Nom :

Mathématiques approfondies
Cours ECG 2

Partie IV

Chapitres

Lycée Saint Louis 2024/2025

CHAPITRE 7

Variables aléatoires à densité

> $\rightharpoonup$ Bonjour ChatGPT, invente moi une citation drôle pour un cours de mathématiques.
> $\rightharpoonup$ "Les mathématiques, c'est comme les chaussettes : il y a toujours une inconnue qui se cache quelque part." Cette citation est là pour apporter un peu de légèreté à un sujet souvent perçu comme sérieux!

1 Rappels : intégrales impropres

1.1 Convergence et convergence absolue

Définition 1 (intégrale généralisée en b)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
L'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $[a;b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle est dite **convergente** si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite *finie* lorsque x tend vers b avec $x < b$. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, l'intégrale est dite **divergente**.

Remarques.
- La définition s'étend aux fonctions continues sur $]a,b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
- Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

L'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle est dite **convergente** si pour un réel $c \in]a,b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 2 (absolue convergence)

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite **absolument convergente** si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

De plus, **si** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, **alors** elle est convergente.

⚠ **Attention.** La réciproque est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes sans être absolument convergente.

1.2 Critères de convergence

À l'aide du théorème de convergence monotone, on montre que, pour $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'application $x \in [a;b[\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

Proposition 3 (critère de comparaison et de négligeabilité)

Soient f, g deux fonctions continues définies sur $[a, b[$.

- **Si**
  - f et g sont positives,
  - pour tout $x \in [a, b[, \quad f(x) \leqslant g(x)$,
  - $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.
- **Si**
  - g est positive sur un voisinage de b;
  - $f \underset{b^-}{=} o(g)$;
  - $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, **alors** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.

Proposition 4 (critère d'équivalence)

Soient f, g deux applications continues définies sur $[a, b[$.

Si
- f et g sont de signe constant sur un voisinage de b,
- $f \underset{b^-}{\sim} g$,

alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Remarque. En pratique, on compare souvent aux **intégrales de Riemann.**

- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente en 0 si et seulement si $\alpha < 1$;
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

1.3 Règles de calculs

Sous réserve de convergence, les propriétés de linéarité, de croissance de l'intégrale, l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles sont encore valables. Par contre, pour effectuer une intégration par parties, on se ramène à un segment.

Théorème 5 (changement de variable)

Soit f continue sur un intervalle $]a, b[$.

Si $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ est une bijection croissante de classe $\mathscr{C}^1$,

alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_\alpha^\beta \varphi'(t) f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Dans le cas de convergence,
$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. L'énoncé s'étend au cas décroissant.

2 Variables aléatoires à densité

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 6 (variable aléatoire à densité)

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Notons F_X la fonction de répartition de X. On dit que X est une **variable aléatoire à densité** si :

- F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
- F_X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

Remarque. Si X est une variable aléatoire à densité : pour $b \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\mathbf{P}\Big([X = b]\Big) = 0.}$
Plus généralement, pour tous $a,\ b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\Big([X \in]a;b[]\Big) = \mathbf{P}\Big([X \in [a;b[]\Big) = \mathbf{P}\Big([X \in]a;b]]\Big) = \mathbf{P}\Big([X \in [a;b]]\Big).$$

Définition 7 (densité de probabilité)

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** si elle vérifie :

- f est positive sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.
- L'intégrale suivante est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

Exercice 1

Exemples *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. ✦ Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t < 0 \\ te^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

2. ✦✦ On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{\lambda}{e^t+1}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.

a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall x > 0$, $\frac{1}{x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

b) En déduire la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que f soit une densité de probabilité.

Proposition 8 (densité de probabilité d'une variable à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité.
Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs positives qui coïncide avec ${F_X}'$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points est une densité de probabilité. On dit que f est <u>une</u> densité de probabilité de la variable aléatoire X.

Proposition 9 (densité et fonction de répartition)

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et F_X, f_X respectivement la fonction de répartition et une densité de X.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$
- Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tels que $a < b$, $\displaystyle\mathbf{P}\Big([X \in [a;b]]\Big) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t.$

Remarque. En particulier, on a

$$\mathbf{P}([X \geqslant x]) = \mathbf{P}([X > x]) = 1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

✦ *Les deux questions sont indépendantes*

1. Calculer $\mathbf{P}(X^2 - X < 0)$ lorsque X est une variable aléatoire qui a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.
2. *Loi de Benford*
   On considère X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition coïncide, sur l'intervalle $[1;10[$, avec la fonction $t \mapsto \ln(t)/\ln(10)$. Si on pose $Y = \lfloor X \rfloor$, vérifier que

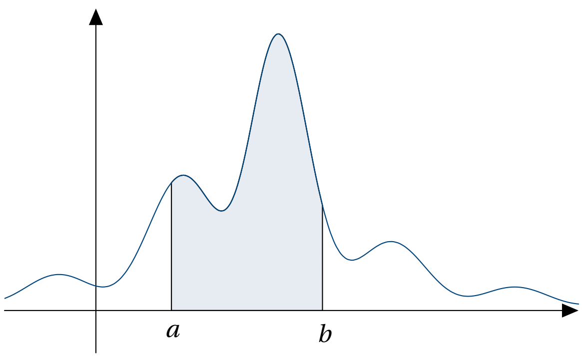
$$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(Y \in \{2,3\}) = \mathbf{P}(Y \in \{5,6,7,8,9\}).$$

⚠ **Attention.** Il ne faut pas confondre fonction de répartition et densité.
Rappelons qu'une fonction de répartition est une fonction croissante de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Le lien est, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf un nombre fini,

$$\boxed{f_X(t) = {F_X}'(t).}$$

La densité d'une variable X n'est pas unique alors que la fonction de répartion l'est.

Interprétation graphique



Traçons la courbe représentative d'une densité.
L'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ correspond exactement à la probabilité que la variable aléatoire prenne les valeurs comprises entre a et b.

$$\boxed{\text{Aire} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}\Big([a \leqslant X \leqslant b]\Big).}$$

Lorsque $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, on retrouve bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 = \mathbf{P}(\Omega).$$

De nouveau, on constate que pour une variable aléatoire continue, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}\Big([X = a]\Big) = 0$.

Proposition 10 (la densité caractérise la loi)

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
Si f est à la fois une densité de X et Y, alors X et Y ont même loi.

Remarque. En pratique, donner la loi d'une variable aléatoire à densité est équivalent à donner

$$\mathbf{P}\Big([X \in [a,b]]\Big) \text{ pour tous } a,\ b \in \mathbb{R},$$

C'est aussi équivalent à donner la fonction de répartition ou une densité de probabilité.

Proposition 11 (conditions pour une variable à densité)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si
- La fonction f est positive.
- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un ensemble fini de points.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité de probabilité.

2.2 Cas des variables du type $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$

Méthode

Comment montrer qu'une variable aléatoire est à densité et obtenir une densité ?

Soit X, une première variable aléatoire à densité et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application. On pose $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$. Pour justifier que Y est une nouvelle variable aléatoire, on peut procéder comme suit :

- On précise $\mathrm{Y}(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par Y.
- On exprime la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En particulier, on cherche pour tout $t \in \mathrm{Y}(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}\big([\mathrm{Y} \leqslant t]\big)$.
- Ensuite, on s'assure que $\mathrm{F_Y}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points (noté dans la suite D).
- On calcule la dérivée $\mathrm{F_Y}'$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathrm{D}$ afin d'avoir une densité de Y.

Exercice 3

✧ **Un exemple avec la loi de Laplace**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable à densité et que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel t par $f(t) = \lambda \exp(-|t|)$ est une densité de X.

1. Quelle est la valeur de λ ? Préciser le graphe de f.
2. Déterminer la fonction de répartition de X. *Indication. On distinguera $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$.*
3. On pose $\mathrm{Y} = 3\mathrm{X} - 2$.
   a) Établir une relation entre $\mathrm{F_X}$ et $\mathrm{F_Y}$, les fonctions de répartition de X et Y.
   b) Vérifier que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité.

Exemple. Calcul de la loi de Y = aX + b en fonction de la loi de X

Soient X une variable aléatoire à densité et $a, b \in \mathbb{R}$.

On montre que la variable $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$ est à densité et une densité est donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f_{\mathrm{Y}}(t) = \dfrac{1}{|a|} f_{\mathrm{X}}\left(\dfrac{t-b}{a}\right)$.

Exercice 4

✦✦ ✎ ✦✦ Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[-1;1]$. C'est-à-dire, une densité de X est donnée par $f = 1/2 \cdot \mathbf{1}_{[-1;1]}$.

1. Justifier que $\mathrm{U} = |\mathrm{X}|$ est une variable à densité et donner une densité.
2. Faire de même avec $\mathrm{V} = \mathrm{X}^2$.
3. *Cas général.* Soit f, une densité de X. Justifier que $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^2$ est une variable aléatoire réelle admettant une densité nulle sur $\mathbb{R}^-$ et donnée sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\big(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})\big).$$

3 Espérance d'une variable à densité

3.1 Définition

Définition 12 (espérance dans le cas à densité)

Soit X une variable aléatoire à densité f_X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On définit **l'espérance de** X, *sous réserve de convergence absolue*, comme le réel

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

⚠ **Attention.** Comme pour les variables aléatoires discrètes, il ne faut pas oublier la convergence absolue.

