Révisions
ECG
Été 2022

Si vous avez des questions, vous pouvez m'écrire à : cfiszka@hotmail.fr

Analyse | 1

Suites et séries

Exercice 1 ⋆ *Série, constante d'Euler* On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

1) a) Étudier la convergence de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$. ⋙ Aide
   b) En déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   c) Justifier l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

2) Étudier pour $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, la nature de la série $\sum \alpha^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$. ⋙ Aide

Exercice 2 ⋆ *Série II* On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \ln\left(\mathrm{e}^{x_n} - x_n\right) \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

1) Pourquoi cette suite est-elle bien définie et positive ? ⋙ Aide
2) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{x_{n+1}}.$$

   b) Justifier que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. ⋙ Aide
3) Démontrer la convergence de la série $\sum x_n$ et calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$.

⋙ *Source : Vidéo Youtube : michael penn Putnam Exam | 2016 : B1*

Exercice 3 ⋆ On définit les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_3 sur $\mathbb{R}$ par

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x(x-1), \quad P_3(x) = x(x-1)(x-2)$$
$$\text{et} \quad P_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3).$$

1) Soit $P \in \mathbb{R}_4[x]$. Justifier l'existence de $\alpha_0, \cdots, \alpha_4$ tels que $P = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i P_i$. >>> Aide

On ne cherchera pas à calculer ici ces valeurs.

2) a) Vérifier que pour tout indice i, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_i(n)}{n!} = \mathrm{e}$.

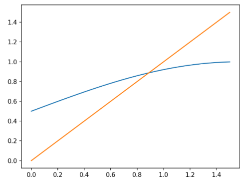
b) Calculer en fonction de $\alpha_0, \cdots, \alpha_4$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}$.

3) *Application.* Donner la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - n^2}{n!}$. >>> Aide

Exercice 4 ⋆⋆ *Étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$*

On considère la suite définie par : $\quad u_0 = 1 \quad$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(u_n) + 2.$

1) Comment obtenir à l'aide de Python le graphe de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}\sin(x) + 2$ ainsi que celui de $x \in \mathbb{R} \mapsto x$ sur $[0; 7/2]$?



2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Prouver que pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, $\quad \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}|y - x|$.

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |v_n| \leqslant \frac{|v_0|}{2^n}$. >>> Aide

c) Justifier la convergence de la suite u. Notons ℓ la limite

3) En utilisant la question 2.(a), démontrer que ℓ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

4) On note R_n, le reste d'ordre n de la série $\sum v_k$.

a) comparer $\ell - u_n$ et R_{n-1}.

b) En déduire que $|\ell - u_n| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$. *On admet que* $|u_1 - u_0| \leqslant 1$.

5) Compléter le programme suivant qui prend en argument ε et renvoie une approximation de ℓ à ε-près.

```
def approx( ) :
        u=    ....
        erreur=2
        while    ....
                u=    ....
                erreur=    ....
```

Exercice 5 ⋆⋆ Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Soit w une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant w_n \leqslant v_n.$$

Peut-on affirmer que la série $\sum w_n$ converge ? >>> Aide

Exercice 6 ⋆⋆ *Suites contractantes*

Soit $(a_n)_n$ une suite pour laquelle il existe $k \in]0;1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant k|a_{n+1} - a_n|.$$

Justifier que la suite $(a_n)_n$ est convergente. >>> Aide

Exercice 7 ⋆ On définit la suite u par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \int_1^{\mathrm{e}} t^2(\ln(t))^n \,\mathrm{d}t$$

1) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, >>> Aide

$$3u_{n+1} = \mathrm{e}^3 - (n+1)u_n$$

2) Écrire un programme Python qui prend en argument n et renvoie la liste

$$U_n = [\ u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n\ ].$$

3) Étudier la limite de la suite u. >>> Aide

4) Donner un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$. >>> Aide

Limites et continuité

Exercice 8 ★★★ Soient a, b deux réels strictement positifs.

1) Calculer la limite de $\left(\dfrac{a^n + b^n}{2}\right)^{1/n}$ lorsque $n \to +\infty$. >>> Aide

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la limite de $n(x^{1/n} - 1)$ lorsque $n \to +\infty$.

   En déduire la limite de $\left(\dfrac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 9 ★★ Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application polynomiale.

1) Justifier que si P est de degré impair, alors P est surjective. >>> Aide
2) Préciser la réciproque. >>> Aide

Exercice 10 ★★ *Suite implicite*

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe une unique solution positive à l'équation

$$x + x^2 + \cdots + x^n = 1.$$

   On note, u_n cette unique solution.
2) Préciser u_1 et u_2.
3) Justifier que la suite u est décroissante.
4) En déduire la convergence de la suite u vers $1/2$.
5) A-t-on ${u_n}^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$?

Exercice 11 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que tout réel possède un ou deux antécédents par f. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Intégration et dérivation

Exercice 12 ★★ Soit la fonction $F : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$. >>> Aide

2) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, fixé. Montrer que >>> Aide

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x} \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u$$

3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, l'égalité : >>> Aide

$$F'(x) + F(x) = \frac{\mathrm{e}}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

4) Étudier la limite de F en $+\infty$.

Exercice 13 ★★★ *Variante des intégrales de Wallis* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$c(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad s(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

On vérifie que s et c sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel x

$$c'(x) = s(x), \quad s'(x) = c(x) \quad \text{et} \quad c(x)^2 - s(x)^2 = 1.$$

Soit $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n = \int_0^\alpha s(t)^n\,\mathrm{d}t.$$

1) a) Vérifier que $s(\alpha) = 1$. En déduire que pour tout $t \in [0;\alpha]$, $s(t) \in [0;1]$.
   b) Étudier les variations de la suite W.
   c) Justifier que la suite W est convergente.

2) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} + (n+1)W_n = \sqrt{2}$. >>> Aide

3) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$,

$$(2n+3)W_n \geqslant \sqrt{2} \geqslant (2n+3)W_{n+2}.$$

4) Conclure en donnant la limite de $(W_n)_n$ et un équivalent. >>> Aide

Exercice 14 ★★★ On pose

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)\mathrm{d}t.$$

1) a) Justifier que I et J sont bien définies.

b) Montrer que $I = J$. >>> Aide

c) En déduire la valeur de $\quad A = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(t))\,\mathrm{d}t.$

2) En manipulant des idées similaires, calculer les intégrales

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(t)}}{\sqrt{\sin(t)} + \sqrt{\cos(t)}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad L = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos(t)}}{\sqrt{\sin(t)} + \sqrt{\cos(t)}}\mathrm{d}t$$

(on justifiera que ces intégrales sont bien définies). >>> Aide

Exercice 15 ★★★ Pour toutes fonctions continues $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la fonction $f * g$ via

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Justifier que $f * g = g * f$. >>> Aide

2) a) Expliciter $\exp * \exp$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout réel t, $f_n(t) = \begin{cases} t^n & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ puis pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $H_{n,m} = f_n * f_m$.

b) Justifier que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $H_{n,m} = \dfrac{m}{n+1} H_{n+1,m-1}$.

c) Montrer que pour tout $n,m \in \mathbb{N}^2$, on a $H_{n,m} = \dfrac{m!n!}{(m+n)!} H_{n+m,0}$.

Explicitez pour tout $n,m \in \mathbb{N}^2$, $H_{n,m}$.

Exercice 16 ★★ Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. On suppose P positif. Soit $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x)$.

1) Justifier la convergence et l'égalité >>> Aide

$$Q(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

2) En déduire que Q est aussi un polynôme positif.

Exercice 17 ★★★

Partie I

1) Montrer que, pour tout x réel, $G(x) = \int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe.

2) Montrer que $G(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. >>> Aide

Partie II

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(tx)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

2) Montrer que pour tout $(t,x,h) \in \mathbb{R}^3$: >>> Aide

$$\left|\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)\right| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}.$$

3) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = G(x)$. >>> Aide

4) En déduire F.

Exercice 18 ★ Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = \mathrm{e}^{-a}$. >>> Aide

Exercice 19 ★★★ Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Justifier que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(P(t)\right)\mathrm{d}t$$

est convergente si et seulement si $\deg P \geqslant 2$. >>> Aide

Exercice 20 ★★★ Pour tout x et y réels strictement positifs, on pose

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

1) Prouver la convergence de l'intégrale définissant $B(x,y)$.

2) a) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, B(x,y) = B(y,x)$.

   b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1)$.

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y)$. En déduire que :

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y).$$

4) Soit n un entier naturel non nul. Soit x un réel strictement positif.

a) Étudier le signe sur [0,1] de la fonction $g : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} - 1 + t$. En déduire que

$$\forall\, t \in [0, n], \qquad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

b) Montrer que pour tout $t \in [0, n]$, on a $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

c) Justifier que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)$.

5) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Indications

Exercice 1.
1.a) Justifier l'équivalent $a_{n+1} - a_n \sim 1/(2n^2)$.
2. Déterminer un équivalent simple du terme général pour le comparer à celui d'une série de Riemann.

Exercice 2.
1. On pourra s'aider de l'inégalité : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.
2. b) La suite converge d'après le théorème de limite monotone. Utiliser la relation de la question 2.a) pour trouver la limite.

Exercice 3.
1. Montrer que $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[x]$.
3. Pour déterminer les valeurs α_i, évaluer en les racines des polynômes P_i.

Exercice 4.
2.a) C'est une application directe de l'inégalité des accroissements finis.
2.b) Apppliquer la relation précédente pour avoir $|v_{n+1}| \leqslant \dfrac{|v_n|}{2}$. Puis, récurrence.
3. Raisonner par l'absurde pour justifier l'unicité.

Exercice 5.
Oui. Justifier la convergence de la série en étudiant la limite des sommes partielles $\sum\limits_{n=0}^{N} w_n$.

Exercice 6.
La suite $(a_n)_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum a_{k+1} - a_k$ est convergente.

Exercice 7.
1. Faire une intégration par parties.
3. Détaillons la preuve :
Étudier les variations de la suite u. En déduire la convergence de la suite u vers une limite finie. Donner

la limite.
4. Utiliser la question 1. pour déterminer la limite de nu_n.

Exercice 8.
1. Raisonner par disjonction des cas. Si $a > b$,

$$\left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{1/n} = a\left(\frac{1+\gamma^n}{2}\right)^{1/n} \quad \text{avec} \quad \gamma \leqslant 1.$$

Ecrire ensuite la puissance sous forme exponentielle. $X^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$, $X \in \mathbb{R}_*^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.
1. Appliquer le théoreme des valeurs intermédiaires.
2. La réciproque est vraie. Prouver que si P est de degré paire, P admet un minimum globale (et donc non-surjective).

Exercice 11.
Raisonner par l'absurde. Supposer qu' il existe $y \in \mathbb{R}$ avec deux antécédents. Faire un schéma pour en trouver un troisieme.

Exercice 12.
1. Revenir à la définition. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_*^+$, montrer que si $x \leqslant y$, alors $F(x) \geqslant F(y)$.
2. Faire un changement de variable.
3. On pourra d'abord exprimer F en fonction de $G : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^u}{u} du$ qui est une primitive.

Exercice 13.
2. Faire une intégration par parties en utilisant les relations du début de l'exercice.
4. La relation précédete se réécrit

$$\frac{\sqrt{2}}{2n-1} \geqslant W_n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2n+3}.$$

Exercice 14.
1.(b) Faire le changement de variable $x = \pi/4 - t$.
2. Que dire de $K + L$? De plus, vérifier que $K = L$.

Exercice 15.
1. Faire un changement de variable affine.

Exercice 16.
1. On pourra étudier la quantité $Q(x) - Q'(x)$.

Exercice 17.
I. 2. Procéder par intégration par parties.
II. 2 Penser au formule de Taylor.
II.3 Soit $(x,h) \in \mathbb{R}^2$. Majorer $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right|$ en fonction de h.

Exercice 18.
Poser $g : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto f(t) - \mathrm{e}^{-t}$. Vérifier que g s'annule au moins une fois en raisonnant par l'absurde.

Exercice 19.
Faire une intégration par parties à partir de

$$\cos\big(P(t)\big) = \frac{1}{P'(t)} \cdot P'(t)\cos\big(P(t)\big).$$

Solutions

Exercice 1.

1) a) À partir du développement limité du logarithme en 0, on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\,;1\}$,

$$\begin{array}{rcl} a_n - a_{n-1} & = & \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right)-\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln(n)\right) = \frac{1}{n}-\ln(n+1)+\ln(n) \\ & = & \frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \Rightarrow \quad a_n - a_{n-1} & \sim & \frac{1}{2n^2}. \end{array}$$

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $a_n - a_{n-1}$ converge.

b) Si on note S_n la somme partielle d'ordre n de cette série, on a par télescopage

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_1.$$

Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi.

c) Notons γ, la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)=\gamma+o(1).$$

D'où le résultat sachant que

$$\ln(n+1)=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n)+o(1).$$

2) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Justifions l'équivalent $\alpha^{H_n}\sim\alpha^{\gamma}\cdot\alpha^{\ln(n)}$.

$$\frac{\alpha^{H_n}}{\alpha^{\gamma}\cdot\alpha^{\ln(n)}}=\alpha^{H_n-(\gamma+\ln(n))}=\alpha^{o(1)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$

et

$$\alpha^{\ln(n)}=\mathrm{e}^{\ln(\alpha)\cdot\ln(n)}=n^{\ln(\alpha)}.$$

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, les séries $\sum\alpha^{H_n}$ et $\sum n^{\ln(\alpha)}$ ont même nature. Or, $\sum n^{\ln(\alpha)}$ est une série de Riemann convergente si et seulement si $\ln(\alpha)<-1$, c'est-à-dire, $\alpha<\mathrm{e}^{-1}$.

$$\boxed{\text{La série } \sum \alpha^{H_n} \text{ converge si et seulement si } \alpha<\mathrm{e}^{-1}.}$$

Exercice 2.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1$. L'expression $\ln\left(\mathrm{e}^x - x\right)$ a donc bien un sens. Elle est de plus positive. La suite $(x_n)_n$ est donc bien définie et positive.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$x_{n+1} = \ln\left(\mathrm{e}^{x_n} - x_n\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{\ln\left(\mathrm{e}^{x_n} - x_n\right)} = \mathrm{e}^{x_n} - x_n.$$

D'où,
$$\boxed{x_n = \mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{x_{n+1}}.}$$

b) D'après la question 1), la suite $(x_n)_n$ est positive. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{x_{n+1}} = x_n \geqslant 0 \quad \text{Donc} \quad \mathrm{e}^{x_n} \geqslant \mathrm{e}^{x_{n+1}}.$$

Enfin, par croissance de la fonction logarithme, $x_n \geqslant x_{n+1}$. Finalement,

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ est décroissante.}}$$

La suite $(x_n)_n$ est décroissante et minorée, d'après *le théorème de convergence monotone*, la suite est convergente. Notons ℓ sa limite. Passons à la limite dans la relation de la question 2 a), par continuité de la fonction exponentielle,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{x_{n+1}} \quad \text{donc} \quad \ell = \mathrm{e}^{\ell} - \mathrm{e}^{\ell} = 0.$$

Finalement,
$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

3) Prouvons la convergence et le calcul de la somme en explicitant les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N} x_n = \sum_{n=0}^{N} \mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_0} - \mathrm{e}^{x_{N+1}} \qquad \text{(télescopage).}$$

Or, $x_0 = 1$, et par continuité de l'exponentielle (en 0),

$$x_{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{x_{N+1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$$

Concluons
$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \mathrm{e} - 1.}$$

Exercice 3.

1) La famille $(P_0, \cdots, P_4)$ est libre car échelonnée en degré.
De plus, elle contient autant d'éléments que la dimension de $\mathbb{R}_4[x]$ (i.e $5 = 4 + 1$). En conclusion,

$$\boxed{(P_0, \cdots, P_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}_4[x].}$$

En particulier, la famille est génératrice. Les coefficients $\alpha_0, \cdots, \alpha_4$ sont les coordonnées du polynôme $P \in \mathbb{R}_4[x]$ dans la base $(P_0, \cdots, P_4)$.

2) a) Calculons pour tout $i \in [\![0;4]\!]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_i(n)}{n!}$. Fixons $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{P_0(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}.$$

On reconnaît les sommes partielles d'une série exponentielle :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$$

Et

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{P_1(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}.$$

Puis

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{P_2(n)}{n!} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} = \sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-2)!} \underset{k=n-2}{=} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}.\end{aligned}$$

De même, on prouve que pour tout indice i,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{N} \frac{P_i(n)}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}.}$$

b) De plus,

$$\frac{P(n)}{n!} = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \frac{P_i(n)}{n!}.$$

Par linéarité, on a la convergence de la série avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_i(n)}{n!} = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \mathrm{e} = \boxed{\mathrm{e} \sum_{i=0}^{4} \alpha_i.}$$

3) Déterminons les coordonnées du polynôme $P(x) = x^3 - x^2$, dans la base $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$. Il existe $\alpha_0, \cdots, \alpha_4$ tels que :

$$P(x) = \alpha_0 P_0(x) + \alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) + \alpha_3 P_3(x) + \alpha_4 P_4(x).$$

Comme P est de degré 3, on a directement $\alpha_4 = 0$. Évaluons en les racines des polynômes.

