes. Ainsi

$$\mathbf{P}_{[\mathrm{X}_k = j]}(\mathrm{X}_{k+1} = i) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} j \neq i+1 \\ \text{ou} \\ i \neq j+1. \end{cases}$$

De plus pour $i = j+1$

$$\mathbf{P}_{[\mathrm{X}_k = j]}(\mathrm{X}_{k+1} = j+1) = \frac{n-j}{n}$$

car une particule de C_2 (qui en contient $n-j$) va vers C_1. De même avec une particule de C_1 vers C_2

$$\mathbf{P}_{[\mathrm{X}_k = j]}(\mathrm{X}_{k+1} = j-1) = \frac{j}{n}.$$

On constate que pour tout indice $(i, j) \in [\![0, n]\!]$

$$a_{j+1,i+1} = \mathbf{P}_{[\mathrm{X}_k = j]}(\mathrm{X}_{k+1} = i).$$

La formule $(\bullet)$ devient alors

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_{k+1} = i) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{X}_k = j)\, a_{j+1,i+1}$$

(attention au décalage d'indices). Puis

$$\begin{aligned} [\mathrm{L}_k]_{i+1} &= \sum_{j=0}^{n} [\mathrm{L}_k]_{j+1}\, a_{j+1,i+1} \\ &= [\mathrm{L}_k\mathrm{A}_n]_{i+1} \end{aligned}$$

D'où
$$\mathrm{L}_{k+1} = \mathrm{L}_k\mathrm{A}_n.$$

• Par récurrence sur k, on montre que

$$\mathrm{L}_k = \mathrm{L}_0{\mathrm{A}_n}^k.$$

> On évitera l'emploi du vocabulaire sur les suites géométriques. Cela n'est valable que pour les suites de réels alors que pour les matrices, il faut être prudent sur l'ordre des produits.

29. Dans ce cas

$$\mathrm{L}_0 = \frac{1}{2^n}\left[1, \binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n-1}, 1\right]$$

et en reprenant la question 27, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{L}_k = \mathrm{L}_0.$$

Ainsi
$$\mathrm{X}_k \hookrightarrow \mathrm{B}\left(n; \frac{1}{2}\right).$$

On sait alors que

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}_k) = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathrm{X}_k) = \frac{n}{4}.$$

30.a) Prendre

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}).$$

30.b) Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(X_{k+1}\right) &= L_{k+1}U \\ &= \left(L_k A_n\right)U \\ &= L_k\left(A_n U\right) \\ &= \left(\frac{n-2}{n}\right)L_k U + L_k V \\ \mathbf{E}\left(X_{k+1}\right) &= \left(\frac{n-2}{n}\right)\mathbf{E}\left(X_k\right)+1.\end{aligned}$$

En effet, $([X_k = i])_{i\in[[1;n]]}$ est un système complet d'événements et une conséquence est

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X_k = i) = L_k V.$$

30.c) La suite $(\mathbf{E}(X_k))_k$ une suite arithmético-géométrique :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}\left(X_{k+1}\right) = \left(\frac{n-2}{n}\right)\mathbf{E}\left(X_k\right)+1 \quad (L_1).$$

On pose $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ell = \frac{n-2}{n}\ell + 1 \qquad (L_2)$$

soit $$\ell = \frac{n}{2}.$$

En effectuant $L_2 - L_1$, on obtient

$$\ell - \mathbf{E}\left(X_{k+1}\right) = \frac{n-2}{n}\left(\ell - \mathbf{E}\left(X_k\right)\right).$$

La suite de terme général $\ell - \mathbf{E}\left(X_k\right)$ est donc géométrique de raison $(n-2)/n$ et de premier terme $\ell - \mathbf{E}(X_0)$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\ell - \mathbf{E}\left(X_k\right) = \left(\ell - \mathbf{E}(X_0)\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)^k.$$

On conclut

$$\mathbf{E}\left(X_k\right) = \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2} - \mathbf{E}(X_0)\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)^k.$$

31. On a

$$\mathbf{E}\left(X_k\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{n}{2}.$$

Rapidement, les particules sont, en moyenne, réparties équitablement entre les deux boîtes. Ce qui est bien conforme à l'intuition.

