Nom :

Mathématiques approfondies
ECG 2

Partie X

Révisions pour les oraux

Lycée Saint Louis 2024/2025

Les épreuves

Le but d'une telle épreuve est d'abord de contrôler l'assimilation des connaissances des programmes de mathématiques et d'informatique de toute la filière (première et deuxième années). Cette épreuve permet aussi d'examiner :

- l'aptitude du candidat à lire attentivement un sujet et à répondre précisément à la question posée;
- son aisance à exposer clairement ses idées avec un vocabulaire précis;
- sa capacité d'initiative et son autonomie et, en même temps, son aptitude à écouter l'interrogateur, à prendre en compte ses indications, à lui demander des précisions si besoin;
- son aptitude à mettre en œuvre ses connaissances et son savoir-faire pour résoudre un problème (par la réflexion et non par la mémorisation de solutions toutes faites);
- sa faculté à critiquer, éventuellement, les résultats obtenus et à changer de méthode en cas de besoin.

Oraux HEC

- Préparation : **30 minutes**
- Durée de l'épreuve (exercice principal et question sans préparation) : **30 minutes**
  Un seul sujet est proposé au candidat.
- L'épreuve orale comprend deux parties portant sur le programme :
  - → un exercice principal préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme : algèbre, probabilités et analyse. De plus, une question de cours en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal.
  - → un exercice sans préparation portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.
    Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

Oraux ESCP

Nouveau format

- Durée : **30 minutes de passage sans préparation.**
- Un exercice principal ($\simeq$ 20min) sans question de cours puis une question sans préparation portant sur une autre partie du programme (5-10min).

Remarques

- Le jury attend des candidats qu'ils commencent par annoncer les questions qu'ils ont réussi pendant la préparation, puis le jury choisit les questions que le candidat présente. Il peut interroger sur certaines questions non réussies par le candidat avant que ce dernier n'ait présenté tout ce qu'il a réussi.
- Penser à bien organiser vos notes pour qu'elles soient bien lisibles et utiles à l'oral (n'écrire que sur un côté, annoter en gros les numéros des questions..).
- Bien réfléchir à ce qui mérite d'être dit, ne pas oublier des hypothèses. Tout ne doit pas être écrit au tableau mais plutôt dit. Le temps est assez limité.

> *Nous avons fortement apprécié les étudiants qui remarquaient des incohérences dans leurs calculs, par exemple : La variable est à valeurs de* $[0,1]$ *et mon calcul me donne une espérance de 2. La fonction est positive et son intégrale est négative..*
>
> *Rapport de Jury : Oraux, HEC 2021*

- Il ne faut pas négliger l'informatique !!

> *Avec la dernière réforme du programme, l'informatique a encore gagné en importance. Si plusieurs candidats ont su bien traiter les questions d'informatique, encore trop de candidats s'étaient contentés d'un survol rapide de la matière, quand ils ne l'avaient pas délaissée totalement.*
> *Presque tous les sujets comportaient une question d'informatique lors de cette session et cette proportion devrait continuer de croître l'an prochain, le but étant que tous les candidats soient interrogés sur une partie du programme d'informatique. Ces questions nous permettent d'évaluer l'esprit pratique et de relier les mathématiques à des cas concrets.*
>
> *Rapport de Jury : Oraux, HEC 2023*

- Penser aux représentations graphiques.

> *Le jury attend des candidats qu'ils sachent tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction ou soient capables d'illustrer un raisonnement par un petit schéma.*
>
> *Rapport de Jury : Oraux, HEC 2023*

- HEC recommande de suivre la Journée de l'Oral le mardi 14 mai 2025 de 9h à 15h.
  Lien : https ://www.hec.edu/fr/journee-de-l-oral-2025

Questions de cours

Aussi, le jury de mathématiques réitère aux futurs candidats les recommandations qu'il avait faites dans les rapports précédents : une très solide assimilation du cours et une préférence pour le raisonnement plutôt que pour la récitation de formules mal comprises.

Rapport de Jury : Oraux, HEC 2015

Quelques exemples de questions de cours posées ces dernières années à l'oral HEC.

Analyse

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs. Rappeler la signification de la relation $v_n = o(u_n)$.
- Rappeler la définition d'une série convergente. Montrer qu'une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
- Indiquer pour quels nombres réels x les séries $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$ sont convergentes et préciser alors leurs sommes respectives.
- Définition de la convergence d'une série réelle (condition nécessaire et condition suffisante).
- Énoncer l'inégalité et le théorème des accroissements finis pour une fonction réelle de variable réelle.
- Définition et propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle.
- Soit h une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.
  i) Qu'appelle-t-on point critique de h ?
  ii) Qu'appelle-t-on point critique pour l'optimisation de h sous contraintes d'égalités linéaires

$$\mathscr{C} : \begin{cases} g_1(X) = b_1 \\ \quad \vdots \\ g_p(X) = b_p \end{cases}$$

- Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.
- Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Donner la forme du développement limité à l'ordre un de f en un point et pour $(x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, donner l'expression de la dérivée de l'application g définie sur $\mathbb{R}$ et qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $g(t) = f(x+th)$.
- Donner la définition et les principales propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Algèbre

