Nom :

Mathématiques approfondies

Cours ECG 2

Partie IV

Chapitres

6. Variables aléatoires à densité
7. Lois à densité usuelles

Lycée Saint Louis 2025/2026

CHAPITRE 6

Variables aléatoires à densité

— Bonjour ChatGPT, invente moi une citation drôle pour un cours de mathématiques.
— "Les mathématiques, c'est comme les chaussettes : il y a toujours une inconnue qui se cache quelque part." Cette citation est là pour apporter un peu de légèreté à un sujet souvent perçu comme sérieux!

1 Rappels : intégrales impropres

1.1 Convergence et convergence absolue

Définition 1 (intégrale généralisée en b)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
L'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $[a;b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle est dite **convergente** si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite *finie* lorsque x tend vers b avec $x < b$. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to b \\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, l'intégrale est dite **divergente**.

Remarques.
- La définition s'étend aux fonctions continues sur $]a,b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
- Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

L'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle est dite **convergente** si pour un réel $c \in]a,b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 2 (absolue convergence)

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite **absolument convergente** si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

De plus, **si** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, **alors** elle est convergente.

Attention. La réciproque est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes sans être absolument convergente.

1.2 Critères de convergence

À l'aide du théorème de convergence monotone, on montre que, pour $f : [a;b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'application $x\in[a;b[\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Proposition 3 (critère de comparaison et de négligeabilité)

Soient f, g deux fonctions continues définies sur $[a,b[$.

- **Si**
  - f et g sont positives,
  - pour tout $x\in[a,b[,\quad f(x)\leqslant g(x)$,
  - $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,

  alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.
- **Si**
  - g est positive sur un voisinage de b ;
  - $f \underset{b^-}{=} o(g)$;
  - $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,

  alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.

Proposition 4 (critère d'équivalence)

Soient f, g deux applications continues définies sur $[a,b[$.

Si
- f et g sont de signe constant sur un voisinage de b,
- $f \underset{b^-}{\sim} g$,

alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Remarque. En pratique, on compare souvent aux **intégrales de Riemann.**

- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente en 0 si et seulement si $\alpha<1$;
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\alpha>1$.

1.3 Règles de calculs

Sous réserve de convergence, les propriétés de linéarité, de croissance de l'intégrale, l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles sont encore valables. Par contre, pour effectuer une intégration par parties, on se ramène à un segment.

Théorème 5 (changement de variable)

Soit f continue sur un intervalle $]a,b[$.

Si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection croissante de classe $\mathscr{C}^1$,

alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_\alpha^\beta \varphi'(t) f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Dans le cas de convergence, $$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. L'énoncé s'étend au cas décroissant.

2 Variables aléatoires à densité

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 6 (variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Notons F_X la fonction de répartition de X. On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si :

- F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
- F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

Remarque. Si X est une variable aléatoire à densité : pour $b \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\mathbf{P}\Big([X = b]\Big) = 0.}$

Plus généralement, pour tous a, $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\Big([X \in]a;b[]\Big) = \mathbf{P}\Big([X \in [a;b[]\Big) = \mathbf{P}\Big([X \in]a;b]]\Big) = \mathbf{P}\Big([X \in [a;b]]\Big).$$

Définition 7 (densité de probabilité)

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** si elle vérifie :

- f est positive sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.
- L'intégrale suivante est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

Exercice 1

Exemples *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. ✦ Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t < 0 \\ t e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

2. ✦✦ On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{\lambda}{e^t+1}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x > 0$, $\frac{1}{x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

b) 🔍 En déduire la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit une densité de probabilité.

Proposition 8 (densité de probabilité d'une variable à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité.
Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs positives qui coïncide avec $F_X{}'$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points est une densité de probabilité. On dit que f est <u>une</u> densité de probabilité de la variable aléatoire X.

Proposition 9 (densité et fonction de répartition)

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et F_X, f_X respectivement la fonction de répartition et une densité de X.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et $\quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
- Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tels que $a < b$, $\quad \mathbf{P}\Big([X \in [a;b]]\Big) = \displaystyle\int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. En particulier, on a

$$\mathbf{P}\big([X \geqslant x]\big) = \mathbf{P}\big([X > x]\big) = 1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

✦ *Les deux questions sont indépendantes*

1. Calculer $\mathbf{P}(X^2 - X < 0)$ lorsque X est une variable aléatoire qui a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.
2. *Loi de Benford*
   On considère X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition coïncide, sur l'intervalle $[1;10[$, avec la fonction $t \mapsto \ln(t)/\ln(10)$. Si on pose $Y = \lfloor X \rfloor$, vérifier que

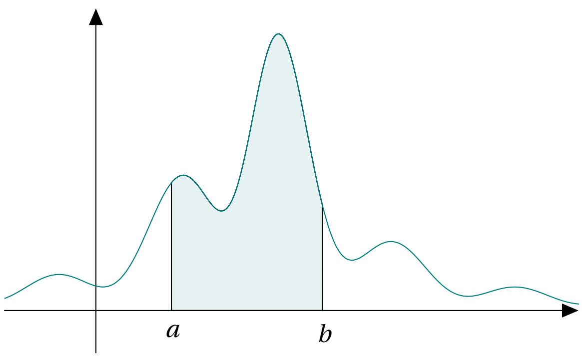
$$\mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(Y \in \{2,3\}) = \mathbf{P}(Y \in \{5,6,7,8,9\}).$$

⚠ **Attention.** Il ne faut pas confondre fonction de répartition et densité.
Rappelons qu'une fonction de répartition est une fonction croissante de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Le lien est, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf un nombre fini,

$$\boxed{f_X(t) = {F_X}'(t).}$$

La densité d'une variable X n'est pas unique alors que la fonction de répartion l'est.

Interprétation graphique



Traçons la courbe représentative d'une densité.
L'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ correspond exactement à la probabilité que la variable aléatoire prenne les valeurs comprises entre a et b.

$$\boxed{\text{Aire} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}\Big([a \leqslant X \leqslant b]\Big).}$$

Lorsque $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, on retrouve bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 = \mathbf{P}(\Omega).$$

De nouveau, on constate que pour une variable aléatoire continue, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}\Big([X = a]\Big) = 0$.

Proposition 10 (la densité caractérise la loi)

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
Si f est à la fois une densité de X et Y, alors X et Y ont même loi.

Remarque. En pratique, donner la loi d'une variable aléatoire à densité est équivalent à donner

$$\mathbf{P}\Big([X \in [a,b]]\Big) \text{ pour tous } a,\ b \in \mathbb{R},$$

C'est aussi équivalent à donner la fonction de répartition ou une densité de probabilité.

Proposition 11 (conditions pour une variable à densité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si
- La fonction f est positive.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un ensemble fini de points.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

Alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité de probabilité.

2.2 Cas des variables du type $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$

Méthode

Comment montrer qu'une variable aléatoire est à densité et obtenir une densité?