$x \leftarrow 0,$

$$P(0) = \alpha_0 P_0(0) + \alpha_1 P_1(0) + \alpha_2 P_2(0) + \alpha_3 P_3(0).$$

$$\Rightarrow \quad P(0) = \alpha_0.$$

$x \leftarrow 2,$

$$P(2) = \alpha_0 P_0(2) + \alpha_1 P_1(2) + \alpha_2 P_2(2) + \alpha_3 P_3(2).$$

$$\Rightarrow \quad P(2) = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

$x \leftarrow 1,$

$$P(1) = \alpha_0 P_0(1) + \alpha_1 P_1(1) + \alpha_2 P_2(1) + \alpha_3 P_3(1).$$

$$\Rightarrow \quad P(1) = \alpha_0 + \alpha_1.$$

$x \leftarrow 3,$

$$P(3) = \alpha_0 P_0(3) + \alpha_1 P_1(3) + \alpha_2 P_2(3) + \alpha_3 P_3(3).$$

$$\Rightarrow \quad P(3) = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3.$$

On obtient un système linéaire triangulaire,

$$\begin{cases} 0 &= \alpha_0 \\ 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 \\ 4 &= \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 18 &= \alpha_0 + 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3 \end{cases}.$$

D'où :

$$\boxed{\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 1.}$$

D'après ce qui précède,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - n^2}{n!} = \mathrm{e} \sum_{i=0}^{4} \alpha_i = \boxed{3\mathrm{e}.}$$

Exercice 4.

1) Voir le notebook Cahier de Vacances.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

ab = np.linspace(0,7/2,100) # On trace sur l'intervalle [0;7/2]
ord = np.sin(ab)/2+2
plt.plot(ab,ord)
plt.plot(ab,ab)
plt.show()
```

2) a) On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{2}\cos(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Appliquons *l'inégalité des accroissements finis*, pour tous $x,y \in \mathbb{R}$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|y - x|.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la relation précédente à $y = u_{n+1}$ et $x = u_n$.

$$\left|f(u_{n+1}) - f(u_n)\right| \leqslant \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|$$

d'où
$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|$$

C'est-à-dire,
$$\boxed{|v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|v_n|.}$$

Procédons par récurrence sur la propriété :

$$n \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{P}(n) : \ |v_n| \leqslant \frac{|v_0|}{2^n}.$$

Initialisation. On a bien $|v_0| \leqslant \dfrac{|v_0|}{2^0}$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. D'après ce qui précède :

$$|v_{n+1}| \leqslant \frac{|v_n|}{2} \leqslant \frac{|v_0|/2^n}{2} = \frac{|v_0|}{2^{n+1}}.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

c) - Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |v_n| \leqslant \frac{|v_0|}{2^n}.$$

- La série $\sum \dfrac{|v_0|}{2^n}$ est une série géométrique convergente ($1/2 \in]-1;1[$).
Par *le critère de comparaison*, la série $\sum |v_n|$ converge.
Dit autrement, la série $\sum v_n$ converge absolument donc elle converge. Or,

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

On en déduit la convergence de la suite u.

3) La réponse s'effectue en deux temps. Premièrement, il faut justifier que $\ell = f(\ell)$, puis que ℓ est l'unique solution.

- *L'égalité $\ell = f(\ell)$.*

On a,
$$u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

De plus, par continuité de la fonction f,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

Or, par définition de la suite u,
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$.

• *Unicité.*
Soient x_1, x_2 deux réels tels que

$$f(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad f(x_2) = x_2.$$

D'après *l'inégalité des accroissements finis* (question 2.(a)).

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Si $x_1 \neq x_2$ alors $|x_1 - x_2| \neq 0$. En divisant par $|x_1 - x_2|$ la relation précédente, il vient $1 \leqslant \frac{1}{2}$. C'est donc absurde et $x_1 = x_2$. Il y a unicité.

4) a) Soient $n, N \in \mathbb{N}$ avec $n < N$.

$$\sum_{k=n}^{N} v_k = \sum_{k=n}^{N} u_{k+1} - u_k = u_{N+1} - u_n.$$

Or, $u_{N+1} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par passage à la limite,

$$\boxed{R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \ell - u_n.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. *L'inégalité triangulaire dans le cas de séries convergentes* donne

$$|\ell - u_n| \leqslant \left|\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |v_k| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{|v_0|}{2^k}.$$

Or, on admet que $|v_0| \leqslant 1$,

$$|\ell - u_n| \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

On retrouve le reste d'une série géométrique de raison $1/2$,

$$|\ell - u_n| \leqslant \frac{(1/2)^n}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

5) On définit l'erreur par la quantité $|u_n - \ell|$. D'après ce qui précède, à chaque itération, l'erreur est au moins divisée par 2. Dès que l'erreur est inférieure à ε,

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

u_n est une approximation de ℓ à ε près.
On complète.

```
def approx(eps) :
    u=1
    erreur=1 # initialisation
```

```
    while erreur>eps:
# Tant que l'erreur commise est supérieure à la précision demandée, on continue
          u=np.sin(u)/2+2
          erreur=erreur/2
# A chaque étape, l'erreur commise est au moins divisée par 2.
    return u
```

Exercice 5.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant |w_n| \leqslant \max(|u_n|, |v_n|) \leqslant |u_n| + |v_n|.$$

La série $\sum |u_n| + |v_n|$ est convergente. Par le critère de comparaison, $\sum |w_n|$ est convergente, $\sum w_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 6.

Par récurence, on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_{n+1} - a_n| \leqslant k^n |a_1 - a_0|.$$

Comme $k \in]0,1[$, la série géométrique $\sum k^n |a_1 - a_0|$ est convergente. Par le critère de comparaison, la série $\sum a_{n+1} - a_n$ est absolument convergente, donc convergente. Or la somme partielle de cette série est

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} - a_k = a_n - a_0 \qquad \text{(somme télescopique)}.$$

La convergence de la série signifie la convergence de la suite des sommes partielles, la suite $(a_n)_n$ est donc convergente.

Exercice 7.

1) Procédons par intégrations par parties. Les fonctions utilisées sont de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} t^2 (\ln(t))^{n+1} \,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^3}{3}(\ln t)^{n+1}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^3}{3} \cdot (n+1)\frac{1}{t}\ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{(n+1)}{3} u_n. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2) On utilise la relation de récurrence de la question précédente avec l'initialisation $u_0 = \int_1^{\mathrm{e}} t^2 \,\mathrm{d}t = (\mathrm{e}^3 - 1)/3$.

