Sujet A problème A.

1.a Soient $s, t \in \mathbb{R}$

$$-\frac{t^2}{2}+st = -\frac{1}{2}\left(t^2-2st\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left((t-s)^2 - s^2\right).$$
$$= \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}(t-s)^2$$

D'où

$$\exp\left(-\frac{t^2}{2}+st\right) = \exp\left(\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2}(t-s)^2\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(t-s)^2\right).$$

1.b) D'après le théorème de transfert, $e^{sX}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\, e^{st}\, dt \qquad \text{avec } p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$$

converge absolument. Précisons que l'intégrande étant positive, la convergence suffit. En reprenant la question précédente, on étudie la convergence de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}+st}\, dt = \frac{e^{s^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-s)^2}\, dt$$

À l'aide du changement de variable affine $u = t-s$, la convergence est équivalente à celle de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du$$

qui est bien convergente d'après les résultats sur les lois normale. On a alors

$$E(e^{sX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$$

$$= e^{-s^2/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du}_{= 1 \text{ (densité)}} = e^{-s^2/2}.$$

2. On sait que $\sigma X + m$ a la même loi que $Y$ (normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$). Comme la fonction exponentielle est continue, $e^{\sigma X + m}$ et $e^Y$ ont même loi et par linéarité, $Z = e^Y$ a une espérance avec

$$E(Z) = E(e^{\sigma X + m})$$

$$= E(e^{\sigma X} \cdot e^m) = e^m E(e^{\sigma X})$$

$$E(Z) = e^{m - \sigma^2/2}.$$

3. $Z$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $F_Z(x) = 0$ si $x \leq 0$
- Si $x > 0$.

$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(e^{\sigma X + m} \leq x)$$

$$= P(\sigma X + m \leq \ln(x))$$

$$= P\left(X \leq \frac{\ln(x) - m}{\sigma}\right).$$

$$F_Z(x) = \phi\left(\frac{\ln(x) - m}{\sigma}\right).$$

On constate que $F_Z$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car :

$F_Z$ est constante sur $\mathbb{R}_*^-$

$F_Z$ est la composée de $\ln$, $C^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\phi$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$

Pour justifier la continuité de $F_Z$, il suffit de prouver la continuité en 0.

En tant que fonction de répartition, $F_Z$ est continue à droite

$$\lim_{x \to 0^+} F_Z(x) = F_Z(0) = 0$$

De plus

$$\lim_{x \to 0^-} F_Z(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = F_Z(0).$$

$F_Z$ est continue en 0, puis sur $\mathbb{R}$.

Finalement, $Z$ est une variable à densité et une densité est obtenue là où c'est possible. D'où le résultat.

4 a) On a

$$R = \frac{1}{Z} = \frac{1}{e^Y} = e^{-Y}$$

Comme $Y$ à la même loi que $\mathcal{N}(-m, \sigma^2)$ car

$$E(-Y) = -m \quad \text{et} \quad V(-Y) = V(Y)(-1)^2 = \sigma^2.$$

D'où $R \hookrightarrow \ell\mathcal{N}(-m, \sigma^2)$.

4 b). On a $W_n = U^n = e^{nY}$ avec $nY \hookrightarrow \mathcal{N}(0, n\sigma^2)$.

D'où le résultat.

5. Les variables $(\ln Z_k)_k$ sont mutuellement indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec un moment d'ordre.

D'après la loi faible des grands nombre.

$$\overline{T_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(Z_k) \xrightarrow[n\infty]{P} E(\ln Z_1) = m.$$

D'où le résultat.

6. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$

$$P\left( |\overline{T_n} - E(\overline{T_n})| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{V(\overline{T_n})}{\varepsilon^2}.$$

Or $E(\overline{T_n}) = E(\ln Z_1) = m$

$$V(\overline{T_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(\ln Z_k) \quad \text{indépendance}$$

$$= \frac{1}{n} V(\ln Z_1) \quad \text{même loi}$$

$$= \frac{1}{n} \sigma^2 \leq \frac{4}{n}.$$

Ainsi

$$P\left( |\overline{T_n} - m| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{4}{n\varepsilon^2}$$

et par passage au complémentaire :

$$P\left( |\overline{T_n} - m| \leq \varepsilon \right) \geq P\left( |\overline{T_n} - m| < \varepsilon \right)$$

$$\geq 1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}.$$

Si on pose $\varepsilon$ tel que

$$\alpha = \frac{4}{n\varepsilon^2} \quad \text{soit} \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha n}}{2}$$

D'où

$$P\left( -\frac{\sqrt{\alpha n}}{2} \leq \overline{T_n} - m \leq \frac{\sqrt{\alpha n}}{2} \right) \geq 1 - \alpha$$

$$= P\left( -\frac{\sqrt{\alpha n}}{2} \leq m - \overline{T_n} \leq \frac{\sqrt{\alpha n}}{2} \right)$$

$$= P\left( I_n \leq m \leq J_n \right) \geq 1 - \alpha$$

Ce qui conclut.

7. a) On sait que $\ln(Z_k) \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Par le lemme des coalitions, les variables $(\ln(Z_k))_k$ sont mutuellement indépendantes, on sait alors que $\overline{T_n}$ suit une loi normale dont les paramètres sont donnés par

$$E(\overline{T_n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m = m \qquad V(\overline{T_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(\ln Z_k)$$

$$= \frac{1}{n} \sigma^2.$$

Conclusion $\overline{T_n} \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2/n)$.

7. b. Comme la loi normale admet une densité continue strictement positive, on sait que $\Phi' > 0$.

Dès lors :

→ $\Phi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

→ $\Phi$ est continue

→ $\phi(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \Phi = 1$.

D'après le théorème de la bijection, $\Phi$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[0; 1]$. Comme $\alpha \in ]0; 1[$, $1 - \frac{\alpha}{2} \in [0; 1[$ et

$$t_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{convient.}$$

7-c On a

$$P\left(m \in \left[\overline{T_n} - \frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} ; \overline{T_n} + t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

$$= P\left(-\frac{t_\alpha \sigma}{\sqrt{n}} \leq -m + \overline{T_n} \leq t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= P\left(-t_\alpha \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{T_n} - m)}{\sigma} \leq t_\alpha\right).$$

$$= \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) \quad \text{car} \quad \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{T_n} - m) \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1).$$

$$= 2\Phi(t_\alpha) - 1$$

$$= 1 - \alpha$$

Comme $\sigma \leq 2$, on en déduit que

$$P\left(m \in \left[\overline{T_n} - \frac{2t_\alpha}{\sqrt{n}} ; \overline{T_n} + \frac{2t_\alpha}{\sqrt{n}}\right]\right)$$

$$\geq P\left(m \in \left[\overline{T_n} - \frac{\sigma t_\alpha}{\sqrt{n}} ; \overline{T_n} + \frac{\sigma t_\alpha}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1 - \alpha$$

Ce qui est bien la définition d'un intervalle de confiance.