- Définition et propriétés d'une matrice inversible.
- Rappeler la définition d'une application surjective et d'une application injective.
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Théorème du rang pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
- Définition des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme.
- Soit f un endomorphisme de E, u un vecteur propre de f associé à la valeur propre θ et $P \in \mathbb{R}[x]$. Exprimer $P(f)(u)$ en fonction de P, θ et u. Montrer que toute valeur propre de f est racine de n'importe quel polynôme annulateur de f.
- Polynôme annulateur : définition et propriété.
- Rappeler la définition du rang d'une matrice. Discuter selon les réels a, b, c et d, le rang de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$?
- Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité.
- Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas d'égalité.
- Théorème de Pythagore.
- Définition et propriétés des endomorphismes symétriques.
- Énoncer le théorème concernant la réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien et démontrer la propriété concernant les sous-espaces propres d'un tel endomorphisme.
- Définition d'un projecteur orthogonal.

> *Les illustrations (représentations) graphiques de certains résultats de cours sont quasiment toujours absentes : ainsi par exemple, la visualisation dans l'espace à trois dimensions d'une projection orthogonale sur un plan parallèlement à une droite (théorème de Pythagore) pose des problèmes insurmontables à nombre de candidats.*
>
> *Rapport de Jury : Oral HEC 2016*

Probabilité

- Énoncer la formule des probabilités totales.
- Formule de l'espérance totale pour une variable aléatoire discrète X et un système complet d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
- Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires.
- Donner la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.
- Loi d'un couple de variables aléatoires. Lois marginales.
- Définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y, prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1 .
- Rappeler la formule donnant une densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes et les conditions sous lesquelles cette formule est applicable.
- Définition du moment d'ordre k d'une variable aléatoire réelle.
- Rappeler l'énoncé du théorème limite central.
- a) Donner, pour tout réel $\nu > 0$, l'expression d'une densité de la loi $\gamma(\nu)$.
  b) Dans le cas où ν est strictement supérieur à 2, donner une représentation graphique de l'unique densité de le loi $\gamma(\nu)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.
- Définition et propriétés de la loi exponentielle.
- Énoncer le théorème de stabilité de la loi de Poisson pour la somme.
- Énoncer le théorème de stabilité de la loi gamma pour la somme.
- Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.
- Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
- Loi faible des grands nombres.
- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Estimateur sans biais, convergent.
- Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
  Rappeler comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir à partir de $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ un intervalle de confiance de p au niveau de confiance α ($\alpha \in]0,1[$).

Exercice principal

Exercices à dominante algèbre

Sujet 1

Décomposition polaire et contraction

• *Questions de cours*
Énoncer le théorème concernant la réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien et démontrer la propriété concernant les sous-espaces propres d'un tel endomorphisme.

Soit E un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Un endomorphisme f de E est appelé *contraction* si pour tout x de E, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

1. Donner un exemple de contraction de E.

2. On suppose dans cette question que l'endomorphisme f est symétrique.

a) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de f, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. Montrer que pour tout x de E :

$$\|P(f)(x)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |P(\lambda)| \cdot \|x\|$$

où $\mathrm{Sp}(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f.

3. On suppose désormais que f est un endomorphisme bijectif de E, et on note M sa matrice associée dans une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E.

a) Montrer que ${}^t\mathrm{MM}$ est une matrice symétrique de valeurs propres strictement positives. En déduire qu'il existe une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives S telle que ${}^t\mathrm{MM} = \mathrm{S}^2$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale O telle que $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$.

c) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de S, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

Bonus Montrer qu'il existe un unique couple (O, S), O orthogonale, S symétrique à valeurs propres strictement positives, tel que $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$.

Sujet 2

Normes subordonnées et conditionnement

d'après ESCP 2012

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n.
Soient A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} = {}^t\mathrm{AA}$, où ${}^t\mathrm{A}$ représente la transposée de la matrice A.
On suppose $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée notée $\|\cdot\|$. Selon l'usage, on confond tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne canoniquement associée.

1. a) Montrer que B est une matrice symétrique réelle, qui vérifie pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$, ${}^t\mathrm{XBX} \geqslant 0$.

b) En déduire que les valeurs propres de B sont positives ou nulles.

On note $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$ ses valeurs propres avec $\lambda_1 \geqslant 0$.

2. On note $\mathrm{N(A)} = \sup\limits_{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n,\, \mathrm{X} \neq 0} \dfrac{\|\mathrm{AX}\|}{\|\mathrm{X}\|}$. Montrer que $\mathrm{N(A)} = \sqrt{\lambda_p}$.

3. On suppose dans cette question que A est inversible et on note :

$$\mathrm{C(A)} = \mathrm{N(A)}\mathrm{N}\left(\mathrm{A}^{-1}\right).$$

a) Déterminer $N(A^{-1})$ en fonction des λ_i.

b) Exprimer $C(A)$ en fonction des (λ_i).

c) Soit A une matrice telle que $C(A) = 1$.
Montrer qu'il existe un réel $\mu > 0$ tel que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\| = \mu\|X\|$.