Exercice 5

✧ ✎ **Loi de Pareto**
Soient $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} \quad \text{si} \quad t \in [1;+\infty[\quad \text{et } f(t) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Pour quelles valeurs de α, X admet-elle une espérance ? La calculer quand elle existe.

3.2 Règles de calculs sur l'espérance

Proposition 13 (linéarité de l'espérance)

Soient X et Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y).$$

Vocabulaire. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On dit que X est **centrée** si X admet une espérance et $\mathbf{E}(X) = 0$. Ainsi, la variable aléatoire $X - \mathbf{E}(X)$ est toujours une variable aléatoire centrée.

Proposition 14 (existence par domination)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé.

Si
- $|X| \leqslant Y$.
- Y admet une espérance.

Alors, X admet une espérance et $|\mathbf{E}(X)| \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

Proposition 15 (positivité et croissance de l'espérance)

Soient X, Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance.
- Positivité de l'espérance : si $X \geqslant 0$ presque sûrement, alors $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.
- Croissance de l'espérance : si $X \leqslant Y$ presque sûrement, alors $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

3.3 Formule de transfert

Théorème 16 (de transfert)

Soient X une v.a admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a, b[$ avec $(a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ et $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. On a l'équivalence entre

i) La variable $\varphi(X)$ admet une espérance.

ii) L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(t) f_X(t) \mathrm{d}t$ converge absolument.

Et en cas de convergence absolue, $$\mathbf{E}\big(\varphi(X)\big) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6

✦ Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par $f = \mathbf{1}_{]0;1[}$. Justifier l'existence de l'espérance $\mathbf{E}\big(\ln(X)\big)$ et la calculer.

4 Moments et variance d'une variable à densité

4.1 Moments

Pour tout entier naturel s, le moment d'ordre s d'une variable aléatoire X est le nombre $m_s(X)$ défini par :

$$m_s(X) = \mathbf{E}(X^s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 7

✦ ✎ On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   Montrer que X admet des moments à tout ordre et les calculer.

Exercice 8

1. ✦✦ Montrer que si X a un moment d'ordre r alors, X admet un moment d'ordre s pour tout entier $s \leqslant r$.
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, construire une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre r mais pas de moment d'ordre $r+1$.

4.2 Variance

Définition 17 (variance et écart-type)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- On appelle **variance** d'une variable aléatoire X, la quantité $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\Big(\big(X - \mathbf{E}(X)\big)^2\Big)$.
- On appelle **écart-type** de X, la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Remarque. La quantité $\sigma(X)$ est bien définie car $\big(X - \mathbf{E}(X)\big)^2 \geqslant 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbf{V}(X) \geqslant 0$.

Proposition 18 (propriétés de la variance)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- $\mathbf{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une application presque sûrement constante.
- Pour tous réels a, b, $\quad \mathbf{V}(aX+b) = a^2\,\mathbf{V}(X) \quad ; \quad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.

Vocabulaire. Soit X une variable aléatoire. Nous avons vue qu'une variable aléatoire X est dite **centrée** si $\mathbf{E}(X) = 0$. Elle est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$. La variable aléatoire $Y = \frac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée, réduite.

Théorème 19 (formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. Alors $\quad \mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2$.

Exercices

Révisions : intégrales sur un segment

Exercice 9. ✦ **Sommes de Riemann**

Justifier que pour $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$
$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Exercice 10. ✦ ✎ **Lemme de Riemann-Lebesgue**

Soit $f : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Justifier que
$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 11. ✦ ✎ **Variante des intégrales de Wallis avec la fonction tangente**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Vérifier que $\tan' = 1+\tan^2$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+2}+u_n = \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire une fonction Python qui prend en argument n et renvoie u_n.
4. Étudier les variations de la suite (u_n). En déduire la convergence de la suite (u_n) et calculer la limite.
5. Effectuer le changement de variable $x = \tan t$ dans l'intégrale définissant u_n, puis en déduire $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Révisions : intégrales généralisées

Exercice 12. ✦ On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que J_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre J_n et J_{n+1}.
3. En déduire J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. ✦ Soit f une fonction continue bornée sur $[0,+\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales I et J sont convergentes où
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
2. Vérifier que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
3. *Application.* Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\mathrm{d}x$.

Exercice 14. ✦✦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Donner un exemple où $f(t) \underset{t\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. *Un graphe suffit...*
2. Vérifier que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ est vrai si on suppose que f de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

Exercice 15. ✦✦✦

Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ non constant. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\big(\mathrm{P}(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\deg \mathrm{P} \geqslant 2$.

Exercice 16. ✦✦ *Intégrale à paramètre : voir ECRICOME 2009, exercice 2.*

Variable aléatoire à densité

Exercice 17. ✧ ✎ Soit X une variable à densité dont une densité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} c\,x(1-x) & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Déterminer le réel c. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 18. ✧ **Vrai ou faux?**
Toute variance de variable aléatoire réelle à densité est strictement positive.

Exercice 19. ✦ ✎ Soit X une variable aléatoire admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ et un moment d'ordre 2. Caractériser la valeur du réel a qui minimise l'expression

$$\varphi(a)=\mathbf{E}\left((X-a)^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-a)^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

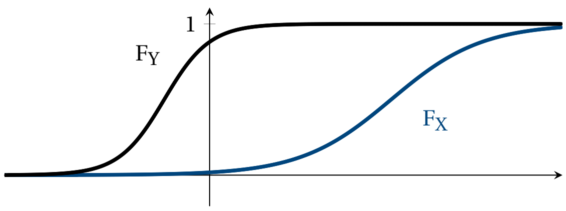
Exercice 20. ✦ Soit X une variable aléatoire à densité avec une densité de probabilité f paire.

1. Préciser $\mathbf{P}\big([X\geqslant 0]\big)$.
2. On note F la fonction de répartition de X. Justifier que $x\in\mathbb{R}\mapsto F(x)-\frac{1}{2}$ est impaire.
3. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 21. ✦ **Nouvelle expression de l'espérance**
Soit X une v.a à densité. On note f une densité de X, et F sa fonction de répartition. On suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f=0$ sur $\mathbb{R}^-$.

1. 🔍 Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^x\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t=x\big(1-F(x)\big)+\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$ $\quad(\bullet)$
2. On suppose dans cette question que X possède une espérance.
   a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle 0\leqslant x\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_x^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t.$
   b) En déduire que $x\big(1-F(x)\big)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$
   c) À l'aide de la relation $(\bullet)$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge, et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t=\mathbf{E}(X).$
3. *La réciproque.*
   On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge.
   a) 🔍 Montrer que l'application $\displaystyle\varphi: x\in\mathbb{R}^+\mapsto\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   b) Montrer en utilisant $(\bullet)$ que φ est majorée.
   c) En déduire que $\mathbf{E}(X)$ existe et que $\displaystyle\mathbf{E}(X)=\int_0^{+\infty}\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t.$
4. Adapter le raisonnement pour montrer que si X admet un moment d'ordre 2, alors $\displaystyle\mathbf{E}(X^2)=2\int_0^{+\infty}t\big(1-F(t)\big)\,\mathrm{d}t.$

Exercice 22. ✦✦ Soient X et Y deux variables à densité. On suppose que X et Y admettent une espérance et des densités strictement positives sur $\mathbb{R}$.



1. ✎ Soit F_X la fonction de répartition de X. Quelle est la loi de ${F_X}^{-1}(U)$ où $U\hookrightarrow\mathcal{U}([0;1])$?
2. La figure ci-contre est la représentation graphique des fonctions de répartition de X et Y. Quelle est la variable dont l'espérance est la plus grande? Justifier.

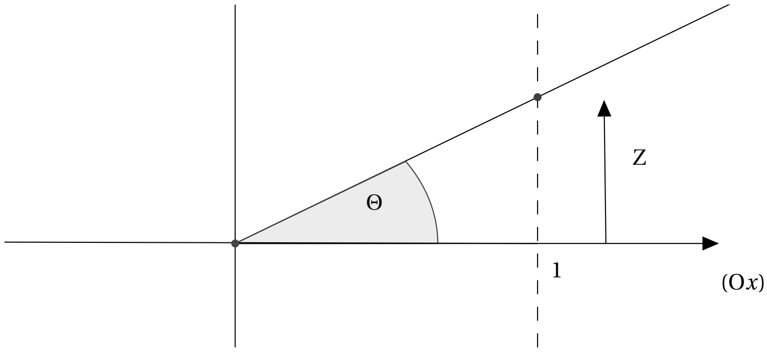
Exercice 23. ✦ **Autour de la loi de Cauchy**

Une variable aléatoire à densité suit une loi de Cauchy si une densité est $f: t\in\mathbb{R}\mapsto\dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1. *Préliminaires.*
   a) Simplifier $\arctan(t)+\arctan(1/t)$ lorsque $t\in\mathbb{R}^*$.
   b) Donner la fonction de répartition d'une loi de Cauchy.
2. Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi de Cauchy. On pose $Y=1/X$.
   a) Calculer $\mathbf{P}\big([Y<0]\big)$, puis, pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$, $\mathbf{P}\big([0<Y\leqslant x]\big)$.

b) Montrer que Y suit encore une loi de Cauchy.

