DM 5

THÈMES : PYTHON, RÉVISION ANALYSE ET CONVERGENCE DE VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice
Python et suite de Fibonacci

On rappelle que la suite de Fibonacci $(\mathrm{F}_k)_k$ est la suite de nombres réels définie par

$$\mathrm{F}_0 = 0, \quad \mathrm{F}_1 = 1 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n.$$

Les premiers termes de la suite sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

1. Écrire une fonction d'entête `def fibo(n):` qui renvoie les $n+1$ premiers termes de la suite $(\mathrm{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2. Écrire une nouvelle fonction qui prend un réel x positif et renvoie le nombre de Fibonacci le plus proche tout en lui étant inférieur.

3. Déterminer 6 nombres de Fibonacci entiers $\mathrm{F}_{n_1}, \mathrm{F}_{n_2}, \ldots \mathrm{F}_{n_6}$ tels que

$$\mathrm{F}_{n_1} < \mathrm{F}_{n_2} < \ldots < \mathrm{F}_{n_6} \quad \text{et} \quad 2025 = \mathrm{F}_{n_1} + \mathrm{F}_{n_2} + \ldots + \mathrm{F}_{n_6}.$$

- **Matrice de Fibonacci**

4. On définit, pour $n \geqslant 2$, la matrice $\mathrm{A}_n = \left[\mathrm{F}_{i+j}\right]_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Écrire une fonction Python d'entête `Afibo(n)` renvoyant la matrice A_n.
On fera attention au nombre d'opérations effectuées.

b) Que peut-on conjecturer à l'aide du code suivant ? Prouver la conjecture.

Editeur

```python
import numpy.linalg as al

for k in range(2,10):
    print(al.matrix_rank(Afibo(k)))
```

Console

```
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
```

Problème
Révisions analyse et application à la convergence de v.a

On note :

- E_0 est l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- E_1 est l'espace vectoriel des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

À tout élément f de E_0, on associe l'application F_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathrm{F}_n(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{F}_n(x) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1} f(t)\mathrm{d}t.$$

Partie I

- **Lemme**

5. Pour toutes fonctions d'une variable réelle g et h continues sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, h gardant un signe constant sur $[a, b]$, montrer qu'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que

$$\int_a^b g(x)h(x)\mathrm{d}x = g(c)\int_a^b h(x)\mathrm{d}x.$$

- **Exemples**

6. Que peut-on dire de la parité de F_n si la fonction f est paire ? si f est impaire ?
7. Expliciter F_n lorsque f est une fonction polynomiale $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{p=0}^{m} a_p x^p$.

- **Quelques propriétés de** F_n

8. Si f est bornée sur $[-A, A]$ par le nombre M, montrer alors que F_n a la même propriété.
9. Montrer que F_n appartient à E_0. *Pour la continuité en 0, on pourra appliquer le lemme (question 5).*
10. On suppose dans cette question seulement que f est croissante sur $\mathbb{R}$ de limite finie ℓ en $+\infty$.
    a) Justifier que F_n est aussi croissante sur $\mathbb{R}$.
    On pourra effectuer le changement de variable $u = t/x$ dans la définition de $F_n(x)$.
    b) En déduire la convergence de $F_n(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
    c) * *On pourra admettre cette question.* Justifier que cette limite vaut ℓ.

11. Justifier que F_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec pour tout réel $x \neq 0$

$$F_n'(x) = \frac{n}{x}\left(f(x) - F_n(x)\right).$$

Partie II

On suppose dans la suite que la fonction f appartient à E_1. On admet que cette condition suffit à montrer que F_n appartient à E_1.