4. On suppose que A et B sont deux matrices réelles symétriques dont les valeurs propres sont strictement positives.

a) Montrer que pour tout X de $\mathbb{R}^n$ non nul, ${}^tXAX > 0$ et ${}^tXBX > 0$.

b) Montrer que $C(A+B) \leqslant \max\big(C(A), C(B)\big)$.

Sujet 3

Somme de projecteurs et polynômes de Lagrange

d'après ESCP 2011

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. On note I l'endomorphisme identité de E. On suppose qu'il existe k endomorphismes non nuls de E, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et k réels distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tels que pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$u^m = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i{}^m p_i \qquad (\bullet)$$

1. **a)** Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[x]$, on a :

$$P(u) = \sum_{i=1}^{k} P(\lambda_i)\, p_i.$$

b) En déduire que le polynôme $M(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$ est annulateur de u.
Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de u ?

2. Pour tout ℓ de $[\![1,k]\!]$, on pose : $L_\ell(X) = \displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ i\neq \ell}} \left(\frac{x-\lambda_i}{\lambda_\ell - \lambda_i}\right)$.

a) Montrer que pour tout ℓ de $[\![1,k]\!]$: $p_\ell = L_\ell(u)$.

b) En déduire que $\operatorname{Im} p_\ell \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda_\ell I)$, puis que les valeurs propres de u sont exactement les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

3. Montrer que pour tout (i,j) de $[\![1,k]\!]^2$, on a : $p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } j = i \end{cases}$

4. Montrer que u est diagonalisable.

5. Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme de E diagonalisable. Justifier qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, des endomorphismes $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vérifiant $(\bullet)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Sujet 4

Exemple de diagonalisation dans $\mathbb{R}_n[x]$

d'après ESCP 2011

- *Questions de cours*

Donner la définition d'une valeur propre d'une matrice et plusieurs caractérisations.

Soient les ensembles de matrices

$$\mathscr{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{H} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. **a)** Vérifier que le produit de deux éléments de $\mathscr{G}$ appartient à $\mathscr{G}$.

b) Justifier que toute matrice de $\mathscr{G}$ est inversible, et que son inverse appartient à $\mathscr{G}$.

c) Montrer que, pour toute matrice $G \in \mathscr{G}$ n'appartenant pas à $\mathscr{H}$, il existe une matrice $H \in \mathscr{H}$ telle que $H^{-1}GH$ soit une matrice diagonale.

Pour toute matrice $G = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathscr{G}$, on définit l'application Φ_G qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ associe le polynôme $\Phi_G(P)$ défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\left[\Phi_G(P)\right](x) = P(\alpha x + \beta)$$

2. a) Justifier que Φ_G est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

b) Pour $G, G' \in \mathscr{G}$ et $P \in \mathbb{R}[x]$, comparer $\Phi_{GG'}(P)$ et $\Phi_G\left(\Phi_{G'}(P)\right)$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $G \in \mathscr{G}$. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est stable par Φ_G.
On note Ψ_G la restriction de Φ_G à $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Soit $M_n(G) = \left(m_{p,q}\right)_{0 \leqslant p,q \leqslant n}$ la matrice de Ψ_G dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. Expliciter le coefficient générique $m_{p,q}$.
On prendra garde au fait que les indices commencent à 0.

c) Déterminer les valeurs propres de $M_n(G)$.

d) Expliciter $M_n(G)$ lorsque G est une matrice diagonale.

4. a) Soit $G \in \mathscr{G} \notin \mathscr{H}$. Justifier que Ψ_G est diagonalisable.

b) Écrire la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ à une base de vecteurs propres de Ψ_G. Expliciter une base de vecteurs propres.

Sujet 5

Dual d'un espace euclidien

D'après oraux escp 2012

On considère un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. On rappelle que pour tout $a \in E$, l'application S_a définie sur E par :

$$S_a : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \langle x, a\rangle$$

est une forme linéaire sur E.

1. Le but de cette question est de montrer que, réciproquement, pour toute forme linéaire f définie sur E, il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $f = S_a$, et ce par deux méthodes différentes.
À cet effet, on considère l'application S définie sur E par $S(a) = S_a$.

→ **A) Première méthode**

a) Montrer que S est une application linéaire.
b) Montrer que S est injective.
c) En déduire que S est un isomorphisme de E sur $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, et conclure.

→ **B) Seconde méthode**

On considère $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E et f une forme linéaire sur E. Montrer qu'il existe une unique application S_a telle que $S_a = f$, et que a est donné par $a = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\,\varepsilon_i$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[x]$ on ait :

$$\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = Q(0).$$

3. On suppose qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[x]$ tel que pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[x]$, on ait :

$$\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = Q(0).$$

a) Justifier l'existence d'un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\int_0^1 P(t)(1-t)^n\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M}{n+1}.$$

b) En déduire que notre hypothèse est absurde.
Ce résultat est-il en contradiction avec les résultats précédents?

Sujet 6

Sous-groupe à un paramètre *d'après oraux ESCP 2013,* 2.02.

1. *Question de cours.* Donner la définition du projeté orthogonal.