3. Un tireur envoie sa balle sur un demi-plan droit. On suppose que l'angle Θ entre le trajectoire et l'axe $(\mathrm{O}x)$ est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
Justifier que la position Z de la balle sur la cible (d'axe $x = 1$) suit une loi de Cauchy.



Exercice 24. ✦✦ Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{F}(x+1) - \mathrm{F}(x)$ est une densité de probabilité.

Exercice 25. ✦✦ Soient $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0;1]\big)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Y}_n \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1;n]\!]\big)$. Comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{Y}_n}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\big(\arctan(\mathrm{Z})\big).$$

Exercice 26. ✦✦ ✎ On considère l'application f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(\mathrm{e}^{-t}+1)^2}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f comme densité. Déterminer F, la fonction de répartition de X.

3. Soit φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$ et $\mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{X})$.

a) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 27. ✦✦ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{2}.$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ dont f est une densité de probabilité.

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence du moment d'ordre m de la variable X. Donner la valeur de l'espérance de X.

3. Pour tout entier n non nul et tout réel x, on pose :

$$\mathrm{H}_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\left(1 + t\mathrm{e}^{-n|t|}\right) \mathrm{d}t.$$

Montrer que H_n est une fonction de répartition.

4. Soit X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, dont H_n est la fonction de répartition. Vérifier que pour tout réel x

$$\mathrm{H}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{F}(x)$$

où F est la fonction de répartition de X.

Exercice 28. ✦✦ **Médiane(s) d'une variable aléatoire.**
Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

1. Justifier qu'il existe un réel m tel que $\quad \mathbf{P}\big([\mathrm{X} \leqslant m]\big) = \dfrac{1}{2}$.
Un tel réel est une médiane de X.

2. Déterminer la ou les médianes d'une variable aléatoire dont une densité f est donnée sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$.

3. Dans la suite, on souhaite déterminer les réels a qui minimise la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad \psi(a) = \mathbf{E}\Big(\big|X - a\big|\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-a| f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   a) Justifier que ψ est une fonction convexe.

   b) Vérifier que ψ est dérivable et exprimer φ' à l'aide de la fonction de répartition F de X.

   c) Conclure.

4. Démontrer que l'ensemble des médianes d'une variable à densité X est un segment.
Une partie I *de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle si pour tous* $x,\ y \in$ I, *le segment* $[x;y] \subset$ I.

Exercice 29. ✦✦✦ *d'après HEC 2016*

1. a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

   b) Soit V une variable aléatoire telle que $V(\Omega) = [0, \pi/2[$ suivant la loi uniforme sur $[0, \pi/2[$ (une densité est donnée par $\mathbf{1}_{[0,\pi/2[}$). On pose : $X = \tan^2(V)$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité.

   c) En déduire que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. a) Compléter le code python de la fonction `simulX` suivante de sorte que son application à l'entier N ($N \geqslant 2$) fournisse une matrice colonne contenant N simulations indépendantes de la variable aléatoire X.

Editeur

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
def simulX( ... ):
    u=rd.rand(N)
    x=np.ones(N)
    for i  ...
        x[i]= ...
    return  ...
```

   b) Après avoir affecté une valeur entière supérieure ou égale à 2 à la variable N, on exécute les commandes suivantes. Trouver la loi d'une variable aléatoire dont la valeur de `c` est, en fin de boucle, une simulation.

Editeur

```
N=100
c=0
x=simulX(N)
for i in range(N):
    if x[i]>1 :
        c=c+1
```

CHAPITRE 8

Lois à densité usuelles

J'étais alors en proie à la mathématique.
Temps sombre! enfant ému du frisson poétique,
Pauvre oiseau qui heurtais du crâne mes barreaux,
On me livrait tout vif aux chiffres, noirs bourreaux; [...]
On me tordait depuis les ailes jusqu'au bec,
Sur l'affreux chevalet des X et des Y; [...]

VICTOR HUGO, *Les Contemplations*, 1856

1 Lois uniformes continues

Définition, espérance et variance

Définition 20 (lois uniformes continues)

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On dit que X suit la **loi uniforme continue** sur l'intervalle $[a; b]$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a; b])$, si X a pour densité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque. Le facteur $\frac{1}{b-a}$ est imposé par le fait qu'une densité est toujours d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$.

Proposition 21 (fonction de répartition et espérance d'une loi uniforme)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $\mathscr{U}([a; b])$. La fonction de répartition de X est

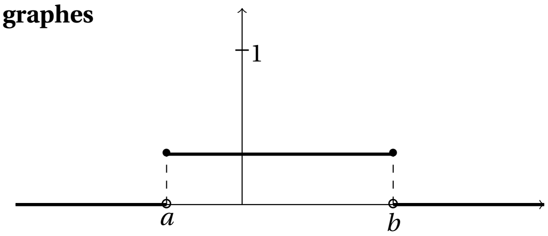
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si} \quad x > b. \end{cases}$$

De plus, X admet une espérance et une variance avec

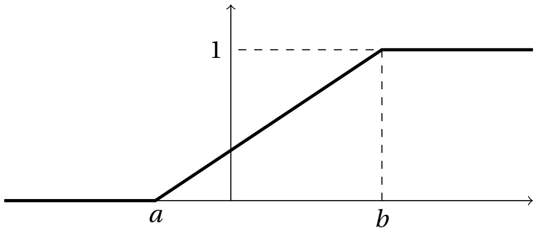
$$\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Remarque. Comme X est une variable aléatoire bornée, X admet des moments à tout ordre.

Les graphes



Une densité de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$



La fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$

Exemple de modélisation

Souvent lorsque qu'on ne précise pas, un tirage *au hasard* correspond à une loi uniforme.
Par exemple, choisir un nombre réel *au hasard* dans $[0;1]$ signifie choisir un nombre suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$.

Exercice 30

✦ À partir de 8 heures, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt donné. Ils passent donc à 8h00, 8h15, 8h30, etc... Un usager se présente à cet arrêt entre 8h00 et 8h30. On suppose que l'heure exacte de son arrivée est une variable aléatoire X de loi uniforme sur cette période.

1. Quelle est la probabilité que l'usager doive attendre moins de cinq minutes? Plus de dix minutes?
2. On note T le temps d'attente du bus (en minutes). Déterminer F_T, la fonction de répartition de T. En déduire la loi de T. En moyenne, combien de temps attend l'usager?

Transformation affine et lois uniformes

X suit une loi uniforme sur $[0;1]$
si et seulement si
$Y = (b-a)X + a$ suit une loi uniforme sur $[a;b]$.

Exercice 31

✦✦ *Les questions sont indépendantes*

1. *Vrai ou faux?* Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([-1;1])$, alors U et $-U$ ont même loi?
2. Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$, quelle est la loi de $Y = \lfloor (b-a+1)U \rfloor + a$?

2 Lois exponentielles

Définition, espérance et variance

Définition 22 (lois exponentielles)

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.
On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ, notée $\mathscr{E}(\lambda)$, si X a pour densité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

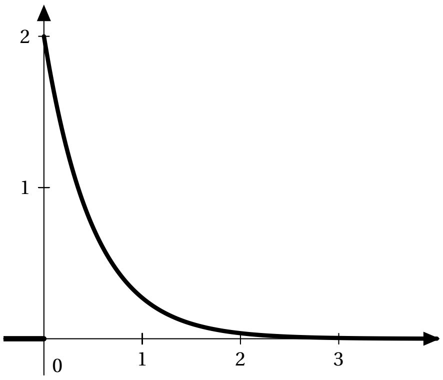
Proposition 23 (fonction de répartition et espérance d'une loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. La fonction de répartition de X est

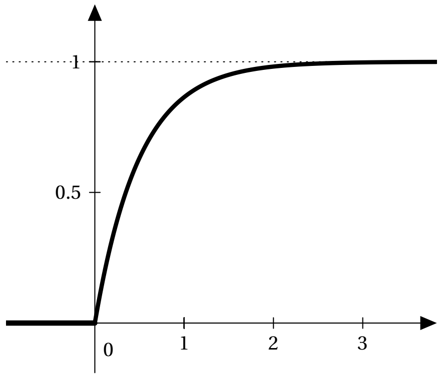
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

De plus, X admet une espérance et une variance avec $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Les graphes



Une densité de $X \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$



La fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$

Exemples de modélisation

Proposition 24 (loi sans mémoire)

Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.
Alors X est une **variable aléatoire sans mémoire**. C'est-à-dire :

$$\forall\, s, t \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbf{P}\big([X > t]\big) = \mathbf{P}_{[X>s]}\big([X > s+t]\big).$$

Remarque. On parle aussi de propriété de *non vieillissement*.
Plus généralement, la loi exponentielle intervient dans les processus continus sans mémoire comme le temps d'émission d'un électron, le temps de vie d'un composant électronique, ...

Transformation linéaire et lois exponentielles

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$ et $Y = \frac{1}{\lambda} X$. On a vu la relation entre les fonctions de répartition :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F_Y(t) = F_X(\lambda t) \quad \Rightarrow \quad f_Y(t) = \lambda\, f_X(\lambda t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Retenons :

X suit une loi exponentielle de paramètre 1
si et seulement si
$Y = \frac{1}{\lambda} X$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 32

✦ **Moments de la loi exponentielle**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

1. **a)** Justifier que I_n est convergente et donner une relation simple entre I_{n+1} et I_n.
   b) En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Conclure en justifiant que la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ admet un moment à tout ordre et retrouver les expressions de l'espérance et la variance.

Exercice 33

✦ ✎ **Simulation de la loi exponentielle par la méthode d'inversion**

1. Soient $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$ et $X = -\ln(U)$. Donner la loi de X.
2. En déduire un programme qui prend en argument λ et simule une variable aléatoire de loi $\mathscr{E}(\lambda)$.
3. Tester la simulation en traçant un histogramme et la densité.

3 Lois γ

Avant de donner la définition, reprenons un exercice classique sur la définition et les propriétés de la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 34

✦ ✎ **Propriétés de la loi Γ**

1. Justifier que Γ est une application bien posée sur $\mathbb{R}_*^+$.

2. **a)** Préciser $\Gamma(1)$.

b) En utilisant l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, calculer $\Gamma(1/2)$.

3. **a)** Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

b) En déduire que que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Définition, espérance et variance

Définition 25 (lois γ)

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$, une variable à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $\nu \in \mathbb{R}_*^+$.
On dit que X suit une **loi γ de paramètre** ν, noté $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$, si X a pour densité

$$f_\nu : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} t^{\nu-1} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Remarques.
• Le facteur $1/\Gamma(\nu)$ permet justement de s'assurer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(t)\, \mathrm{d}t$ vaut bien 1 pour avoir une densité.
• Remarquons que la loi $\gamma(1)$ n'est autre que la loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ qui s'utilise pour modéliser des durées de vie sans vieillissement. Nous verrons au chapitre suivant l'intérêt de ces lois lors de sommes de v.a.

Les graphes

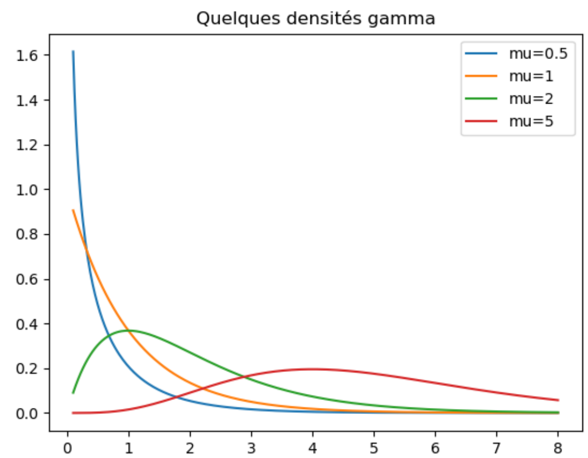
Ci-dessous, le tracé avec Python de quelques densités pour différentes valeurs du paramètre ν. Noter l'utilisation de la bibliothèque **spicy** qui permet, entre autre, d'importer des fonctions de référence (dans notre cas, la fonction Γ).

Editeur