Soit X, une première variable aléatoire à densité et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application. On pose $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$. Pour justifier que Y est une nouvelle variable aléatoire, on peut procéder comme suit :

- On précise $\mathrm{Y}(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par Y.
- On exprime la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En particulier, on cherche pour tout $t \in \mathrm{Y}(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}\big([\mathrm{Y} \leqslant t]\big)$.
- Ensuite, on s'assure que $\mathrm{F_Y}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points (noté dans la suite D).
- On calcule la dérivée $\mathrm{F_Y}'$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathrm{D}$ afin d'avoir une densité de Y.

Exercice 3

✧ **Un exemple avec la loi de Laplace**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable à densité et que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel t par $f(t) = \lambda \exp(-|t|)$ est une densité de X.

1. Quelle est la valeur de λ ? Préciser le graphe de f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X. *Indication. On distinguera $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$.*
3. On pose $\mathrm{Y} = 3\mathrm{X} - 2$.
   a) Établir une relation entre $\mathrm{F_X}$ et $\mathrm{F_Y}$, les fonctions de répartition de X et Y.
   b) Vérifier que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité.

Exemple. Calcul de la loi de $\mathbf{Y = aX + b}$ en fonction de la loi de X
Soient X une variable aléatoire à densité et $a, b \in \mathbb{R}$.

On montre que la variable $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$ est à densité et une densité est donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f_{\mathrm{Y}}(t) = \dfrac{1}{|a|} f_{\mathrm{X}}\left(\dfrac{t-b}{a}\right)$.

Exercice 4

✦✦ ✎ ✦✦ Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[-1;1]$. C'est-à-dire, une densité de X est donnée par $f = 1/2 \cdot \mathbf{1}_{[-1;1]}$.

1. Justifier que $\mathrm{U} = |\mathrm{X}|$ est une variable à densité et donner une densité.
2. Faire de même avec $\mathrm{V} = \mathrm{X}^2$.
3. *Cas général.* Soit f, une densité de X. Justifier que $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^2$ est une variable aléatoire réelle admettant une densité nulle sur $\mathbb{R}^-$ et donnée sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\big(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})\big).$$

3 Espérance d'une variable à densité

3.1 Définition

Définition 12 (espérance dans le cas à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité f_X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On définit **l'espérance de** X, *sous réserve de convergence absolue*, comme le réel

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\, dt.$$

Attention. Comme pour les variables aléatoires discrètes, il ne faut pas oublier la convergence absolue.

Exercice 5

Loi de Pareto

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} \quad \text{si} \quad t \in [1; +\infty[\quad \text{et } f(t) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Pour quelles valeurs de α, X admet-elle une espérance? La calculer quand elle existe.

3.2 Règles de calculs sur l'espérance

Proposition 13 (linéarité de l'espérance)

Soient X et Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y).$$

Vocabulaire. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On dit que X est **centrée** si X admet une espérance et $\mathbf{E}(X) = 0$. Ainsi, la variable aléatoire $X - \mathbf{E}(X)$ est toujours une variable aléatoire centrée.

Proposition 14 (existence par domination)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé.

Si
- → $|X| \leqslant Y$.
- → Y admet une espérance.

Alors, X admet une espérance et $|\mathbf{E}(X)| \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

Proposition 15 (positivité et croissance de l'espérance)

Soient X, Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance.
- Positivité de l'espérance : si $X \geqslant 0$ presque sûrement, alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.
- Croissance de l'espérance : si $X \leqslant Y$ presque sûrement, alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

3.3 Formule de transfert

Théorème 16 (de transfert)

Soient X une v.a admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a,b[$ avec $(a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\})$ et $\varphi :]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. On a l'équivalence entre

i) La variable $\varphi(X)$ admet une espérance.

ii) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)f_X(t)\mathrm{d}t$ converge absolument.

Et en cas de convergence absolue,
$$\mathbf{E}\big(\varphi(X)\big)=\int_a^b \varphi(t)f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6

✦ Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par $f=\mathbf{1}_{]0;1[}$. Justifier l'existence de l'espérance $\mathbf{E}\big(\ln(X)\big)$ et la calculer.

4 Moments et variance d'une variable à densité

4.1 Moments

Pour tout entier naturel s, le moment d'ordre s d'une variable aléatoire X est le nombre $m_s(X)$ défini par :

$$m_s(X)=\mathbf{E}(X^s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 7

✦ ✎ On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}-\ln(x) & \text{si } 0<x\leqslant 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   Montrer que X admet des moments à tout ordre et les calculer.

Exercice 8

1. ✦✦ Montrer que si X a un moment d'ordre r alors, X admet un moment d'ordre s pour tout entier $s\leqslant r$.
2. Soit $r\in\mathbb{N}^*$, construire une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre r mais pas de moment d'ordre $r+1$.

4.2 Variance

Définition 17 (variance et écart-type)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- On appelle **variance** d'une variable aléatoire X, la quantité $\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}\Big(\big(X-\mathbf{E}(X)\big)^2\Big)$.
- On appelle **écart-type** de X, la quantité $\sigma(X)=\sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Remarque. La quantité $\sigma(X)$ est bien définie car $\big(X-\mathbf{E}(X)\big)^2\geqslant 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbf{V}(X)\geqslant 0$.

Proposition 18 (propriétés de la variance)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- $\mathbf{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une application presque sûrement constante.
- Pour tous réels a, b, $\quad \mathbf{V}(aX+b) = a^2\,\mathbf{V}(X) \quad ; \quad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.

Vocabulaire. Soit X une variable aléatoire. Nous avons vue qu'une variable aléatoire X est dite **centrée** si $\mathbf{E}(X) = 0$. Elle est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$. La variable aléatoire $Y = \frac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée, réduite.

Théorème 19 (formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors $\quad \mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2$.

Exercices

Révisions : intégrales sur un segment

Exercice 9. ✦ **Sommes de Riemann**

Justifier que pour $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$
$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Exercice 10. ✦ ✎ **Lemme de Riemann-Lebesgue**

Soit $f : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Justifier que
$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 11. ✦ ✎ **Variante des intégrales de Wallis avec la fonction tangente**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Vérifier que $\tan' = 1+\tan^2$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+2}+u_n = \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire une fonction Python qui prend en argument n et renvoie u_n.
4. Étudier les variations de la suite (u_n). En déduire la convergence de la suite (u_n) et calculer la limite.
5. Effectuer le changement de variable $x = \tan t$ dans l'intégrale définissant u_n, puis en déduire $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Révisions : intégrales généralisées

Exercice 12. ✦ On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que J_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre J_n et J_{n+1}.
3. En déduire J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. ✦ Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}$.
Étudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 14. ✦ On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)\,t^x}\,\mathrm{d}t$. *D'après oral ENSAE 2025*

1. Trouver le domaine de définition de f.
2. Exprimer $f(x)+f(x+1)$ en fonction de x.
3. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 15. ✦ Soit f une fonction continue bornée sur $[0,+\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales I et J sont convergentes où
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
2. Vérifier que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
3. *Application.* Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16. ✦✦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Donner un exemple où $f(t) \underset{t\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. *Un graphe suffit...*
2. Vérifier que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ est vrai si on suppose que f de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

Exercice 17. ✦✦✦
Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ non constant. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\big(P(t)\big)\,dt$ est convergente si et seulement si $\deg P \geqslant 2$.