12. À l'aide de la question 11, exprimer $F_n'(0)$ en fonction de n et $f'(0)$.
13. On définit alors l'application T_n par

$$T_n : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 & \to & E_1 \\ f & \mapsto & T_n(f) = F_n. \end{array} \right.$$

    Justifier que T_n est un endomorphisme de E_1.
14. Est-ce que T_n est injectif ? surjectif ?
    On pourra étudier la dérivabilité de F_n'.
15. On suppose désormais que f est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité, notée φ, appartient à E_0.
    a) On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^*$ par la relation $F_n'(x) = \dfrac{n}{x^{n+1}} h(x)$ pour $x \neq 0$.
    Étudier les variations et le signe de $h(x)$.
    b) Montrer que F_n satisfait aux propriétés suivantes :
    - F_n est croissante ;
    - $F_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $F_n(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$;
    - F_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

    Ces propriétés permettent d'affirmer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X_n. On note $\varphi_n = F_n'$, la densité de probabilité continue de X_n.
16. Soit $A \in \mathbb{R}^*$, montrer que pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\int_0^A t^p \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n-p} A^p \left(F_n(A) - F_p(A)\right) = \frac{n}{n-p}\left(\int_0^A t^p \varphi(t)\,\mathrm{d}t - A^{p-n}\int_0^A t^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

17. **a)** On suppose de plus que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la variable X admet un moment d'ordre p, noté $M_p(X)$.
    Justifier l'existence et la valeur du moment d'ordre p de X_n, noté $M_p(X_n)$, pour tout $p < n$.
    b) Montrer que, si p reste fixe, le moment $M_p(X_n)$ a pour limite $M_p(X)$ lorsque n tend vers plus l'infini.
18. On suppose dans cette question que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.
    a) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - F_n(x) = \int_0^1 n u^{n-1}\left(f(x) - f(xu)\right)\mathrm{d}u.$$

    b) En déduire que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X.

Exercice d'Amédée - Facultatif

Python et bijection avec des entiers

19. On considère la suite d'éléments de $\mathbb{Z}$

$$0, \quad -1, \quad 1, \quad -2, \quad 2 \quad -3, \quad 3, \quad -4, \quad 4, \quad -5, \ldots$$

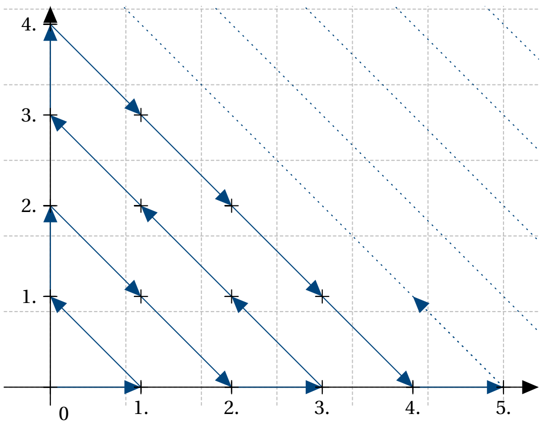
On définit l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ qui à un entier naturel p renvoie le $(p+1)$-ième élément de la suite. Ainsi $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(2) = -1, \ldots$ On admet que f est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

a) Écrire un programme qui prend en argument $p \in \mathbb{N}$ et renvoie $f(p)$.

b) Faire de même avec $n \in \mathbb{Z}$ et renvoie $f^{-1}(n)$.

20. On définit maintenant la suite d'éléments de $\mathbb{N}^2$ par

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1), \quad (2,0), \quad (1,1) \quad (0,2), \quad (3,0), \quad (2,1), \ldots$$



On définit ainsi une application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ qui à un entier naturel p renvoie le $(p+1)$-ième élément de la suite. On admet que g est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$.

a) Écrire une fonction qui prend en argument un couple (n, p) d'entiers naturels et renvoie le couple suivant dans la suite. En déduire une fonction python qui prend en argument $p \in \mathbb{N}$ et renvoie $g(p)$.

b) Adapter le programme précédent pour avoir une nouvelle fonction qui renvoie l'élément précédent dans la suite si il en admet un et $(0,0)$ sinon. En déduire un programme qui prend un couple (n, p) et renvoie $g^{-1}(n, p)$.

21. Comment construire une bijection h de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}^2$? Donner un programme python qui à $p \in \mathbb{N}$ renvoie $h(p)$.