```
import scipy.special as sp
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.clf()

X=np.linspace(0.1,8,400)
for mu in [0.5, 1, 2,5] :
    Gamma=sp.gamma(mu)
    Y=X**(mu-1)*np.exp(-X)/Gamma

    plt.plot(X,Y)
plt.legend(['mu=0.5', 'mu=1', 'mu=2','mu=5'])
plt.title('Quelques densités gamma')
plt.show()
```



Proposition 26 (espérance et variance d'une loi γ)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi $\gamma(\nu)$ alors X admet une espérance et une variance avec

$$\mathbf{E}(X) = \nu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \nu.$$

4 Lois normales

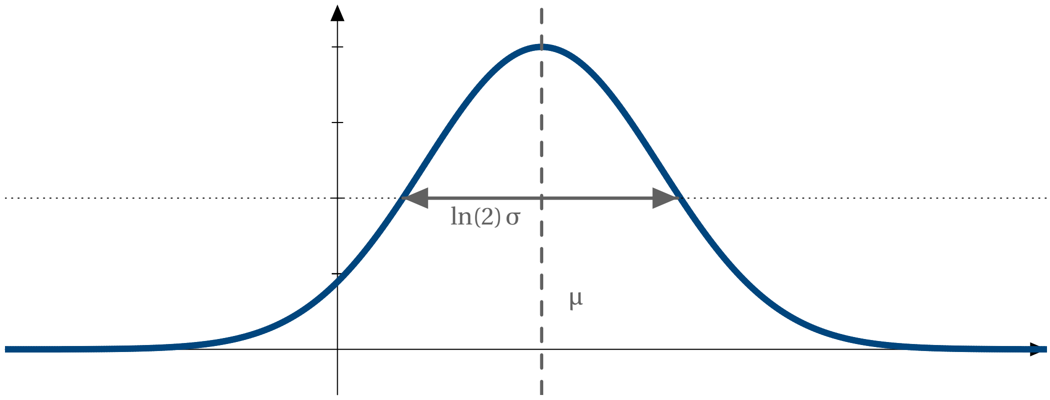
Définition, espérance et variance

Définition 27 (lois normales)

Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$.
On dit que X suit la **loi normale** de paramètres μ, σ, noté $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, si X a pour densité

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_{\mu,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Ci-dessous, l'allure en cloche de la courbe de la densité $f_{\mu,\sigma}$ de la loi normale. Plus σ est proche de 0^+, plus la courbe est étroite.



Transformation affine et lois normales

Proposition 28 (loi normale et transformation affine)

Soient $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

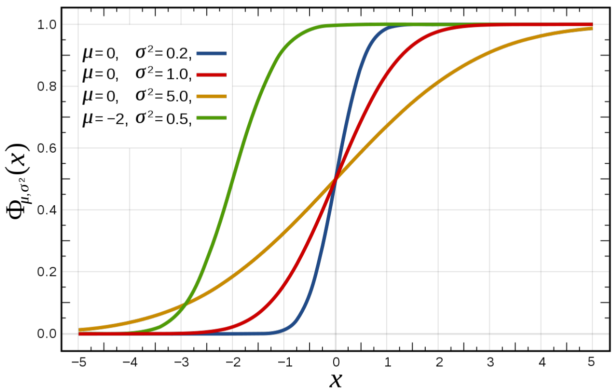
Alors la variable aléatoire $Y = \sigma X + \mu$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

Plus généralement, toute transformation affine d'une loi normale est encore une loi normale.

Remarque. Dans la suite, $\mathcal{N}(0; 1)$ désigne la **loi normale centrée réduite**. La densité est $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.

Il est d'usage de noter Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On démontre qu'il n'existe pas d'expression avec les fonctions usuelles de Φ. Retenons les relations suivantes :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \quad \text{et} \quad \Phi(0) = \frac{1}{2}.}$$



Espérance et variance

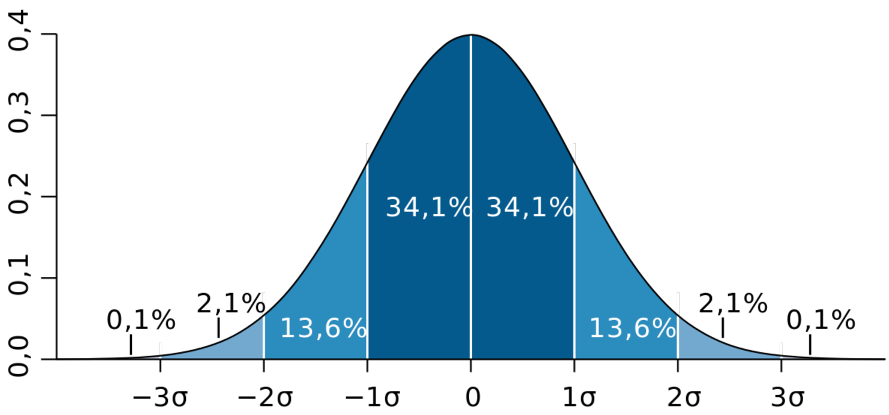
Proposition 29 (espérance et variance d'une loi normale)

Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance avec

$$\mathbf{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \sigma^2.$$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors on obtient une variable aléatoire centrée réduite via

$$\boxed{X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1).}$$



Exercice 35

✧ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(2;9)$. Approximer $\mathbf{P}\Big([X \leqslant -1] \cup [X \geqslant 5]\Big)$ à l'aide de $\Phi(1) \simeq 0.8413$.

Modélisation

Nous verrons l'importance de la loi normale grâce au théorème limite central au chapitre CONVERGENCES DES VARIABLES ALÉATOIRES.

Les lois normales sont utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques. Les mathématiques financières en font une large utilisation (parfois abusive). Citons, par exemple, le modèle de Black-Scholes pour l'évolution d'une action en bourse.

Exercice 36

✦ ✎
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Calculer l'espérance de X^2.

Autres lois classiques

Voici une sélection de quelques lois classiques qui peuvent être étudiées aux concours.

- Loi de Pareto.
- Loi de Cauchy.
- Loi de Rayleigh.
- Loi de Weibull.
- Loi de Laplace.
- Loi de Erlang.
- Loi du χ^2.
- Loi log-normale.
- ...

Exercices

Exercice 37. ✦ **Un exemple détaillé**
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1;1])$.

1. On pose pour tout $t \in]-1;1[$, $g(t) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.
   - **a)** Justifier que g est une bijection de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.
   - **b)** Donner une expression simple de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier que g^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner la dérivée.
   - **c)** On définit la variable $T = g(X)$.
     — Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = F_X\left(g^{-1}(x)\right)$.
     — En déduire que T est une variable aléatoire à densité. *On précisera une densité.*
2. **a)** Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.
   b) Faire de même avec $V = X^2$.

Exercice 38. ✦ Soient $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0,4)$ et $Y = |X|$.

1. Justifier que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité.
2. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 39. ✦ ✎ **Loi du χ^2**
Soit X une variable de loi normale centrée réduite. On note Φ la fonction de répartition de X. On pose $Y = \dfrac{1}{2}X^2$.

1. Exprimer la fonction de répartition F de Y à l'aide de Φ.
2. En déduire que Y est une variable à densité, et déterminer une densité de Y.

Exercice 40. ✦✦ **Une variable à densité ?**
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1)$. Expliciter la fonction de répartition de $Y = \frac{X+|X|}{2}$. Est-ce que Y est une variable à densité ?

Exercice 41. ✦✦ ✎ **Simulation d'une géométrique à partir de la loi exponentielle**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$.

1. Montrer $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.
2. En déduire un programme qui simule une loi géométrique de paramètre p à partir de la loi exponentielle.

Exercice 42. ✦✦ Soit X, une variable aléatoire dont f est une densité paire et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $X^2 \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Déterminer la densité f.

Exercice 43. ✦ Soient X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose de plus que les fonctions g et g' sont bornées.

1. Justifier que les variables $Xg(X)$ et $g'(X)$ admettent des espérances.
2. Établir l'égalité $\mathbf{E}\big(Xg(X)\big) = \mathbf{E}\big(g'(X)\big)$.

Exercice 44. ✦ ✎ **Moments de la loi normale**

1. Justifier l'existence pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}\,dx$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = (n+1)I_n$.
3. Vérifier que $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
4. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \quad$ et $\quad I_{2p+1} = 2^p p!$.
5. Conclure en donnant les moments de la loi normale centrée réduite à tout ordre.

Exercice 45. ✦✦ On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \sin\big(2\pi \ln(x)\big) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\ln(x)^2/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. 🔍 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = \ln(t) - n$, justifier la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) g(t)\,dt = 0.$$

2. Soit $\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$. Vérifier que $\mathrm{X} = \mathrm{e}^{\mathrm{Y}}$ est une variable aléatoire à densité dont g est une densité.

3. Pour tout réel $\lambda \in]-1;1[$, on définit la fonction $h_\lambda = (1+\lambda f)\cdot g$. Vérifier que h_λ est une densité de probabilité.

4. **a)** Justifier que X admet des moments à tout ordre.

b) Soit Y_λ une variable aléatoire dont une densité est donnée par h_λ. Démontrer que Y_λ admet des moments à tout ordre et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{E}\left({\mathrm{Y}_\lambda}^n\right) = \mathbf{E}\left(\mathrm{X}^n\right).$$

Exercice 46. ✦✦ ✎ On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer grâce à une intégration par partie, puis un encadrement d'intégrale, que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant 1-\Phi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

2. En déduire un équivalent de $1-\Phi(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 47. ✦✦ Soit X, une variable aléatoire telle que $\mathrm{X}^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la densité f de X si on la suppose en plus paire et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 48. ✦✦✦ ✎ **Les lois sans mémoire**