Dans cet exercice $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit $u = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $\|u\| = 1$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ et p la projection orthogonale sur D.

2. Soit $x \in E$.

a) Exprimer $p(x)$ en fonction de u et x.

b) Écrire la matrice P de p dans la base canonique de E.

On note $M = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}$ et f l'endomorphisme de E canoniquement associé à M.

3. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = D$ et $\mathrm{Im}\, f = D^{\perp}$.

4. **a)** Exprimer M^2 en fonction de P et I_3.

b) En déduire les valeurs propres de f^2.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

5. On pose pour tout t réel $g_t = \mathrm{id} + (\sin t) f + (1 - \cos t) f^2$.

a) Exprimer f^3 en fonction de f.

b) Calculer $g_t \circ g_{t'}$ pour $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

c) En déduire que pour tout t réel, g_t est bijectif et déterminer son application réciproque.

Sujet 7

Endomorphisme symétrique de rang au plus 1 *d'après HEC 2016*

1. *Question de cours.*
Énoncer le théorème concernant la réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien et démontrer la propriété concernant les sous-espaces propres d'un tel endomorphisme.

Dans la suite de l'exercice, on considère un espace euclidien $(E, (\cdot|\cdot))$ de dimension $n \geqslant 2$.
On note T(E) l'ensemble des endomorphismes u de E qui sont symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et tels que pour tout $x \in E$, $(u(x) \mid x) \geqslant 0$.

2. Si $a \in E$, on note u_a l'application de E dans E qui à tout vecteur x de E associe $u_a(x) = (a \mid x)a$.

a) Montrer que pour tout $a \in E$, $u_a \in T(E)$.

b) Si a est un vecteur non nul de E, préciser les valeurs propres et sous-espaces propres de u_a.

3. Soit u un élément non nul de T(E) et b un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\, u$.

a) Vérifier que b est vecteur propre de u pour une valeur propre $\mu \geqslant 0$.

b) Montrer que pour tout vecteur x de E, $u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x \mid b)b$.

c) En déduire qu'il existe un vecteur a de E tel que $u = u_a$.

d) L'application φ de E dans T(E) qui à a associe $\varphi(a) = u_a$ est-elle surjective ? injective ?

4. Soient a un vecteur non nul de E et f un endomorphisme de E.

a) Pour $x \in E$, expliciter $f \circ u_a(x)$.

b) Montrer que $f \circ u_a$ est symétrique si et seulement si a est vecteur propre de f.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f \circ u_a$ appartienne à T(E).

5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in E^2$ pour que

$$u_a \circ u_b = u_b \circ u_a.$$

Sujet 8

Décomposition LU et matrice de variance-covariance *d'après HEC 2013*

1. *Question de cours.*
Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Expliciter $\mathbf{V}(X+Y)$. Généraliser à n variables.

Soient n un entier de $\mathbb{N}^*$ et $A=\left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a :

$$a_{i,j}=\min(i,j).$$

2. **a)** Soit $L=\left(\ell_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice triangulaire inférieure et $U=\left(u_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice triangulaire supérieure. On pose : $M=LU=\left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a :

$$m_{i,j}=\sum_{k=1}^{\min(i,j)}\ell_{i,k}u_{k,j}.$$

b) En déduire l'existence d'une matrice triangulaire supérieure T telle que $A={}^t\!TT$.

c) 🔍 Montrer que les matrices A et T sont de même rang.

d) Justifier que A est diagonalisable et déduire des questions précédentes que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.

e) 🔍 Justifier l'inversibilité de A et déterminer son inverse.

3. *Python*
Écrire une fonction `An` python qui prend en argument n et renvoie la matrice A de taille n.
Vérifier la cohérence de vos résultats avec le test :

```
>>> An(5)
array([[1., 1., 1., 1., 1.],
       [1., 2., 2., 2., 2.],
       [1., 2., 3., 3., 3.],
       [1., 2., 3., 4., 4.],
       [1., 2., 3., 4., 5.]])
```

```
>>> np.linalg.inv(An(n))
array([[ 2., -1.,  0.,  0.,  0.],
       [-1.,  2., -1.,  0.,  0.],
       [ 0., -1.,  2., -1.,  0.],
       [ 0.,  0., -1.,  2., -1.],
       [ 0.,  0.,  0., -1.,  1.]])
```

4. Soient $p\in]0,1[$ et $X_1,X_2,\dots,X_n$, n variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p.
On pose pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}X_i$.
On note Σ_S la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $(S_1,S_2,\dots,S_n)$ définie par

$$\Sigma_S\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\quad\text{et}\quad\forall\, i,j\in[\![1,n]\!],\quad {\Sigma_S}_{i,j}=\mathrm{Cov}(S_i,S_j).$$

a) 🔍 Montrer Σ_S est diagonalisable et que les valeurs propres de Σ_S sont toutes positives.

b) Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, déterminer $\mathrm{Cov}\left(S_i,S_j\right)$.

c) Exprimer Σ_S en fonction de A.

