8. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \\ 1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_0^{\theta} t f(t)\,dt = \frac{\theta}{3}.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\theta^2}{18}.$$

9a) On constate que $a = 3$ convient.

9 b)

$$V(T_n) = 9\, V(\overline{X}_n)$$

$$= \frac{9}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) \quad \text{indépendance}$$

$$= \frac{\theta^2}{2n}.$$

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \\ \left(1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2\right)^n & \end{cases}$$

On constate que F_{M_n} est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \}0;\theta\}$

De plus F_{M_n} est continue à droite en 0 et θ en tant que fonction de répartition :

$$\lim_{x\to 0^+} F_{M_n}(x) = F_{M_n}(0) = 0 \qquad \lim_{x\to\theta^+} F_{M_n}(x) = F_{M_n}(\theta) = 1$$

Or on a aussi

$$\lim_{x\to 0^-} F_{M_n}(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \qquad \lim_{x\to\theta^-} F_{M_n}(x) = \lim_{x\to\theta^-} \left(1-\left(1-\frac{x}{\theta}\right)^2\right)^n$$

$$= 1^n = 1 = F_{M_n}(\theta).$$

Ce qui donne la continuité en 0 et θ

Résumons F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{0;\theta\}$, M_n est donc une variable à densité et une densité est

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad f_n(t)=\begin{cases} 0 \text{ si } t\notin[0;\theta] \\ \frac{2n}{\theta}\left(1-\frac{t}{\theta}\right)\left(1-\left(1-\frac{t}{\theta}\right)^2\right)^{n-1} \end{cases}$$

11. M_n admet une espérance si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)dt = \int_0^\theta t f_n(t)dt$$

converge (absolument). La fonction y est continue, la convergence est vérifiée.

On effectue le changement de variable affine $u = 1-\frac{t}{\theta}$

$$\int_0^\theta t f_n(t)\,dt = \int_0^1 \theta(1-u)\, f_n(\theta(1-u))\theta du$$

$$= 2n\theta\int_0^1 (1-u)\, u\,(1-u^2)^{n-1} du$$

$$\int_0^\theta t f_n(t)dt = -\theta\int_0^1 (1-u)\,\varphi'(u)\,du \quad \text{où } \varphi(u) = (1-u^2)^n$$

On effectue une intégration par parties (les fonctions sont de classe C^1)

$$\int_0^\theta t f_n(t)dt = -\theta\left(\left[(1-u)\varphi(u)\right]_0^1 + \int_0^1\varphi(u)du\right)$$

$$= -\theta\left(-\varphi(0)+I_n\right) = \theta(1-I_n).$$

On a

$$b_\theta(M_n) = E(M_n)-\theta = I_n \neq 0$$

mais $\quad b_\theta(M_n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

L'estimateur est biaisé mais asymptotiquement sans biais.

12. $E(M_n) = \theta(1-I_n)$

puis $E\left(\frac{1}{1-I_n} M_n\right) = \theta$.

On pose donc $M_n' = \frac{1}{1-I_n} M_n$ ou encore $a_n = \frac{1}{1-I_n}$.

13. a)

$$\frac{V(T_n)}{V(M_n')} = \frac{\theta^2/(2n)}{a_n^2 V(M_n)} = \frac{\theta^2(1-I_n)^2}{2n} \cdot \frac{1}{V(M_n)}$$

$$= \frac{\theta^2(1-I_n)^2}{2n} \cdot \frac{1}{\theta^2\left(\frac{1}{n+1} - I_n^2\right)}$$

$$= \frac{(1-I_n)^2}{\frac{2n}{n+1} - 2n I_n^2}.$$

Or $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ d'où $(1-I_n)^2 \sim 1$

et $2n I_n^2 \sim \frac{2n\pi}{4n} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{\pi}{2}$

et par somme $\frac{2n}{n+1} - 2n I_n^2 \xrightarrow[n\infty]{} 2 - \frac{\pi}{2}$

Finalement $\frac{V(T_n)}{V(M_n')} \longrightarrow \frac{1}{2-\frac{\pi}{2}} > 1.$

13.b) Dès lors, pour n suffisamment grand

$$\frac{V(T_n)}{V(M_n')} > 1 \quad \text{et} \quad V(T_n) > V(M_n')$$

M_n' est meilleur estimateur que T_n car sa variance est plus faible.