1. Montrer que toute variable aléatoire X de loi exponentielle vérifie la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \qquad \mathbf{P}_{[\mathrm{X}>y]}(\mathrm{X} > x+y) = \mathbf{P}(\mathrm{X} > x) \qquad (\star)$$

L'objectif des questions suivantes est d'établir une réciproque.

2. *Un résultat préliminaire*
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, non nulle et vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x)\cdot f(y).$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

b) i) Exprimer $f(n)$ où $n \in \mathbb{N}$ à l'aide de n et $f(1)$. En déduire $f(n)$, où $n \in \mathbb{Z}$.

ii) Déterminer ensuite une expression de $f(p/q)$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite de $\lfloor nx \rfloor / n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) En déduire $f(x)$, où $x \in \mathbb{R}$, en fonction de $f(1)$.

3. Réciproquement, soit X une variable aléatoire à densité définie sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction de répartition F est nulle sur $]-\infty, 0]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}(\mathrm{X} > y) > 0$.
Montrer que si X vérifie $(\star)$ alors X suit une loi exponentielle.

Exercice 49. ✦✦ **Tracé de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite**

1. ✧ *Premières propriétés*

a) Préciser les variations de Φ et donner les limites en $\pm\infty$ de Φ.

b) Vérifier pour tout réel x, $\quad \Phi(x) - \frac{1}{2} = -\left(\Phi(-x) - \frac{1}{2}\right)$ et $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

c) Justifier le développement limité en 0 : $\quad \Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}x + o_0(x)$.

d) En utilisant les résultats précédents, tracer l'allure de la courbe représentative de Φ.

2. ✦✦✦ *Tracé avec Python* *D'après ESCP ORAUX 1999*

a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}} \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}.$$

En déduire que
$$\left|\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\frac{(kx)^2}{2n^2}}\right| \leqslant \frac{x}{n}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

b) Quelle inégalité doit vérifier n pour trouver une valeur approchée de $\Phi(x)$ à 10^{-6} près ?

c) Proposer, en langage Python, une fonction `I(f, a, b, n)` qui prend en entrée une fonction f à valeurs réelles, deux réels a et b et un entier naturel n et qui renvoie une valeur approchée avec la méthode des rectangles de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ calculée avec n rectangles.

d) En déduire une nouvelle fonction qui renvoie une approximation de $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$, puis de $\Phi(x)$.

Exercice 50. ✦✦ **Entropie d'une variable à densité**
Dans la suite, on définit la fonction continue h sur $[0;1]$ par

$$\forall x \in [0;1], \qquad h(x) = \begin{cases} -x\ln(x) \text{ si } x \in]0;1] \\ 0 \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des densités de probabilités f telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$ soit convergente. Pour toute variable aléatoire X ayant pour densité $f \in \mathscr{F}$, on définit l'entropie H(X) de X par :

$$\mathrm{H(X)} = \int_{-\infty}^{+\infty} h\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

1. *Transformation affine*
   Soient X et $\mathrm{Y} = a\mathrm{X} + b$ avec $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $b \in \mathbb{R}$.
   a) Expliciter une densité de Y en fonction de a, b et d'une densité de X.
   b) En déduire que si X a une entropie, Y aussi et $\mathrm{H(Y)} = \ln(a) + \mathrm{H(X)}$.
2. *Exemple 1 : cas des lois normales*
   a) Soit Y_0 une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. Montrer que Y_0 a une entropie existe et calculer $\mathrm{H}(\mathrm{Y}_0)$.
   b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathscr{N}(m;\sigma^2)$. Vérifier que

$$\mathrm{H(Y)} = \mathrm{H}(\mathrm{Y}_0) + \ln(\sigma) = \frac{1}{2}\big(1 + \ln(2\pi) + 2\ln(\sigma)\big).$$

3. *Exemple 2 : cas des lois exponentielles*
   Soit X_0 une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ avec $f_0 > 0$ une densité. Montrer que $\mathrm{H}(\mathrm{X}_0)$ existe et calculer $\mathrm{H}(\mathrm{X}_0)$ en fonction de λ.
4. *Majoration à espérance fixée*
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$, admettant une densité $f \in \mathscr{F}$. On suppose que X admet une espérance égale à $\frac{1}{\lambda}$. Montrer que :

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}_0) = -\int_0^{+\infty} f(x)\ln\big(f_0(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que $\qquad \mathrm{H(X)} \leqslant \mathrm{H}(\mathrm{X}_0).$
5. *Majoration à variance fixée*
   Soit X une variable à densité f_1 suivant une loi normale centrée $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$. Soit Y, une variable aléatoire possédant un moment d'ordre 2 égal à σ^2 et une densité $g \in \mathscr{F}$. Montrer que

$$\mathrm{H(X)} = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cdot\ln\big(f_1(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

6. Déduire de la question précédente l'inégalité : $\mathrm{H(X)} \geqslant \mathrm{H(Y)}$.

Exercice 51. ✦✦ *d'après EDHEC 2018*
On admet que toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.
On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ et on pose $\mathrm{Y} = \sqrt{\mathrm{X}}$.

1. On rappelle qu'en Python, `rd.exponential(a)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre a. Écrire une (ou des) commande(s) Python permettant de simuler Y.
2. a) Déterminer la fonction de répartition $\mathrm{F_Y}$ de Y.
   b) En déduire une densité f_Y de Y.
3. a) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite.
   b) En déduire que Y a une espérance et donner sa valeur.
4. On pose $\mathrm{U} = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{X}/2}$.
   a) Vérifier que $\mathrm{U}(\Omega) = [0,1[$.
   b) Déterminer la fonction de répartition $\mathrm{F_U}$ de U et reconnaître la loi de U.
   c) Exprimer X en fonction de U, puis en déduire une simulation Python de Y utilisant uniquement la commande `rd.rand`.

Exercice 52. ✦✦ *d'après EDHEC 2015, exercice 2*
On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance égale à 1) et on note Φ la fonction de répartition de X.
On pose $\mathrm{Y} = |\mathrm{X}|$ et on admet que Y est une variable aléatoire. On note $\mathrm{F_Y}$ la fonction de répartition de Y.

1. **a)** Exprimer, pour tout réel x positif, $F_Y(x)$ à l'aide de $\Phi(x)$. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité f_Y de Y.

   b) Montrer que Y possède une espérance et donner sa valeur.

   c) Montrer que Y possède une variance et donner sa valeur.

2. On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

   a) Vérifier, en justifiant que l'on peut procéder au changement de variable $u = \sqrt{2t}$, que :

$$\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du.$$

   b) En déduire que g peut être considérée comme une densité.

   On considère, dans la suite, une variable aléatoire Z de densité g et on note G sa fonction de répartition.

3. **a)** On pose $T = \sqrt{2Z}$ et on admet que T est une variable aléatoire à densité. Exprimer la fonction de répartition F_T de T en fonction de G puis en déduire une densité f_T de T et vérifier que T suit la même loi que Y,

   b) En déduire que Z possède une espérance et donner sa valeur.

4. Écrire une commande python permettant de simuler la variable aléatoire Z.

5. On considère les commandes Python suivantes :

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
n=5000
w=rd.exponential(1,n)
s=0
for i in range(n):
    s+=w[i]**(3/2)
s=s/(n*np.pi**(1/2))
```