Exercices à dominante analyse

Sujet 9

Recherche d'un équivalent par le Lemme de Cesaro

On admet la propriété suivante :

$(\mathscr{P})$: Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre réel L,
alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad V_n=\frac{1}{n}(u_0+u_1+\cdots+u_{n-1})$$

converge aussi vers L.

On se donne deux nombres réels α et β tels que $0<\alpha<\beta$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0>0\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n\frac{1+\alpha.u_n}{1+\beta.u_n}$$

1. *Question de cours.* Convergence et divergence des suites réelles monotones.
2. Dans cette question seulement, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.
   a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
   $$f(x) = x\frac{1+x}{1+2x}$$
   b) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) Écrire un programme en Python qui prend en argument u_0 et renvoie u_{10}.
3. Dans le cas général, prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1/u_n$.
   Prouver que la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta - \alpha$.
5. En utilisant la propriété $(\mathscr{P})$, déduire du résultat précédent un équivalent de u_n de la forme $\frac{1}{q\cdot n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, où q est un réel strictement positif.
6. Discuter en fonction du réel $\gamma \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\sum {u_n}^{\gamma}$.

Sujet 10

Convexité et fonctions de plusieurs variables

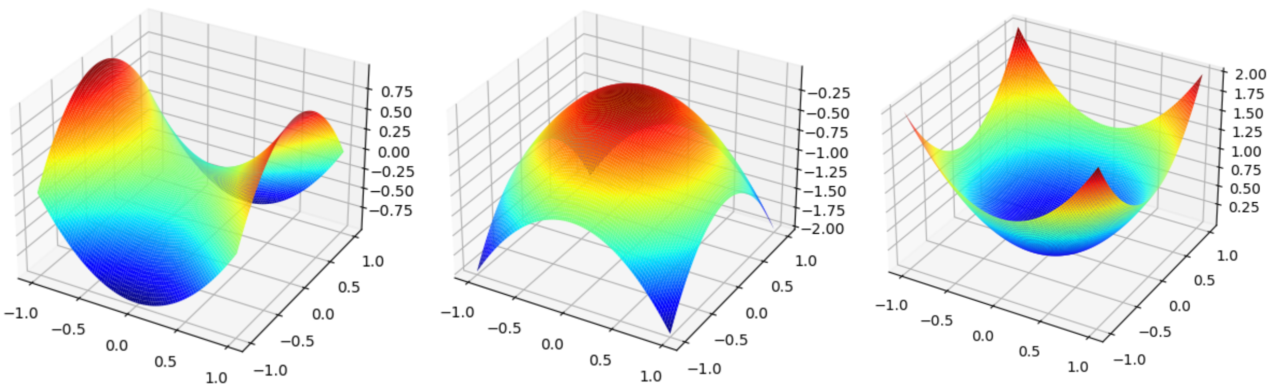
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0,1], \quad \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2, \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle et on note $\langle , \rangle$ son produit scalaire canonique.

1. *Question de cours.*
   Développement limité d'ordre 1 au point $a \in \mathbb{R}^n$ pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

2. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}^2$ par
   $$f(x_1,x_2) = {x_1}^2 + {x_2}^2, \quad g(x_1,x_2) = {x_1}^2 - {x_2}^2 \quad \text{et} \quad h(x_1,x_2) = -{x_1}^2 - {x_2}^2.$$
   Associer à chaque fonction sa surface et conjecturer si les fonctions précédentes sont convexes ou non.



3. **a)** Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ convexes et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Les fonctions suivantes sont-elles convexes : $f_1 + f_2, \alpha f_1, \min\left(f_1, f_2\right)$ et $\max\left(f_1, f_2\right)$?
   On pourra s'aider de représentations graphiques.
   b) Lorsque $n = 1$ a-t-on $f_1 \circ f_2$ convexe ?
4. Soit f une fonction convexe et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$, soit $g_{x,h}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g_{x,h}(t) = f(x + th)$.
   a) Montrer que $g_{x,h}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que $g_{x,h}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'_{x,h}(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
   c) En déduire que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \langle \nabla f(x), y - x\rangle \leqslant f(y) - f(x)$, où $\nabla f(x)$ est le gradient de f en x.
   d) Soit a un point critique de f. Montrer que f admet un minimum global au point a.

5. Dans cette question, soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n et soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$.

a) Vérifier que f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \nabla f(x) = Ax.$$

b) En déduire que si f est convexe, alors toutes les valeurs propres de A sont positives.

c) Reprendre les exemples de la question 2.

Sujet 11

Exemple de matrice symétrique et recherche d'extrema

d'après HEC 2012

1. *Question de cours.*
Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres.

Dans tout l'exercice, on associe à tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice-colonne $U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

On considère des réels a, b et c strictement positifs et la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -b & b & a \\ b & -c & c \\ a & c & -a \end{bmatrix}.$$

2. Montrer que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, à valeurs réelles, telle que $\varphi(u, v) = {}^t UAV$ est une forme bilinéaire symétrique.

3. **a)** Soit $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Déterminer les signes de $\varphi(u, u)$ et $\varphi(v, v)$ respectivement. L'application φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

b) Montrer que A admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. (on ne cherchera pas à les calculer).