```
def suite(n) :
    u=(np.exp(1)**3-1)/3
    termes=[u]
    for i in range(1,n) :
        u=(np.exp(1)**3-i*u)/3
        termes.append(u)
    return termes
```

3) Pour tout $t \in [1; \mathrm{e}]$, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \ln(t) \leqslant 1$, puis $0 \leqslant t^2 \ln(t)^{n+1} \leqslant t^2 \ln(t)^n$. Enfin, par croissance de lintégrale.

$$0 \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln(t)^{n+1} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln(t)^n \,\mathrm{d}t.$$

c'est-à-dire

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Autrement dit, la suite u est décroissante et minorée, elle converge vers une limite finie (notée ℓ). Or, on a vu que

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} \quad 3u_{n+1} = \mathrm{e}^3 - (n+1)u_n. \\ \Leftrightarrow \quad & \forall n \in \mathbb{N} \quad \tfrac{3}{n+1}u_{n+1} = \tfrac{\mathrm{e}^3}{n+1} - u_n. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, $0 = 0 - \ell$, puis $\ell = 0$.

4) De nouveau, la relation de récurrence donne

$$3 \times 0 = \mathrm{e}^3 - \lim_{n \to +\infty} (n+1)u_n.$$

Puis
$$nu_n = \frac{n}{n+1} \cdot (n+1)u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^3.$$

D'où
$$\boxed{u_n \sim \frac{\mathrm{e}^3}{n}.}$$

Exercice 8.

1) • Cas $a = b$. Immédiat : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\dfrac{a^n + b^n}{2}\right)^{1/n} = a$. La limite est a.

• Cas $a < b$. On factorise b^n qui est le terme dominant : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{a^n + b^n}{2}\right)^{1/n} = b\left(\frac{1 + (\frac{a}{b})^n}{2}\right)^{1/n} = b\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1 + (\frac{a}{b})^n}{2}\right)\right).$$

De $\ln\left(\dfrac{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ on déduit : $\boxed{\left(\dfrac{a^n + b^n}{2}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b.}$

• Cas $b < a$. On échange les rôles de a et b : $\boxed{\left(\dfrac{a^n + b^n}{2}\right)^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a.}$

On peut résumer en disant que la limite est le maximum entre a et b.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $x^{1/n} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(x)} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{n}$ car $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$ et $\dfrac{1}{n}\ln(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc :
$$\boxed{n(x^{1/n} - 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x).}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\left(\dfrac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\dfrac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)\right)$.

On sait que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)$, et $\dfrac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc

$$\ln\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2} - 1 = \frac{1}{2}(a^{1/n}+b^{1/n}-2),$$

$$n\ln\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(n(a^{1/n}-1)+n(b^{1/n}-1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(\ln(a)+\ln(b)).$$

D'où :

$$\boxed{\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{1/2(\ln(a)+\ln(b))} = \sqrt{ab}.}$$

Exercice 9.

1) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Considérons le polynôme $Q = P - y_0$. Suivant le signe du coefficient dominant de Q,

$$Q(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad Q(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ou

$$Q(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad Q(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Le polynôme Q est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et le théorème des valeurs intermédiaires s'applique. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x_0) = 0$. Puis $P(x_0) = y_0$. En résumé, tout réel admet au moins un antécédent par P.

$$\boxed{P \text{ est surjective.}}$$

2) La réciproque est fausse. Si P est de degré pair, non constant.

$$P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{ou} \quad P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

On montre alors que P admet un minimum (ou un maximum). P ne peut être surjective.

Exercice 10.

1) Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n.$$

La fonction f_n est continue car polynomiale avec $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution à l'équation $f_n(x) = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$. Comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, il y a unicité de la solution.

Notons que $u_n \leqslant 1$ puisque $f_n(u_n) = n \geqslant 1$.

2) $f_1(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ donc $u_1 = 1$.
$f_2(x) = 1 \Leftrightarrow x + x^2 = 1$, un calcul de discriminant donne $u_2 = (1+\sqrt{5})/2$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(u_{n+1}) = f_{n+1}(u_{n+1}) - u_{n+1}{}^n = 1 - u_{n+1}{}^n \leqslant 0$$

car $u_{n+1} \leqslant 1$. Ainsi

$$f_n(u_{n+1}) \leqslant 0 = f_n(u_n).$$

Puis par croissance de f_n

$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$

La suite u est décroissante.

4) u est décroissante et minorée par 0, converge vers une limite ℓ d'apres le théorème des valeurs intermédiaires.
Par les sommes géométriques, pour $n \geqslant 2$, $u_n < u_1 = 1$

$$f_n(u_n) = u_n \cdot \frac{1-u_n{}^n}{1-u_n} = 1$$
$$\Rightarrow \quad u_n - u_n{}^{n+1} = 1 - u_n \qquad (\bullet)$$

De plus, $0 \leqslant u_n \leqslant u_2$ puis $0 \leqslant u_n{}^{n+1} \leqslant u_2{}^{n+1}$. Par encadrement

$$u_n{}^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puis par passage à la limite dans la relation $(\bullet)$ valable pour tout $n \geqslant 2$.

$$\ell - 0 = 1 - \ell \quad \text{d'où} \qquad \ell = \frac{1}{2}.$$

Finalement

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

5) Oui. On a vu que $u_n{}^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 11.

Solution en cours.

Exercice 12.

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$ avec $0 < x \leqslant y$ alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 < t + x \leqslant t + y$ d'où $\frac{e^t}{t+x} \geqslant \frac{e^t}{t+y}$.
Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,dt \geqslant \int_0^1 \frac{e^t}{t+y}\,dt.$$

Ce qui revient à écrire :

$$F(x) \geqslant F(y).$$

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_*^+.}$$

2) L'application $t \mapsto u = t + x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $[x, x+1]$. On peut effectuer le changement de variable affine $u = t + x$ et on obtient

$$F(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u}\,du = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,du$$

3) Soit G une primitive de la fonction $u \mapsto \frac{e^u}{u}$. On a alors $F(x) = e^{-x}[G(x+1) - G(x)]$. Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ par différence et sa dérivée F' est définie par :

$$F'(x) = -e^{-x}[G(x+1) - G(x)] + e^{-x}\left[G'(x+1) - G'(x)\right].$$

Puis, $F'(x) = -F(x) + e^{-x}\left[\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x}\right]$. Finalement

$$F'(x) + F(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $t \mapsto \frac{1}{t+x}$ est décroissante sur $[0,1]$ donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{t+x} \leqslant \frac{1}{x}$$

et en multipliant cette inégalité par e^t, qui est strictement positif, on obtient

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{t+x} \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{x}$$

d'où :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{x}$$

Par encadrement, on conclut que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$$

Exercice 13.

1) a) Dans un premier temps,

$$\mathrm{e}^\alpha = \mathrm{e}^{\ln(1+\sqrt{2})} = 1+\sqrt{2}.$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha} = \frac{1}{\mathrm{e}^\alpha} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{-1+\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})} = \sqrt{2}-1.$$

Puis
$$s(\alpha) = \frac{1+\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}{2} = \boxed{1.}$$

Comme s est croissante sur $\mathbb{R}$, pour $t \in [0;\alpha]$

$$0 \leqslant t \leqslant \alpha \quad \Rightarrow \quad 0 = s(0) \leqslant s(t) \leqslant s(\alpha) = 1.$$

D'où le résultat.

b) Soient $t \in [0;\alpha]$ et $n \in \mathbb{N}$. En multipliant par $s(t)^n \geqslant 0$, il vient

$$\begin{aligned} & 0 \leqslant s(t) \leqslant 1 \\ \Rightarrow \quad & 0 \leqslant s(t)^{n+1} \leqslant s(t)^n. \end{aligned}$$

Par *croissance de l'intégrale*

$$0 \leqslant \int_0^\alpha s(t)^{n+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\alpha s(t)^n\,\mathrm{d}t.$$

Puis $0 \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$.

$$\boxed{\text{La suite } W \text{ est décroissante.}}$$

c) D'après *le théorème de la limite monotone* (W est décroissante et minorée par 0), W converge vers une limite finie.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Procédons par intégration par parties. Les fonctions considérées étant de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{cases} u(t) = c(t) & u'(t) = s(t) \\ v(t) = s(t)^{n+1} & v'(t) = (n+1)c(t)s(t)^n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^\alpha s(t)s(t)^{n+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[c(t)s(t)^{n+1}\right]_0^\alpha - \int_0^\alpha c(t)(n+1)c(t)s(t)^n\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or

$$\left[c(t)s(t)^{n+1}\right]_0^\alpha = c(\alpha)s(\alpha)^{n+1} - c(0)s(0)^{n+1} = c(\alpha) = \sqrt{2}.$$

Et

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha c(t)^2 s(t)^n\,\mathrm{d}t &= \int_0^\alpha \left(1 + s(t)^2\right)s(t)^n\,\mathrm{d}t. \\ &= \int_0^\alpha s(t)^n\,\mathrm{d}t + \int_0^\alpha s(t)^{n+2}\,\mathrm{d}t. \\ &= W_n + W_{n+2}. \end{aligned}$$

Il vient $$W_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)\left(W_n + W_{n+2}\right).$$

Puis $$\boxed{(n+2)W_{n+2} + (n+1)W_n = \sqrt{2}.}$$

3) Comme la suite W est décroissante,

$$W_{n+2} \leqslant W_n.$$

Puis

$$(n+2)W_{n+2} + (n+1)W_n \leqslant (n+2)W_n + (n+1)W_n.$$

Et $$\sqrt{2} \leqslant (2n+3)\,W_n.$$

De même

$$(n+2)W_{n+2} + (n+1)W_{n+2} \leqslant (n+2)W_{n+2} + (n+1)W_n.$$

D'où $$(2n+3)W_{n+2} \leqslant \sqrt{2}.$$

Ce qui prouve l'encadrement.

4) De plus, par décalage d'indice, pour $n \geqslant 2$

$$\big(2(n-2)+3\big)W_{(n-2)+2} \leqslant \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad (2n-1)W_n \leqslant \sqrt{2}.$$

En résumé

$$(2n-1)W_n \leqslant \sqrt{2} \leqslant (2n+3)W_n.$$

D'où

$$\frac{\sqrt{2}}{2n-1} \geqslant \mathrm{W}_n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2n+3}$$

Par *le théorème d'encadrement*

$$\boxed{W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad W_n \sim \frac{\sqrt{2}}{2n}.}$$

Exercice 14.

1) a) L'application cos est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, et : $\forall t \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right], \cos(t) \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right] \subset \mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{\pi}{4} - x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

Par composition, les applications $t \longmapsto \ln\big(\cos(t)\big)$ et $x \longmapsto \ln\Big(\cos\big(\frac{\pi}{4} - x\big)\Big)$ sont continues sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, car ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et cos est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Ainsi les intégrales I et J sont bien définies.

b) Avec le changement de variable affine « $x = \frac{\pi}{4} - t$ » (donc « $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ ») :

$$I \underset{x=\frac{\pi}{4}-t}{=} \int_{\pi/4}^{0} -\ln\Big(\cos\big(\frac{\pi}{4} - x\big)\Big)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = J.}$$

c) Remarquons que tan est continue et positive ou nulle sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, il en résulte par composition que l'application $t \longmapsto \ln\big(1 + \tan(t)\big)$ est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Puis :

$$A = \int_0^{\pi/4} \ln\Big(1 + \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \ln\Big(\frac{\cos(t)+\sin(t)}{\cos(t)}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

Or : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t) = \cos\big(\frac{\pi}{4}\big)\cos(t) + \sin\big(\frac{\pi}{4}\big)\sin(t) = \cos\big(\frac{\pi}{4} - t\big)$, donc :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \ln\Big(\frac{\sqrt{2}\cos\big(\frac{\pi}{4} - t\big)}{\cos(t)}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln\big(\sqrt{2}\big)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \ln\Big(\cos\big(\frac{\pi}{4} - t\big)\Big)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/4} \ln\big(\cos(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ A &= \frac{\pi}{8}\ln(2) + J - I = \boxed{\frac{\pi}{8}\ln(2)} \ (\text{car } I = J) \end{aligned}$$

2) • Les applications sin et cos sont continues et positives ou nulles sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et $u \longmapsto \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc les composées $t \longmapsto \sqrt{\sin(t)}$ et $t \longmapsto \sqrt{\cos(t)}$ sont continues sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, pour $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, puisqu'une somme de nombres positifs ne peut être nulle que si les nombres sont tous nuls, on a :

$$\sqrt{\sin(t)} + \sqrt{\cos(t)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(t) = 0 \text{ et } \cos(t) = 0.$$

Or les fonctions sin et cos ne s'annulent jamais en même temps, donc le nombre $\sqrt{\sin(t)}+\sqrt{\cos(t)}$ n'est jamais nul. Finalement, par quotient, les applications

$$t \longmapsto \frac{\sqrt{\sin(t)}}{\sqrt{\sin(t)}+\sqrt{\cos(t)}} \quad \text{et} \quad t \longmapsto \frac{\sqrt{\cos(t)}}{\sqrt{\sin(t)}+\sqrt{\cos(t)}}$$

sont continues sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

- Avec le changement de variable affine « $x = \frac{\pi}{2} - t$ » (donc « $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$ »), on a :

$$K \underset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=} \int_{\pi/2}^{0} -\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos(x)}}{\sqrt{\cos(x)}+\sqrt{\sin(x)}}\,\mathrm{d}x,$$

car : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin(\theta)$. On obtient : $\boxed{K = L.}$

- Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$K + L = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(t)}+\sqrt{\cos(t)}}{\sqrt{\sin(t)}+\sqrt{\cos(t)}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Mais comme $K = L$, on conclut que : $\boxed{K = L = \frac{\pi}{4}.}$

Exercice 15.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue le changement de variable affine « $u = x - t$ » (donc « $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t$ ») :

$$f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \underset{u=x-t}{=} \int_x^0 f(x-u)g(u)(-\,\mathrm{d}u) = \int_0^x f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u,$$

ce qui montre que $f * g(x) = g * f(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on conclut :

$$\boxed{f * g = g * f.}$$

2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\exp * \exp(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{x-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x.$$

Ainsi : $\boxed{\exp * \exp : x \longmapsto x\mathrm{e}^x.}$

b) Soit $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_n(t)f_m(x-t) \neq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ x - t > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t < x \end{cases}.$$

- Il en résulte que si $x \leqslant 0$, alors $H_{n,m}(x) = \displaystyle\int_0^x 0\,\mathrm{d}t = 0$.

De même, $H_{n+1,m-1}(x) = 0$ quand $x \leqslant 0$, donc on a bien :

$$H_{n,m}(x) = \frac{m}{n+1} H_{n+1,m-1}(x) \text{ quand } x \leqslant 0.$$

- Supposons maintenant que $x > 0$. Alors, par intégration par parties, les applications $t \longmapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t \longmapsto (x-t)^m$ étant de classe C^1 sur $[0,x]$, on a :

$$\begin{aligned} H_{n,m}(x) = f_n * f_m(x) &= \int_0^x t^n (x-t)^m \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(x-t)^m\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1}(-1)m(x-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Le crochet est nul car $n+1>0$ et $m>0$. Il reste :

$$H_{n,m}(x) = \frac{m}{n+1}\int_0^x f_{n+1}(t) f_{m-1}(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{m}{n+1} H_{n+1,m-1}(x).$$

- Finalement : $\boxed{H_{n,m} = \dfrac{m}{n+1} H_{n+1,m-1} \text{ sur } \mathbb{R}.}$

c) Montrons par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{P}(m) : \forall n \in \mathbb{N},\ H_{n,m} = \frac{m!n!}{(m+n)!} H_{n+m,0}$$

•*Initialisation*. Soit $m = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{0!n!}{(0+n)!} = 1$. Donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.

•*Hérédité*. Soit $m \geqslant 0$. Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(m+1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} H_{n,m+1} &\underset{2.(b)}{=} \frac{m+1}{n+1} H_{n+1,m} \underset{H.R.}{=} \frac{m+1}{n+1} \times \frac{m!(n+1)!}{(m+n+1))!} H_{m+n+1,0} \\ &= \frac{(m+1)!n!}{(m+n+1)!} H_{m+n+1,0} \end{aligned}$$

•*Conclusion*. D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\forall\,(n,m) \in \mathbb{N}^2,\ H_{n,m} = \frac{m!n!}{(n+m)!} H_{m+n,0}.}$$

Calculons $H_{n+m,0}$. Pour $x \leqslant 0$, on a $H_{n+m,0}(x) = 0$ (voir 2.(a)). Soit $x > 0$:

$$H_{n+m,0}(x) = \int_0^x t^{n+m}(x-t)^0\,\mathrm{d}t = \int_0^x t^{n+m}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+m+1}}{n+m+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+m+1}}{n+m+1}$$

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, H_{n,m}(x) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{m!n!}{(n+m+1)!} x^{n+m+1} \text{ si } x > 0. \end{array} \right.$$

Exercice 16.

1) Précisons que si P est un polynôme de degré n, alors, pour $k > n$, $P^{(k)}$ est le polynôme nul. Ainsi,

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x).$$

$$\begin{aligned} Q(x) - Q'(x) &= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} {P^{(k)}}'(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^{n} P^{(k+1)}(x) \\ &= P^{(0)}(x) - P^{(n+1)}(x) = P(x). \end{aligned}$$

somme télescopique

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}$ avec $A > x$. Explicitons

$$\mathrm{e}^x \int_x^A P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \int_x^A \big(Q(t) - Q'(t)\big)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Méthode 1.

On peut remarquer que $t \mapsto \big(Q(t) - Q'(t)\big)\mathrm{e}^{-t}$ est la dérivée de $t \mapsto Q(t)\mathrm{e}^{-t}$. Ainsi,

$$\int_x^A \big(Q(t) - Q'(t)\big)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[Q(t)\mathrm{e}^{-t}\right]_x^A = Q(x)\mathrm{e}^{-x} - Q(A)\mathrm{e}^{-A}.$$

Les croissances comparées, $\quad \mathrm{e}^x \int_x^A P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = Q(x) - Q(A)\mathrm{e}^{x-A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} Q(x).$

Méthode 2.

On peut faire une intégration par parties (les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$).

$$\int_x^A Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-Q(t)\mathrm{e}^{-t}\right]_x^A + \int_x^A Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

En reprenant le raisonnement précédent,

$$Q(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque
Si l'on souhaite justifier la convergence sans effectuer le calcul. On peut écrire : $t \in \mathbb{R} \mapsto P(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$. On a une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus, à l'aide *des croissances comparées*,

$$t^2 P(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad P(t)\mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Précisons que les intégrandes sont positives. Comme $\int_1^{+\infty} 1/t^2 \,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente ($2 > 1$), *le critère d'équivalence* s'applique et $\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2) C'est une conséquence directe de la relation précédente et de la positivité de l'intégrale.

Exercice 17.

Partie 1

1) L'application $t \longmapsto \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Pour $t \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant \left|\cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\right| = |\cos(tx)|\mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ est absolument convergente, donc convergente.}}$$

2) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. On réalise deux intégrations par parties successives, ce qui est possible ici car les applications $t \longmapsto \cos(tx)$ et $t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}$ sont de classe C^2 sur $[0,A]$. Plus précisément, on dérive à chaque fois la fonction trigonométrique.

$$\begin{aligned}
\int_0^A \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \Big[\cos(tx)(-\mathrm{e}^{-t})\Big]_0^A - \int_0^A \big(-x\sin(tx)\big)(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t \\
&= -\cos(Ax)\mathrm{e}^{-A} + 1 - x\int_0^A \sin(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\cos(Ax)\mathrm{e}^{-A} + 1 - x\left(\Big[\sin(tx)(-\mathrm{e}^{-t})\Big]_0^A - \int_0^A x\cos(tx)(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\cos(Ax)\mathrm{e}^{-A} + 1 - x\left(-\sin(Ax)\mathrm{e}^{-A} + x\int_0^A \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right) \\
\int_0^A \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= -\cos(Ax)\mathrm{e}^{-A} + 1 + x\sin(Ax)\mathrm{e}^{-A} - x^2\int_0^A \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(1+x^2)\int_0^A \cos(tx)e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\cos(Ax)e^{-A} + 1 + x\sin(Ax)e^{-A}.$$

D'après la question 1, $\displaystyle\int_0^A \cos(tx)e^{-t}\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \cos(tx)e^{-t}\,\mathrm{d}t = G(x).$

De plus, $\left|\cos(Ax)e^{-A}\right| \leqslant e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\left|x\sin(Ax)e^{-A}\right| \leqslant |x|e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

donc, avec le théorème d'encadrement,

$$\cos(Ax)e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad x\sin(Ax)e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Finalement, en passant à la limite, on obtient $(1+x^2)G(x) = 1$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

Partie 2

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_x : t \mapsto \dfrac{\sin(tx)e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi_x(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} x$ (car $\sin(tx) \underset{t\to 0}{\sim} tx$). La fonction φ_x se prolonge par continuité en 0. L'intégrale est faussement impropre en 0. Au voisinage de $+\infty$ la fonction φ_x n'est pas de signe constant. Pourtant, pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant |\varphi_x(t)| \leqslant e^{-t}$.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\varphi_x(t)|\,\mathrm{d}t$ converge (*théorèmes de convergence d'intégrales de fonctions positives*). Ainsi l'intégrale $F(x)$ est absolument convergente, donc elle converge. $\boxed{F(x) \text{ existe pour tout } x \text{ réel.}}$

2) La fonction sin est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Les dérivées successives sont $\sin' = \cos$ et $\sin^{(2)} = -\sin$. Pour tout x réel, on a $|\sin^{(2)}(x)| = |-\sin(x)| \leqslant 1$. D'après *l'inégalité de Taylor-Lagrange* à l'ordre 1, on a pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\sin(b) - \sin(a) - (b-a)\cos(a)\right| \leqslant \frac{|b-a|^2}{2}$$

Soit $(t,x,h) \in \mathbb{R}^3$. En prenant $b = t(x+h)$, $a = tx$, on a $b - a = th$, d'où :

$$\boxed{\left|\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)\right| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}}$$

3) Soit $(x,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)}{th}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Notons I cette intégrale. Par croissance de l'intégrale et avec la question 2 :

$$|I| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - h\cos(tx)}{th}\right| e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t^2h^2}{2t|h|}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

l'intégrale du milieu étant convergente, grâce à la majoration de la question 2 et par comparaison des fonctions positives. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t|h|}{2}e^{-t}\,\mathrm{d}t = |h| \times \text{Cste} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, on conclut grâce au théorème d'encadrement que $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} G(x)$.

Par définition : $\boxed{F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et} : \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = G(x).}$

4) Comme G est la dérivée de Arctan et que $\mathbb{R}$ est intervalle, on déduit de la question précédente qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $F = \text{Arctan} + K$. Or $K = F(0) = 0$, donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \text{Arctan}(x).}$$

Exercice 18.

Posons $g : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(x) - \mathrm{e}^{-x}$. Montrons que g s'annule au moins une fois. Raisonnons par l'absurde en supposant que g ne s'annule pas. Comme g est continue, cela revient à supposer que g est de signe constant (c'est le théoreme des valeurs indermédiaires). De plus,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Par linéarité $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ existe et

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Comme g est de signe constant positive, g est nulle sur $\mathbb{R}^+$. Absurde. Il existe donc $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(a) = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{f(a) = \mathrm{e}^{-a}.}$$

Exercice 19.

Solution en cours.

Exercice 20.

Solution en cours.

4.(b) L'inégalité est triviale pour $t \in [\sqrt{n}, n]$. Prouvons le résultat pour $t \in I = [0, \sqrt{n}[$ en introduisant la fonction

$$f : t \mapsto n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) + t - \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$$

La fonctions $t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)$ et $t \mapsto \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$ sont dérivables sur I par composition. Par combinaison linéaire de fonctions dérivables sur I, f est dérivable sur I et pour tout $t \in I$,

$$f'(t) = \frac{t\left((t-1)^2 + (n-1)\right)}{(n-t)\,(n-t^2)} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle I, pour $t \in I$, comme $t \geqslant 0$,

$$f(t) \geqslant f(0) \quad \text{puis} \quad f(t) \geqslant 0 \quad \text{car} \quad f(0) = 0.$$

La fonction f est donc positive sur I et l'inégalité est ainsi vérifiée sur I.

Algèbre linéaire | 2

Espaces vectoriels

Exercice 1 ⋆ *Familles libres - exemples*

1) *Dans $\mathbb{R}^n$.*
Montrer que la famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ définie par $\varepsilon_1 = (3,-1,1,0)$, $\varepsilon_2 = (1,1,-1,0)$, $\varepsilon_3 = (-1,2,1,0)$ et $\varepsilon_4 = (1,1,1,1)$ est libre.
2) *Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.* Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   a) Justifier que la famille (A,B,C,D) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Que dire de la liberté de la famille (A,B,C,D,I_2) ? ⋙ Aide
3) *Dans les espaces fonctionnels.*
   a) Étudier la liberté de la famille formée de $f_1 = \ln$, $f_2 = \exp$ et $f_3 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_*^+}$ dans $\mathcal{A}(\mathbb{R}_*^+,\mathbb{R})$.
   b) Étudier la liberté de la famille $\mathcal{F} = (\tan, \tan^2, \ldots, \tan^n)$ dans l'espace vectoriel E des fonctions définies sur $]-\pi/2,\pi/2[$. ⋙ Aide

Exercice 2 *Liberté et DLs*

On pose $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$, $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + \sin(x^2)$ et $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(2x)$.

1) Donner les développements limités de f_1, f_2 et f_3 en 0 à l'ordre 4.
2) En déduire que la famille (f_1,f_2,f_3) est libre.

Exercice 3 ⋆ Donner une base des espaces vectoriels suivants, préciser la dimension.

1) $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a + b + c + d = 0 \right\}$.
2) $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(4) = 0\}$.
3) $E_3 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ est diagonale}\}$.
4) E_4, le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de taille n. ⋙ Aide

Applications linéaires

Exercice 4 ⋆ Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad p(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z\,,\ y\,,\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z \right).$$

Montrer que p est une projection, et préciser ses éléments caractéristiques. ⋙ Aide

Exercice 5 ⋆ Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le vecteur $u = (1,2,-1)$ et les espaces

$$F = \mathrm{Vect}(u) \quad \text{et} \quad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y + z = 0\right\}.$$

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G, et celle de la projection q sur G parallèlement à F.

Exercice 6 ⋆⋆⋆ Soit E un espace vectoriel. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que $(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E) = \mathbf{0}$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E. ⋙ Aide
2) Déterminer une expression simple de la projection p sur $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$.
3) Vérifier que $f = ap + b(\mathrm{id}_E - p)$. En déduire l'expression de f^n pour $n \in \mathbb{N}$. ⋙ Aide

Exercice 7 ⋆⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on définit le polynôme $u(P)$ par

$$u(P)(x) = xP'(x).$$

1) Montrer que u induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2) On considère aussi $v, w \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])$ définis par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[x], \qquad v(P) = P(2) + P'', \quad w(P) = P' - P.$$

Vérifier que la famille (u,v,w) est libre.

Exercice 8 ⋆⋆ Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

1) Préciser $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$.
2) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.
3) Vérifier que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$.
4) Conclure que $(\mathrm{Ker}\, f) \cap (\mathrm{Im}\, g) = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Précisions en dimension finie

Exercice 9 ★★ Soit n, un entier supérieur à 2. Pour tout réel a, on pose

$$\varphi_a : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + a\,{}^t\!M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1) Vérifier que φ_a est un endomorphisme.
2) Dans cette question uniquement, on suppose $n = 2$.
   a) Donner la matrice de φ_a dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) On pose $\mathcal{C} = (E_1; E_2; E_3; E_4)$ où

   $$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Vérifier que $\mathcal{C}$ est une base et préciser la matrice de φ_a dans cette nouvelle base.
   c) À quelle condition sur a, φ_a est un isomorphisme ? ⋙ Aide
3) Généraliser le résultat précédent à $n \geqslant 2$. ⋙ Aide

Exercice 10 ★★★ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On suppose que

$$f \circ f = -\operatorname{id}_E .$$

1) f est-elle injective ? surjective ? bijective ? ⋙ Aide
2) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$.
   Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, montrer que $\big(x, f(x)\big)$ est une base de E. Préciser la matrice J de f dans cette base. ⋙ Aide
3) *Généralisation.* ⋙ Aide
   Justifier que dans le cas général d'une dimension n paire, il existe une base $\mathcal{B}$ pour laquelle, on a la matrice par blocs

   $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} J & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J & \ddots & 0_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & \cdots & J \end{bmatrix}.$$

Exercice 11 ★★ *Calculs des puissances par diagonalisation* Considérons l'application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \big(4x + 2y - z\,,\; 3x + 2y\,,\; -2x + 2y + 5z\big). \end{cases}$$

1) a) Déterminer une base du noyau de φ. Notons $\mathcal{B}_1$ cette base.
   b) On pose $E_6 = \operatorname{Ker}(\varphi - 6\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})$. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de E_6.
   c) On pose $E_5 = \operatorname{Ker}(\varphi - 5\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})$. Déterminer une base $\mathcal{B}_3$ de E_5.
2) Notons $\mathcal{B}$ la famille de $\mathbb{R}^3$ obtenue en concaténant les familles $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.
   Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ et $D = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
4) a) Soit $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})$. Déterminer P. Exprimer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})$ en fonction de P.
   b) Préciser $P^{-1}AP$.
   c) En déduire les puissances de A en fonction de P et D.

Exercice 12 ⋆⋆⋆ *Noyaux itérés* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie n.

1) a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+1})$.

b) Par un argument de dimension, justifier qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, tel que ⋙ Aide

$$\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1}).$$

c) i. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^{r+1}) = \mathrm{Ker}(f^{r+2})$. ⋙ Aide

ii. En déduire, par récurrence, que pour tout $p \geqslant r$, $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^r)$.

2) ⋙ Aide

a) Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(f^p)$.

b) Vérifier que pour tout $p \geqslant r$, $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^r)$ où r est défini à la question 1.(b).

Exercice 13 ⋆⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[x], \quad \varphi(P) = \big(a_0(P), a_1(P), \ \dots\ , a_n(P)\big),$$

où pour chaque $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k(P) = \displaystyle\int_0^1 t^k P(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que φ est linéaire.

2) Justifier que si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[x]$, $\displaystyle\int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = 0$. ⋙ Aide

3) Conclure en montrant que φ est un isomorphisme. ⋙ Aide

Exercice 14 ⋆⋆ Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prouver que $BA = I_2$.

Exercice 15 ⋆⋆⋆ *Une base de $\mathbb{R}_n[x]$* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour $k \in [\![0,n]\!]$, les polynômes

$$P_k(x) = (1-x)^k x^{n-k}.$$

1) Préciser le degré de P_k.

2) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Simplifier $\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P_i$. ⋙ Aide

3) En déduire que $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$. ⋙ Aide

4) a) Montrer que pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $\sum\limits_{k=i}^{n} \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$. ⋙ Aide

b) Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} x^j$ dans la base $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Exercice 16 ⋆⋆ Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On suppose que φ est de rang 1.

1) Montrer qu' il existe un nombre λ réel tel que $\varphi^2 = \lambda\varphi$ où φ^2 désigne $\varphi \circ \varphi$. ⋙ Aide
2) Montrer que si $\lambda \neq 1$, $\varphi - \mathrm{id}_E$ est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 17 ⋆⋆⋆ Soit φ un endomorphisme de E. *Source : oraux HEC 2018*

1) Montrer que si pour tout vecteur $u \in E$, $\big(\varphi(u),u\big)$ sont colinéaires, alors l'application φ est une homothétie. ⋙ Aide
2) On suppose φ un endomorphisme de dimension finie.
Démontrer que, si φ n'est pas une homothétie, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice M de φ a pour première colonne ⋙ Aide

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 18 ⋆⋆⋆ Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On considère la matrice J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall i,j \in [\![1,n]\!], \alpha = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\right\}$$

1) Montrer $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2) Montrer que l'application d définie sur $\mathcal{C}$ à valeurs réelles par :

$$d(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}$$

est une application linéaire surjective non injective.

3) a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $AJ = JA = \lambda J$.
   b) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{C}$. Montrer que AB appartient à $\mathcal{C}$ et calculer $d(AB)$.
   c) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{C}$. Montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{C}$ et trouver une relation entre $d(A)$ et $d\left(A^{-1}\right)$. ⋙ Aide
4) Montrer que $\mathrm{Ker}(d)$ et $\mathrm{Vect}(J)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}$. ⋙ Aide
5) Soit $(r,s) \in 2,n^2$. On note $A_{r,s}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf $a_{1,1} = a_{r,s} = 1$ et $a_{1,s} = a_{r,1} = -1$.
Démontrer que la famille $\left(A_{r,s}\right)_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ forme une base de $\mathrm{Ker}(d)$ et en déduire la dimension de $\mathcal{C}$. ⋙
Aide
6) Soit p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{C}$. Montrer que $B = \frac{d(A)}{n}J$ est solution de l'équation : $A^p - B^p = (A-B)^p$. ⋙ Aide

Exercice 19 ⋆ *Polynôme d'interpolation de Lagrange* Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon. Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1, \dots, a_n)$ une famille de nombres réels distincts deux à deux.

1) a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_i\left(a_j\right) = \delta_{i,j}$.
   b) Montrer que la famille $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
2) Soit $\pi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}[x], \pi(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$
   a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[x]$.
   b) Déterminer le noyau et l'image de π.
   c) On note $F = \left\{ Q \prod\limits_{i=1}^{n} (X - a_i), Q \in \mathbb{R}[x] \right\}$. Montrer que $F \oplus \mathbb{R}_{n-1}[x] = \mathbb{R}[x]$.
   d) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.
3) Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n, P \mapsto (P(a_i))_{i \in [\![1,n]\!]}$.
   a) Montrer que ε est un isomorphisme.
   b) Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (une application de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $P(a_i) = f(a_i)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
   Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1, \dots, a_n)$.
4) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. Soient $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R}), a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $a \leqslant a_1 < \cdots < a_n \leqslant b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1, \dots, a_n)$.
   a) Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ et K réel. On définit la fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ par
   $$t \mapsto f(t) - P(t) - K \prod_{i=1}^{n} (t - a_i)$$
   Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x) = 0$.
   b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\zeta \in [a, b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\zeta) = 0$
   c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, on a :
   $$\left|f(x) - P(x)\right| \leqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} |x - a_i|}{n!} \sup_{[a,b]} \left|f^{(n)}\right|.$$

Exercice 20 ⋆⋆⋆ *Matrices de permutations* Soit n un entier $\geqslant 2$. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) si $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $a_{i,j} \geqslant 0$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

ii) si on note $U = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$.

Ces matrices sont dites stochastiques.

1) a) $\mathcal{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? ⋙ Aide

b) Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}$ est un élément de $\mathcal{S}$.

c) Soit $A \in \mathcal{S}$ inversible. Son inverse A^{-1} est-il élément de $\mathcal{S}$?

2) Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Pour σ une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ (on parle aussi de permutation de $[\![1,n]\!]$), on définit l'endomorphisme f_σ de E par : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. On note A_σ la matrice de f_σ dans la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer que A_σ appartient à $\mathcal{S}$.

b) Montrer que A_σ est inversible et que A_σ^{-1} est élément de $\mathcal{S}$.

3) Dans cette question, soit A un élément de $\mathcal{S}$ inversible tel que son inverse appartiennent à $\mathcal{S}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ telle que $A = A_\sigma$.

Coup de pouce

Exercice 1.

2b. Si E est de dimension finie et $\mathcal{F}$ une famille libre, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \leqslant \dim(E)$.
3b. Poser $X = \tan(x)$. Rappelons que tangente réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Donner un systeme linéaire arec les λ_i a laide de Ínicité du développerment limité.

Exercice 3.

4. Notons E_{ij} la matrice élémentaire de taille (n,n). C'est-à-dire constituée de 0 sauf 1 en position (i,j). Étudier la famille formée des matrices E_{ii} pour $i \in [\![1;n]\!]$ et $E_{ij} - E_{ji}$ pour $i < j$.

Exercice 4.

p est un projecteur si p est linéaire et $p \circ p = p$. Calculer ensuite le noyau et l'image.

Exercice 6.

Notons $E_a = \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E)$ et $E_b = \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$.
1. Par analyse-synthèse, montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_a, x_b) \in E_a \times E_b$ tel que $x = x_a + x_b$. Par exemple

$$x_a = \frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E)(x).$$

3. C'est la formule du binôme de Newton.

Exercice 9.

2.c) φ_a est un isomorphisme si et seulement si la matrice de φ_a est inversible.
3. Notons S_n (resp. A_n) le s.e.v constitué des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de taille (n,n). Vérifier que $S_n \oplus A_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{C}$ une base adaptée à cette décomposition. Vérifier que la matrice de φ_a dans cette base est diagonale.

Exercice 10.

1. Oui, oui et oui !

L'application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E, f \circ g = \mathrm{id}_F$.
2. Appliquer f à chaque membre de l'égalité $\lambda x + \mu f(x) = 0_E$. Résoudre ensuite le système.
3. Procéder par récurrence :
Il existe $x_1 \in E$ tel que $(x_1, f(x_1))$ soit libre.
Il existe $x_2 \in E$ tel que $(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$ soit libre ...

Exercice 12.
1.b) On pourra étudier la suite $(d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ où $d_p = \dim\left(\mathrm{Ker}(f^p)\right)$. La suite $(d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\dim(E)$. Il existe r tel que $d_r = d_{r+1}$.
c.i. Raisonner par double inclusion. On a déja $\mathrm{Ker}\, f^r \subset \mathrm{Ker}\, f^{r+1}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f^{r+2}$. On a $f(x) \in \mathrm{Ker}\, f^{r+1} = \mathrm{Ker}\, f^r$ ...
2. Utiliser les résultats précédents à l'aide de la formule du rang.
Pour rappel, si F et G sont deux s.e.v avec $F \subset G$ alors $F = G$ si et seulement si $\dim F = \dim G$.

Exercice 13.
2. $P \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ donc pour $k \in [\![1; n]\!]$, $\int_0^1 t^k P(t)\, dt = 0$. Ensuite, écrire $Q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$...
3. Montrer que le noyau est trivial en prenant $P = Q$. Que peut-on en déduire sur l'injectivité ?

Exercice 14.
Détaillons une preuve. Soient (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f, g les endomorphismes canoniquement associés à A et B.
Vérifier que $g(e_2)$ et $g(e_3)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $\mathcal{C}$ cette base.
Calculer la matrice de $g \circ f$ dans cette nouvelle base. Conclure.

Exercice 15.
2. C'est la formule du binôme de Newton.
3. Justifier que la famille est génératrice. Compter ensuite son nombre d'élements.
4.a) Par récurrence ou telescopage avec la formule du triangle de Pascal.

Exercice 16.
1. Soit $u \in E \setminus \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $(e_1, \cdots, e_p)$ une base du noyau. Montrer $(u,e_1, \cdots ,e_p)$ est une base de E. En déduire que pour tout $x \in E$, $\varphi(\varphi(x)) = \lambda\varphi(x)$ pour un lambda bien choisi à partir de u.

Exercice 17.
Détaillons les différentes étapes de la question 1.
a. Montrer que si $u \neq 0_\mathrm{E}$, il existe un unique scalaire λ_u tel que $\varphi(u) = \lambda_u u$. Que dire si $u = 0_\mathrm{E}$?
b. Soit (u, v) une famille libre de vecteurs de E. Comparer λ_u et λ_v.
c. Montrer que φ est une homothétie.
2. Il existe $u \in E$ tel que $\left(\varphi(u),u\right)$ soit libre. Compléter en une base.

Exercice 18.
3.c) Montrer que $d(A) = 1/d(A^{-1})$.
4. $\mathrm{Ker}(d)$ est un hyperplan de $\mathcal{C}$, $\dim(\mathrm{Vect}(J)) = 1$ et calculer $\mathrm{Ker}(d) \cap \mathrm{Vect}(J)$.
5. Vérifier que $\dim(\mathcal{C}) = (n-1)^2 + 1$ en utilisant la dimension de $\mathrm{Ker}(d)$.
6. Formule du binôme de Newton.

Exercice 20.
1.a) Non, à caude de la condition i).
1.c) Non, trouver un contre-exemple pour $n = 2$ car on dispose d'une fomrule explicite de l'inverse.

Solutions

Exercice 1.

1) Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ et λ_4 quatre réels tels que $\lambda_1\cdot\varepsilon_1+\lambda_2\cdot\varepsilon_2+\lambda_3\cdot\varepsilon_3+\lambda_4\cdot\varepsilon_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. C'est équivalent à

$$\begin{gathered}(3\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4,-\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4,\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4,\lambda_4)=(0,0,0,0)\end{gathered}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4 & = & 0\\ -\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3+\lambda_4 & = & 0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & = & 0\\ \lambda_4 & = & 0\end{array}\right. .$$

Par un pivot de Gauss, on montre que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. La famille est libre.

2) a) Comme précédenement, on suppose l'existence de quatre réels $\lambda_1,\cdots,\lambda_4$ tels que

$$\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 C+\lambda_4 D=0_2.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{bmatrix}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 & \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Par unicité des coefficients d'une matrice, on obtient le système linéaire :

$$\mathcal{S}\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2\qquad+\lambda_4 & = & 0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\qquad & = & 0\\ \lambda_1\qquad+\lambda_3+\lambda_4 & = & 0\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & = & 0\end{array}\right. .$$

Résolvons ce système par un pivot de Gauss,

$$\mathcal{S}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2\qquad+\lambda_4 & = & 0\\ \lambda_3-\lambda_4 & = & 0\\ -\lambda_2+\lambda_3\qquad & = & 0\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_4\leftarrow L_4+L_3\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2\qquad+\lambda_4 & = & 0\\ \lambda_3-\lambda_4 & = & 0\\ -\lambda_2+\lambda_3\qquad & = & 0\\ 2\lambda_3+\lambda_4 & = & 0\end{array}\right. .$$

On en déduit que $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\lambda_1=0$.

$$\boxed{\text{La famille } (A,B,C,D) \text{ est libre.}}$$

b) Une famille à 5 vecteurs dans un espace de dimension 4 ne peut être libre. En étudiant les relations de linéarité, on montre que :

$$-3I_2+2A-B-C+2D=0_2.$$

$$\boxed{\text{La famille } (A,B,C,D,I_2) \text{ n'est pas libre.}}$$

3) a) Soient λ_1, λ_2 et λ_3, trois réels tels que

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3 = \mathbf{0}.$$

($\mathbf{0}$ désigne ici l'application nulle). Dit autrement,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \lambda_1 \ln(x) + \lambda_2 \exp(x) + \lambda_3 x = 0.$$

On divise par $\exp(x) \neq 0$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \lambda_1 \frac{\ln(x)}{\exp(x)} + \lambda_2 + \lambda_3 \frac{x}{\exp(x)} = 0.$$

Or, par *les croissances comparées*,

$$\lambda_1 \frac{\ln(x)}{\exp(x)} + \lambda_2 + \lambda_3 \frac{x}{\exp(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda_2.$$

Par unicité de la limite, $\lambda_2 = 0.$

On en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \lambda_1 \ln(x) + \lambda_3 x = 0.$$

À ce stade, on peut procéder de même en divisant par x. On peut aussi simplement considérer $x = 1$,

$$\lambda_1 \ln(1) + \lambda_3 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 0.$$

Nécessairement, $\lambda_1 = 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{La famille } (f_1, f_2, f_3) \text{ est libre.}}$$

b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \tan + \lambda_2 \tan^2 + \lambda_3 \tan^3 + \cdots + \lambda_n \tan^n = \mathbf{0}.$$

Comme l'application tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \cdots + \lambda_n x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_1 = 0.$$

$$\boxed{\text{La famille } (\tan^i)_{i \in [\![1;n]\!]} \text{ est libre.}}$$

Exercice 2.

1) On a, par composition à partir des DLs usuels des fonctions cosinus et sinus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4) \\
1 + \sin(x^2) &= 1 + x^2 + o_0(x^4) \\
\cos(2x) &= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4).
\end{aligned}$$

2) Soient λ_1,λ_2 et λ_3, trois réels tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = \mathbf{0} \quad \left(\substack{\text{application}\\ \text{nulle}}\right).$$

C'est-à-dire, pour *tout réel* x,

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2\big(1 + \sin(x^2)\big) + \lambda_3 \cos(2x) = 0.$$

Grâce aux développements précédent :

$$\lambda_1\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4)\Big) + \lambda_2\Big(1 + x^2 + o_0(x^4)\Big) + \lambda_3\Big(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4)\Big) = 0.$$

On regroupe les termes :

$$\Big(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\Big) + \Big(-\frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3\Big)x^2 + \Big(\frac{1}{24}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_3\Big) + o_0(x^4) = 0.$$

Par unicité du développement limité :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 0 \\ \frac{1}{24}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 24L_3}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + 16\,\lambda_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

La résolution de ce système à l'aide d'un pivot de Gauss donne $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (f_1,f_2,f_3) \text{ est libre.}}$$

Exercice 3.

1) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} & M \in E_1 \\ \Longleftrightarrow\quad & \exists\, a,b,c,d \in \mathbb{K},\ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ & \qquad \text{avec} \quad a + b + c + d = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \exists\, a,b,c \in \mathbb{K},\ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{bmatrix} \\ \Longleftrightarrow\quad & \exists\, a,b,c \in \mathbb{K}, \\ & M = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A_2} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A_3} \end{aligned}$$

On a donc l'équivalence :

$$M \in E_1 \iff M \in \mathrm{Vect}(A_1,A_2,A_3).$$

Puis, $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}(A_1,A_2,A_3).}$

La famille (A_1,A_2,A_3) est génératrice de E_1. On vérifie que la famille est libre, c'est donc une base de E_1. Elle contient 3 vecteurs. Concluons :

$$\boxed{\dim E_1 = 3.}$$

2) Une base de E_2 est donnée par les polynômes P_1, P_2, P_3 définis par

$$P_1(x) = x - 4, \quad P_2(x) = (x-4)^2, \quad P_3(x) = (x-4)^3.$$

D'où
$$\dim E_2 = 3.$$

3) Si E_{ij} désigne la matrice élémentaire de taille (n,n) ne contenant que des 0 sauf un "1"en position (i,j), alors les matrices $(E_{ii})_{i\in[\![1,n]\!]}$ forment une base de E_3.

$$\dim E_3 = n.$$

4) Verifier que les matrices E_{ii} pour $i \in [\![1,n]\!]$, $E_{ij} + E_{ji}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ forment une base de E_4. Donc

$$\dim E_4 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 4.

• Vérifions d'abord que $p^2 = p$. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} p^2(x,y,z) &= p\big(p(x,y,z)\big) = p\Big(\big(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y - \tfrac{1}{2}z\,,\ y\,, -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z\big)\Big) \\ &= \big(\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y - \tfrac{1}{2}z) - \tfrac{1}{4}y - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z)\,,\ y\,, \\ &\qquad -\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y - \tfrac{1}{2}z) - \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z)\ \big) \\ &= \big(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y - \tfrac{1}{2}z, y, -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{2}z\big). \end{aligned}$$

On a bien : $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, p^2(x,y,z) = p(x,y,z)$.

L'application est linéaire et $p \circ p = p$, c'est un projecteur.

• On sait alors par théorème que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, et que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
Il reste à déterminer ces deux espaces. Avec les méthodes vues en début de chapitre, on montre que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\big((1,0,1)\big)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{Im}(p) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y + 2z = 0\big\}.}$$

Exercice 5.

1) On sait que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G \iff (\forall a \in \mathbb{R}^3, \exists!(b,c) \in F \times G, a = b + c)$.
Raisonnons par analyse-synthèse.

• *Analyse.*
Soit $a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $a = b + c$ avec $(b,c) \in F \times G$. Comme $b \in F$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $b = \lambda u$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} c \in G &\iff a - \lambda u \in G \iff (x,y,z) - \lambda(1,2,-1) \in G \\ &\iff (x - \lambda, y - 2\lambda, z + \lambda) \in G \\ &\iff 2(x - \lambda) + y - 2\lambda + z + \lambda = 0 \iff \lambda = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z. \end{aligned}$$

Donc, nécessairement, $b = \lambda u$ et $c = a - \lambda u$ où λ est la solution du système précédent. Ceci clôt la partie « unicité ».

- *Synthèse.*
Soient b et c les vecteurs donnés par l'analyse. Alors
- $b + c = \lambda u + (a - \lambda u) = a$.
- $b = \lambda u \in G$.
- Comme $c \in G$ a été résolu par équivalence, on a $c = a - \lambda u \in G$.
Ce qui termine la synthèse.
- *Conclusion* : $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^3.}$

2) De plus, avec les calculs précédents, on sait que pour tout $a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, en reprenant les notations ci-dessus, l'écriture $a = b + c$ est l'unique décomposition de a comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
On en déduit, par définition des projections, que

$$p(a) = b = \lambda u = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right)\big(1,2,-1\big),$$

donc : $\boxed{p(a) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z,\ \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z,\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z\right),}$

et : $q(a) = c = (x,y,z) - p(a)$, donc après simplification

$$\boxed{q(a) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z,\ -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z,\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}z\right).}$$

Exercice 6.

Notons $E_a = \operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E)$ et $E_b = \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$.

1) On veut montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_a,x_b) \in E_a \times E_b$ tel que $x = x_a + x_b$.
On raisonne par analyse-synthèse.

- *Analyse.*
Soit $x \in E$. Supposons que $(x_a,x_b) \in E_a \times E_b$ vérifie $x = x_a + x_b$.
Comme $x_a \in E_a$, on a $(f - a\,\mathrm{id}_E)(x_a) = 0_E$, i.e. $f(x_a) - ax_a = 0_E$, et ainsi $f(x_a) = ax_a$. De même, puisque $x_b \in E_b$, $f(x_b) = bx_b$. Alors

$$\begin{cases} x = x_a + x_b & (1) \\ f(x) = f(x_a) + f(x_b) = ax_a + bx_b & (2). \end{cases}$$

En faisant « $(2) - b(1)$ », on obtient : $f(x) - bx = ax_a - bx_a$, que l'on reformule ainsi (puisque $a \neq b$) : $x_a = \dfrac{1}{a-b}\big(f(x) - bx\big) = \dfrac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E)(x)$. Ainsi il n'y a qu'une seule valeur possible pour x_a.
Enfin $x_b = x - x_a = \dfrac{1}{b-a}(f - a\,\mathrm{id}_E)(x)$: il n'y a qu'une seule valeur possible pour x_b. Ceci clôt la partie « unicité ».

- *Synthèse.*
Soit $x \in E$. Posons

$$x_a = \frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E)(x) \quad \text{et} \quad x_b = \frac{1}{b-a}(f - a\,\mathrm{id}_E)(x).$$

Alors, par linéarité de $f - a\,\mathrm{id}_E$:

$$(f - a\,\mathrm{id}_E)(x_a) = \frac{1}{a-b}(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E)(x) = 0_E,$$

car $(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E) = 0$ par hypothèse. Ainsi $x_a \in E_a$.
Comme $f - a\,\mathrm{id}_E$ et $f - b\,\mathrm{id}_E$ commutent, on a de même : $x_b \in E_b$. Enfin

$$x_a + x_b = \frac{1}{a-b}\big(f - b\,\mathrm{id}_E - f + a\,\mathrm{id}_E\big)(x) = \frac{1}{a-b}(a-b)\,\mathrm{id}_E(x) = x.$$

- Finalement : $\boxed{E = E_a \oplus E_b.}$

2) De plus, on vient de voir que pour tout $x \in E$, l'écriture

$$x = \frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E)(x) + \frac{1}{b-a}(f - a\,\mathrm{id}_E)(x)$$

est l'unique décomposition de x comme somme d'un vecteur de E_a et d'un vecteur de E_b. Par définition de p, on a : $\quad p(x) = \dfrac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E)(x)$, et donc :

$$\boxed{p = \frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E).}$$