32. Notons que

$$\mathbf{E}\left(X_{k+1} \mid X_k = 0\right)\mathbf{E}\left(1 \mid X_k = 0\right) = 1$$

Nécessairement, si C_1 est vide, une particule de C_2 va vers C_1 et à l'instant suivant il y a une particule. De même, si C_1 contient toutes les particules, une des particules va en C_2 et

$$\mathbf{E}\left(X_{k+1} \mid X_k = n\right) = n-1.$$

Pour $i \in [[1; n-1]]$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(X_{k+1} \mid X_k = i\right) &= (i+1)\mathbf{P}_{[X_k=i]}\left(X_{k+1} = i+1\right) \\ &\quad + (i-1)\mathbf{P}_{[X_k=i]}\left(X_{k+1} = i-1\right) \\ &= \frac{n-i}{n}(i+1) + \frac{i}{n}(i-1) \\ &= \frac{1}{n}\left(ni + n - i^2 - i + i^2 - i\right) \\ \mathbf{E}\left(X_{k+1} \mid X_k = i\right) &= \frac{1}{n}\left((n-2)i + n\right).\end{aligned}$$

On constate que la dernière formule convient aussi pour $i = 0$ et $i = n$. Le premier résultat est établit.

• Pour le second, appliquons la formule de l'espérance totale. Notons que les variables étant finies, il n'y a pas de conditions de convergence. Avec le système complet d'événements $([X_k = i])_{i\in[[1;n]]}$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_{k+1}) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X_k = i)\mathbf{E}\left(X_{k+1} \mid X_k = i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X_k = i)\frac{1}{n}\left((n-2)i + n\right) \\ &= \frac{n-2}{n}\sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X_k = i)i + \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X_k = i) \\ \mathbf{E}(X_{k+1}) &= \left(\frac{n-2}{n}\right)\mathbf{E}\left(X_k\right) + 1.\end{aligned}$$

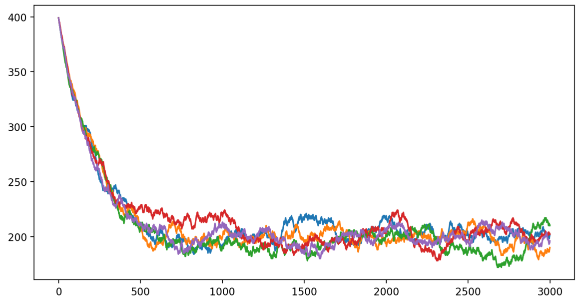
33.

```
def Ehrenfest(n,k):
    M=np.ones(n)
    for i in range(k):
        # On choisit une particule
        indice=rd.randint(0,n)
        # et on la déplace
        M[indice]=-M[indice]
    return M
```

Remarque. Noter qu'il est alors facile de simuler X_k. Il suffit de récupérer le nombre de coefficients positifs de M_k. Par exemple avec la ligne :

```
np.sum(Ehrenfest(n,k)>0)
```

Quelques évolutions de X_k pour $n = 400$, $k = 5000$. On note que les valeurs obtenues restent proches de la valeur moyenne $n/2$.



Le code associé :

```python
def Trajectoire(n,k):
    M=np.ones(n)
    X=np.zeros(k)
    X[0]=n
    for i in range(k):
        # On choisit une particule
        indice=rd.randint(0,n)
        # et on la déplace
        M[indice]=-M[indice]
        X[i]=np.sum(M>0)
    return X
plt.clf()
for i in range(5):
    plt.plot(Trajectoire(400,3000),'-')
plt.show()
```

Problème B

34.a) Par concavité du logarithme, on rappelle que pour tout $t \in]-1;+\infty[$

$$\ln(1+t) \leqslant t.$$

Pour $t \in]0;1[$, on en déduit

$$\ln(1-t) \leqslant -t \quad \text{puis} \quad \ln(1-t)+t \leqslant 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\Big(1+\frac{1}{n+1}\Big) \geqslant 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Enfin $\qquad u_n - v_n = -\ln\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Les suites sont donc bien adjacentes.

34.b) On sait alors que les suites convergent vers une limite commune. Notons γ cette limite.

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$$

s'écrit aussi $v_n = \gamma + o(1)$. D'où

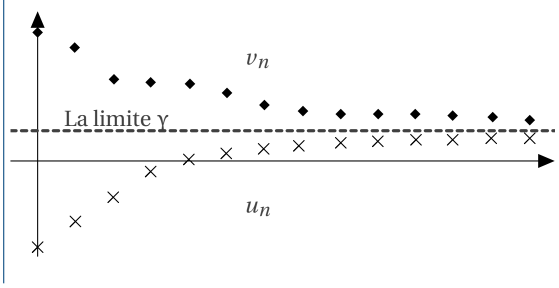
$$\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

À partir de $u_1 \leqslant \gamma < v_1$, on prouve bien que $\gamma \in]0;1[$.

35. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n.$$

Il est toujours utile d'avoir ce schéma en tête lorsqu'on parle des suites adjacentes :



En retranchant par v_n, il vient

$$u_n - v_n \leqslant \gamma - v_n \leqslant 0.$$

puis $\qquad |v_n - u_n| \leqslant v_n - u_n = \ln\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) \leqslant \dfrac{1}{n}.$

- Si on prend $n_0 = 10^5$, v_{n_0} est une approximation de γ à 10^{-5}-près. On en déduit le code qui calcule v_{n_0}

```python
n0=10**5
s=0
for k in range(1,n0+1):
    s+=1/k
print(s-5*np.log(10))

>>>
0.5772206648931046
```

36.a) C'est une conséquence directe du cours sur les séries de Riemann.

36.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n^t} = \exp\big(-t\ln(n)\big)$$

est décroissante. Ainsi, pour x, y deux réels tels que $x \leqslant y$

$$\frac{1}{n^x} \geqslant \frac{1}{n^y}.$$

Par somme, il vient

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^y} = \zeta(y).$$

La fonction ζ est décroissante.

37.a) Soient $x \in [1;+\infty[$, $k \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de la fonction

$$g : t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{1}{t^x},$$

on obtient pour tout $t \in [k;k+1]$

$$g(k) \geqslant g(t) \geqslant g(k+1).$$

En intégrant sur $[k;k+1]$, il vient

$$\underbrace{\int_k^{k+1} g(k)\,\mathrm{d}t}_{=g(k)} \geqslant \int_k^{k+1} g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \underbrace{\int_k^{k+1} g(k+1)\,\mathrm{d}t}_{=g(k+1)}.$$

Ce qui donne :

$$f_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)^x} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{k^x} = f_k(x).$$

En sommant entre 2 et n, l'inégalité de droite donne par la relation de Chasles

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \sum_{k=2}^{n} f_k(x).$$

En sommant maintenant entre 1 et $n-1$, l'inégalité de gauche donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{k+1}(x) \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

et avec le changement d'indice $k \leftarrow k+1$

$$\sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

Ce qui conclut.

37.b) Sachant que $f_1(x) = 1$,

$$1 + \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

Or, on a

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_1^n t^{-x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-x} t^{1-x}\right]_1^n \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

On a aussi

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{1-x} \times 2^{1-x} = \frac{1}{(x-1)2^{x-1}}.$$

Par passage à la limite dans le premier encadrement (tout est convergeant), on a les inégalités demandées.

- On en déduit par encadrement que

$$\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Et sachant que $\dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} +\infty$,
on a par minoration

$$\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

38.a) Si $x = 1$, on a

$$u_n(1) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, il vient avec les notations du préliminaire

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(1) = \mathrm{H}_n - \ln(n+1).$$

Or on a vu la convergence vers γ.

- Soit $x \in]1;+\infty[$.

Rédaction 1
Notons que le premier encadrement de la question 37.a) permet de justifier que $u_n(x)$ est positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que la suite de terme général

$$\mathrm{U_N}(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x)$$

est croissante. Pour établir la convergence de la série $\sum u_n(x)$, il suffit d'établir la convergence de la suite des sommes partielles, ici $\left(\mathrm{U_N}(x)\right)_{\mathrm{N}}$. Et par le théorème de convergence monotone, il suffit d'établir que la suite est majorée. Or, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, le second encadrement de la question 37.a) donne

$$\mathrm{U_N}(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^x} - \int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant 2.$$

On a donc bien convergence.

Rédaction 2
On sait que la série de Riemann $\sum 1/n^x$ est convergente. On a vu aussi que pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_1^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x-1}.$$

La série $\sum \int_n^{n+1} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^x}$ est donc aussi convergente. Par différence, la série $\sum u_n(x)$ est aussi convergente.

38.b) On a

$$\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

Or, on sait d'après le premier encadrement de la question 37.a) que

$$0 \leqslant u_k(x) \leqslant \frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}.$$

Par télescopage, il vient

$$0 \leqslant \mathrm{U}(x) - \mathrm{U}_n(x) \leqslant \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

- Les séries étant toutes convergentes

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \\ &= \zeta(x) - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

Or on montre que

$$u_k(x) \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} \frac{1}{k} - \underbrace{\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}}.$$

Il faut être prudent dans les interversions limite/intégrale

$$\lim_{x\to1^+} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \overset{?}{=} \int_k^{k+1} \lim_{x\to1^+} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

Il convient donc de bien justifier que cette interversion est vraie ici.