Exercice 18. ✦✦ *Intégrale à paramètre : voir ECRICOME 2009, exercice 2.*

Variable aléatoire à densité

Exercice 19. ✧ ✎ Soit X une variable à densité dont une densité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} c\,x(1-x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer le réel c. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 20. ✧ **Vrai ou faux ?**
Toute variance de variable aléatoire réelle à densité est strictement positive.

Exercice 21. ✧ Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = a\,e^{x - ae^x}.$$

1. À quelle(s) condition(s) f est-elle une densité de probabilité ?
2. Si X est une variable aléatoire réelle admettant f pour densité, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = e^X$?

Exercice 22. ✦ Soit U une variable aléatoire loi uniforme sur $]0;1]$. On lance une pièce équilibrée. Soit X définie par $X = U^2$ si la pièce donne pile et $X = 1 - U^2$ sinon. Justifier que X est à densité et donner une densité.

Exercice 23. ✦ **Loi de Weibull, taux de panne**
Soient $c \in [1;+\infty[$ et X une variable à densité dont une densité f_c est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_c(t) = \begin{cases} \alpha_c\, t^{c-1} e^{-t^c} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}.$$

1. Préciser la valeur de α_c.
2. a) Vérifier que pour tous $s, t \in \mathbb{R}_*^+$

$$\mathbf{P}(X \geqslant s) \geqslant \mathbf{P}_{[X \geqslant t]}(X \geqslant s + t)$$

On pourra admettre que pour $x \in \mathbb{R}^+$ $(1+x)^c \geqslant 1 + x^c$.

   b) Que dire pour $c = 1$?

Exercice 24. ✦ ✎ Soit X une variable aléatoire admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ et un moment d'ordre 2. Caractériser la valeur du réel a qui minimise l'expression

$$\varphi(a) = \mathbf{E}\Big((X-a)^2\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)^2 f(t)\,dt.$$

Exercice 25. ✦✦✦ Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X. # LD29

1. Montrer que la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = F(x+1) - F(x)$$

est une densité de probabilité.

2. Soit Y une variable aléatoire admettant pour densité de probabilité g.
Montrer que si X admet une espérance alors Y en admet également une et dans ce cas $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X) - \frac{1}{2}$.

Exercice 26. ✦ Soit X une variable aléatoire à densité avec une densité de probabilité f paire.

1. Préciser $\mathbf{P}\big([X \geqslant 0]\big)$.
2. On note F la fonction de répartition de X. Justifier que $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) - \frac{1}{2}$ est impaire.
3. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$ converge. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 27. ✦ **Nouvelle expression de l'espérance**
Soit X une v.a à densité. On note f une densité de X, et F sa fonction de répartition. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f = 0$ sur $\mathbb{R}^-$.

1. 🔍 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^x \big(1 - F(t)\big)\,dt = x\big(1 - F(x)\big) + \int_0^x t f(t)\,dt.$ $\quad(\bullet)$

2. On suppose dans cette question que X possède une espérance.

   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant x\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$.

   b) En déduire que $x\big(1-F(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   c) À l'aide de la relation (•), montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge, et que $\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}(X)$.

3. *La réciproque.*

   On suppose dans cette question que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge.

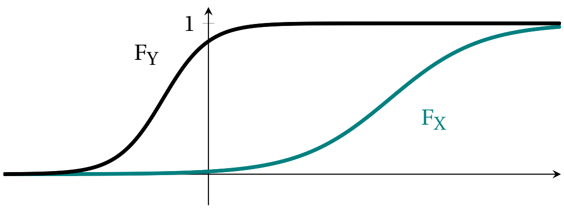
   a) Montrer que l'application $\varphi : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

   b) Montrer en utilisant (•) que φ est majorée.

   c) En déduire que $\mathbf{E}(X)$ existe et que $\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

4. Adapter le raisonnement pour montrer que si X admet un moment d'ordre 2, alors $\mathbf{E}(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 28. ✦✦ Soient X et Y deux variables à densité. On suppose que X et Y admettent une espérance et des densités strictement positives sur $\mathbb{R}$.



1. Soit F_X la fonction de répartition de X. Quelle est la loi de ${F_X}^{-1}(U)$ où $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$?
2. La figure ci-contre est la représentation graphique des fonctions de répartition de X et Y. Quelle est la variable dont l'espérance est la plus grande? Justifier.

Exercice 29. ✦ **Autour de la loi de Cauchy**

Une variable aléatoire à densité suit une loi de Cauchy si une densité est $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1. *Préliminaires.*

   a) Simplifier $\arctan(t) + \arctan(1/t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}^*$.

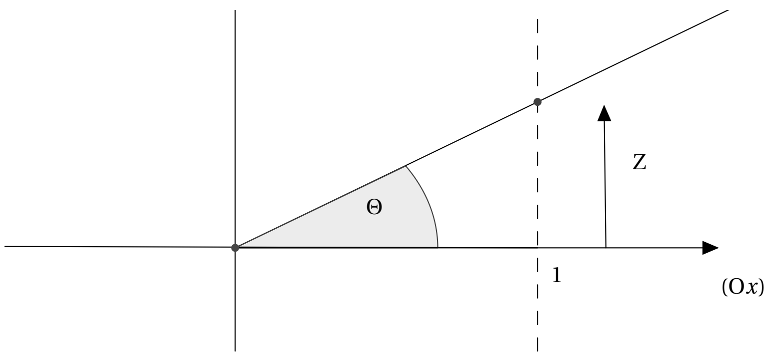
   b) Donner la fonction de répartition d'une loi de Cauchy.

2. Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi de Cauchy. On pose $Y = 1/X$.

   a) Calculer $\mathbf{P}\big([Y<0]\big)$, puis, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\mathbf{P}\big([0<Y\leqslant x]\big)$.

   b) Montrer que Y suit encore une loi de Cauchy.

3. Un tireur envoie sa balle sur un demi-plan droit. On suppose que l'angle Θ entre le trajectoire et l'axe (Ox) est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   Justifier que la position Z de la balle sur la cible (d'axe $x=1$) suit une loi de Cauchy.