4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$.

a) Montrer qu'un point critique $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de f vérifie les conditions : $\bar{x}\bar{y}\bar{z} = -1, \bar{x} < 0, \bar{y} < 0$ et $\bar{z} < 0$. Donner un point critique de f.

b) La fonction f admet-elle un extremum local ?

Sujet 12

Une étude en dimension infinie

d'après HEC 2012

1. *Question de cours.* Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et E_0 le sous-ensemble de E constitué des fonctions continues s'annulant en 0. Soit $t \in]0, 1[$ et $\varphi_t : E_0 \to E_0$ définie par : $\forall f \in E_0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_t(f)(x) = f(x) - f(tx)$.

2. **a)** Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E et que φ_t est un endomorphisme de E_0.

b) Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire de E_0 dans E.

c) Montrer que l'endomorphisme φ_t est injectif.

3. Soit g une fonction de E_0 telle que :

$$\exists K > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad |g(x) - g(y)| \leqslant K|x - y|.$$

a) Soit $f \in E_0$ vérifiant $\varphi_t(f) = g$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(t^k x\right) + f\left(t^n x\right).$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g\left(t^k x\right).$$

b) Montrer que g admet un unique antécédent pour φ_t.

4. Trouver l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{E}_0$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - 2f(tx) + f\left(t^2 x\right) = x.$

Sujet 13

Application de l'inégalité des accroissements finis

d'après HEC 2013

1. *Question de cours.* Inégalité des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle.

Soit f une fonction définie et continue sur $]0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Proposer une interprétation de $\frac{u_n(f)}{n}$ en terme d'aires et indiquer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$, dans le cas où f admet un prolongement continu au segment $[0,1]$.

b) On suppose dans cette question que f est la fonction $t \mapsto t^2$.
Calculer $u_n(f)$ et vérifier que la suite $\left(u_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

2. Dans cette question, f est continue positive et croissante sur $]0,1]$.

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la suite $\left(u_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et majorée.

3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que si f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ au segment $[0,1]$, alors la suite $\left(u_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

4. Pour tout réel α, on note f_α la fonction définie sur $]0,1]$ par $f_\alpha(t) = t^\alpha$.
Déterminer pour quelles valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et la suite $\left(u_n\left(f_\alpha\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornée.

5. Proposer un programme python pour tester la cohérence de vos résultats.

Sujet 14

Endomorphisme en dimension infinie

d'après ESCP 2011 ex 2

On désigne par $\mathrm{E} = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. À tout f de E, on associe l'application $g = \Phi(f)$ définie par : $g(0) = f(0)$ et pour tout réel x non nul,

$$g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. a) Vérifier que la fonction g ainsi définie est un élément de E, ce qui permet d'envisager Φ comme une application de E dans E.

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, justifier l'égalité : $g(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(xu)\,\mathrm{d}u$. Montrer que g est une fonction paire et simplifier l'expression de g lorsque f est une fonction paire ou lorsque f est une fonction impaire.

2. a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que Φ n'est pas injective et préciser son noyau.

c) Soit $f \in \mathrm{E}$ et $g = \Phi(f)$. Montrer que g est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$ et préciser $g'(x)$.

d) Montrer que Φ n'est pas surjective.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On souhaite déterminer $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Ker}\,(\Phi - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

a) Soit $f \in \mathrm{E}$ vérifiant $\Phi(f) = \lambda f$. Montrer que f est paire, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \lambda x f'(x) = (1-\lambda) f(x)$.

b) En déduire l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_-^*$.

c) En déduire la forme possible de f selon $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

d) Conclure en précisant E_λ selon $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Sujet 15

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : *d'après ESCP 2011*

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \mathrm{A} \\ 0 & \text{si } n \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout x de $]-1,1,$ la série $\sum_n a_n x^n$ est convergente. On note alors $f_{\mathrm{A}}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux parties A de $\mathbb{N}$ pour lesquelles $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x) f_{\mathrm{A}}(x)$ existe. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble de ces parties et P(A) cette limite.

2. **a)** Montrer que $\emptyset, \mathbb{N}$ appartiennent à $\mathscr{A}$ et calculer $\mathrm{P}(\emptyset)$ et $\mathrm{P}(\mathbb{N})$.

b) Montrer que si A et B sont deux parties de $\mathscr{A}$ telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, alors $\mathrm{P(A)} \leqslant \mathrm{P(B)}$.

c) Montrer que $\mathrm{A} \in \mathscr{A} \Longrightarrow \mathrm{P(A)}$ appartient à $[0,1]$.

d) Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{A}$ telles que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$. Montrer que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathscr{A}$ et calculer $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$.

e) Montrer que $\mathrm{A} \in \mathscr{A} \Longrightarrow \bar{\mathrm{A}} \in \mathscr{A}$ et calculer $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}})$.

f) Montrer que $2\mathbb{N}, 3\mathbb{N}+5 \in \mathscr{A}$ et calculer $\mathrm{P}(2\mathbb{N})$ et $\mathrm{P}(3\mathbb{N}+5)$.

g) Montrer qu'il existe une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, deux à deux disjoints, pour lesquels

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n\right) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}_n).$$

3. Dans cette question, on prend $\mathrm{A} = \left\{n^2 : n \in \mathbb{N}\right\} = \{0,1,4,9,\dots\}$.

a) Vérifier que $f_{\mathrm{A}}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

b) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, déterminer un équivalent de $f_{\mathrm{A}}(x)$, lorsque x est au voisinage de 1 .

c) En déduire que $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$ et déterminer la valeur de P(A).