– FIN –

DM 5 - éléments de solution

Exercice 1

1.

```
def fibo(n):
    F=np.zeros(n+1)
    F[1]=1
    for i in range(n-1):
        F[i+2]=F[i+1]+F[i]
    return F
```

2.

```
def PlusProche(n):
    Fold=0
    Fnew=1
    while Fnew<=n:
        Finter=Fnew
        Fnew=Fold+Fnew
        Fold=Finter
    return Fold
```

Quelques tests :

```
>>> fibo(7)
array([ 0.,  1.,  1.,  2.,  3.,  5.,  8.,
   13.])
>>> PlusProche(9)
8
```

3. Pour obtenir une telle décomposition, il suffit d'itérer le programme précédent en partant de 2025.

```
n=2025
for i in range(6):
    f=PlusProche(n)
    print(f)
    n=n-f

>>>
1597
377
34
13
3
1
```

Et la vérification :

```
 >>>fibo(17)
array([   0.,    1.,    1.,    2.,    3.,    5.,
        8.,   13.,   21.,   34.,   55.,
         89.,  144.,  233.,  377.,  610.,  987.,
         1597])

>>> 1+3+13+34+377+1597
2025
```

4.a) Pour remplir la matrice A_n nous avons besoin des termes de la suite jusqu'à F_{2n}. On les calcule dans un premier temps puis on remplit la matrice :

```
def Afibo(n):
    F=np.zeros(2*n+1)
    F[0],F[1]=[0,1]
    for k in range(2,2*n+1):
      F[k]=F[k-1]+F[k-2]
    A=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
      for j in range(n):
        A[i,j]=F[i+j]
    return A
```

Voici ce que le renvoie `Afibo(5)` :

```
[[ 0.   1.   1.   2.   3.]
 [ 1.   1.   2.   3.   5.]
 [ 1.   2.   3.   5.   8.]
 [ 2.   3.   5.   8.  13.]
 [ 3.   5.   8.  13.  21.]]
```

4.b) Justifions que la matrice A_n est de rang 2.
Notons C_i la i-ème colonne de A_n. Par définition de A_n et de $(F_n)_n$, on a la relation entre les colonnes

$$\forall\, i \in [\![1, n-2]\!], \qquad C_{i+2} = C_{i+1} + C_i.$$

On en déduit par récurrence que

$$\text{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \text{Vect}(C_1, C_2).$$

De plus C_1 et C_2 sont non colinéaires donc

$$\text{rg}(A_n) = \dim\text{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_n) = 2.$$

Sujet A
Adapté de HEC 1987

5. Si $\int_a^b h(x)dx = 0$ alors h est la fonction nulle (car h est continue et de signe constant). Dans ce cas, tout réel $c \in [a;b]$ convient.

$\rightharpoonup$ Supposons donc $\displaystyle\int_a^b h(x)\,dx \neq 0$. Quitte à considérer $-h$, on peut supposer la fonction h à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On considère m, M le minimum et le maximum de la fonction g continue sur le segment $[a;b]$:

$$\forall x \in [a;b], \quad m \leqslant g(x) \leqslant M$$

puis $\qquad mh(x) \leqslant g(x)h(x) \leqslant Mh(x)$

et par intégration $(a < b)$

$$m\int_a^b h(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)h(x)\,dx \leqslant M\int_a^b h(x)\,dx$$

c'est-à-dire $$\frac{\int_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x} \in [m;\mathrm{M}].$$

On conclut sur l'existence de $c \in [a;b]$ à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

6. Supposons la fonction f paire.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$, à l'aide du changement de variable affine $u = -t$

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_n(-x) &= (-1)^n \frac{n}{x^n}\int_0^{-x} t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{x^n}\int_0^{-x} (-t)^{n-1} f(t)(-\mathrm{d}t) \\
&= \frac{n}{x^n}\int_0^{x} u^{n-1} f(-u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{n}{x^n}\int_0^{x} u^{n-1} f(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(parité de } f)\\
\mathrm{F}_n(-x) &= \mathrm{F}_n(x).
\end{aligned}$$

Cette relation est encore vraie pour $x = 0$. Finalement, F_n est une fonction paire.

- Si f est impaire, on montre de même que pour $x \in \mathbb{R}^*$
$$\mathrm{F}_n(-x) = -\mathrm{F}_n(x) \qquad (\bullet)$$

De plus
$$\mathrm{F}_n(0) = f(0) = f(-0) = -f(0) = 0$$

La relation $(\bullet)$ est donc valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction F_n est impaire.