Exercice 30. ✦✦ Soient $Z \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0;1]\big)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1;n]\!]\big)$. Comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\arctan\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\big(\arctan(Z)\big).$$

Exercice 31. ✦✦ On considère l'application f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f comme densité. Déterminer F, la fonction de répartition de X.
3. Soit φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $Y = \varphi(X)$.
   a) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et déterminer sa bijection réciproque.
   b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 32. ✦✦ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
   On note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dont f est une densité de probabilité.
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence du moment d'ordre m de la variable X. Donner la valeur de l'espérance de X.
3. Pour tout entier n non nul et tout réel x, on pose :

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\left(1 + t e^{-n|t|}\right) dt.$$

   Montrer que H_n est une fonction de répartition.
4. Soit X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, dont H_n est la fonction de répartition. Vérifier que pour tout réel x

$$H_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$

   où F est la fonction de répartition de X.

Exercice 33. ✦✦ **Médiane(s) d'une variable aléatoire.**
Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

1. Justifier qu'il existe un réel m tel que $\qquad \mathbf{P}\left([X \leqslant m]\right) = \dfrac{1}{2}$.
   Un tel réel est une médiane de X.
2. Déterminer la ou les médianes d'une variable aléatoire dont une densité f est donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$.
3. Dans la suite, on souhaite déterminer les réels a qui minimise la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \psi(a) = \mathbf{E}\left(\left|X - a\right|\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t - a| f(t) dt.$$

   a) Justifier que ψ est une fonction convexe.
   b) Vérifier que ψ est dérivable et exprimer φ' à l'aide de la fonction de répartition F de X.
   c) Conclure.
4. Démontrer que l'ensemble des médianes d'une variable à densité X est un segment.
   Une partie I *de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle si pour tous* $x, y \in I$, *le segment* $[x; y] \subset I$.

CHAPITRE 7

Lois à densité usuelles

J'étais alors en proie à la mathématique.
Temps sombre ! enfant ému du frisson poétique,
Pauvre oiseau qui heurtais du crâne mes barreaux,
On me livrait tout vif aux chiffres, noirs bourreaux ; [...]
On me tordait depuis les ailes jusqu'au bec,
Sur l'affreux chevalet des X et des Y ; [...]

VICTOR HUGO, *Les Contemplations*, 1856

1 Lois uniformes continues

Définition, espérance et variance

Définition 20 (lois uniformes continues)

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On dit que X suit la **loi uniforme continue** sur l'intervalle $[a;b]$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a;b])$, si X a pour densité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. Le facteur $\frac{1}{b-a}$ est imposé par le fait qu'une densité est toujours d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$.

Proposition 21 (fonction de répartition et espérance d'une loi uniforme)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathscr{U}([a;b])$. La fonction de répartition de X est

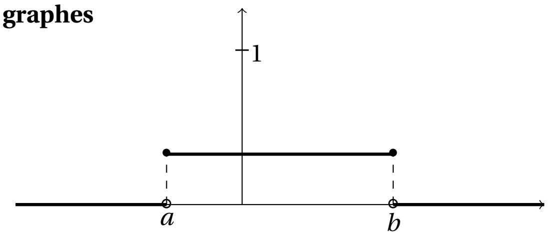
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$$

De plus, X admet une espérance et une variance avec

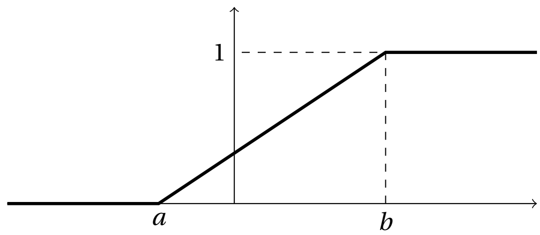
$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Remarque. Comme X est une variable aléatoire bornée, X admet des moments à tout ordre.

Les graphes



Une densité de $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a;b])$



La fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a;b])$

Exemple de modélisation

Souvent lorsque qu'on ne précise pas, un tirage *au hasard* correspond à une loi uniforme.
Par exemple, choisir un nombre réel *au hasard* dans $[0;1]$ signifie choisir un nombre suivant une loi uniforme $\mathscr{U}([0;1])$.

Exercice 34

✦ À partir de 8 heures, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt donné. Ils passent donc à 8h00, 8h15, 8h30, etc... Un usager se présente à cet arrêt entre 8h00 et 8h30. On suppose que l'heure exacte de son arrivée est une variable aléatoire X de loi uniforme sur cette période.

1. Quelle est la probabilité que l'usager doive attendre moins de cinq minutes ? Plus de dix minutes ?
2. On note T le temps d'attente du bus (en minutes). Déterminer F_T, la fonction de répartition de T. En déduire la loi de T. En moyenne, combien de temps attend l'usager ?

Transformation affine et lois uniformes

X suit une loi uniforme sur $[0;1]$ si et seulement si $Y = (b-a)X + a$ suit une loi uniforme sur $[a;b]$.

Exercice 35

✦✦ *Les questions sont indépendantes*

1. *Vrai ou faux ?* Si $U \hookrightarrow \mathscr{U}([-1;1])$, alors U et $-U$ ont même loi ?
2. Si $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$, quelle est la loi de $Y = \lfloor (b-a+1)U \rfloor + a$?

2 Lois exponentielles

Définition, espérance et variance

Définition 22 (lois exponentielles)

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.
On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ, notée $\mathscr{E}(\lambda)$, si X a pour densité

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

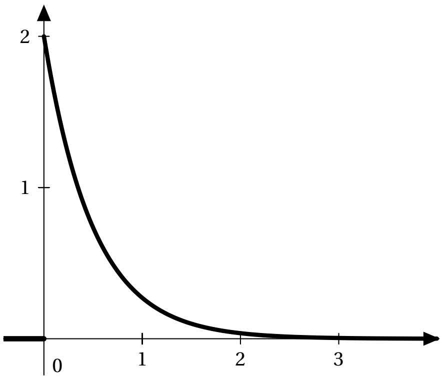
Proposition 23 (fonction de répartition et espérance d'une loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. La fonction de répartition de X est

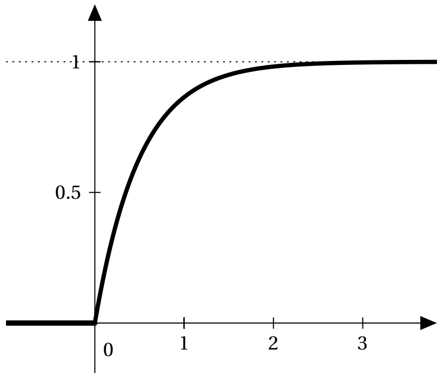
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

De plus, X admet une espérance et une variance avec $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Les graphes



Une densité de $X \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$



La fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$

Exemples de modélisation

Proposition 24 (loi sans mémoire)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.
Alors X est une **variable aléatoire sans mémoire**. C'est-à-dire :

$$\forall\, s, t \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbf{P}\big([X > t]\big) = \mathbf{P}_{[X>s]}\big([X > s+t]\big).$$

Remarque. On parle aussi de propriété de *non vieillissement*.
Plus généralement, la loi exponentielle intervient dans les processus continus sans mémoire comme le temps d'émission d'un électron, le temps de vie d'un composant électronique, ...