Pour cela, on écrit

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \int_k^{k+1} \frac{t^x - t}{t^{x+1}}\mathrm{d}t.$$

Puis

$$\left|\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}-\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\right|\leqslant\int_k^{k+1}(t^x-t)\,\mathrm{d}t$$
$$\leqslant(k+1)^x-k^x\underset{x\to1^+}{\longrightarrow}0.$$

Ensuite, en tant que somme finie

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^+}\mathrm{U}_n(x)&=\lim_{x\to1^+}\sum_{k=1}^n u_k(x)\\&=\sum_{k=1}^n\lim_{x\to1^+}u_k(x)\\&=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln(k+1)+\ln(k)\end{aligned}$$

À n fixé, l'encadrement

$$|\mathrm{U}(x)-\mathrm{U}_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

permet d'obtenir

$$|\lim_{x\to1^+}\mathrm{U}(x)-\lim_{x\to1^+}\mathrm{U}_n(x)|\leqslant\frac{1}{n+1}$$

C'est-à-dire

$$|\lim_{x\to1^+}\left(\zeta(x)-\frac{1}{x-1}\right)-\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln(n+1)|\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

On passe maintenant à la limite lorsque $n\to+\infty$ pour obtenir

$$\lim_{x\to1^+}\zeta(x)-\frac{1}{x-1}-\gamma=0.$$

Ce qui conclut.

39.a) Soit $x\in]1;+\infty[$. On pose $\alpha_x=(1+x)/2>1$. À l'aide des croissances comparées, on montre que

$$\ln(n)f_n(x)=o\left(\frac{1}{n^{\alpha_x}}\right)\quad\text{et}\quad\ln(n)^2f_n(x)=o\left(\frac{1}{n^{\alpha_x}}\right).$$

Or la série de Riemann (à termes positifs) $\sum1/n^{\alpha_x}$ est convergente. Par le critère de négligeabilité, les séries

$$\sum\ln(n)f_n(x)\quad\text{et}\quad\sum\ln(n)^2f_n(x)$$

sont bien convergentes.

39.b) Appliquer la formule de Taylor-Lagrange.

39.c) Il suffit de sommer les inégalités précédentes.
On en déduit l'existence et le calcul de la limite

$$\frac{\zeta(x+h)-\zeta(x)}{h}\underset{h\to0}{\longrightarrow}\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)f_n(x).$$

On en déduit que ζ est dérivable pour tout $x\in]1;+\infty[$ avec

$$\zeta'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)f_n(x).$$

40.a)

```
def ApproxZeta1(N,s):
    M=np.zeros(N)
    M[0]=1
    for i in range(1,N):
        M[i]=M[i-1]+(i+1)**(-s)
    return M
```

40.b)

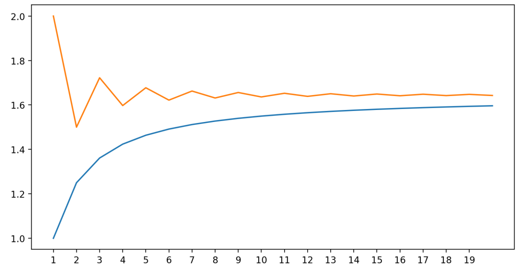
```
def ApproxZeta2(N,s):
    M=np.zeros(N)
    M[0]=1
    signe=+1
    for i in range(1,N):
        signe=-signe
        M[i]=M[i-1]+signe*(i+1)**(-s)
    return M/(1-2**(1-s))
```

40.c) Le second programme est le plus efficace car c'est celui où l'erreur

$$|\zeta(2)-s_n|,\quad|\zeta(2)-t_n|$$

tend le plus rapidement vers 0 (ce qui est équivalent à : le logarithme de l'erreur tend le plus rapidement vers $-\infty$). C'est donc le second (en gris).

Ci-dessous, les premières valeurs de s_n (en bleu) et t_n (en orange).



Bonus. La réponse est Tatiana et Paul ! En effet, c'est en tant qu'époux qu'ils ont travaillé sur ce modèle. Les voici :

Ils sont choux, non ?