> Notons pour les calculs qui vont suivre que
> $$\frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = 1.$$

7. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_n(x) &= \sum_{p=0}^{m} a_p \cdot \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\cdot t^p\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{p=0}^{m} \frac{n a_p}{x^n}\left[\frac{t^{n+p}}{n+p}\right]_0^x \\
\mathrm{F}_n(x) &= \sum_{p=0}^{m} \frac{n}{n+p} a_p x^p.
\end{aligned}$$

Relation qui s'étend à $x = 0$.

8. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour $x > 0$, les bornes sont dans le bon sens et

$$\begin{aligned}
|\mathrm{F}_n(x)| &\leqslant \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}|f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{n\mathrm{M}}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}.
\end{aligned}$$

et $|\mathrm{F}_n(0)| = |f(0)| \leqslant \mathrm{M}$. De même, la relation est vraie pour $x \leqslant 0$ Finalement, F_n est bornée par M.

9. La fonction $x \mapsto \int_0^x t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de $t \mapsto t^{n-1} f(t)$ qui s'annule en 0 . En particulier, cette fonction est continue (et même dérivable) sur $\mathbb{R}$. Par quotient F_n est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- *Rédaction 1 (avec le lemme).*
Justifions la continuité en 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. D'après le lemme, il existe c_x compris entre 0 et x tel que

$$\mathrm{F}_n(x) = \frac{n}{x^n} \times f(c_x)\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = f(c_x).$$

Or par encadrement ($0 \leqslant |c_x| \leqslant |x|$)

$$c_x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

et par continuité de f en 0

$$f(c_x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0) = \mathrm{F}_n(0).$$

Ainsi $$\mathrm{F}_n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \mathrm{F}_n(0).$$

Ceci prouve la continuité de F_n en 0.

> On propose dans la suite une seconde rédaction en revenant à la définition de la continuité. Ce type de démonstration et de méthode n'est pas dans l'esprit du programme.

- *Rédaction 2.*
Justifions la continuité en 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Supposons $x > 0$, le cas négatif étant similaire.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_n(0) &= \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(0)\frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\big(f(t) - f(0)\big)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition de la continuité de f en 0, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall t \in [-\alpha;\alpha], \qquad |f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon.$$

On en déduit que

$$|\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_n(0)| \leqslant \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\cdot\varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

On a une relation similaire pour $x < 0$. On obtient alors pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$|\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_n(0)| \leqslant \varepsilon.$$

C'est la définition de la continuité de F_n en 0.

- Finalement, $\mathrm{F}_n \in \mathrm{E}_0$.

10.a) Notons que pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, par croissance de f

$$\forall t \in [0;x], \qquad f(t) \geqslant f(0)$$

et par intégration

$$\frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1} f(0)\,\mathrm{d}t.$$

D'où $\qquad \mathrm{F}_n(x) \geqslant f(0) = \mathrm{F}_n(0).$

De même pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, on montre que

$$\mathrm{F}_n(x) \leqslant \mathrm{F}_n(0).$$

- Soient $x, y \in \mathbb{R}$. tels que $x \leqslant y$

⇀ Si $x \leqslant 0 \leqslant y$ alors

$$\mathrm{F}_n(x) \leqslant \mathrm{F}_n(0) \leqslant \mathrm{F}_n(y).$$

⇀ Si $0 \leqslant x \leqslant y$ en effectuant les changements de variables affines $v = t/y$, $u = t/x$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}_n(y) - \mathrm{F}_n(x)\\
&= \frac{n}{y^n}\int_0^y t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 n v^{n-1} f(yv)\,\mathrm{d}v - \int_0^1 u^{n-1} f(xu)\,\mathrm{d}u\\
&= n\int_0^1 u^{n-1}\underbrace{\big(f(yu) - f(xu)\big)}_{\geqslant 0} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

D'où $\qquad \mathrm{F}_n(y) \geqslant \mathrm{F}_n(x).$

⇀ Si $x \leqslant y \leqslant 0$, on démontre de même que

$$\mathrm{F}_n(y) \geqslant \mathrm{F}_n(x).$$

En conclusion, F_n est croissante.

10.b) Comme f est croissante avec une limite finie en $+\infty$, f est majorée. On montre (comme à la question 8) que F est majorée. Or on vient de vérifier que F_n est croissante. D'après le théorème de convergence monotone, F_n admet une limite finie en $+\infty$.