Transformation linéaire et lois exponentielles

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$ et $Y = \frac{1}{\lambda}X$. On a vu la relation entre les fonctions de répartition :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F_Y(t) = F_X(\lambda t) \quad \Rightarrow \quad f_Y(t) = \lambda\, f_X(\lambda t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Retenons :

X suit une loi exponentielle de paramètre 1
si et seulement si
$Y = \frac{1}{\lambda}X$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 36

✦ **Moments de la loi exponentielle**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

1. **a)** Justifier que I_n est convergente et donner une relation simple entre I_{n+1} et I_n.
   b) En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Conclure en justifiant que la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ admet un moment à tout ordre et retrouver les expressions de l'espérance et la variance.

Exercice 37

✦ ✎ **Simulation de la loi exponentielle par la méthode d'inversion**

1. Soient $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$ et $X = -\ln(U)$. Donner la loi de X.
2. En déduire un programme qui prend en argument λ et simule une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$.
3. Tester la simulation en traçant un histogramme et la densité.

3 Lois γ

Avant de donner la définition, reprenons un exercice classique sur la définition et les propriétés de la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 38

Propriétés de la loi Γ

1. Justifier que Γ est une application bien posée sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. a) Préciser $\Gamma(1)$.

   b) En utilisant l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, calculer $\Gamma(1/2)$.
3. a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

   b) En déduire que que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Définition, espérance et variance

Définition 25 (lois γ)

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $\nu \in \mathbb{R}_*^+$.
On dit que X suit une **loi γ de paramètre** ν, noté $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$, si X a pour densité

$$f_\nu : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Remarques.
• Le facteur $1/\Gamma(\nu)$ permet justement de s'assurer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(t)\, \mathrm{d}t$ vaut bien 1 pour avoir une densité.
• Remarquons que la loi $\gamma(1)$ n'est autre que la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ qui s'utilise pour modéliser des durées de vie sans vieillissement. Nous verrons au chapitre suivant l'intérêt de ces lois lors de sommes de v.a.

Les graphes

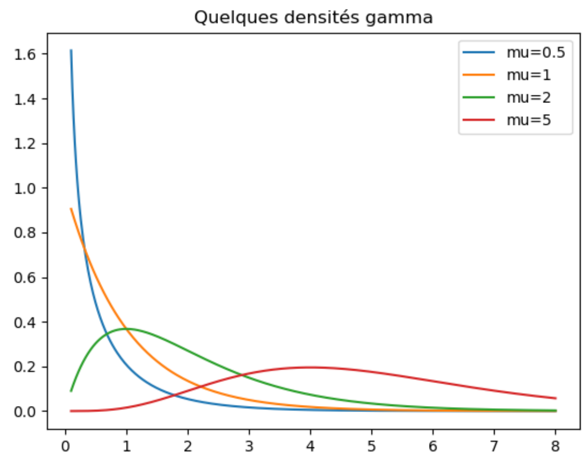
Ci-dessous, le tracé avec Python de quelques densités pour différentes valeurs du paramètre ν. Noter l'utilisation de la bibliothèque **spicy** qui permet, entre autre, d'importer des fonctions de référence (dans notre cas, la fonction Γ).

Editeur

```
import scipy.special as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.clf()

X=np.linspace(0.1,8,400)
for mu in [0.5, 1, 2,5] :
    Gamma=sp.gamma(mu)
    Y=X**(mu-1)*np.exp(-X)/Gamma

    plt.plot(X,Y)
plt.legend(['mu=0.5', 'mu=1', 'mu=2','mu=5'])
plt.title('Quelques densités gamma')
plt.show()
```



Proposition 26 (espérance et variance d'une loi γ)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi $\gamma(\nu)$ alors X admet une espérance et une variance avec

$$\mathbf{E}(X) = \nu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \nu.$$

4 Lois normales

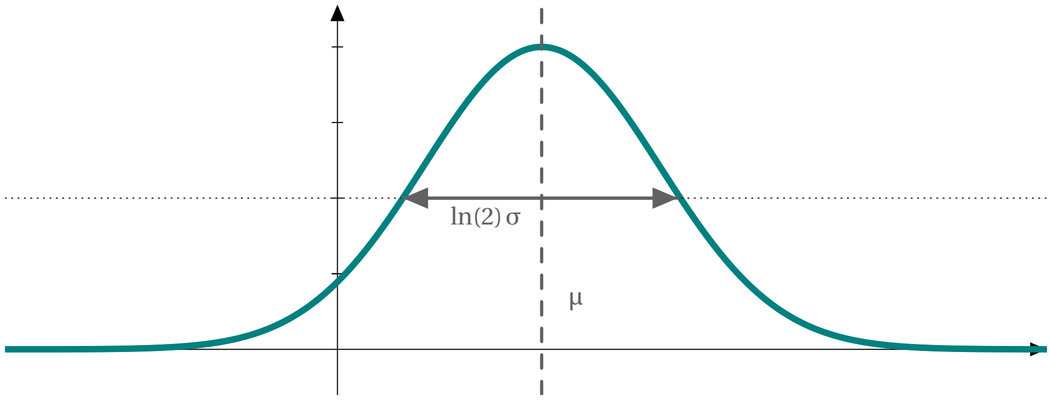
Définition, espérance et variance

Définition 27 (lois normales)

Soient $\mathrm{X}:\Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$.
On dit que X suit la **loi normale** de paramètres μ, σ, noté $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{N}(\mu; \sigma^2)$, si X a pour densité

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_{\mu,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Ci-dessous, l'allure en cloche de la courbe de la densité $f_{\mu,\sigma}$ de la loi normale. Plus σ est proche de 0^+, plus la courbe est étroite.



Transformation affine et lois normales

Proposition 28 (loi normale et transformation affine)

Soient $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Si X suit une loi normale $\mathscr{N}(0; 1)$.

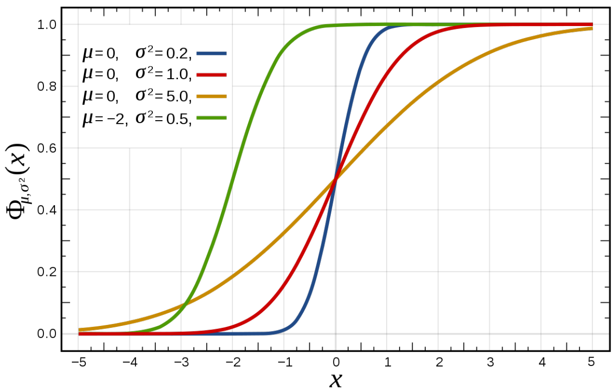
Alors la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \sigma\mathrm{X} + \mu$ suit une loi normale $\mathscr{N}(\mu; \sigma^2)$.

