14.a) La fonction g est dérivable par produit avec

$$\forall t \in \mathbb{R}_*^+, \qquad g'(t) = \ln(t) + 1.$$

D'alors, g' est positive sur $[e^{-1}; +\infty[$ et négative sur $]0; e^{-1}]$. On en déduit les variations

t	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
g	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

14.b) Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{e} = -\frac{n}{e}$$

$-n/e$ est un minorant de f (c'est même un minimum, atteint en $e^{-1}(1, \dots, 1)$).

De plus

$$f(x_1, 1, \dots, 1) = g(x_1) \xrightarrow[x_1 \to +\infty]{} +\infty$$

f n'est pas majorée (ni bornée).

15. La fonction coordonnée

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto x_k$$

est de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$.
La fonction g est C^2 sur $\mathbb{R}_*^+$ par produit.
Par composition, la fonction

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto g(x_k)$$

est C^2 sur $\mathcal{D}$. Par somme, h est C^2 sur $\mathcal{D}$.

16. On a

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = (g'(x_1), \dots, g'(x_n)).$$

$(x_1, \dots, x_n)$ est point critique sous la contrainte s'il existe

$\lambda \in \mathbb{R}$ tel $$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \lambda(1, 1, \dots, 1).$$

On en déduit que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ $g'(x_i) = g'(x_1)$ et par injectivité de g'

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n.$$

la contrainte impose $nx_1 = na$ puis $x_1 = a$.

17. Notons $\mathcal{H}_a = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$, on a pour $A = (a, a, \dots, a)$ et tout $h \in \mathcal{H}_a$ ($\mathcal{D}$ est un ouvert)

$$f(A+h) - f(A) = \underbrace{\langle \nabla f(A), h \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} q_A(h) + \varepsilon(h) \|h\|^2$$

où $\varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ et $q_A(h) = {}^tH \, \nabla^2 f(A) \, H$ avec $H = [h_i]_i$

Or, on constate que

$$\nabla^2 f(A) = \left[\partial_{ij}^2 f(A) \right] = \begin{bmatrix} g''(a) & & \\ & \ddots & \\ & & g''(a) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a} I_n.$$

En particulier, le développement devient

$$f(A+h) - f(A) = \frac{1}{2a} \|h\|^2 + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

quantité positive pour tout h suffisament petit.

A est un minimum local sous la contrainte.

18 Posons $g : t \in]-\varepsilon ; \varepsilon[\mapsto f(A+th)$ où $h \in \mathcal{H}_a$.

D'après le théorème sur les dérivées directionnelles

$$g(1) = f(A+h), \; g(0) = f(A) \qquad g'(0) = \langle \nabla f(A), h \rangle = 0$$

et $g''(t) = q_{A+th}(h)$

$$= {}^t h \, \nabla^2 f(A+th) \, h \geqslant 0$$

car $\nabla^2 f(A+th) = \mathrm{diag}\big(\underbrace{g''(a_1+th_1)}_{\geqslant 0}, \dots \underbrace{g''(a_n+th_n)}_{\geqslant 0}\big)$.

D'où par la formule de Taylor avec reste intégral sachant que g est C^2 :

$$g(1) = g(0) + g'(0) \times 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t) g''(t) dt$$

Soit $f(A+h) = f(A) + \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{(1-t) g''(t)}_{\geqslant 0} dt$

Ainsi pour tout $h \in \mathcal{H}_a$ tel que $A+h \in \mathcal{D}$ on a

$$\underbrace{f(A+h)}_{\in \mathcal{E}_a} - f(A) \geqslant 0$$

On a donc bien $f(A)$ comme minimum global sous la contrainte.

19. On a

$$h(x,y) = g(x) + g(y) + g(3a - x - y)$$

$$\partial_1 h(x,y) = g'(x) - g'(3a - x - y)$$

par symétrie

$$\partial_2 h(x,y) = g'(y) - g'(3a - x - y).$$

Ainsi (x,y) est point critique si et seulement si

$$\begin{cases} g'(x) - g'(3a-x-y) = 0 \\ g'(y) - g'(3a-x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) = g'(y) \\ \quad = g'(3a-x-y). \end{cases}$$

Par injectivité de g'

$$x = y = 3a - x - y \Leftrightarrow x = y = a. \quad A' = (a,a).$$

De plus

$$\nabla^2 h(A') = \begin{bmatrix} \partial_{11}^2 h(A) & \partial_{21}^2 h(A) \\ \partial_{12}^2 h(A) & \partial_{22}^2 h(A) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} g''(a) + g''(a) & g''(a) \\ g''(a) & 2g''(a) \end{bmatrix}$$

D'où le résultat.

20. Soit $(x,y,z) \in \mathcal{E}_a \cap \mathcal{Q}$ on a donc $z = 3a - x - y$. Ainsi

$$f(x,y,z) = g(x) + g(y) + g(z)$$
$$= g(x) + g(y) + g(3a - x - y) = h(x,y)$$

où $(x,y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$.