3) Pour $x \in E$, en reprenant la notation $x = x_a + x_b$ de la question précédente, on a $f(x) = ax_a + bx_b$ (car $x_a \in E_a$ et $x_b \in E_b$).
Or $x_a = p(x)$ et $x_b = x - x_a = x - p(x) = (\mathrm{id}_E - p)(x)$, donc

$$f(x) = ap(x) + b(\mathrm{id}_E - p)(x).$$

Ceci étant valable pour tout $x \in E$, on a l'égalité au niveau des endomorphismes :

$$\boxed{f = ap + b(\mathrm{id}_E - p).}$$

On a $f^0 = \mathrm{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme ap et $b(p - \mathrm{id}_E)$ sont deux endomorphismes qui commutent, on peut appliquer la *formule du binôme de Newton* :

$$f^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ap)^k \circ \big(b(\mathrm{id}_E - p)\big)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} p^k \circ (\mathrm{id}_E - p)^{n-k}.$$

On remarque que $p \circ (\mathrm{id}_E - p) = p - p^2 = 0$. Alors, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a

$$p^k \circ (\mathrm{id}_E - p)^{n-k} = p^{k-1} \circ (p \circ (\mathrm{id}_E - p)) \circ (\mathrm{id}_E - p)^{n-k-1} = 0$$

Ainsi, uniquement les termes pour $k = 0$ et $k = n$ sont non nuls. D'où

$$f^n = \binom{n}{0} b^n (\mathrm{id}_E - p) + \binom{n}{n} a^n p = \boxed{a^n p + b^n (\mathrm{id}_E - p).}$$

Exercice 7.

1) - Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on a

$$\deg(u(P)) = \deg(xP'(x)) = \deg(x) + \deg(P') = 1 + \deg(P') \leqslant 1 + \deg(P) - 1 \leqslant n,$$

donc $u(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.

- Soient $P,Q \in \mathbb{R}_n[x]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, par linéarité de la dérivation :

$$u(P+\lambda Q)(x) = x(P+\lambda Q)'(x) = x(P'(x)+\lambda Q'(x)) = xP'(x)+\lambda xQ'(x) = u(P)(x)+\lambda u(Q)(x).$$

Ainsi u est linéaire, et finalement : $\boxed{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x]).}$

2) Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que : $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])}$.
Cela signifie que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$,

$$\lambda_1 u(P) + \lambda_2 v(P) + \lambda_3 w(P) = 0_{\mathbb{R}_n[x]}$$
$$\lambda_1 xP'(x) + \lambda_2\big(P(2) + P''(x)\big) + \lambda_3(P'(x) - P(x)) = 0_{\mathbb{R}_n[x]}.$$

En particulier, en prenant $P = 1$, on a $P' = P'' = 0$ et $P(2) = 1$, donc il reste : $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$, donc $\lambda_2 = \lambda_3$.
En prenant maintenant $P(x) = x - 2$ (cela est possible car $n \geqslant 1$), on a $P' = 1$, $P'' = 0$, $P(2) = 0$, donc il reste : $\lambda_1 x + \lambda_3(1 - x + 2) = 0$, autrement dit

$$(\lambda_1 - \lambda_3)x + 3\lambda_3 = 0.$$

Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls. On a donc $\lambda_1 - \lambda_3 = 0$ et $3\lambda_3 = 0$. Finalement : $\lambda_3 = 0$, et $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.
On conclut que $\boxed{\text{la famille } (u,v,w) \text{ est libre.}}$

Exercice 8.

1) On a $f \circ g = \mathrm{id}_E$, et id_E est surjective, donc f est surjective : $\boxed{\operatorname{Im} f = E.}$

On a aussi $f \circ g = \mathrm{id}_E$, et id_E est injective, donc g est injective : $\boxed{\operatorname{Ker} g = \{0_E\}.}$

2) Raisonnons par double inclusion.

•Soit $y \in \operatorname{Im}(g\circ f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g\circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, ce qui montre que $y \in \operatorname{Im} g$.
On en déduit : $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$. Montrons l'autre inclusion.
•Soit $y \in \operatorname{Im} g$.
Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$, et comme $f \circ g = \mathrm{id}_E$, $x = f \circ g(x)$, d'où $y = g \circ f \circ g(x)$, ce qui montre en particulier que $y \in \operatorname{Im}(g \circ f)$. Ceci étant valable pour tout $y \in \operatorname{Im} g$, on a montré la deuxième inclusion $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(g \circ f)$. Finalement

$$\boxed{\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g.}$$

3) •Soit $x \in \operatorname{Ker} f$.
Alors $f(x) = 0_E$, donc $g\big(f(x)\big) = 0_E$, i.e. $g \circ f(x) = 0_E$, et ainsi $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
On en déduit $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$. Montrons l'autre inclusion.
•Soit $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
Alors $g\big(f(x)\big) = 0_E$, donc $f\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = 0_E$, i.e. $f \circ g\big(f(x)\big) = 0_E$, et comme $f \circ g = \mathrm{id}_E$, on obtient $f(x) = 0_E$, i.e. $x \in \operatorname{Ker} f$. Ceci étant valable pour tout $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, on a montré $\operatorname{Ker}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$.
Finalement $\boxed{\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f.}$

4) Soit $x \in (\operatorname{Ker} f) \cap (\operatorname{Im} g)$.
Comme $x \in \operatorname{Im} g$, il existe $y \in E$ tel que $x = g(y)$.
Comme $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $f(x) = 0_E$, donc $f\big(g(y)\big) = 0_E$, c'est à dire $f \circ g(y) = 0_E$.
Or par hypothèse, $f \circ g = \mathrm{id}_E$, donc $f \circ g(y) = y$. On obtient $y = 0_E$, et donc $x = g(y) = 0_E$.
Ainsi : $\boxed{(\operatorname{Ker} f) \cap (\operatorname{Im} g) = \{0_E\}.}$
(On n'a montré qu'une inclusion, mais l'autre inclusion est immédiate.)

Exercice 9.

Solution en cours.

Exercice 10.

1) On a
$$f \circ (-f) = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad (-f) \circ f = \mathrm{id}_E\,.$$
Par la caractérisation de la bijectivité, f est bijective (donc injective et surjective) avec $f^{-1} = -f$.

2) Par hypothèse $f \neq \mathrm{id}_E$. Il existe alors $u \in E$ tel que $f(u) \neq u$. Montrons que $(u,f(u))$ est une base de E. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\lambda \cdot u + \mu \cdot f(u) = 0_E \quad (L_1).$$
On applique f
$$\begin{aligned} f\big(\lambda \cdot u + \mu \cdot f(u)\big) &= f(0_E) \\ \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f^2(u) &= 0_E && \text{f linéaire} \\ \lambda \cdot f(u) - \mu \cdot u &= 0_E \quad (L_2) && f^2 = -\mathrm{id}_E \end{aligned}$$
En effectuant $\lambda L_1 - \mu L_2$, on trouve $\quad (\lambda^2 + \mu^2) \cdot u = 0_E$.

Or $u \neq 0_E$ car $f(0_E) = 0_E$, alors que $f(u) \neq u$. Donc $\lambda^2 + \mu^2 = 0$. Une somme de carrés de réels (donc positifs) ne peut être nulle que si tous les termes sont nuls. Donc $\lambda = \mu = 0$ et la famille $(u,f(u))$ est libre. De plus, $\operatorname{card}\big(u,f(u)\big) = 2 = \dim(E)$. C'est une base de E.
Posons $v = f(u)$ de sorte que $f(v) = f^2(u) = -u$.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } (u,v) \text{ est } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.}$$

3) Verifier par récurrence qu' il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que la famille
$$(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2), \dots, x_n, f(x_n)))$$
soit une base de E.
Pour cela, prendre $x_2 \notin \operatorname{Vect}(x_1, f(x_1))$, puis, $x_3 \notin \operatorname{Vect}(x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$, etc. La base ainsi obtenue est solution.

Exercice 11.

Solution en cours.

Exercice 12.

1) a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \mathrm{Ker}(f^p)$, par définition, $f^p(u) = 0_E$. Par composition par l'application f,

$$f^{p+1}(u) = f\big(f^p(u)\big) = f(0_E) = 0_E.$$

Puis, $u \in \mathrm{Ker}(f^{p+1})$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+1}).}$$

b) Précisons que $\mathrm{Ker}(f^p)$ est un sous-espace vectoriel de E, lui même de dimension finie $n = \dim(E)$. Ainsi $d_p \in [\![0;n]\!]$. De plus, la question précédente impose la croissance de la suite $(d_p)_{p\in\mathbb{N}}$. En effet,

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{Ker}(f^p) & \subset & \mathrm{Ker}(f^{p+1}) \\ \Rightarrow & \dim\big(\mathrm{Ker}(f^p)\big) & \leqslant & \dim\big(\mathrm{Ker}(f^{p+1})\big) \\ \Rightarrow & d_p & \leqslant & d_{p+1}. \end{array}$$

Justifions qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $d_r = d_{r+1}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k < d_{k+1}$.
Comme la suite $(d_k)_k$ est une suite d'entier strictement croissante, on a

$$d_{k+1} \geqslant d_k + 1.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$d_p - d_0 = \sum_{k=0}^{p-1} \big(d_{k+1} - d_k\big) \geqslant p.$$

On en déduit que la suite tend vers $+\infty$. C'est en contradiction avec la majoration par n.
Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ tel que $d_r = d_{r+1}$. Autrement dit,

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f^r)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f^{r+1})\big)$$

et, $$\mathrm{Ker}(f^r) \subset \mathrm{Ker}(f^{r+1})$$

Conclusion : $$\boxed{\mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1}).}$$

c) i. Raisonnons par double inclusion.
On a vu à la première question que

$$\mathrm{Ker}(f^{r+1}) \subset \mathrm{Ker}(f^{r+2}).$$

Inversement, justifions que $\mathrm{Ker}(f^{r+2}) \subset \mathrm{Ker}(f^{r+1})$. Soit $u \in \mathrm{Ker}(f^{r+2})$, on a

$$\begin{array}{rcl} f^{r+2}(u) = 0_E & \Rightarrow & f^{r+1}\big(f(u)\big) = 0_E \\ & \Rightarrow & f(u) \in \mathrm{Ker}(f^{r+1}). \end{array}$$

Par hypothèse, $f(u) \in \mathrm{Ker}(f^{r+1}) = \mathrm{Ker}(f^r)$. Autrement dit $f^{r+1}(u) = f^r\big(f(u)\big) = 0_E$. C'est-à-dire $u \in \mathrm{Ker}(f^{r+1})$. On a justifié que

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f^{r+2}) = \mathrm{Ker}(f^{r+1}).}$$

ii. Procédons par récurrence. Pour $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(i) : \ \mathrm{Ker}(f^r) = \mathrm{Ker}(f^{r+1}) = \cdots = \mathrm{Ker}(f^{r+i}).$$

• *Initialisation.* $\mathcal{P}(1)$ découle directement de la question précédente.

• *Hérédité.* Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(i)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(i+1)$.
Sachant que $\mathrm{Ker}(f^{r+i-1}) = \mathrm{Ker}(f^{r+i})$, en raisonnant comme à la question précédente, on a $\mathrm{Ker}(f^{r+i}) = \mathrm{Ker}(f^{r+i+1})$. Ce qui prouve $\mathcal{P}(i+1)$.

• *Conclusion.* Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(i)$ est vraie.

2) a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $v \in \mathrm{Im}(f^{p+1})$, il existe $u \in E$ tel que $f^{p+1}(u) = v$. Si on pose $w = f(u)$,

$$v = f^{p+1}(u) = f^p\big(f(u)\big) = f^p(w).$$

$v \in \mathrm{Im}(f^p)$. En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(f^p).}$$

b) Soit $p \geqslant r$. D'après *la formule du rang,*

$$\mathrm{rg}(f^p) + \dim\big(\mathrm{Ker}(f^p)\big) = \dim(E).$$

$$\mathrm{rg}(f^r) + \dim\big(\mathrm{Ker}(f^r)\big) = \dim(E).$$

Sachant que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^r)$, on obtient

$$\mathrm{rg}(f^p) = \mathrm{rg}(f^r).$$

C'est-à-dire,
$$\dim\big(\mathrm{Im}(f^p)\big) = \dim\big(\mathrm{Im}(f^r)\big).$$

Or, en utilisant la question précédente,

$$\mathrm{Im}(f^p) \subset \mathrm{Im}(f^r).$$

D'où,
$$\boxed{\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^r).}$$

Exercice 13.

1) Soient $P,Q \in \mathbb{R}_n[x]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour chaque $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
a_k(P+\lambda Q) &= \int_0^1 t^k(P+\lambda Q)(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(t^kP(t) + \lambda t^kQ(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^kP(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_0^1 t^kQ(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
a_k(P+\lambda Q) &= a_k(P) + \lambda a_k(Q).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\varphi(P+\lambda Q) &= \Big(a_k(P+\lambda Q)\Big)_{0\leqslant k\leqslant n} = \Big(a_k(P)\Big)_{0\leqslant k\leqslant n} + \lambda\Big(a_k(Q)\Big)_{0\leqslant k\leqslant n} \\
&= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

2) Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Cela signifie que $\varphi(P) = (0, \ldots, 0)$, donc que

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad \int_0^1 t^k P(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Il existe $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} b_k t^k\Big) P(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} b_k t^k P(t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k \int_0^1 t^k P(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
\int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot 0 \quad \text{car } P \in \mathrm{Ker}(\varphi).
\end{aligned}$$

Ainsi, $$\boxed{\int_0^1 Q(t)P(t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

3) •Déterminons $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On peut appliquer le résultat de la question précédente, et on choisit $Q = P$ (c'est possible car $P \in \mathbb{R}_n[x]$). On obtient $\int_0^1 \big(P(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = 0$.
Or l'application $t \longmapsto \big(P(t)\big)^2$ est continue et positive ou nulle sur $[0,1]$, donc le fait que l'intégrale soit nulle entraîne que pour tout $t \in [0,1]$, $\big(P(t)\big)^2 = 0$, donc $P(t) = 0$.
Ainsi P admet une infinité de racines, donc $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$.
On conclut que $\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}[x]}\}.}$

•L'application φ est ainsi linéaire et injective, et ses espaces de départ et d'arrivée, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$, sont de dimension finie et ont même dimension (égale à $n+1$), on sait alors qu'il résulte du *théorème du rang* que φ est bijective.
Autrement dit : $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme.}}$

Exercice 14.

Reprenons l'indication.

• Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda g\,(e_2) + \mu g\,(e_3) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Montrons que $\lambda = \mu = 0$. Appliquons f à chaque membre de l'égalité

$$\begin{aligned}
f\,(0_{\mathbb{R}^2}) &= f\,(\lambda g\,(e_2) + \mu g\,(e_3)) \\
0_{\mathbb{R}^3} &= \lambda f \circ g\,(e_2) + \mu f \circ g\,(e_3)
\end{aligned}$$

par linearité de f. Or la condition sur AB impose

$$f \circ g\,(e_2) = e_2 \quad \text{et} \quad f \circ g\,(e_3) = e_3.$$

Ainsi $0_{\mathbb{R}^3} = \lambda e_2 + \mu e_3$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, (e_2, e_3) est libre et $\lambda = \mu = 0$. La famille $(g(e_2), g(e_3))$ est une famille libre dans un espace de dimension 2, c'est une base.

- On a

$$g \circ f(g(e_2)) = g(f \circ g(e_2)) = g(e_2) \quad \text{et} \quad g \circ f(g(e_3)) = g(e_3)$$

Dès lors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(g \circ f) = I_2.$$

L'application $g \circ f$ est l'application identité et $BA = I_2$.

Exercice 15.

1) Soit $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(P_k) = \deg(x^k) + \deg\left((1-x)^{n-k}\right) = k + (n-k) = n$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}P_i(x) &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(1-x)^i x^{n-i}\\ &= x^{n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(1-x)^i x^{k-i}\\ &= x^{n-k}\big((1-x)+x\big)^k = x^{n-k}.\end{aligned}$$

formule du binôme de Newton

En particulier, tout polynôme x^k avec $k \in [\![0,n]\!]$ s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

3) De la question précédente,

$$\mathrm{Vect}\left((x^k)_{0\leqslant k\leqslant n}\right) \subset \mathrm{Vect}\left((P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\right).$$

Or, $(x^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, $\quad \mathbb{R}_n[x] = \mathrm{Vect}\left((x^k)_{0\leqslant k\leqslant n}\right)$.Ainsi

$$\mathbb{R}_n[x] \subset \mathrm{Vect}\left((P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\right).$$

De plus, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P_k \in \mathbb{R}_n[x]$, $\quad \mathrm{Vect}\left((P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\right) \subset \mathbb{R}_n[x]$.
Par double-inclusion $\quad \mathrm{Vect}\left((P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\right) = \mathbb{R}_n[x]$.

$(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathrm{card}\left(P_k\right)_{0\leqslant k\leqslant n} = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$.
Donc : $\quad \boxed{(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[x].}$

4) a) D'après *la formule du triangle de Pascal*, pour tout $(i,k) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{k+1}{i+1} = \binom{k}{i+1} + \binom{k}{i}$.

$$\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i} = \underbrace{\sum_{k=i}^{n}\left(\binom{k+1}{i+1} - \binom{k}{i+1}\right)}_{\text{Somme télescopique}} = \binom{n+1}{i+1} - \binom{i}{i+1} = \boxed{\binom{n+1}{i+1}}.$$

b)
$$\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_{j=0}^{n} x^{j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} && \text{changement d'indice } k = n - j \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P_i(x) && \text{question 2)} \\
&= \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} \binom{k}{i} P_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n} P_i(x) \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} && \text{inversion de l'ordre de sommation} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} P_i(x).
\end{aligned}$$

Les coordonnées de Q dans la base $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ sont $\left(\binom{n+1}{1}, \binom{n+1}{2}, \dots, \binom{n+1}{n+1}\right)$.

Exercice 16.

1) D'apres la formule du rang

$$\dim \operatorname{Ker} p = \dim E - \operatorname{rg}(\varphi) = n - 1.$$

Autrement dit, le noyau admet un supplémentaire de dimension 1 . Il existe donc $u_0 \in E \setminus \operatorname{Ker} p$ tel que

$$\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Vect}(u_0) = E.$$

Comme $\varphi(u_0) \in E$, il existe $u_k \in \ker p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_k + \lambda u_0 = \varphi(u_0).$$

Puis

$$\varphi^2(u_0) = \varphi(\varphi(u_0)) = \varphi(u_k + \lambda u_0) = \varphi(u_k) + \lambda\varphi(u_0) = \lambda\varphi(u_0).$$

Vérifions que ce réel λ répond au problème. Soit $u \in E$, il existe $v \in \operatorname{Ker}\varphi$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$v + \mu u_0 = u.$$

Puis

$$\begin{aligned}
\varphi^2(u) = \varphi^2(v + \mu u_0) &= \varphi(\varphi(v) + \mu\varphi(u_0)) \\
&= \varphi(\mu\varphi(u_0)) \\
&= \mu\varphi^2(u_0) = \mu\lambda\varphi(u_0) \\
&= \lambda\varphi(\mu u_0) \\
&= \lambda\varphi(\mu u_0 + v) = \lambda\varphi(u).
\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $u \in E$, $\varphi^2 = \lambda\varphi$.

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cherchons l'inverse sous la forme $\alpha\varphi + \beta\,\mathrm{id}_E$.

$$\begin{aligned}(\alpha\varphi + \beta\,\mathrm{id}_E) \circ (\varphi - \mathrm{id}_E) &= \alpha\varphi^2 + \beta\varphi - \alpha\varphi - \beta\,\mathrm{id}_E \\ &= \alpha\lambda\varphi + \beta\varphi - \alpha\varphi - \beta\,\mathrm{id}_E \\ &= (\alpha\lambda + \beta - \alpha) - \beta\,\mathrm{id}_E\,.\end{aligned}$$

On constate que

$$\begin{cases} \alpha\lambda + \beta - \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\lambda - 1) = -\beta = 1 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/(\lambda - 1) \\ \beta = -1. \end{cases}$$

Avec ce choix,

$$\left(\frac{1}{\lambda - 1}\varphi - \mathrm{id}_E\right) \circ (\varphi - \mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E$$
$$\text{et } (\varphi - \mathrm{id}_E) \circ \left(\frac{1}{\lambda - 1}\varphi - \mathrm{id}_E\right) = \mathrm{id}_E\,.$$