Plus généralement, toute transformation affine d'une loi normale est encore une loi normale.

Remarque. Dans la suite, $\mathscr{N}(0; 1)$ désigne la **loi normale centrée réduite**. La densité est $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2}$.

Il est d'usage de noter Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On démontre qu'il n'existe pas d'expression avec les fonctions usuelles de Φ. Retenons les relations suivantes :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \quad \text{et} \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}.}$$



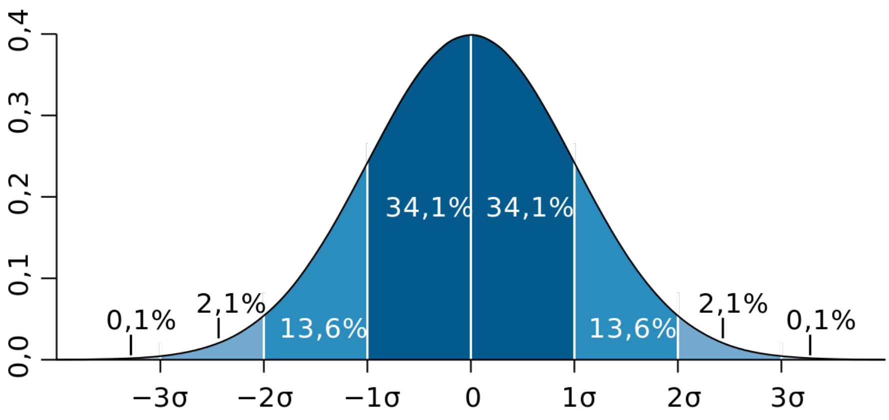
Espérance et variance

Proposition 29 (espérance et variance d'une loi normale)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance avec
$$\mathbf{E}(X)=\mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X)=\sigma^2.$$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors on obtient une variable aléatoire centrée réduite via

$$\boxed{X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1).}$$



Exercice 39

✧ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(2;9)$. Approximer $\mathbf{P}\Big([X \leqslant -1] \cup [X \geqslant 5]\Big)$ à l'aide de $\Phi(1) \simeq 0.8413$.

Modélisation

Nous verrons l'importance de la loi normale grâce au théorème limite central au chapitre CONVERGENCES DES VARIABLES ALÉATOIRES.

Les lois normales sont utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques. Les mathématiques financières en font une large utilisation (parfois abusive). Citons, par exemple, le modèle de Black-Scholes pour l'évolution d'une action en bourse.

Exercice 40

✦ ✎

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Calculer l'espérance de X^2.

Autres lois classiques

Voici une sélection de quelques lois classiques qui peuvent être étudiées aux concours.

- Loi de Pareto.
- Loi de Cauchy.
- Loi de Rayleigh.
- Loi de Weibull.
- Loi de Laplace.
- Loi de Erlang.
- Loi du χ^2.
- Loi log-normale.
- ...

Exercices

Exercice 41. ✦ **Un exemple détaillé**
Soit $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{U}([-1;1])$.

1. On pose pour tout $t \in]-1;1[$, $g(t) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.
   - **a)** Justifier que g est une bijection de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.
   - **b)** Donner une expression simple de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier que g^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner la dérivée.
   - **c)** On définit la variable $\mathrm{T} = g(\mathrm{X})$.
     - — Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F_T}(x) = \mathrm{F_X}\left(g^{-1}(x)\right)$.
     - — En déduire que T est une variable aléatoire à densité. *On précisera une densité.*
2. **a)** Justifier que $\mathrm{U} = |\mathrm{X}|$ est une variable à densité et donner une densité.
   - **b)** Faire de même avec $\mathrm{V} = \mathrm{X}^2$.

Exercice 42. ✦ Soient $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{N}(0,4)$ et $\mathrm{Y} = |\mathrm{X}|$.

1. Justifier que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité.
2. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 43. ✦ ✎ **Loi du** χ^2
Soit X une variable de loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X. On pose $\mathrm{Y} = \dfrac{1}{2}\mathrm{X}^2$.

1. Exprimer la fonction de répartition F de Y à l'aide de Φ.
2. En déduire que Y est une variable à densité, et déterminer une densité de Y.

Exercice 44. ✦✦ **Une variable à densité ?**
Soit $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1)$. Expliciter la fonction de répartition de $\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{X}+|\mathrm{X}|}{2}$. Est-ce que Y est une variable à densité ?

Exercice 45. ✦✦ ✎ **Simulation d'une géométrique à partir de la loi exponentielle**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. On pose $\mathrm{Y} = \lfloor \mathrm{X} \rfloor + 1$.

1. Montrer $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)$.
2. En déduire un programme qui simule une loi géométrique de paramètre p à partir de la loi exponentielle.

Exercice 46. ✦✦ Soit X, une variable aléatoire dont f est une densité paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{X}^2 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Déterminer la densité f.

Exercice 47. ✦ Soient X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose de plus que les fonctions g et g' sont bornées.

1. Justifier que les variables $\mathrm{X}g(\mathrm{X})$ et $g'(\mathrm{X})$ admettent des espérances.
2. Établir l'égalité $\mathbf{E}\left(\mathrm{X}g(\mathrm{X})\right) = \mathbf{E}\left(g'(\mathrm{X})\right)$.

Exercice 48. ✦ ✎ **Moments de la loi normale**

1. Justifier l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n$.
3. Vérifier que $\mathrm{I}_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
4. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad \mathrm{I}_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \quad$ et $\quad \mathrm{I}_{2p+1} = 2^p p!$.
5. Conclure en donnant les moments de la loi normale centrée réduite à tout ordre.

Exercice 49. ✦✦ On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \sin\left(2\pi\ln(x)\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\ln(x)^2/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. 🔍 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = \ln(t) - n$, justifier la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

2. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$. Vérifier que $X = e^Y$ est une variable aléatoire à densité dont g est une densité.
3. Pour tout réel $\lambda \in]-1;1[$, on définit la fonction $h_\lambda = (1+\lambda f)\cdot g$. Vérifier que h_λ est une densité de probabilité.
4. **a)** Justifier que X admet des moments à tout ordre.
   b) Soit Y_λ une variable aléatoire dont une densité est donnée par h_λ. Démontrer que Y_λ admet des moments à tout ordre et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{E}\left({Y_\lambda}^n\right) = \mathbf{E}\left(X^n\right).$$

Exercice 50. ✦✦ ✎ On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer grâce à une intégration par partie, puis un encadrement d'intégrale, que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} \leqslant 1-\Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-x^2/2}.$$

2. En déduire un équivalent de $1-\Phi(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 51. ✦✦ Soit X, une variable aléatoire telle que $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la densité f de X si on la suppose en plus paire et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 52. ✦✦✦ ✎ **Les lois sans mémoire**

1. Montrer que toute variable aléatoire X de loi exponentielle vérifie la relation :

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbf{P}_{[X>y]}(X > x+y) = \mathbf{P}(X > x) \qquad (\star)$$

   L'objectif des questions suivantes est d'établir une réciproque.
2. *Un résultat préliminaire*
   Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, non nulle et vérifiant

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x)\cdot f(y).$$

   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
   b) i) Exprimer $f(n)$ où $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de n et $f(1)$. En déduire $f(n)$, où $n \in \mathbb{Z}$.
   ii) Déterminer ensuite une expression de $f(p/q)$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.
   c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite de $\lfloor nx \rfloor / n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   d) En déduire $f(x)$, où $x \in \mathbb{R}$, en fonction de $f(1)$.
3. Réciproquement, soit X une variable aléatoire à densité définie sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction de répartition F est nulle sur $]-\infty,0]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}(X > y) > 0$.
   Montrer que si X vérifie $(\star)$ alors X suit une loi exponentielle.