La démonstration de la question 10.c) n'est pas dans l'esprit du programme.

10.c) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}
\ell - \mathrm{F}_n(x) &= \ell\underbrace{\frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t}_{=1} - \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{n}{n}\int_0^x t^{n-1}\big(\ell - f(t)\big)\,\mathrm{d}t \qquad u = t/x\\
&= n\int_0^\ell u^{n-1}\big(\ell - f(ux)\big)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire et la relation de Chasles pour $\alpha \in]0;1[$

$$\begin{aligned}
&|\ell - \mathrm{F}_n(x)|\\
&\leqslant n\int_0^\alpha u^{n-1}|\ell - f(ux)|\,\mathrm{d}u + n\int_\alpha^\ell u^{n-1}|\ell - f(ux)|\,\mathrm{d}u\\
&\leqslant n\big(\ell - f(0)\big)\int_0^\alpha u^{n-1}\,\mathrm{d}u + n\int_\alpha^\ell u^{n-1}|\ell - f(ux)|\,\mathrm{d}u\\
&\leqslant n\big(\ell - f(0)\big)\alpha^n + \big(\ell - f(\alpha x)\big).
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. Comme $\alpha \in]0;1[$, on a

$$\big(\ell - f(0)\big)\alpha^n \xrightarrow[\alpha \to 0^+]{} 0.$$

Il existe donc $\alpha \in]0;1[$ tel que

$$0 \leqslant \big(\ell - f(0)\big)\alpha^n \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Fixons un tel α. Par définition de la limite de f en $+\infty$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall t \geqslant \mathrm{A}, \qquad \big|\ell - f(t)\big| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Pour $x \geqslant \tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A}/\alpha$, on obtient

$$|\ell - \mathrm{F}_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

11. Pour tout réel $x \neq 0$,

$$x^n \mathrm{F}_n(x) = \int_0^x t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Sachant que la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe le membre de droite dans l'égalité précédente est la primitive de $t \mapsto t^{n-1} f(t)$ qui s'annule en 0, on en déduit la dérivabilité de F_n sur $\mathbb{R}^*$ et en dérivant

$$n x^{n-1}\mathrm{F}_n(x) + x^n \mathrm{F}'_n(x) = x^{n-1} f(x).$$

D'où le résultat.

12. On a pour $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_n(0)}{x - 0} &= \frac{\mathrm{F}_n(x) - f(0)}{x}\\
&= \frac{\mathrm{F}_n(x) - f(x)}{x} + \frac{f(x) - f(0)}{x}\\
\frac{\mathrm{F}_n(x) - \mathrm{F}_n(0)}{x - 0} &= -\frac{\mathrm{F}'_n(x)}{n} + \frac{f(x) - f(0)}{x} \qquad (\bullet\bullet)
\end{aligned}$$

à l'aide de la question 11. Comme on a $\mathrm{F}_n \in \mathrm{E}_1$, F'_n est continue en 0 et

$$\mathrm{F}'_n(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \mathrm{F}'_n(0).$$

Et $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0).$$

Par passage à la limite dans (••)

$$F_n'(0) = -\frac{F_n'(0)}{n} + f'(0).$$

On en déduit que

$$F_n'(0) = \frac{n}{n+1} f'(0).$$

13. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g \in E_1$.

$$\begin{aligned} T_n(\lambda f + \mu g)(0) &= (\lambda f + \mu g)(0) \\ &= \lambda f(0) + \mu g(0) \\ T_n(\lambda f + \mu g)(0) &= \lambda T_n f(0) + \mu T_n(g)(0). \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} &T_n(\lambda f + \mu g)(x) \\ &= \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda T_n(f)(x) + \mu T_n(g)(x). \end{aligned}$$

La relation étant vérifiée pour tout réel x :

$$T_n(\lambda f + \mu g) = \lambda T_n(f) + \mu T_n(g).$$

L'application T_n est linéaire.
Il est admis que pour tout $f \in E_1, T_n(f) \in E_1$.
Finalement, T_n est un endomorphisme.