   a) En remarquant que $x^2 g(x) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x}$, montrer que s contient une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 g(x)\,dx$, pour peu que l'on entre une valeur de n assez grande.

   b) On admet que $\mathbf{E}\left(X^4\right) = 3$. Quelle est la valeur exacte de l'intégrale dont il est question ci-dessus ?

CHAPITRE 9

Diagonalisation

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen : redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes. [a]

GOETHE

Écrivain allemand (1749-1832)

a. Les mathématiciens sont comme les Français : quoi que vous leur disiez, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent.

1 Définitions

Définition 30 (endomorphisme diagonalisable)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
On dit que φ est **diagonalisable** s'il existe une base de E qui soit composée de vecteurs propres de φ.

Exercice 53

✦ Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ avec E de dimension finie. *Les questions sont indépendantes.*

1. Justifier que si φ est diagonalisable et bijectif, φ^{-1} est aussi diagonalisable.
2. Que dire de φ si ce dernier est diagonalisable et n'admet qu'une seule valeur propre ?
3. Que dire de φ si ce dernier est diagonalisable et $\mathrm{rg}\left(\varphi^2\right) = 0$?

Exercice 54

✦✦ Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, diagonalisable et $\psi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, un isomorphisme.
Justifier que $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ est un endomorphisme diagonalisable de F.

Définition 31 (matrice diagonalisable)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $\mathrm{D} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{A} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{D} \cdot \mathrm{P}^{-1}.$$

Autrement dit, une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale. Dans ce cas, P est une matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à une base de vecteurs propres de la matrice A.

Remarque. La matrice A est diagonalisable si les colonnes de P forment une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. De plus, le spectre de A s'identifie au spectre de D qui correspond donc aux coefficients diagonaux de D.

Exemples. • Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. On a montré que

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, -4\} \quad \text{avec} \quad E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad E_2 = \mathrm{Vect}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_{-4} = \mathrm{Vect}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

On pose
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Noter que P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base de vecteurs propres de A. On vérifie numériquement :

Editeur

```
D = np.array(([1, 0, 0], [0, 2,
     0], [0, 0, -4]))
  #attention à l'orde des
      valeurs propres
P = np.array(([1, 4, 2], [1, 3,
     -3], [1, -2, 2]))
P_inv = np.linalg.inv(P)
```

Editeur

```
>>> print(P @ D @ P_inv)
[[-2.22044605e-16  2.00000000e+00 -1.00000000e+00]
 [ 3.00000000e+00 -2.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [-2.00000000e+00  2.00000000e+00  1.00000000e+00]]
```

On retrouve bien A (attention aux arrondis près).

• La matrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 55

✦ **A. Vrai ou faux ?**

1. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable. ✓ ×
2. Si A est diagonalisable alors A^2 est diagonalisable. ✓ ×
3. Si A^2 est diagonalisable alors A est diagonalisable. ✓ ×
4. Si A est inversible, A est diagonalisable si et seulement si A^{-1} est diagonalisable. ✓ ×

✦ **B.** Montrer que si $\mathrm{rg}\left(A^2\right) < \mathrm{rg}(A)$, alors A ne peut-être diagonalisable.

Proposition 32 (lien en dimension finie)

Soit E, un espace vectoriel de dimension finie.
Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice de φ dans une base $\mathscr{B}$ de E. On a l'équivalence entre les énoncés.

i) L'endomorphisme φ est diagonalisable.

ii) La matrice A est diagonalisable.

2 Caractérisations

2.1 Version « endomorphisme »

Proposition 33 (caractérisation avec les s.e.p)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

i) L'espace vectoriel E est somme directe des sous-espaces propres de φ.

ii) L'endomorphisme φ est diagonalisable.

Corollaire 34 (caractérisation avec les dimensions)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

i) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)} \dim\big(E_\lambda(\varphi)\big) = \dim(E)$.

ii) L'endomorphisme φ est diagonalisable.

Remarque. Comme $\dim\big(E_\lambda(\varphi)\big) \geqslant 1$, on retrouve le fait qu'un endomorphisme de dimension finie a au plus $\dim(E)$ valeurs propres.

Corollaire 35 (cas particulier)

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie.

Si φ possède $\dim(E)$ valeurs propres distinctes,

alors φ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

⚠ **Attention.** La réciproque est fausse. Par exemple, pour E de dimension $n \geqslant 2$, l'endomorphisme id_E est diagonalisable avec seulement une valeur propre (1).

Exercice 56

✦ ✎ **Exemple.**
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Posons pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, le polynôme $\varphi(P)$ défini par

$$\varphi(P)(x) = \frac{1}{n}x(1-x)P'(x) + xP(x).$$

1. Vérifier φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on pose $P_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$. Calculer $\varphi(P_k)$.
3. Justifier que φ est diagonalisable.

2.2 Version « matricielle »

Regroupons et traduisons les résultats précédents.

Théorème 36 (caractérisations)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les énoncés suivants sont équivalents.

i) La matrice A est diagonalisable.

ii) Il existe une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

iii) $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme directe des sous-espaces propres de A.

iv) $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = n$.

Exemple. ✎ La matrice Attila.

Python. La commande `eigvals` permet le calcul de valeurs propres. Par exemple :

Editeur

```
import numpy.linalg as al
 # On importe la sous-bibliothèque
     linalg
A=np.array([[1,3,0],[0,-2,0],[-1,-2,0]])
 # On définit la matrice A
print(al.eigvals(A))
```

Console

```
>>> # script executed
[ 0.   1.  -2.]
```

Selon ce calcul, 0, 1 et -2 sont toutes les valeurs propres de A. La matrice A est diagonalisable.

Proposition 37 (n valeurs propres)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A admet n valeurs propres distinctes,

alors A est diagonalisable et les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

3 Compléments

3.1 Cas particuliers

Cas des matrices de taille 2

Rappelons que pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Exercice 57

✦ ✎

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable. Notons λ_1 et λ_2, les deux valeurs propres éventuellement confondues de la matrice A.

1. Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A)$ et $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$.
2. En minimisant le nombre de calcul, montrer que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Cas des matrices triangulaires

Exercice 58

✦ ✎ *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables ?

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $M_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ est diagonalisable ?