Exercice 53. ✦✦ **Tracé de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite**

1. ✧ *Premières propriétés*
   a) Préciser les variations de Φ et donner les limites en $\pm\infty$ de Φ.
   b) Vérifier pour tout réel x, $\Phi(x) - \frac{1}{2} = -\left(\Phi(-x) - \frac{1}{2}\right)$ et $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.
   c) Justifier le développement limité en 0 : $\Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}x + o_0(x)$.
   d) En utilisant les résultats précédents, tracer l'allure de la courbe représentative de Φ.
2. ✦✦✦ *Tracé avec Python* — *D'après ESCP ORAUX 1999*
   a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}} \leqslant \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}.$$

   En déduire que
$$\left|\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}\right| \leqslant \frac{x}{n}\left(1-e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

   b) Quelle inégalité doit vérifier n pour trouver une valeur approchée de $\Phi(x)$ à 10^{-6} près ?
   c) Proposer, en langage Python, une fonction `I(f, a, b, n)` qui prend en entrée une fonction f à valeurs réelles, deux réels a et b et un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de $\int_a^b f(t)\,dt$ calculée avec n rectangles.
   d) En déduire une nouvelle fonction qui renvoie une approximation de $\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, puis de $\Phi(x)$.

Exercice 54. ✦✦ Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ suivant la loi normale d'espérance m et de variance égale à 1. Soit b un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que l'application $a \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{P}(a < \mathrm{X} < a+b)$ admet un maximum atteint en un point a_0 que l'on déterminera.
2. Exprimer la valeur de ce maximum à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
3. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Exercice 55. ✦✦✦ *Sujet de Sylvain oral HEC 2025*

Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2.$$

Montrer que X suit une loi normale, dont on précisera les paramètres.

Sujets

Exercice 56. ✦✦ **Entropie d'une variable à densité**

Dans la suite, on définit la fonction continue h sur $[0;1]$ par

$$\forall x \in [0;1], \qquad h(x) = \begin{cases} -x\ln(x) \text{ si } x \in]0;1] \\ 0 \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des densités de probabilités f telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ soit convergente. Pour toute variable aléatoire X ayant pour densité $f \in \mathscr{F}$, on définit l'entropie H(X) de X par :

$$\mathrm{H(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

1. *Transformation affine*
   Soient X et $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$ avec $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $b \in \mathbb{R}$.
   a) Expliciter une densité de Y en fonction de a, b et d'une densité de X.
   b) En déduire que si X a une entropie, Y aussi et $\mathrm{H(Y)} = \ln(a) + \mathrm{H(X)}$.
2. *Exemple 1 : cas des lois normales*
   a) Soit Y_0 une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que Y_0 a une entropie existe et calculer $\mathrm{H}(\mathrm{Y}_0)$.
   b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathscr{N}(m;\sigma^2)$. Vérifier que
   $$\mathrm{H(Y)} = \mathrm{H}(\mathrm{Y}_0) + \ln(\sigma) = \frac{1}{2}\big(1 + \ln(2\pi) + 2\ln(\sigma)\big).$$
3. *Exemple 2 : cas des lois exponentielles*
   Soit X_0 une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ avec $f_0 > 0$ une densité. Montrer que $\mathrm{H}(\mathrm{X}_0)$ existe et calculer $\mathrm{H}(\mathrm{X}_0)$ en fonction de λ.
4. *Majoration à espérance fixée*
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$, admettant une densité $f \in \mathscr{F}$. On suppose que X admet une espérance égale à $\frac{1}{\lambda}$. Montrer que :
   $$\mathrm{H}(\mathrm{X}_0) = -\int_0^{+\infty} f(x)\ln\big(f_0(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$
   Montrer que $\qquad \mathrm{H(X)} \leqslant \mathrm{H}(\mathrm{X}_0).$
5. *Majoration à variance fixée*
   Soit X une variable à densité f_1 suivant une loi normale centrée $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$. Soit Y, une variable aléatoire possédant un moment d'ordre 2 égal à σ^2 et une densité $g \in \mathscr{F}$. Montrer que
   $$\mathrm{H(X)} = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cdot\ln\big(f_1(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$
6. Déduire de la question précédente l'inégalité : $\mathrm{H(X)} \geqslant \mathrm{H(Y)}$.

Exercice 57. ✦✦ *d'après EDHEC 2018*

On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $\mathrm{Y} = \sqrt{\mathrm{X}}$.

1. On rappelle qu'en Python, `rd.exponential(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre `a`. Écrire une (ou des) commande(s) Python permettant de simuler Y.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

   b) En déduire une densité f_Y de Y.

3. a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.

   b) En déduire que Y a une espérance et donner sa valeur.

4. On pose $U = 1 - e^{-X/2}$.

   a) Vérifier que $U(\Omega) = [0,1[$.

   b) Déterminer la fonction de répartition F_U de U et reconnaître la loi de U.

   c) Exprimer X en fonction de U, puis en déduire une simulation Python de Y utilisant uniquement la commande `rd.rand`.

Exercice 58. ✦✦ *d'après EDHEC 2015, exercice 2*

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note F_Y la fonction de répartition de Y.

1. a) Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y.

   b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.

   c) Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.

2. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

   a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du.$$

   b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

   On considère, dans la suite, une variable aléatoire Z de densité g et on note G sa fonction de répartition.

3. a) On pose $T = \sqrt{2Z}$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y,

   b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.

4. Écrire une commande python permettant de simuler la variable aléatoire Z.