14. Soit $f \in \operatorname{Ker} T_n$. On a donc

$$0 = T_n(f)(0) = f(0) \qquad (\star)$$

et pour $x \in \mathbb{R}^*$

$$0 = T_n(f)(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ (valable aussi pour $x = 0$)

$$\int_0^x t^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Or la fonction

$$\psi : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x t^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de $t \in \mathbb{R} \mapsto t^{n-1} f(t)$ qui s'annule en 0.
Cette fonction ψ étant constante, sa dérivée est nulle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad 0 = \psi'(t) = t^{n-1} f(t).$$

D'où $\qquad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(t) = 0.$

En utilisant la continuité de f ou directement $(\star)$, l'égalité s'étend à $x = 0$ et la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$.
L'application T_n est injective car son noyau est trivial.

En dimension infinie, il n'y a pas de lien direct entre injectivité et surjectivité.

- Soient $f \in E_1$ et $g \in E_1$ telles que $T_n(g) = f$. En reprenant la question 11, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{n}{x}\big(g(x) - f(x)\big).$$

Comme $f, g \in E_1$, on a f' de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par quotient et f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$. Dès lors si f est de classe $\mathscr{C}^1$ mais pas $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$, f ne peut avoir d'antécédent par T_n.
L'application T_n n'est pas surjective.

15.a) EN reprenant la question 11, on a donc pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{n} x^{n+1} {F_n}'(x) \\ &= \frac{1}{n} x^{n+1} \left(\frac{n}{x}\big(f(x) - F_n(x)\big)\right) \\ h(x) &= x^n f(x) - x^n F_n(x). \end{aligned}$$

Précisons que l'on peut prolonger par continuité h en posant $h(0) = 0$.
Par produit et différence, h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} h'(x) &= n x^{n-1}\big(f(x) - F_n(x)\big) + x^n\big(f'(x) - F_n'(x)\big) \\ &= x^{n-1}\Big(n\big(f(x) - F_n(x)\big) + x\big(f(x) - F_n'(x)\big)\Big) \\ &= x^{n-1}\big(xF_n'(x) + xf(x) - xF_n'(x)\big) \\ h'(x) &= x^n f(x) \qquad \text{(avec } f \geqslant 0\text{)}. \end{aligned}$$

→ Si n est pair, h' est toujours positif et h est croissante sur les intervalles $\mathbb{R}_*^-$ et $\mathbb{R}_*^+$.
Comme h est continue avec $h(0) = 0$, on en déduit que h est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$
→ Si n est impair, h' est positif sur $\mathbb{R}^+$, négatif sur $\mathbb{R}^-$. Comme $h(0) = 0$, h a un minimum 0 sur $\mathbb{R}$. La fonction h est donc positive sur $\mathbb{R}$.

15.b) On vérifie alors que F_n' est positive indépendamment de la parité de l'entier n.
La fonction F_n est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
En reprenant la 10.c, on a l'existence de la limite et l'égalité

$$\lim_{+\infty} F_n = \lim_{+\infty} f = 1.$$

En reprenant la démonstration du 10.c (où en l'appliquant à $t \mapsto -f(-t)$), on a aussi

$$\lim_{-\infty} F_n = \lim_{-\infty} f = 0.$$

Enfin, il a été admis que $F_n \in E_1$.

16. À l'aide de la question 11 : pour tout $t \in \mathbb{R}^*$

$$\varphi_n(t) = F_n'(t) = \frac{n}{t}\big(f(t) - F_n(t)\big).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\int_0^A t^p \varphi_n(t)\,dt \\
&= \int_0^A t^p \left(\frac{n}{t}\big(f(t) - F_n(t)\big)\right) dt \\
&= n\int_0^A t^{p-1} f(t)\,dt - n\int_0^A t^{p-1} F_n(t)\,dt \quad (\star\star)
\end{aligned}$$

Or $$\int_0^A t^{p-1} f(t)\,dt = \frac{A^p}{p} F_p(A).$$

et par une intégration par parties (les fonctions considérées sont $\mathscr{C}^1$)

$$\begin{aligned}
\int_0^A t^{p-1} F_n(t)\,dt &= \left[\frac{t^p}{p} F_n(t)\right]_0^A - \int_0^A \frac{t^p}{p} F_n'(t)\,dt \\
&= \frac{A^p}{p} F_n(A) - \frac{1}{p}\int_0^A t^p \varphi_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