Sujet 16

Règle de Raabe-Duhamel

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on dit que la suite réelle strictement positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation (E_λ) lorsque :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Soient $\beta \in \mathbb{R}$ et la suite (v_n) définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \dfrac{1}{n^\beta}$.
Justifier que la suite vérifie une relation E_λ (avec λ à déterminer). Rappeler la convergence de la série $\sum v_n$.

2. Soit $\lambda < 0$. Montrer que si la suite (u_n) vérifie (E_λ), alors la série $\sum u_n$ diverge.

3. Soit (u_n) une suite qui vérifie (E_λ) avec $\lambda > 1$. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$ et on considère à nouveau la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(n^{-\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a) Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

b) Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

c) Prouver que la série $\sum u_n$ converge.

4. Soit (u_n) une suite qui vérifie (E_λ) avec $0 \leqslant \lambda < 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

5. *Exemples*

a) Pour $n \geqslant 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

b) Peut-on appliquer le critère précédent à la suite $(y_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $y_n = 1/\big(n(\ln(n)^2\big)$? Justifier que la série $\sum y_n$ converge. Commenter.

Sujet 17

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f(x_1,\dots,x_n) = \exp\left(n+1-\sum_{k=1}^{n} x_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x_k}.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

2. Déterminer le gradient ∇f de f. En déduire que f admet un unique point critique noté $\widehat{x}$.

3. **a)** Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\widehat{x})$ de f en ce point critique.

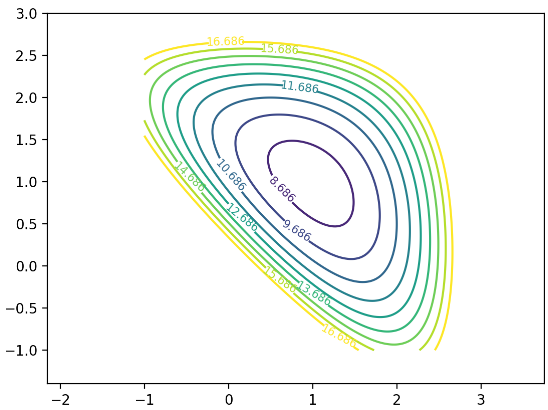
b) En déduire f admet en $\widehat{x}$ un minimum local.

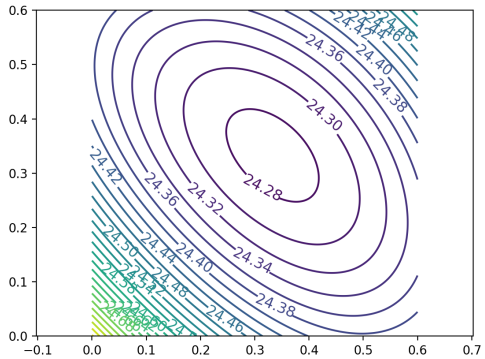
c) Ce minimum est-il un minimum global sur $\mathbb{R}^n$?

4. Donner les extrema sous la contrainte $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

5. Vérifier la cohérence des résultats de la question 4. à l'aide des lignes de niveau suivantes.

```
def f(x1,x2):
    return np.exp(3-x1-x2)+np.exp(x1)+np.exp
        (x2)
x=np.linspace(-1,3,200)
X , Y = np.meshgrid(x,x)
Z=f(X,Y)
C=f(1/2,1/2)+np.linspace(-3,6,10)
graphe = plt.contour(X,Y,Z,C)
plt.clabel(graphe)
plt.axis('equal')
plt.xlim(-1.4,3)
plt.ylim(-1.4,3)
plt.show()
```






```
def f(x1,x2,x3):
    return np.exp(4-x1-x2-x3)+np.exp(x1)+np.
        exp(x2)+np.exp(x3)

x=np.linspace(0,0.6,200)
X , Y = np.meshgrid(x,x)
Z=f(X,Y,1-X-Y)
graphe = plt.contour(X,Y,Z,30)
plt.clabel(graphe)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

Exercices à dominante probabilité

Sujet 18

Nombre de racines d'un polynôme à coefficients aléatoires

1. *Question de cours.* Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

Soient U et V deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Pour $\omega \in \Omega$, on note Q_ω le polynôme défini par : $Q_\omega = X^2 - 2U(\omega)X + V(\omega)$.

2. Écrire une fonction python `Nbre()` qui simule les variables U et V et donne le nombre de racines du polynôme Q_ω ainsi obtenu.

On pose :

- $A = \{\omega \in \Omega\ ;$ le polynôme Q_ω possède une racine double $\}$
- $B = \{\omega \in \Omega\ ;$ le polynôme Q_ω possède deux racines réelles distinctes $\}$.

3. **a)** Montrer que U^2 est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

b) Donner la valeur de $\mathbf{P}(A)$.

4. **a)** Estimer $\mathbf{P}(B)$ à l'aide du test suivant :