Cas des matrices symétriques réelles

Théorème 38 (cas symétrique, première version)

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 59

✦ *Les questions 1 et 2 sont indépendantes*

1. Montrer que l'endomorphisme suivant est diagonalisable.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + y + z, x + 3z, x + 3y - z). \end{array} \right.$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice symétrique appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{A}^n = \mathrm{I}_n$. Calculer A^2.

Cas des projecteurs

• Soit p, un projecteur de E (avec $p \neq 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et $p \neq \mathrm{id}_\mathrm{E}$). En reprenant l'étude effectué au chapitre précédent, on a

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_0(p) \oplus \mathrm{E}_1(p).$$

Les projecteurs sont des endomorphismes diagonalisables. Si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en sous-espaces propres, la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale.
En particulier, on constate que $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(p)\big) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(p)\big) = \mathrm{rg}(p)$.

$$\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(p) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{\dim \mathrm{E}_1(p)} & & & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{\dim \mathrm{E}_0(p)} & & \end{bmatrix}.$$

3.2 Pratique de la diagonalisation et applications

En reprenant les méthodes étudiées au chapitre VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES, traiter les exercices suivants.

Exercice 60

✦ Si possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Diagonaliser la matrice A *signifie : donner, si possible, une matrice diagonale* D *et une matrice inversible* P *telles que* $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. *On ne demande pas d'expliciter* P^{-1}.

Exercice 61

✦ Considérons l'application $\varphi : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto x(1-x)\mathrm{P}'(x) + 2x\mathrm{P}(x) \in \mathbb{R}_2[x]$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. Exprimer la matrice de φ dans la base canonique. La diagonaliser.

3. Conclure en donnant une base de vecteurs propres de φ.

Astuce. Dans la recherche des valeurs, il ne faut pas oublier que pour une matrice diagonalisable

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \lambda \times \dim\big(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})\big).$$

Exercice 62

✦

1. Prouver la remarque précédente.

2. Soit A définie par $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.
Sachant que $\mathrm{rg}(\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_n) = 1$, que peut-on en déduire sur la diagonalisation de A ?

Exercice 63

✧ **Calcul des puissances**

Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p où la matrice A est étudiée à l'exercice 60.

Exercice 64

✦ **Polynôme de matrices et racine carrée d'une matrice**

On pose
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. En déduire l'inversibilité de A et A^{-1}.
3. Expliquer comment calculer Q(A) où $Q \in \mathbb{R}[x]$. Préciser un polynôme annulateur non nul de A.
4. Déterminer une matrice B telle que $B^2 = A$.

Les applications sont nombreuses. Citons par exemple : la recherche du commutant (voir exercice 81, p.33) ; la résolution des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (voir exercice 82, p.34) ; la résolution de systèmes différentiels linéaires (voir exercice **??**, p.**??**).

Exercices

Exercice 65. ✧ ✎ Montrer que les matrices suivantes sont semblables

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{bmatrix}3&0&0\\3&2&0\\3&2&1\end{bmatrix}.$$

Exercice 66. ✦✦ **Diagonalisation avec un paramètre**
Pour tout réel a, on pose

$$M_a=\begin{bmatrix}a+2&-(2a+1)&a\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

On vérifie par le calcul que $Q(x)=x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a$ est annulateur de M_a.

1. Justifier que pour $a=1$, M_a ne peut être diagonalisable.
2. Déterminer les réels a pour lesquels M_a est diagonalisable.

Exercice 67. ✧ 🔍 Parmi les matrices élémentaires $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, préciser lesquelles sont diagonalisables ?

Exercice 68. ✧ Soit φ défini par : $\forall P\in\mathbb{R}_2[x],\quad \varphi(P)(x)=(2x+1)P(x)-\left(x^2-1\right)P'(x).$
Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 69. ✦ Soit φ un endomorphisme de E de dimension finie.
Montrer que φ est un projecteur si et seulement si φ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(\varphi)\subset\{0;1\}$.

Exercice 70. ✦ On considère l'application φ, qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ associe $\varphi(P)=\sum\limits_{k=0}^{n}P^{(k)}$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de P avec la convention $P^{(0)}=P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. Est-ce que φ est diagonalisable ?

Exercice 71. ✦✦ Posons $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M)=AM$.

1. **a)** Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.
   b) Trouver un polynôme annulateur de φ.
   c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
2. On défini maintenant les endomorphismes ψ et s de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\psi(M)=MA$ et $s(M)={}^tM$.
   a) Vérifier que $\psi=s\circ\varphi\circ s^{-1}$.
   b) En déduire un polynôme annulateur de ψ. Est-ce que l'endomorphisme ψ est-il diagonalisable ?

Exercice 72. ✦✦ ✎ **Diagonalisation des matrices de rang 1**
Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$.

1. Montrer que $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles U, V telles que $M=U\,{}^tV$.
2. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A=U\,{}^tV$ et on note $a=\mathrm{Tr}(A)$.
   a) Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   b) Montrer : ${}^tVU=(a)$, puis : $A^2=aA$.
   c) Montrer que si $a=0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   d) On suppose $a\neq 0$. Calculer AU. Déduire des questions précédentes que A est diagonalisable.
   e) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 73. ✦ ✎ **Mélange algèbre et probabilité**

1. Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, dans quel(s) cas la matrice

$$M_{a,b}=\begin{bmatrix}a&1\\0&b\end{bmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers, indépendantes et de même loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$.

a) Rappeler la loi de X+Y et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

b) Calculer la probabilité pour que la matrice $M_{X,Y}$ soit diagonalisable.

Exercice 74. ✦✦✦ ✎ Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit f, un endomorphisme de E diagonalisable. Montrer que f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Pour rappel, un polynôme P *est scindé à racines simples s'il existe r réels* $a_1, \ldots, a_r$ *tels que* $P(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - a_i)$.

2. La question suivante a pour objectif de prouver la réciproque. Si f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.

a) Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $\dim \operatorname{Ker}(f \circ g) \leqslant \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big)$.

b) Montrer plus généralement que pour $f_1, f_2, \ldots, f_r \in \mathscr{L}(E)$,

$$\dim\big(\operatorname{Ker}\big(f_1 \circ \cdots \circ f_r\big)\big) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim\big(\operatorname{Ker}(f_j)\big).$$

c) En déduire la réciproque.

3. *Applications*

a) Retrouver le fait qu'un projecteur et qu'une symétrie de E sont diagonalisables.

b) En déduire que si f est diagonalisable et stabilise un sous-espace vectoriel F, alors il induit sur celui-ci un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 75. ✦✦ Soit φ un endomorphisme de E admettant un polynôme annulateur P.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $P(x) = x(x-\alpha)$. Vérifier que les sous-espaces propres $E_0(\varphi)$ et $E_\alpha(\varphi)$ sont supplémentaires dans E. En déduire que φ est diagonalisable.

2. On suppose maintenant que P est de degré 2 avec deux valeurs propres distinctes. Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice 76. ✦✦ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, a et b deux réels tels que $ab \neq 0$. On note $M(a,b)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

1. **a)** Calculer $M(a,b)^2$.

b) Montrer que $M(a,b)^2$ est diagonalisable et trouver ses deux valeurs propres.

2. Soient $c, d \in \mathbb{R}^*$ et $M(c,d) = \begin{bmatrix} 0 & c & c & \cdots & c \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

a) 🔍 Montrer que si $M(c,d)$ est semblable à $M(a,b)$ alors $ab = cd$.

b) Établir la réciproque en considérant une matrice $P_\varepsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon, 1, \ldots, 1) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

3. **a)** Est-ce que la matrice $M(a,b)$ est semblable à sa transposée ?

b) 🔍 À l'aide de la trace, montrer que si la matrice $M(a,b)$ est diagonalisable alors $ab > 0$.

c) 🔍 On suppose que $ab > 0$, vérifier que $M(a,b)$ est semblable à une matrice du type $M(\alpha,\alpha)$. En déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable.

Exercice 77. ✦✦✦ ✎ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme de E. L'objectif de l'exercice est de prouver l'équivalence entre les énoncés :

i) L'endomorphisme φ est diagonalisable.

ii) L'endomorphisme φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Pour rappel, un polynôme P *est scindé à racines simples s'il existe r réels* $a_1, \ldots, a_r$ *deux à deux distincts tels que* $P(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - a_i)$.

1. Montrer que i) ⇒ ii).

2. Prouvons la réciproque. Supposons donc que φ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

a) Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Justifier que l'application suivante est bien posée, linéaire et injective

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} H & \to & \operatorname{Ker} f \\ u & \mapsto & g(u) \end{array} \right. \qquad \text{avec H un supplémentaire de } \operatorname{Ker} g \text{ dans } \operatorname{Ker} f \circ g.$$

En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(f \circ g) \leqslant \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Ker}(g)\big)$.

b) Montrer plus généralement que pour $f_1, f_2, \ldots, f_r \in \mathscr{L}(E)$,

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(f_1 \circ \cdots \circ f_r)\big) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \dim\big(\operatorname{Ker}(f_j)\big).$$

c) En déduire la réciproque ii) $\Rightarrow$ i).