En revenant à $(\star\star)$

$$\int_0^A t^p \varphi_n(t)\,dt = \frac{n}{p} A^p F_p(A) - \frac{n}{p}\left(A^p F_n(A) - \int_0^A t^p \varphi_n(t)\,dt\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{n}{p} A^p \Big(F_n(A) - F_p(A)\Big) &= \left(\frac{n}{p} - 1\right)\int_0^A t^p \varphi_n(t)\,dt \\
&= \frac{n-p}{p}\int_0^A t^p \varphi_n(t)\,dt.
\end{aligned}$$

La première égalité s'en déduit en divisant par $(n-p)/p$.

- La seconde relation s'obtient par intégration par parties en utilisant $\varphi = f'$.

17.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $p < n$

$$\int_0^A t^p \varphi(t)\,dt$$

admet une limite finie lorsque $A \to +\infty$ et $A \to -\infty$ car X admet un moment d'ordre p. De même

$$\int_0^A t^n \varphi(t)\,dt$$

admet une limite finie lorsque que $A \to \pm\infty$. Comme $p - n < 0$, on a même

$$A^{p-n}\int_0^A t^n \varphi(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En reprenant la question précédente, on en déduit les convergences et les égalités :

$$\int_0^{+\infty} t^p \varphi_n(t)\,dt = \frac{n}{n-p}\int_0^{+\infty} t^p \varphi(t)\,dt \quad (A \to +\infty)$$

et

$$\int_{-\infty}^0 t^p \varphi_n(t)\,dt = \frac{n}{n-p}\int_{-\infty}^0 t^p \varphi(t)\,dt \quad (A \to -\infty).$$

Comme φ_n est positive, le signe de $t \mapsto t^p \varphi_n(t)$ est positif si p est pair, et négatif (resp. positif) sur $\mathbb{R}^-$ (resp. sur $\mathbb{R}^+$) si p est impair. On en déduit la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} t^p \varphi_n(t)\,dt$, c'est-à-dire l'existence du moment $M_p(X_n)$ avec

$$M_p(X_n) = \frac{n}{n-p}\int_{-\infty}^{+\infty} t^p \varphi(t)\,dt = \frac{n}{n-p} M_p(X) \quad (\square)$$

18.a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
f(x) - F_n(x) &= f(x)\overbrace{\frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\,dt}^{=1} - \frac{n}{x^n}\int_x^x t^{n-1} f(t)\,dt \\
&= \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}\big(f(x) - f(t)\big)\,dt.
\end{aligned}$$

Avec le changement de variable $u = t/x$, il vient

$$f(x) - F_n(x) = \int_0^1 n u^{n-1}\big(f(x) - f(xu)\big)\,du.$$

Notons que cette relation est encore vraie lorsque $x = 0$.

18.b) Soit $K \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left|f'(x)\right| \leqslant K.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous $u, x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(xu)| \leqslant K|x - xu| = K|x| \cdot |1-u|.$$

On en déduit par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - F_n(x)\right| &\leqslant \int_0^1 n u^{n-1} K|x| \cdot |1-u|\,du \\
&\leqslant nK|x|\int_0^1 u^{n-1}(1-u)\,du \\
&\leqslant nK|x|\left[\frac{u^n}{n} - \frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
\left|f(x) - F_n(x)\right| &\leqslant K|x|\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

À x fixé et par encadrement

$$f(x) - F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ou encore $$F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

Cette limite est vérifiée pour tout réel x (point de continuité de f), c'est la définition de la convergence en loi de $(X_n)_n$ vers X.

Exercice 2

18.a)

```
# pour tester si un entier est pair, on
    peut tester si 2*np.floor(x/2)=x. Dans
     la suite, on regarde si le reste dans
     la division euclidienne par 2 est nul
    , c'est-à-dire, on teste si x%2==0.

def bijectionZ(p):
    if p%2==0:
        return p//2
    else:
        return -(p+1)//2

for p in range(10):
    print(bijectionZ(p))

>>> 0
-1
1
-2
2
-3
3
-4
4
-5
```

18.b)

```
def bij_reciproque(n):
    if n<0:
        return 2*n+1
    else :
        return 2*n

for n in range(10):
    print(bijectionZ(bij_reciproque(n)))

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
```