Par la caractérisation de la bijectivité, $\varphi - \mathrm{id}_E$ est bijective et

$$\boxed{(\varphi - \mathrm{id}_E)^{-1} = \frac{1}{\lambda - 1}\varphi - \mathrm{id}_E\,.}$$

Exercice 17.

1) On suppose donc que pour tout $u \in E$, il existe $\lambda_u \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(u) = \lambda_u u$. Ce réel λ_u est même unique pour tout vecteur u non nul. Justifions que pour tous $u, v \in E$ (non nuls) $\lambda_u = \lambda_v$.
Par linéarité de φ

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) = \lambda_u u + \lambda_v v.$$

Or, on a aussi

$$\varphi(u + v) = \lambda_{u+v}(u + v) = \lambda_{u+v}u + \lambda_{u+v}v.$$

- Si les vecteurs u et v sont non colinéaires, la famile (u,v) est libre. L'égalité

$$\lambda_u u + \lambda_v v = \lambda_{u+v}u + \lambda_{u+v}v$$

impose $\lambda_u = \lambda_{u+v} = \lambda_v$.
- Si les vecteurs u et v sont colinéaires (il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mu v$). Dans ce cas,

$$\lambda_u u = \varphi(u) = \varphi(\mu v) = \mu\varphi(v) = \mu\lambda_v v = \lambda_v \cdot (\mu v) = \lambda_v u.$$

Pour $u \neq 0_E$, $\lambda_u = \lambda_v$.
- En résumé, le réel λ_u est indépendant de $u \in E \setminus \{0_E\}$, on le note simplement λ. Comme $\varphi\,(0_E) = 0_E = \lambda 0_E$, on a bien

$$\forall\, u \in E, \quad \varphi(u) = \lambda u.$$

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \varphi \text{ est une homothétie.}}$$

2) Si φ n'est pas une homothétie, il existe $u \in E$ tel que $(u,\varphi(u))$ soit libre. On complète cette famille en une base $\mathcal{B}$ de E pour obtenir une solution au problème.

Exercice 18. *Source Oral ESCP-Algèbre 2009 (n.2.11)*

1) On a $I \in \mathcal{C}$ ou $0 \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Si $A, B \in \mathcal{C}$ alors :
$$\begin{cases} \exists \alpha, \forall i,j \in [\![1,n]\!], & \alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j} \\ \exists \beta, \forall i,j \in [\![1,n]\!], & \beta = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{i,k} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,j} \end{cases}$$
Donc :
$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda.a_{i,k} + \mu.b_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda.a_{k,j} + \mu.b_{k,j} = \lambda\alpha + \mu\beta$$
ce qui implique que $\lambda A + \mu B \in \mathcal{C}$ et donc que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

2) Le calcul précédent montre exactement :
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad d(\lambda A + \mu B) = \lambda d(A) + \mu d(B)$$
Ainsi d est une forme linéaire sur $\mathcal{C}$. Or, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $d(\lambda J) = \lambda$, d'où la surjectivité et d est non injective pour des raisons de dimension.

3) a) Soit $A \in \mathcal{M}$. On a : :
$$AJ = (c_{i,j})_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\right)_{i,j}$$
et
$$JA = (d_{i,j})_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\right)_{i,j}$$
Donc :
$$AJ = JA = \lambda J \Leftrightarrow \forall i,j, \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = \lambda \Leftrightarrow A \in \mathcal{C} \text{ et } d(A) = \lambda$$

b) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{C}$. On a :
$$B \in \mathcal{C} \Longrightarrow BJ = JB \quad \Rightarrow \quad ABJ = AJB$$
et
$$A, B \in \mathcal{C} \quad \Rightarrow \quad AJ = JA = d(A)J,$$
d'où
$$ABJ = A(BJ) = AJB = (AJ)B = JAB = d(A)JB = d(A) \times d(B)J$$
ce qui prouve que AB est aussi dans $\mathcal{C}$ et $d(AB) = d(A) \times d(B)$.

c) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{C}$.
$$AJ = d(A)J \Longrightarrow J = d(A)A^{-1}J, \text{ et } JA = d(A)J \Longrightarrow J = d(A)JA^{-1}$$
Nécessairement $d(A) \neq 0$ sinon la matrice J serait la matrice nulle et :
$$A^{-1}J = JA^{-1} = \frac{1}{d(A)}J$$
ce qui prouve que A^{-1} appartient également à $\mathcal{C}$ et $d\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{d(A)}$.

4) Le sous-espace vectoriel Ker d est le noyau d'une forme linéaire, c'est un hyperplan de $\mathcal{C}$. Vect(J) est une droite vectorielle de $\mathcal{C}$, d'où

$$\dim(\mathcal{C}) = \dim \operatorname{Ker} d + \dim \operatorname{Vect}(J).$$

Soit $A \in \operatorname{Ker}(d) \cap \operatorname{Vect}(J)$. Alors :

$$A = \alpha J \quad \Rightarrow \quad d(A) = \alpha n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0.$$

d'où :

$$A = \alpha J \Longrightarrow \alpha n = 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}(d) \cap \operatorname{Vect}(J) = \{0\}$$

Donc $\operatorname{Ker}(d)$ et $\operatorname{Vect}(J)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{C}$.

5) ⋆ Soit $(\lambda_{r,s})$ une famille de réels telle que $\sum\limits_{r,s} \lambda_{r,s} A_{r,s} = 0$. Soit (i,j) tel que $2 \leqslant i,j \leqslant n$; en égalant les termes génériques des deux matrices on obtient directement : $\lambda_{i,j} = 0$.
⋆ La famille $(A_{r,s})_{r,s}$ est génératrice. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{C}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -\sum\limits_{j=2}^{n} a_{1,j} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\sum\limits_{j=2}^{n} a_{n,j} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=2}^{n} \begin{pmatrix} -a_{1,j} & 0 & \cdots & a_{1,j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ -a_{n,j} & 0 & \cdots & a_{n,j} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=2}^{n} \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=2}^{n} a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 & -\sum\limits_{i=2}^{n} a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{2,j} & 0 & \cdots & 0 & a_{2,j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ -a_{n,j} & 0 & \cdots & 0 & a_{n,j} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{i,j} A_{i,j} \end{aligned}$$

Les matrices $A_{r,s}$, $2 \leqslant r,s \leqslant n$ forment donc une base de $\operatorname{Ker}(d)$ et $\dim(\operatorname{Ker} d) = (n-1)^2$. et

$$\dim(\mathcal{C}) = \dim(\operatorname{Ker} d) + \dim(\operatorname{Vect}(J)) = (n-1)^2 + 1$$

6) Soit p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{C}$. Le calcul donne $AB = B^2$, puis, par récurrence sur $i \in \mathbb{N}, A^i B = B^{i+1}$. Les matrices A et B commutent ; on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(A-B)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} A^i (-B)^{p-i} = A^p + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} A^i (-B)^{p-i} = A^p + \left[\sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} (-1)^{p-i} \right] B^p$$

Or

$$(1-1)^p = 0 = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} (-1)^{p-i} = 1 + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} (-1)^{p-i}$$

d'où :

$$\boxed{(A-B)^p = A^p - B^p.}$$

Exercice 19.
Solution en cours.

Exercice 20. *Source Oral ESCP-Algèbre 2011 (n.2.8)*

1) a) $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'il ne contient pas la matrice nulle.

b) Soit $A, B \in \mathcal{S}$. Alors, avec les notations habituelles :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geqslant 0, \text{ et } AB(U) = AU = U$$

D'où la conclusion.

c) La réponse est en général négative. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est stochastique inversible et son inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ n'est pas stochastique.

2) a) La matrice A_σ s'appelle matrice de permutation : chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un seul 1 , les autres éléments étant nuls et deux 1 ne peuvent se trouver sur une même colonne. On a alors clairement $A_\sigma \in \mathcal{S}$

b) On remarque que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$, ce qui montre que le produit de deux matrices de permutation est une matrice de permutation. Ainsi $f_\sigma^{-1} = f_{\sigma^{-1}} \in \mathcal{S}$.

3) Soient A, B deux éléments de $\mathcal{S}$ tels que $BA = I$. On note $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$. On a alors :

$$\text{pour } i \neq j, \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} = 0, \text{ et } \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i} = 1$$

→ Les éléments de A et B étant positifs, la première relation donne pour tout $i \neq j$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $b_{i,k} a_{k,j} = 0$.
→ Soit k fixé. Il existe $i_k \in [\![1, n]\!]$ tel que $b_{i_k,k} \neq 0$ (autrement B ne serait pas inversible). Ainsi, pour tout $j \neq i_k$, on a : $a_{k,j} = 0$.
Comme $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} = 1$, il vient $a_{k,i_k} = 1$. Cet indice i_k est unique (autrement A possèderait deux 1 sur sa ligne k et ne serait pas stochastique).
On définit ainsi une application $i \to i_k$ injective de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même, donc bijective, c'est-à-dire une permutation. Ainsi, la matrice A est une matrice de permutation tout comme son inverse.

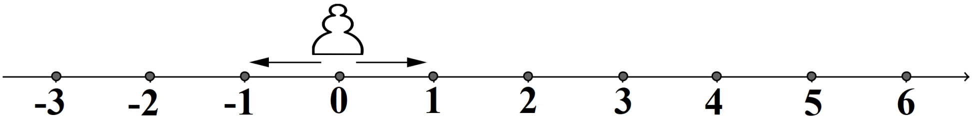
Probabilité 3

Exercice 1 ⋆⋆ Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre p.
Calculer la probabilité que la matrice suivante soit inversible ⋙ Aide

$$A = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}.$$

Exercice 2 ⋆⋆ *Une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$*

Un pion se déplace sur un axe gradué. Il est initialement à l'origine.



On lance de manière mutuellement indépendante n fois une pièce équilibrée. À chaque lancer, on déplace d'une unité le pion vers la gauche si un face apparaît et vers la droite si un pile sort. Notons X_n l'abscisse du pion à la fin des n lancers et Y_n le nombre de faces obtenus.

1) Donner la loi de Y_n. Préciser l'espérance et la variance. ⋙ Aide
2) a) Exprimer X_n en fonction de Y_n. ⋙ Aide
   b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3) Notons Z_n la distance à l'origine du pion à la fin des n lancers.
   a) Donner la loi de Z_2 et Z_3.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\mathbb{V}(Z_n) \leqslant \mathbb{V}(X_n)$.
4) a) Préciser $\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big)$ en fonction de la parité de n. ⋙ Aide
   b) En utilisant la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

   donner un équivalent simple de $\mathbb{P}\big([X_{2n} = 0]\big)$.

Exercice 3 ★ Soit X une variable aléatoire discrète telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 4\mathbb{P}\big([X = k+2]\big) = 9\mathbb{P}\big([X = k+1]\big) - 2\mathbb{P}\big([X = k]\big).$$

1) Donner la loi de X.

2) Justifier que X admet une espérance et une variance et les calculer.
On pourra remarquer que la variable $Y = X + 1$ suit une loi usuelle.

Exercice 4 ★★ *Rang du premier Pile-Face* Considérons une infinité de lancers mutuellement indépendants d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Pile-Face (dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k). Si une telle succession ne se produit pas, on pose $X = 0$. Notons A_i l'événement : « Un pile apparaît au i-ème lancer ».

1) En utilisant le système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$, prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$,

$$\mathbb{P}\big([X = k+1]\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\big([X = k]\big) + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

2) En déduire $\mathbb{P}\big([X = k]\big)$ pour tout $k \geqslant 2$. ⋙ Aide

3) Préciser $\mathbb{P}\big([X \geqslant 2]\big)$ puis $\mathbb{P}\big([X = 0]\big)$.

4) Justifier que X admet une espérance. La calculer.

Exercice 5 ★★ *Loi de Pascal* Une urne contient des boules blanches et noires. Soit p la proportion de boules noires. On effectue une infinité de tirages, mutuellement indépendants, avec remise de la boule tirée.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On considère la variable X_r associée au temps d'attente de la r-ième boule noire.
On admet que, presque sûrement, une r-ième boule noire sort dans l'infinité de tirages.

1) Reconnaître la loi de X_1. ⋙ Aide

2) Donner la loi de X_r. ⋙ Aide

3) Comment simuler avec Python, la variable X_r ? ⋙ Aide

Exercice 6 ★★★ Une urne contient une boule jaune et une boule rouge. On répète une infinité de fois l'opération suivante : on tire une boule dans l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note T_n l'évènement « les n premières boules tirées sont rouges ». Montrer que :

$$\mathbb{P}(T_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

2) a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1 - \frac{1}{2k}\right)$ diverge.

b) En déduire, en faisant le lien avec la question 1, la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges.

Exercice 7 ★★★ Le résultat final de l'exercice précédent reste-t-il vrai si l'on change la règle ainsi : à chaque étape, on double le nombre de boules de la couleur de celle que l'on vient de tirer (et de remettre) ?

Exercice 8 ★★★ *Les moments déterminent la loi* *Source : oraux HEC*

1) Rappeler la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire discrète.

2) Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend les valeurs 0 , 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $E(Y) = 1$ et $E\left(Y^2\right) = 5/3$.
Calculer p_0, p_1 et p_2. ⋙ Aide

3) Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n, (n+1)$ réels distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le $(n+1)$-uplet $\left(Q\left(x_0\right), Q\left(x_1\right), \ldots, Q\left(x_n\right)\right)$.

   a) Montrer que φ est une application linéaire bijective. ⋙ Aide

   b) Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.

   c) Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$. On suppose que l'on connaît les valeurs de $E(X), E\left(X^2\right), \ldots, E\left(X^n\right)$.
   Peut-on déterminer la loi de X ? ⋙ Aide

Exercice 9 ★★ *Propagation de bactéries* Une bactérie se reproduit ainsi : elle donne deux descendants avec probabilité $p = 3/4$, et zéro descendant avec probabilité $1 - p = 1/4$. Elle meurt ensuite.
On part d'une seule bactérie et on cherche à déterminer si la population va s'éteindre ou non. On suppose que les descendances sont mutuellement indépendantes et on note, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n l'évènement « la population est éteinte à la n-ième génération » et $u_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1) Préciser u_0 et u_1.

2) Justifier que la suite $(u_n)_n$ est croissante. En déduire la convergence vers une limite finie ℓ.

3) On pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{3x^2+1}{4} \in \mathbb{R}$. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. ⋙ Aide

4) En déduire la valeur de ℓ.

5) Quelle est la probabilité que la population s'éteigne un jour ? ⋙ Aide

6) Reprendre l'exercice avec $p \in [0; 1]$.

*Deux britanniques du XIX*ème *siècle, Francis Galton et Henry William Watson se sont intéressés à la propagation des noms de famille dans l'aristocratie anglaise : les grands noms sont-ils condamnés à disparaître ? L'exercice ci-dessus propose une version simplifiée de leur démarche dans un cadre biologique.*

Python

Exercice 10 ⋆⋆ *Moments* Soit X une variable aléatoire sur un univers fini. On rappelle que donner la loi de X signifie donner

$$\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1; m]\!], \quad \mathbb{P}([\mathrm{X} = x_i]).$$

Dans ce cas, on définit les listes val et Loi par :

$$\mathrm{val} = [\ x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m\ ] \quad \text{et} \quad \mathrm{Loi} = [\mathbb{P}([\mathrm{X} = x_1]) \quad \mathbb{P}([\mathrm{X} = x_2]) \quad \cdots \quad \mathbb{P}([\mathrm{X} = x_m])]$$

1) Écrire une fonction Python, nommée `moment`, qui prend en argument les deux listes (val, Loi), un entier s et renvoie renvoie le moment $E(X^s)$.

2) En utilisant uniquement la fonction `moment`, écrire une nouvelle fonction qui calcule la variance.

Exercice 11 ⋆⋆ *Lois usuelles avec random()* Une urne contient 5 boules (1 rouge et 4 bleues). On considère l'expérience suivante

On tire une boule au hasard et on note la couleur. On replace ensuite la boule dans l'urne.

1) Soit X la variable aléatoire qui renvoie 1 si la boule est rouge et 0 sinon.
Préciser la loi de X.
En utilisant uniquement la commande `random`, écrire un programme qui simule la variable X.

2) On repète maintenant n fois l'expérience élémentaire. On suppose les tirages mutuellement indépendants. On note Y le nombre de boules rouges obtenues.
Quelle est la loi de Y ?
Avec la commande `random`, écrire un programme qui prend en argument n et simule Y.

3) On repète maintenant une infinité de fois l'expérience élémentaire. On suppose toujours les tirages mutuellement indépendants. On note Z le numéro du tirage où on a obtenu la première boule rouge.
Quelle est la loi de Z ? Écrire un programme qui simule la variable Z.

4) Modifier le programme précédent pour simuler la variable X_2 qui donne le numéro du tirage où on obtient la seconde boule rouge.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Généralisez la question avec X_r, la variable aléatoire qui renvoie le tirage de la r-ième boule rouge.

Exercice 12 ⋆ *Enigme : La bataille de la rivière Baigou*

En avril 1400, face aux troupes du général Ming Li Jinglong, combien étaient les hommes de Zhu Di, groupés en 13 carrés identiques et n'en formant plus qu'un seul lorsque leur chef les a rejoint ?

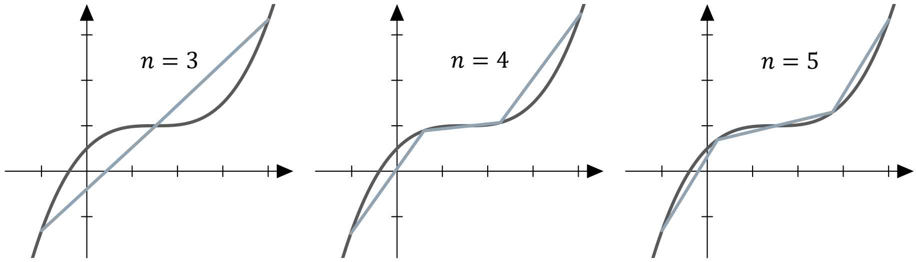
⋙ Aide

Exercice 13 ★★ *Approximation de la longueur d'une courbe*

1) Écrire une fonction qui prend en argument deux points $A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$ de $\mathbb{R}^2$ et renvoie la distance entre A et B.

2) Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$.
Afin d'approximer la longueur de la courbe représentative de f, on découpe l'intervalle $[a; b]$ régulièrement
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$
Puis, on somme les distances entre les points $\left(x_i, f(x_i)\right)$ et $\left(x_{i+1}, f(x_{i+1})\right)$ pour tout indice i.
Écrire un programme qui prend en entrée une fonction f, un entier n et renvoie une approximation de la longueur de la courbe.

3) Tester votre programme sur la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$.



Indications

Exercice 1.
Uiliser le déterminant pour relier la probabilite recherchée avec $\mathbb{P}(X = Y)$. Appliquer ensuite la formule des probabilités totales pour calculer cette probabilité.

Exercice 2.
1. Loi binomiale. Préciser les paramètres.
2.a) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $X_n = aY_n + b$.
3.b) Etudier le signe de $\mathbb{V}\,(X_n) - \mathbb{V}\,(Z_n)$ en appliquant la formule de Koenig-Huygens.
4.a) $\mathbb{P}\left(\left[Y_n = \frac{n}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left([X_n = 0]\right)$.

Exercice 3.
1. Reconnaître une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Déterminer les solutions de l'équation carcatéristique pour obtenir une fomule générale. $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un s.c.e et une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1.
2. Y suit une loi géométrique.

Exercice 4.
1 C'est la formule des probabilités totales.
2. On pourra introduire la suite v définie, pour tout entier $k \geqslant 2$, par $v_k = 2^k \mathbb{P}\big([X = k]\big)$. La suite v est arithmético-géométrique.

Exercice 5.
1 Loi géométrique.

2. Montrer que $X(\Omega) = \{r, r+1, \ldots\}$ et $\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$.

3. Compléter le code suivant :