5. On considère les commandes Python suivantes :

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
n=5000
w=rd.exponential(1,n)
s=0
for i in range(n):
    s+=w[i]**(3/2)
s=s/(n*np.pi**(1/2))
```

   a) En remarquant que $x^2 g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x}$, montrer que s contient une valeur approchée de $\int_0^{+\infty} x^2 g(x)\,dx$, pour peu que l'on entre une valeur de n assez grande.

   b) On admet que $\mathbf{E}\left(X^4\right) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus ?

Table de la loi normale centrée réduite

z	+0,00	+0,01	+0,02	+0,03	+0,04	+0,05	+0,06	+0,07	+0,08	+0,09
0,0	0,500 00	0,503 99	0,507 98	0,511 97	0,515 95	0,519 94	0,523 92	0,527 90	0,531 88	0,535 86
0,1	0,539 83	0,543 80	0,547 76	0,551 72	0,555 67	0,559 62	0,563 56	0,567 49	0,571 42	0,575 35
0,2	0,579 26	0,583 17	0,587 06	0,590 95	0,594 83	0,598 71	0,602 57	0,606 42	0,610 26	0,614 09
0,3	0,617 91	0,621 72	0,625 52	0,629 30	0,633 07	0,636 83	0,640 58	0,644 31	0,648 03	0,651 73
0,4	0,655 42	0,659 10	0,662 76	0,666 40	0,670 03	0,673 64	0,677 24	0,680 82	0,684 39	0,687 93
0,5	0,691 46	0,694 97	0,698 47	0,701 94	0,705 40	0,708 84	0,712 26	0,715 66	0,719 04	0,722 40
0,6	0,725 75	0,729 07	0,732 37	0,735 65	0,738 91	0,742 15	0,745 37	0,748 57	0,751 75	0,754 90
0,7	0,758 04	0,761 15	0,764 24	0,767 30	0,770 35	0,773 37	0,776 37	0,779 35	0,782 30	0,785 24
0,8	0,788 14	0,791 03	0,793 89	0,796 73	0,799 55	0,802 34	0,805 11	0,807 85	0,810 57	0,813 27
0,9	0,815 94	0,818 59	0,821 21	0,823 81	0,826 39	0,828 94	0,831 47	0,833 98	0,836 46	0,838 91
1,0	0,841 34	0,843 75	0,846 14	0,848 49	0,850 83	0,853 14	0,855 43	0,857 69	0,859 93	0,862 14
1,1	0,864 33	0,866 50	0,868 64	0,870 76	0,872 86	0,874 93	0,876 98	0,879 00	0,881 00	0,882 98
1,2	0,884 93	0,886 86	0,888 77	0,890 65	0,892 51	0,894 35	0,896 17	0,897 96	0,899 73	0,901 47
1,3	0,903 20	0,904 90	0,906 58	0,908 24	0,909 88	0,911 49	0,913 09	0,914 66	0,916 21	0,917 74
1,4	0,919 24	0,920 73	0,922 20	0,923 64	0,925 07	0,926 47	0,927 86	0,929 22	0,930 56	0,931 89
1,5	0,933 19	0,934 48	0,935 74	0,936 99	0,938 22	0,939 43	0,940 62	0,941 79	0,942 95	0,944 08
1,6	0,945 20	0,946 30	0,947 38	0,948 45	0,949 50	0,950 53	0,951 54	0,952 54	0,953 52	0,954 49
1,7	0,955 43	0,956 37	0,957 28	0,958 18	0,959 07	0,959 94	0,960 80	0,961 64	0,962 46	0,963 27
1,8	0,964 07	0,964 85	0,965 62	0,966 37	0,967 12	0,967 84	0,968 56	0,969 26	0,969 95	0,970 62
1,9	0,971 28	0,971 93	0,972 57	0,973 20	0,973 81	0,974 41	0,975 00	0,975 58	0,976 15	0,976 70
2,0	0,977 25	0,977 78	0,978 31	0,978 82	0,979 32	0,979 82	0,980 30	0,980 77	0,981 24	0,981 69
2,1	0,982 14	0,982 57	0,983 00	0,983 41	0,983 82	0,984 22	0,984 61	0,985 00	0,985 37	0,985 74
2,2	0,986 10	0,986 45	0,986 79	0,987 13	0,987 45	0,987 78	0,988 09	0,988 40	0,988 70	0,988 99
2,3	0,989 28	0,989 56	0,989 83	0,990 10	0,990 36	0,990 61	0,990 86	0,991 11	0,991 34	0,991 58
2,4	0,991 80	0,992 02	0,992 24	0,992 45	0,992 66	0,992 86	0,993 05	0,993 24	0,993 43	0,993 61
2,5	0,993 79	0,993 96	0,994 13	0,994 30	0,994 46	0,994 61	0,994 77	0,994 92	0,995 06	0,995 20
2,6	0,995 34	0,995 47	0,995 60	0,995 73	0,995 85	0,995 98	0,996 09	0,996 21	0,996 32	0,996 43
2,7	0,996 53	0,996 64	0,996 74	0,996 83	0,996 93	0,997 02	0,997 11	0,997 20	0,997 28	0,997 36
2,8	0,997 44	0,997 52	0,997 60	0,997 67	0,997 74	0,997 81	0,997 88	0,997 95	0,998 01	0,998 07
2,9	0,998 13	0,998 19	0,998 25	0,998 31	0,998 36	0,998 41	0,998 46	0,998 51	0,998 56	0,998 61
3,0	0,998 65	0,998 69	0,998 74	0,998 78	0,998 82	0,998 86	0,998 89	0,998 93	0,998 97	0,999 00
3,1	0,999 03	0,999 06	0,999 10	0,999 13	0,999 16	0,999 18	0,999 21	0,999 24	0,999 26	0,999 29
3,2	0,999 31	0,999 34	0,999 36	0,999 38	0,999 40	0,999 42	0,999 44	0,999 46	0,999 48	0,999 50
3,3	0,999 52	0,999 53	0,999 55	0,999 57	0,999 58	0,999 60	0,999 61	0,999 62	0,999 64	0,999 65
3,4	0,999 66	0,999 68	0,999 69	0,999 70	0,999 71	0,999 72	0,999 73	0,999 74	0,999 75	0,999 76
3,5	0,999 77	0,999 78	0,999 78	0,999 79	0,999 80	0,999 81	0,999 81	0,999 82	0,999 83	0,999 83
3,6	0,999 84	0,999 85	0,999 85	0,999 86	0,999 86	0,999 87	0,999 87	0,999 88	0,999 88	0,999 89
3,7	0,999 89	0,999 90	0,999 90	0,999 90	0,999 91	0,999 91	0,999 91	0,999 92	0,999 92	0,999 92
3,8	0,999 93	0,999 93	0,999 93	0,999 94	0,999 94	0,999 94	0,999 94	0,999 95	0,999 95	0,999 95
3,9	0,999 95	0,999 95	0,999 96	0,999 96	0,999 96	0,999 96	0,999 96	0,999 96	0,999 97	0,999 97
4,0	0,999 97	0,999 97	0,999 97	0,999 97	0,999 97	0,999 97	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98
4,1	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 98	0,999 99	0,999 99
4,2	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99
4,3	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99	0,999 99
4,4	0,999 99	0,999 99	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
4,5	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
4,6	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
4,7	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
4,8	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00
4,9	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00	1,000 00