Problème B

12. D_1 donne le rang du premier succès (tirer un poisson marqué) dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. On sait alors que

$$D_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{m}{N}\right)$$

car m/N est la probabilité de tirer un poisson marqué.

13.a) On a de même

$$D_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{m}{N}\right)$$

En particulier

$$E(D_i) = \frac{N}{m} \quad \text{et} \quad V(D_i) = \left(1-\frac{m}{N}\right)\left(\frac{N}{m}\right)^2$$

13. b) Par télescopage $X_n = \sum_{i=1}^{n} D_i$. Le résultat s'en déduit.

14. Posons $A_n = \frac{m}{n} X_n$ de sorte que

$$E(A_n) = \frac{m}{n} E(X_n) = N$$

L'estimateur A_n est sans biais.

15. On constate que

$$V(A_n) = \frac{m^2}{n^2} V(X_n) = \frac{m^2}{n}\left(1-\frac{m}{N}\right)\left(\frac{N}{m}\right)^2 \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

et que A_n est sans biais, on sait alors que A_n est convergent.

16. On a en posant $\sigma = \sqrt{1-m/N} \times (N/m) \cdot m = N\sqrt{1-m/N}$

$$A_n^* = \frac{A_n - E(A_n)}{\sqrt{V(A_n)}} = \frac{A_n - N}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{A-N}{\sigma}\right)$$

où $\quad A_n^* \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} Z \quad$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

d'après le théorème centrale limite

→ les variables D_i sont mutuellement indépendantes, de même loi et avec un moment d'ordre.

Comme

$$A_n = N + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} A_n^*$$

et par transformation affine

$$N + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(N, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

On approxime, pour n suffisamment grand, la loi de A_n par une loi normale

$$\mathcal{N}\left(N, \frac{N^2}{n}\left(1-\frac{m}{N}\right)\right).$$

17a) On a en posant $t_\alpha = 1.64$

$$P\left(-t_\alpha \leq \frac{A_n - N}{\sigma(A_n)} \leq t_\alpha\right) \xrightarrow[n\infty]{} P(-t_\alpha \leq Z \leq t_\alpha) = 1-\alpha.$$

et $\quad P\left(-t_\alpha \leq \frac{A_n - N}{\sigma(A_n)} \leq t_\alpha\right)$

$$= P\left(A_n - \sigma(A_n)\, t_\alpha \leq N \leq A_n + t_\alpha \sigma(A_n)\right)$$

$$\leq P\left(A_n - 100 t_\alpha \leq N \leq A_n + 100 t_\alpha\right).$$

17b) L'intervalle de confiance avec

$$\alpha = 0,1 \qquad m = 200 \qquad n = 50$$

est $\quad [1636 ; 1964]$

18. Y_n compte le nombre de succès dans n répétitions d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes de probabilité de succès m/N. Ainsi

$$Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{m}{N}\right).$$

Ainsi $\quad E(Y_n) = \dfrac{nm}{N}$.

On pose $\quad A_n = \dfrac{1}{nm} Y_n$.

19. Il y a un risque de division par 0 car

$$P(Y_n = 0) \neq 0.$$

20.a) La variable est finie, donc elle admet une espérance et la formule de transfert donne

$$E(B_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{m(n+1)}{k+1} P(Y_n = k)$$

$$= m(n+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

où $\quad p = \dfrac{m}{N} \quad$ et $\quad q = 1 - p$.

Or on sait que

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

D'où

$$E(B_n) = m \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k q^{n-k}$$

$$\underset{k=i-1}{=} m \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^{i-1} q^{n+1-i}$$

$$= \frac{m}{p} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^{i} q^{n+1-i}$$

$$= \frac{m}{p} \left((p+q)^{n+1} - \binom{n+1}{0} p^0 q^{n+1-0} \right)$$

$$E(B_n) = N \left(1 - \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n+1} \right).$$

2o.b) L'estimateur est biaisé mais asymptotiquement sans biais car

$$E(B_n) \xrightarrow[n\infty]{} N.$$