```
def X=simulation(p):
      X=1
      while   ...
              X=  ...
   return ...
```

Exercice 8.

2. On trouve une loi uniforme.
3.a) Prouver l'injectivité en rappelant que le polynôme nul est le seul polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ avec plus de $n+1$ racines.
3.c) Oui, il suffit d'inverser une matrice...

Exercice 9.

3. Appliquer la formule des probabilités totales avec le s.c.e $(A_1, \overline{A_1})$.
5. Appliquer le théorème de la limite monotone version probabilité.

Exercice 12.

Cela revient à trouver une solution entière à $13x^2 + 1 = y^2$.

Solutions

Exercice 1.

Passons par l'événement contraire. A n'est pas inversible si et seulement si $\det(A) = 0$.

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow [X^2 - Y^2 = 0] \Leftrightarrow [X^2 = Y^2] \underset{\substack{[X>0] \\ [Y>0]}}{\Longleftrightarrow} [X = Y].$$

$([Y=k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. D'après *la formule des probabilités totales*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=Y] \cap [Y=k]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=k] \cap [Y=k]\big) && X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) \times \mathbb{P}(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{2(k-1)} && \text{changement d'indice } k' = k-1 \\
&= p^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^{k'} && \text{série géométrique de raison } (1-p)^2 \in]0,1[\\
&= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{« } A \text{ inversible »}) = 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}.}$$

Exercice 2.

1) La variable Y_n compte le nombre de succès (avoir un « face ») dans une répétition de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes. La probabilité de succès est $1/2$. Finalement,

$$\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 1/2).}$$

D'après le cours,

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_n) = \frac{n}{4}.}$$

2) a) Sur les n lancers, il y a :
↪ Y_n déplacements sur la gauche,
↪ $n - Y_n$ déplacements sur la droite.
Ainsi,

$$\boxed{X_n = (-1) \cdot Y_n + (+1) \cdot (n - Y_n) = n - 2 \cdot Y_n.}$$

b) On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= n - 2\mathbb{E}(Y_n) = \boxed{0.} \\ \mathbb{V}(X_n) &= (-2)^2\, \mathbb{V}(Y_n) = \boxed{n.} \end{aligned}$$

3) a) • Listons les possibilités (G pour gauche et D pour droite).

$$\begin{array}{cccc} GG, & GD, & DG, & DD \\ X_2 = -2, & X_2 = 0, & X_2 = 0 & X_2 = 2 \\ Z_2 = 2, & Z_2 = 0, & Z_2 = 0 & Z_2 = 2. \end{array}$$

Z_2 peut ainsi prendre deux valeurs 0 et 2. La loi de Z_2 est :

$$\boxed{\begin{array}{c} Z_2(\Omega) = \{0; 2\}, \\ \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = \dfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_2 = 0]) = \dfrac{1}{2}. \end{array}}$$

• De même,

$$\begin{array}{cccc} GGG, & GGD, & GDG, & DGG \\ X_3 = -3, & X_3 = -1, & X_3 = -1 & X_3 = -1, \\ Z_3 = 3, & Z_3 = 1, & Z_3 = 1 & Z_3 = 1, \\ GDD, & DGD, & DDG, & DDD \\ X_3 = 1, & X_3 = 1, & X_3 = 1 & X_3 = 3, \\ Z_3 = 1, & Z_3 = 1, & Z_3 = 1 & Z_3 = 3. \end{array}$$

Z_3 peut prendre deux valeurs,

$$\boxed{\begin{array}{c} Z_3(\Omega) = \{1; 3\}, \\ \mathbb{P}([Z_3 = 3]) = \dfrac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_3 = 1]) = \dfrac{3}{4}. \end{array}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Précisons que

$$Z_n = |X_n| \quad \text{et} \quad {Z_n}^2 = {X_n}^2.$$

D'après *la formule de Koenig-Huygens,*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Z_n) &= \mathbb{E}({Z_n}^2) - \mathbb{E}(Z_n)^2 \\ &= \mathbb{E}({X_n}^2) - \mathbb{E}(Z_n)^2. \end{aligned}$$

D'après la question 2.(b),

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}({X_n}^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \mathbb{E}({X_n}^2).$$

En particulier $$\boxed{\mathbb{V}(Z_n) \leqslant \mathbb{V}(X_n).}$$

4) a) Si n est impair, on ne peut être à l'origine. Dans ce cas,

$$\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) = 0.$$

Si n est pair,

$$\mathbb{P}\big([X_n = 0]\big) = \mathbb{P}\big([Y_n = n/2]\big) = \boxed{\frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2}.}$$

b) On trouve

$$\mathbb{P}\big([X_{2n} = 0]\big) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Exercice 3.

1) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}\big([X = n]\big)$, de sorte que u soit une suite linéaire récurrente d'ordre 2.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{9}{4}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

L'équation caractéristique est $r^2 = \frac{9}{4}r - \frac{1}{2}$. Cette dernière admet deux solutions :

$$r_1 = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{4}.$$

On sait alors qu'il existe deux réels λ, μ tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\, 2^n + \mu\, \frac{1}{4^n}.$$

Déterminons les paramètres λ et μ.
↪ Si $\lambda \neq 0$, on constate que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda > 0, \\ -\infty & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Or, u_n représente la probabilité d'un événement, $u_n \in [0; 1]$. Par conséquent, $\lambda = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mu\, \frac{1}{4^n}.$$

↪ De plus, $\big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$1=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\big([X=n]\big)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu\frac{1}{4^n}.$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique (convergente car $1/4\in]-1;1[$),

$$1=\mu\frac{1}{1-1/4}=\frac{4}{3}\mu\quad\text{donc}\quad\mu=\frac{3}{4}.$$

Finalement, pour $n\in\mathbb{N}$, $$\boxed{\mathbb{P}\big([X=n]\big)=\frac{3}{4^{n+1}}.}$$

2) Notons que $Y=X+1$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(3/4)$. En effet, $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\big([Y=n]\big)=\mathbb{P}\big([X=n-1]\big)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

On sait alors que $$\mathbb{E}(Y)=\frac{4}{3},\quad\mathbb{V}(Y)=\frac{4}{9}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)-1=\boxed{\frac{1}{3},}\quad\mathbb{V}(X)=\mathbb{V}(Y)=\boxed{\frac{4}{9}.}$$

Exercice 4.

1) Soit un entier $k\geqslant 2$.
Appliquons *la formule des probabilités totales* avec le système complet d'événements $(A_1,\overline{A_1})$:

$$\mathbb{P}\big([X=k+1]\big)=\mathbb{P}\big(A_1\cap[X=k+1]\big)+\mathbb{P}\big(\overline{A_1}\cap[X=k+1]\big)$$

Si on note B_k l'événement : « La première succession d'un Pile-Face (premier lancer exclu) a lieu aux rangs k et $k+1$ »

$$A_1\cap[X=k+1]=A_1\cap B_k.$$

Or, les lancers sont mutuellement indépendants, donc A_1 et B_k sont indépendants et

$$\mathbb{P}(A_1\cap B_k)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_k)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(B_k).$$

Et, par simple décalage d'un lancer,

$$\mathbb{P}(B_k)=\mathbb{P}\big([X=k]\big).$$

De plus, si on commence directement par un Pile et que la *première succession* de Pile-Face intervient aux k et $(k+1)$-ièmes lancers, il n'y a que des piles entre les lancers 1 et k, puis un Face au lancer $k+1$. Autrement dit,

$$A_1\cap[X=k+1]=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap\overline{A_{k+1}}.$$

Comme les lancers sont mutuellement indépendants, il vient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(A_1 \cap [X = k+1]\big) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}) \\
&= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(\overline{A_{k+1}}) = \frac{1}{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X = k+1]\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\big([X = k]\big) + \frac{1}{2^{k+1}}.}$$

2) En multipliant par 2^{k+1}, l'équation précédente devient :

$$2^{k+1}\mathbb{P}\big([X = k+1]\big) = 2^k\mathbb{P}\big([X = k]\big) + 1.$$

D'où, $$v_{k+1} = v_k + 1.$$

On reconnaît une suite arithmétique. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$,

$$v_k = v_2 + (k-2).$$

Comme $$v_2 = 4\mathbb{P}\big([X = 2]\big) = 4\mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_2}) = 1,$$

on trouve $$\boxed{\mathbb{P}\big([X = k]\big) = (k-1)2^{-k}.}$$

3) On a

$$[X \geqslant 2] = \bigcup_{k=2}^{+\infty} [X = k].$$

Comme les événements sont deux à deux disjoints :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([X \geqslant 2]\big) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X = k]\big) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)2^{-k} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4.$$

Finalement, $$\boxed{\mathbb{P}\big([X \geqslant 2]\big) = 1.}$$

Comme $\mathbb{P}\big([X = 1]\big) = 0$, on a

$$\mathbb{P}\big([X = 0]\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\overline{[X \geqslant 2]}\big) = 1 - 1 = \boxed{0.}$$

Presque sûrement, un Pile-Face apparaît dans l'infinité de tirages.

4) La série de terme général

$$k\mathbb{P}\big([X = k]\big) = k(k-1)2^{-k},$$

est une série géométrique dérivée. Il y a convergence puisque $1/2 \in]-1;1[$. Comme le terme général est positif, on a même une convergence absolue. L'espérance existe avec :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}\big([X = k]\big) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)2^{-k}$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{(1-1/2)^3}.$$

Concluons : $\boxed{\mathbb{E}(X) = 4.}$

Exercice 5.

1) X_1 est le rang du premier succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes. La probabilité de succès est p. Par conséquent, X_1 suit une loi géométrique de paramètre p.

$$\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p).}$$

2) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Notons que X_r ne peut prendre que des valeurs entières supérieures à r (le cas le plus favorable correspondant aux r premières boules noires).

$$\boxed{X_r(\Omega) = \{r, r+1, r+2, \cdots\}.}$$

Soit $k \in \mathbb{N}, k \geqslant r$. Si l'événement $[X_r = k]$ est réalisé. La k-ième boule est noire et il y a parmi les $k-1$ premiers tirages :

- $r-1$ boules noires ;
- $k-1-(r-1) = k-r$ boules blanches.

Pour choisir les $k-1$ premiers tirages, il suffit de choisir $r-1$ boules noires parmi les $k-1$ tirages. Il y a exactement $\binom{k-1}{r-1}$ possibilités. Or, la probabilité de tirer r boules noires et $k-r$ boules blanches est $p^r(1-p)^{k-r}$ (on rappelle que les tirages sont mutuellement indépendants). Finalement, pour tout entier $k \geqslant r$,

$$\boxed{\mathbb{P}\big([X_r = k]\big) = \binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}.}$$

On peut montrer que

$$\mathbb{E}(X_r) = \frac{r}{p} \quad \textit{et} \quad \mathbb{V}(X_r) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

3) Voir Exercice 11.

Exercice 6.

1) Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, R_k (resp. J_k) l'évènement « obtenir une boule rouge (resp. jaune) au k-ème tirage ». On remarque que $T_n = \bigcap_{k=1}^{n} R_k$. On applique la *formule des probabilités*

composées : $\mathbb{P}(T_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k)$, ce qui est possible car les intersections qui interviennent ici sont de probabilité non nulle.
Pour $k \in [\![1,n]\!]$, sous l'hypothèse $R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}$, on se retrouve pour le k-ème tirage avec un total de $2 + 2(k-1) = 2k$ boules dans l'urne, dont exactement $1+2(k-1)$ sont rouges (car on n'a ajouté que des boules sur les $k-1$ premiers tirages).

Donc : $\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k) = \dfrac{1+2(k-1)}{2k} = \dfrac{2k-1}{2k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{P}(T_n) = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{2k}.}$

D'une part, $\prod_{k=1}^{n} 2k = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$, et d'autre part,

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \prod_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant 2n\\ \ell \text{ impair}}} \ell = \frac{\prod\limits_{1\leqslant \ell\leqslant 2n} \ell}{\prod\limits_{\substack{1\leqslant \ell\leqslant 2n\\ \ell \text{ pair}}} \ell} = \frac{(2n)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n n!},$$

donc $\quad \mathbb{P}(T_n) = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}\dfrac{1}{2^n n!} = \boxed{\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.}$

2) a) Rappelons que pour $h \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$. Comme, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$,

on obtient : $\quad \ln(1-\dfrac{1}{2k}) \underset{k\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2k}$.

Ces termes sont toujours négatifs. L'important est que le signe soit constant pour pouvoir appliquer le théorème de comparaison. En effet, il suffit ici de passer à l'opposé pour avoir des termes positifs : $\quad 0 \leqslant -\ln(1-\dfrac{1}{2k}) \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2k}$.

Or on sait, d'après le critère de Riemann que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k}$ diverge (c'est la série harmonique), on en déduit grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} -\ln(1-\dfrac{1}{2k})$ diverge, donc

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 1} \ln(1-\frac{1}{2k}) \text{ diverge.}}$$

Ajoutons tout de suite une précision, qui servira dans la question suivante. La série

$$\sum_{k\geqslant 1} -\ln(1-\frac{1}{2k})$$

est à termes positifs, donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est croissante. Avec le théorème de la limite monotone, on sait que cette suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a que deux comportements possibles : soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. Mais on vient de voir qu'elle diverge, donc elle tend vers $+\infty$. En passant à l'opposé, on conclut que :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1-\frac{1}{2k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty. \qquad (1)$$

b) •Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien sûr $\mathbb{P}(T_n) \in [0,1]$, mais on voit grâce à la formule de la question 1 que $\mathbb{P}(T_n) > 0$, puis

$$\ln(\mathbb{P}(T_n)) = \ln\Big(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(\frac{2k-1}{2k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1-\frac{1}{2k}\Big).$$

Avec le résultat (1) expliqué à la question (a), on obtient : $\ln(\mathbb{P}(T_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
On applique la fonction exp, en sachant que $e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$: $\mathbb{P}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

•La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'évènements. On sait alors, par *propriété de la limite monotone*, que $\mathbb{P}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{+\infty} T_k\Big)$.

Par unicité de la limite, $\boxed{P\Big(\bigcap_{k=1}^{+\infty} T_k\Big) = 0.}$

Enfin, l'évènement $\bigcap_{k=1}^{+\infty} T_k$ est l'évènement « tirer indéfiniment des boules rouges ».

Exercice 7.

On garde les notations de l'exercice précédent.
Un raisonnement très similaire permet de montrer, avec les nouvelles règles du jeu, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{1+2^{k-1}}$, en d'en déduire que $\mathbb{P}(T_n) \in]0,1]$, et que :

$$\ln(\mathbb{P}(T_n)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-\frac{1}{1+2^{k-1}}).$$

On a : $\quad 0 \leqslant -\ln\Big(1-\frac{1}{1+2^{k-1}}\Big) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{1+2^{k-1}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{k-1}}$,
et la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2^{k-1}}$ converge car on reconnaît une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, avec $|\frac{1}{2}| < 1$.
On en déduit, par comparaison des séries à termes positifs puis passage à l'opposé, que la série $\sum_{k\geqslant 1} \ln(1-\frac{1}{1+2^{k-1}})$ converge, notons S sa somme.
Il résulte de ceci que $\mathbb{P}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^S$, et un travail similaire à celui de l'exercice précédent montre que : $\boxed{\mathbb{P}(T) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_n) = \mathrm{e}^S \neq 0.}$

Exercice 8.

Solution en cours.

Exercice 9.

1) À la génération 0, il y a une bactérie, donc : $\boxed{u_0 = \mathbb{P}(A_0) = 0.}$
La descendance de cette bactérie constitue la génération 1 ; d'après l'énoncé,

$$\boxed{u_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{4}.}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est évident que si la population est éteinte à la génération n, alors elle l'est à la génération $n+1$; on a donc l'inclusion $A_n \subset A_{n+1}$ et on en déduit que : $u_n = \mathbb{P}(A_n) \leqslant \mathbb{P}(A_{n+1}) = u_{n+1}$.
Ainsi : $\boxed{\text{La suite est croissante.}}$

Elle est de plus majorée : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}(A_n) \leqslant 1$; on peut donc appliquer le *théorème de la limite monotone* et conclure $\boxed{\text{qu'elle converge.}}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la *formule des probabilités totales* avec le système complet d'évènements $(A_1,\overline{A_1})$:
$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_{n+1}),$$
avec $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{4} \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \dfrac{3}{4} \neq 0$.
Sous l'hypothèse A_1, la population est éteinte dès la génération 1 : $\mathbb{P}_{A_1}(A_{n+1}) = 1$.
Sous l'hypothèse $\overline{A_1}$, la bactérie de génération 0 a deux descendants. Notons D_1 (resp. D_2) l'évènement « à la génération $n+1$, il ne reste pas de descendant issus du premier (resp. deuxième) descendant ». Par indépendance des comportements des descendants, on a :

$$\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(D_1 \cap D_2) = \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(D_1)\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(D_2).$$

Pour le premier descendant, tout se passe comme si l'on recommençait l'expérience au début : c'est une bactérie qui a (ou non) une descendance. Comme de plus la génération $n+1$ de la bactérie initiale correspond à la génération n des descendants de génération 1, on a : $\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(D_1) = \mathbb{P}(A_n)$. De même : $\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(D_2) = \mathbb{P}(A_n)$.

Finalement, $\boxed{u_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\mathbb{P}(A_n)^2 = f(u_n).}$

4) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et comme f est continue (car polynomiale), $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$. On obtient donc, en passant à la limite : $f(\ell) = \ell$, autrement dit $3\ell^2 - 4\ell + 1 = 0$. La résolution de cette équation donne $\ell = \dfrac{1}{3}$ ou $\ell = 1$.
•On remarque que $u_0 = 0 \leqslant \dfrac{1}{3}$. Une récurrence facile, qui utilise le fait que $f(\frac{1}{3}) = \dfrac{1}{3}$ et le fait que f soit croissante sur $\mathbb{R}_+$ (facile à vérifier) permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{3}$, et donc, en passant à la limite, $\ell \leqslant \dfrac{1}{3}$.

•Ces deux points permettent de conclure que : $\boxed{\ell = \dfrac{1}{3}.}$.

5) L'évènement « la population finit par s'éteindre » est l'évènement $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Comme la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements, la *propriété de la limite monotone* indique que : $\mathbb{P}(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big)$.
La question précédente donne donc :

$$\boxed{\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \frac{1}{3}.}$$

Exercice 10.

Voir NoteBook

1)
```
def moment(val,loi,s) :
    n=len(val)
    m=0
    for i in range(n) :
        m=m+loi[i]*val[i]**s
    return m
```

2)
```
def variance(val,loi) :
    # utilisation de la formule de Koenig-Huygens
    v=moment(val,loi,2)-moment(val,loi,1)**2
    return v
```

Exercice 11.

Voir Notebook Cahier de vacances pour la solution.

Exercice 12.

Voir Notebook

```
def zhu_di(n) :
    for i in range(int(n**(1/2))) :
    # le coté du carré sera de longueur max n**(1/2)
        for j in range(i-1) :
            if (13*j**2 + 1 == i**2) :
                print(13*j**2)
```

Réponse : 421200

Exercice 13.

Voir Notebook

1) Un code possible est

```
def distance(xA,yA,xB,yB) :
    return ((yB-yA)**2 + (xB-xA)**2)**(1/2)
```

- Par exemple, la distance entre l'origine et le point (1,1) est $\sqrt{2}$.

```
>>> distance(0,0,1,1)
1.4142135623730951

>>> 2**(1/2)
1.4142135623730951
```

2)
```
def longueur(f,n,a,b) :
    d = 0
    x = np.linspace(a,b,n)
    # abscisses des points
    f_x = f(x)
    # ordonnées
    for i in range(len(x)-1) :
        d += distance(x[i], f_x[i], x[i+1], f_x[i+1])
        # On somme les distances entre chaque point créé
    return d
```

Un petit coup de pouce

Corrections