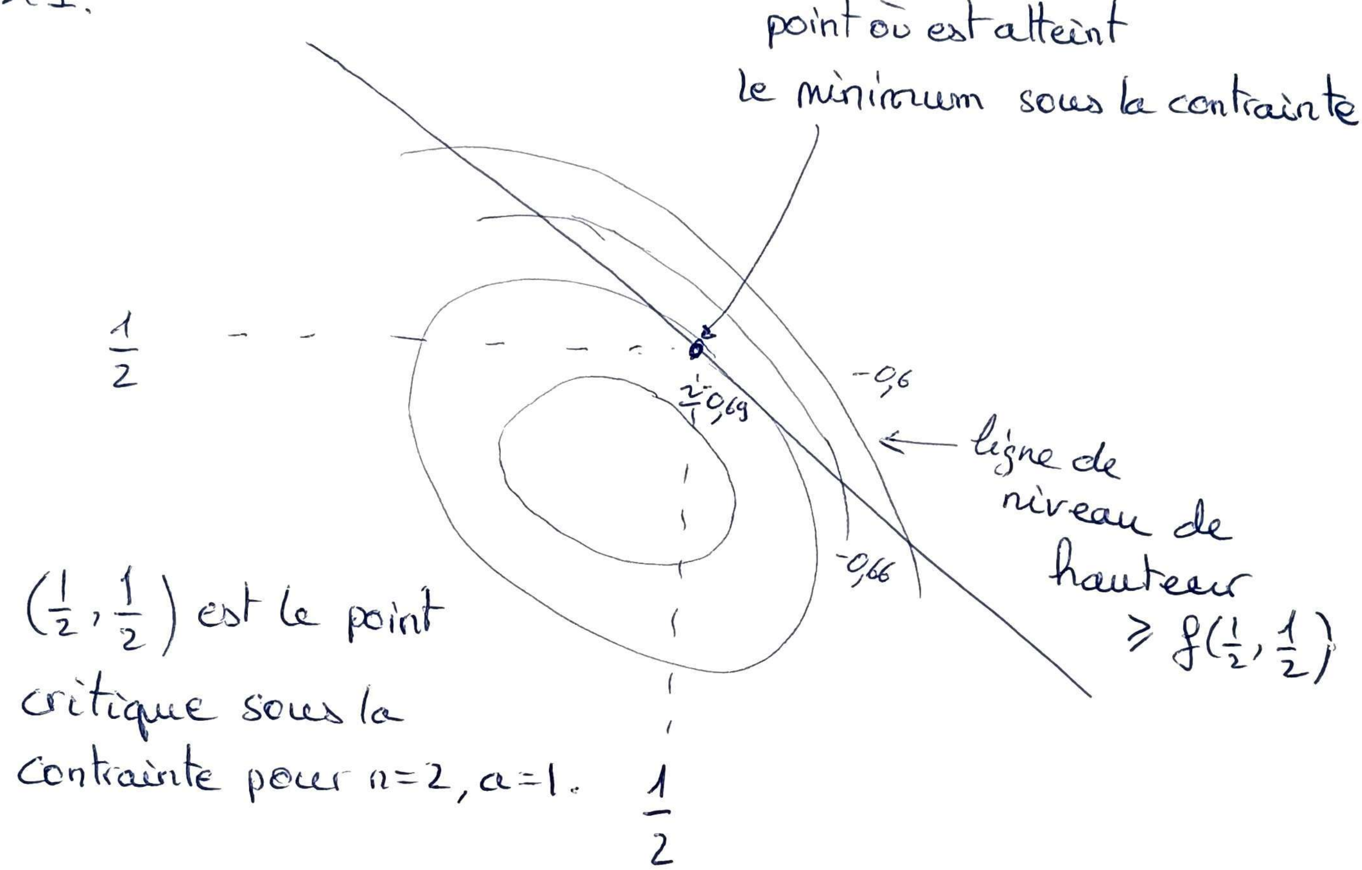
Par conséquent, minimiser la fonction f sous la contrainte est équivalent à minimiser h sur $\mathbb{R}_*^{+2}$.

Or on constate que $A' = (a,a)$ est un point critique avec

$$Sp(D^2h(A')) = \left\{ \frac{3}{a}, \frac{1}{a} \right\} \subset \mathbb{R}_+^*$$

On sait alors que c'est un minimum local, on retrouve bien le résultat sur f.

21.



On constate qu'au niveau de $(1/2, \frac{1}{2})$, la droite représentant la contrainte est tangente à la ligne de niveau. Ce qui est bien confondre avec le fait que le gradient au niveau du point critique est à la fois orthogonal à la ligne de niveau et à la droite. c'est-à-dire colinéaire au vecteur ∇g qui est normal à la droite:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \nabla f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \lambda \nabla g.$$