3. *Application*
En déduire que si φ est diagonalisable et F est un sous-espace stable par φ, alors la réstriction de φ à F est un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 78. ✦✦ Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et φ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[x]$ défini par :

$$\varphi(P) : x \in \mathbb{R} \mapsto P(ax+b).$$

1. Donner la matrice de φ dans la base canonique de E. En déduire le spectre de φ.

2. Justifier que si $a \notin \{-1; 1\}$, l'endomorphisme φ est diagonalisable.

3. Est-ce que φ est diagonalisable si $a = 1$?

4. **a)** Après avoir justifié que tout polynôme peut s'écrire comme somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair, justifier que φ est diagonalisable pour $a = -1$ et $b = 0$.

b) Généraliser à $a = -1$ et $b \neq 0$.

Exercice 79. ✦✦ Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[x]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[x]$, associe le polynôme φ(P) obtenu comme le reste de la division euclidienne de P par $(x-1)^2$.

1. Vérifier que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.

2. Donner M, la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

3. Calculer M^2. Qu'en déduire sur φ ?

4. Est-ce que φ est diagonalisable ? Si oui, précisez les sous-espaces propres.

Quelques applications de la diagonalisation

Exercice 80. ✦✦✦ ✎ **Recherche du commutant**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres distinctes. On définit le commutant de A par

$$\mathscr{C} = \big\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA \big\}.$$

1. Justifier que la famille $\big(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1}\big)$ est libre.

2. Vérifier que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\dim \mathscr{C} \geqslant n$.

3. Montrer l'existence d'une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

4. Soit $M \in \mathscr{C}$. Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M. En déduire que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. En déduire que $\mathscr{C}$ est de dimension inférieure ou égale à n.

5. Conclure en montrant que $\big(I_n, A, \ldots, A^{n-1}\big)$ est une base de $\mathscr{C}$.

Exercice 81. ✦✦ **Suite récurrente linéaire d'ordre 2**
Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On note E l'espace vectoriel des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - a u_n.$$

Soit u, une suite de E. On pose $U_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

2. **a)** Montrer que la matrice A est diagonalisable. Puis, préciser une matrice inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

b) En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. À partir des questions précédentes, donner l'expression de u_n en fonction de n, a, u_0 et u_1.

4. Donner une base de E. Comparer les résultats obtenus avec la méthode classique des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Sujet de révision

Exercice 82. ✦✦ ✎ *D'après EDHEC 2014*

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et A une matrice non nulle donnée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(\mathrm{M}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\,\mathrm{M} - \mathrm{Tr}(\mathrm{M})\,\mathrm{A}.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. a) Pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, exprimer $(f \circ f)(\mathrm{M})$ à l'aide de $\mathrm{Tr}(\mathrm{A})$ et $f(\mathrm{M})$.

b) En déduire un polynôme annulateur de f. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de f ?

3. a) Montrer que 0 est valeur propre de f.

b) Montrer que, si $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable.

4. On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.

a) Préciser la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

b) En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 83. ✦✦✦ ✎ **Diagonalisation simultanée** *D'après Oraux ESCP 2016*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_p$ les sous-espaces propres associés. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, tel que $\mathrm{F} \neq \{0\}$ et $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$. Soit x un vecteur de F.

1. Montrer qu'il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{E}_1 \times \dots \times \mathrm{E}_p$ tel que $x = x_1 + \dots + x_p$.

2. On suppose désormais $x \neq 0$. Montrer que, quitte à modifier l'ordre, on peut supposer qu'il existe $r \in [\![1, p]\!]$ tel que $x_i = 0$ pour $i > r$ et $x_i \neq 0$ pour $i \leqslant r$. On a alors $x = x_1 + \dots + x_r$. On note V_x le sous-espace vectoriel engendré par $(x_1, \dots, x_r)$.

3. a) Montrer que $(x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x.

b) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^j(x) \in \mathrm{V}_x$.

c) Déterminer la matrice A de la famille $(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ dans la base $(x_1, \dots, x_r)$ de V_x.

d) Notons $\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_r$ les colonnes de A et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des réels tels que $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mathrm{C}_j = 0$.

Montrer que le polynôme $\mathrm{P}(x) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j x^{j-1}$ est le polynôme nul. En déduire que A est inversible.

e) Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $x_i \in \mathrm{F}$, puis que $\mathrm{F} = \bigoplus_{i=1}^{p} (\mathrm{F} \cap \mathrm{E}_i)$.

4. Soit g un endomorphisme de E, diagonalisable et commutant avec f (i.e. tel que $f \circ g = g \circ f$).
Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à f et g.

Exercice 84. ✦✦ ✎ **Valeurs propres d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$** *D'après EMLyon 2014 ECS*

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Pour tout i de $[\![1; n]\!]$, on note V_i la matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i-ième ligne qui est égal à 1. On admet que la famille $(\mathrm{V}_i)_{i \in [\![t1; n]\!]}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour tout (i, j) de $[\![1; n]\!]^2$, on note $\mathrm{E}_{i,j} = \mathrm{V}_i\,{}^t\mathrm{V}_j$. Ainsi, pour tout (i, j) de $[\![1; n]\!]^2$, la matrice $\mathrm{E}_{i,j}$ est la matrice carrée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne qui est égal à 1. On admet que la famille $\left(\mathrm{E}_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![1; n]\!]^2}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout λ de $\mathbb{R}$, $\mathrm{A} \neq \lambda \mathrm{I}_n$. On considère l'application Φ_A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall\, \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \Phi_\mathrm{A}(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} - \mathrm{MA}.$$

1. Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Calculer $\Phi_\mathrm{A}(\mathrm{I}_n)$. L'endomorphisme Φ_A est-il injectif ? surjectif ?

3. Montrer que A et ${}^t\mathrm{A}$ ont les mêmes valeurs propres.

4. Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que X (resp. Y) est un vecteur propre de A (resp. de ${}^t\mathrm{A}$).
Montrer que $\mathrm{X}\,{}^t\mathrm{Y}$ est un vecteur propre de Φ_A.

5. Soient $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n)$ et $(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \dots, \mathrm{Y}_n)$ deux bases de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\mathscr{F}$ la famille $\mathscr{F} = \left(\mathrm{X}_i\,{}^t\mathrm{Y}_j\right)_{(i,j) \in [\![1; n]\!]^2}$.

Montrer que, pour tout (i, j) de $[\![1; n]\!]^2$, $\mathrm{V}_i\,{}^t\mathrm{V}_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathscr{F}$, et en déduire que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de Φ_A est l'ensemble des différences $\lambda - \mu$ lorsque λ et μ décrivent les valeurs propres de A.

Exercice 85. ✦✦ **Matrices compagnons**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ des nombres réels. Soit P le polynôme défini par l'expression

$$\mathrm{P}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. La matrice $C_P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, appelée matrice compagnon de P, est définie par

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

- *Exemple*

1. **a)** Déterminer le polynôme R dont la matrice compagnon est $C_R = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

b) Quelles sont les racines de R ? Quelles sont les valeurs propres de C_R ? Que constatez-vous ?

2. La matrice C_R est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

- *Retour au cas général*

3. Déterminer le rang de C_P. *Indication. On pourra distinguer deux cas : le cas où* $a_0 = 0$ *et le cas où* $a_0 \neq 0$.

4. Justifier que 0 est valeur propre de C_P si et seulement si $a_0 = P(0) = 0$.

5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\dim\left(\operatorname{Ker}\left(C_P - \lambda I_n\right)\right) \leqslant 1$.

- *La matrice* M_P

Dans la suite, on considère $M_P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_P = a_0 I_n + a_1 C_P + a_2 {C_P}^2 + \cdots + a_{n-1} {C_P}^{n-1} + {C_P}^n$.

On note $$(E_1, E_2, \ldots, E_n) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

les n vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'objectif est de montrer que M_P est la matrice nulle.

6. *Retour sur l'exemple*

Vérifier que M_R est la matrice nulle, où R est le polynôme trouvé à la première question.

7. *Retour sur le cas général*

a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E_k = {C_P}^{k-1} E_1$.

b) En déduire qu'il existe un vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\left(X, C_P X, \ldots, {C_P}^{n-1} X\right)$ soit une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

8. Montrer que $M_P E_1 = 0$.

9. En déduire que M_P est la matrice nulle.

- *Lien entre spectre et racines de* P

10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de C_P et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Montrer que λ est racine de P.

11. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

a) On suppose uniquement dans cette question qu'il existe $X = {}^t\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $C_P X = \lambda X$. Expliciter un système linéaire vérifiée par $(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer ensuite par récurrence que :

$$\forall\, k \in [\![1, n-1]\!], \quad x_{n-k} = \left(a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \cdots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k\right) x_n.$$

b) Montrer que λ est valeur propre de C_P et exhiber un vecteur propre associé.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des nombres réels tous distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des entiers positifs ou nuls, puis on définit le polynôme S par $S(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

12. Déduire de toute cette étude que la matrice compagnon C_S de S est diagonalisable si et seulement si les entiers α_i valent tous 1.

13. Est-ce que la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ est diagonalisable ?