

Exercice

Python et suite de Fibonacci

On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_k)_k$ est la suite de nombres réels définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Les premiers termes de la suite sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

1. Écrire une fonction d'entête `def fibo(n)` : qui renvoie les $n + 1$ premiers termes de la suite $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
2. Écrire une nouvelle fonction qui prend un réel x positif et renvoie le nombre de Fibonacci le plus proche tout en lui étant inférieur.
3. Déterminer 6 nombres de Fibonacci entiers $F_{n_1}, F_{n_2}, \dots, F_{n_6}$ tels que

$$F_{n_1} < F_{n_2} < \dots < F_{n_6} \quad \text{et} \quad 2025 = F_{n_1} + F_{n_2} + \dots + F_{n_6}.$$

- **Matrice de Fibonacci**

On définit, pour $n \geq 2$, la matrice $A_n = [F_{i+j}]_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a) Écrire une fonction Python d'entête `Afibo(n)` renvoyant la matrice A_n .
On fera attention au nombre d'opérations effectuées.
- b) Que peut-on conjecturer à l'aide du code suivant? Prouver la conjecture.

Editeur

```
import numpy.linalg as al

for k in range(2,10):
    print(al.matrix_rank(Afibo(k)))
```

Console

```
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
```

Problème

Révisions analyse et application à la convergence de v.a

On note :

- E_0 est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- E_1 est l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

À tout élément f de E_0 , on associe l'application F_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F_n(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F_n(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} f(t) dt.$$

Partie I

- **Lemme**

4. Pour toutes fonctions d'une variable réelle g et h continues sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, h gardant un signe constant sur $[a, b]$, montrer qu'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que

$$\int_a^b g(x)h(x)dx = g(c) \int_a^b h(x)dx.$$

• **Exemples**

5. Que peut-on dire de la parité de F_n si la fonction f est paire ? si f est impaire ?
 6. Expliciter F_n lorsque f est une fonction polynomiale $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{p=0}^m a_p x^p$.

• **Quelques propriétés de F_n**

7. Si f est bornée sur $[-A, A]$ par le nombre M , montrer alors que F_n a la même propriété.
 8. Montrer que F_n appartient à E_0 .
 9. On suppose dans cette question seulement que f est croissante sur $\mathbb{R}$ de limite finie ℓ en $+\infty$.
 a) Justifier que F_n est aussi croissante sur $\mathbb{R}$.
On pourra effectuer le changement de variable $u = xt$ dans la définition de $F_n(x)$.
 b) En déduire la convergence de $F_n(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
 c) * On pourra admettre cette question. Justifier que cette limite vaut ℓ .
Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_^+$, on pourra partir de*

$$|\ell - F_n(x)| \leq \ell \int_0^\varepsilon n u^{n-1} du + \int_\varepsilon^1 n u^{n-1} |\ell - f(ux)| du.$$

10. Justifier que F_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec pour tout réel $x \neq 0$

$$F'_n(x) = \frac{n}{x} (f(x) - F_n(x)).$$

Partie II

On suppose dans la suite que la fonction f appartient à E_1 . On admet que cette condition suffit à montrer que F_n appartient à E_1 .

11. À l'aide de la question 9, exprimer $F'_n(0)$ en fonction de n et $f'(0)$.
 12. On définit alors l'application T_n par

$$T_n : \begin{cases} E_1 & \rightarrow E_1 \\ f & \mapsto T_n(f) = F_n. \end{cases}$$

Justifier que T_n est un endomorphisme de E_1 .

13. Est-ce que T_n est injectif ? surjectif ?
On pourra étudier la dérivabilité de F'_n .
 14. On suppose désormais que f est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité, notée φ , appartient à E_0 .

- a) On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^*$ par la relation $F'_n(x) = \frac{n}{x^{n+1}} h(x)$ pour $x \neq 0$.

Étudier les variations et le signe de $h(x)$.

- b) Montrer que F_n satisfait aux propriétés suivantes :

- F_n est croissante ;
- $F_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, F_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$;
- F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ces propriétés permettent d'affirmer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X_n .
 On note $\varphi_n = F'_n$, la densité de probabilité continue de X_n .

15. Soit $A \in \mathbb{R}^*$, montrer que pour tout $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\int_0^A t^p \varphi_n(t) dt = \frac{n}{n-p} A^p (F_n(A) - F_p(A)) = \frac{n}{n-p} \left(\int_0^A t^p \varphi(t) dt - A^{p-n} \int_0^A t^n \varphi(t) dt \right)$$

16. a) On suppose de plus que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la variable X admet un moment d'ordre p , noté $M_p(X)$.
 Justifier l'existence et la valeur du moment d'ordre p de X_n , noté $M_p(X_n)$, pour tout $p < n$.
 b) Montrer que, si p reste fixe, le moment $M_p(X_n)$ a pour limite $M_p(X)$ lorsque n tend vers plus l'infini.
 17. On suppose dans cette question que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
 a) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - F_n(x) = \int_0^1 n u^{n-1} (f(x) - f(xu)) du.$$

- b) En déduire que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X .

Exercice d'Amédée - Facultatif
Python et bijection avec des entiers

18. On considère la suite d'éléments de $\mathbb{Z}$

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -5, \dots$$

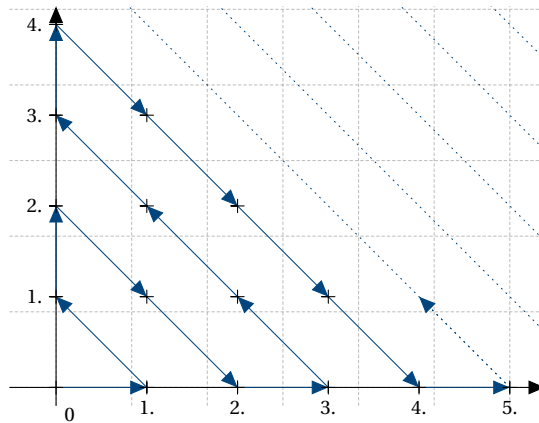
On définit l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui à un entier naturel p renvoie le $(p+1)$ -ième élément de la suite. Ainsi $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = -2$, ... On admet que f est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

a) Écrire un programme qui prend en argument $p \in \mathbb{N}$ et renvoie $f(p)$.

b) Faire de même avec $n \in \mathbb{Z}$ et renvoie $f^{-1}(n)$.

19. On définit maintenant la suite d'éléments de $\mathbb{N}^2$ par

$$(0,0), (1,0), (0,1), (2,0), (1,1), (0,2), (3,0), (2,1), \dots$$



On définit ainsi une application $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ qui à un entier naturel p renvoie le $(p+1)$ -ième élément de la suite. On admet que g est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$.

a) Écrire une fonction qui prend en argument un couple (n, p) d'entiers naturels et renvoie le couple suivant dans la suite. En déduire une fonction python qui prend en argument $p \in \mathbb{N}$ et renvoie $g(p)$.

b) Adapter le programme précédent pour avoir une nouvelle fonction qui renvoie l'élément précédent dans la suite si il en admet un et $(0,0)$ sinon. En déduire un programme qui prend un couple (n, p) et renvoie $g^{-1}(n, p)$.

20. Comment construire une bijection h de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}^2$? Donner un programme python qui à $p \in \mathbb{N}$ renvoie $h(p)$.

– FIN –