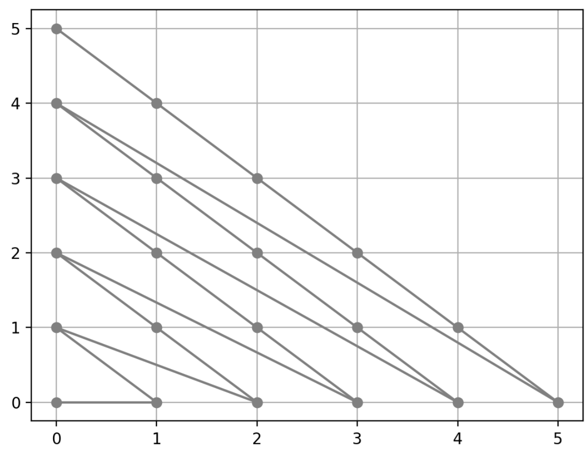
19.a)

```
def couple_suivant(L):
    n=L[0]
    p=L[1]
    if n==0:
        return np.array([p+1,0])
    return np.array([n-1,p+1])
```

```
# Test
L=np.array([0,0])
print(L)
for i in range(7):
    L=couple_suivant(L)
    print(L)

>>> [0 0] [1 0] [0 1] [2 0] [1 1] [0 2] [3
     0] [2 1]
```

On peut refaire le dessin de l'exercice :

```
plt.clf()
L=np.array([0,0])
M=couple_suivant(L)
for i in range(20):
    plt.plot([L[0],M[0]],[L[1],M[1]],
        marker='o', color='grey')
    inter=M
    L=M
    M=couple_suivant(L)
plt.grid()
plt.show()
```




```
def g(n):
    L=np.array([0,0])
    for i in range(n):
        L=couple_suivant(L)
    return L
```

19.b)

```
def couple_precedent(L):
    n=L[0]
    p=L[1]
    if n==0 and p==0:
        return L

    if p==0:
        return np.array([0,n-1])
    return np.array([n+1,p-1])

# Test
L=np.array([2,1])
print(L)
for i in range(7):
    L=couple_precedent(L)
    print(L)

[2 1] [3 0] [0 2] [1 1] [2 0] [0 1] [1 0]
    [0 0]
```

- Pour calculer l'indice, on calcule le terme précédent tant que celui-ci n'est pas $[0,0]$. L'indice est donné par le nombre d'étapes.

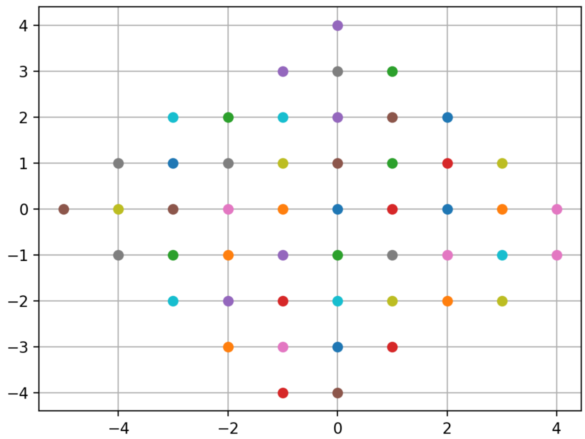
```
def indice(L):
    C=0
    while L[0]!=0 or L[1]!=0:
        L=couple_precedent(L)
        C+=1
    return C

# Test
>>> L=np.array([2,1]); indice(L)
7
```

20.

```
def bijNZ2(n):
    L=g(n)
    a=bijectionZ(L[0])
    b=bijectionZ(L[1])
    return np.array([a,b])
```

On peut tester en reprenant le code précédent pour voir si les points sont atteints :

```
for i in range(50):
    L=bijNZ2(i)
    plt.plot([L[0]],[L[1]],'o')
plt.grid()
plt.show()
```



On peut aussi faire comme le code précédent :

```
plt.clf()
L=[0,0]
for i in range(50):
    L=bijNZ2(i)
    M=bijNZ2(i+1)
    plt.plot([L[0],M[0]],[L[1],M[1]],
        marker='o', color='grey')
plt.grid()
plt.show()
```