```
m=50000
c=0                                     # Réponse :
for i in range(m):
    c+=Nbre()                           >>> 0.66512
print(c/m)
```

b) Montrer que $\mathbf{P}([U > V]) = \frac{1}{2}$.

c) Comparer $\mathbf{P}(B)$ à $\frac{1}{2}$.

5. On pose : $Z = U^2 - V$.

a) Déterminer une densité f_Z de la variable aléatoire Z.

b) Calculer $\mathbf{P}(B)$.

6. Pour $\omega \in \Omega$, on pose : $R_\omega = X^3 - 2U(\omega)X^2 + V(\omega)$. Quelle est la probabilité que le polynôme R_ω admette une racine multiple ?

Sujet 19

Autour des lois exponentielles *D'après HEC 2006*

1. *Question de cours.* Définitions et quelques propriétés des lois exponentielles.

Dans la suite de l'exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles.

2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives, où Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et X possède une densité.

a) Montrer que la variable aléatoire $Y - X$ possède une densité et expliciter une telle densité en fonction d'une densité de X et de λ.

b) En déduire une expression de $\mathbf{P}([Y > X])$ sous la forme d'une intégrale et trouver une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\mathbf{P}([Y > X]) = \mathbf{E}(f(X))$.

c) $\mathbf{P}([Y > X])$ peut-elle être nulle ?

3. Soient X_1, X_2, Y trois variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives, possédant des densités où Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que X_1 possède une densité bornée. Montrer que

$$\mathbf{P}([Y > X_1 + X_2]) = \mathbf{P}([Y > X_1])\,\mathbf{P}([Y > X_2]).$$

Quelle propriété a-t-on ainsi généralisé ?

4. Soit n un entier supérieur ou égal a 2 et $(X_1, \ldots, X_n)$ un système de n variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $M = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$.

a) Calculer $\mathbf{P}\left(\left[X_1 > \sum\limits_{k=2}^{n} X_k\right]\right)$

b) En déduire la valeur de $\mathbf{P}\left(\left[M > \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right]\right)$.

5. Écrire un programme `Simu` qui simule la variable aléatoire $\mathbf{1}_{[M > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} X_k]}$. Anticiper la réponse au code suivant.

```
n=0;m=10000
for i in range(m):
    n+=Simu()
print(n/m)
```

Sujet 20

Transformée de Laplace - Inégalité de Chernoff *d'après HEC 2006*

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$; on notera L_X la fonction, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad L_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{tX}\right).$$

On dit que $L_X(t)$ est la transformée de Laplace de X.

1. Déterminer les transformées de Laplace des lois suivantes : loi uniforme sur $[-1;1]$, loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Vérifier que pour chacune de ces lois, on a

$$L_X(0) = 1, \quad L'_X(0) = \mathbf{E}(X) \quad \text{et} \quad L''_X(0) = \mathbf{E}\left(X^2\right).$$

2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $L_X(t)$ existe et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité suivante :

$$\mathbf{P}(X > x) \leqslant L_X(t)e^{-tx}.$$

3. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et de même loi telles que leur transformée de Laplace existe, calculer la transformée de Laplace de $X_1 + \cdots + X_n$.
4. On note $\Lambda(t) = \ln L_X(t)$, et on considère la variable aléatoire $\overline{X}$ définie par

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $L_X(t)$ existe et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité suivante :

$$\ln \mathbf{P}(\overline{X} > x) \leqslant -n(tx - \Lambda(t)).$$

5. En déduire que si on note $\Lambda^*(x) = \operatorname{Sup}_{t \in \mathbb{R}_*^+}(tx - \Lambda(t))$ on peut optimiser cette inégalité, par

$$\mathbf{P}(\overline{X} > x) \leqslant e^{-n\Lambda^*(x)}.$$

Sujet 21

d'après HEC 2012

1. *Question de cours.* Définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Lorsque cela est possible, on définit la matrice de variance-covariance d'une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires comme la matrice de taille $n \times n$ dont le coefficient en position (i, j) est donné par $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$.

2. Pour $r \in \mathbb{R}$, soit M_r la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_r = \begin{bmatrix} 1 & r & r & \cdots & r \\ r & 1 & r & \cdots & r \\ r & r & 1 & \cdots & r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & r & r & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Montrer que $(1-r)$ est une valeur propre de M_r et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
   b) Trouver une matrice diagonale semblable à M_r.
   c) Pour quelles valeurs de r, l'application $(x, y) \mapsto {}^tXM_rY$ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?
   X *et* Y *désignent les matrices-colonnes dont les composantes sont celles des vecteurs x et y dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

3. Soit $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$, n variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et possédant toutes une variance égale à 1. On pose : $Z = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

a) Calculer pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{V}(Z_1 + \alpha Z)$ et $\operatorname{cov}(Z_1 + \alpha Z, Z_2 + \alpha Z)$.

b) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un réel c_α tel que la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire $(c_\alpha(Z_1 + \alpha Z), \dots, c_\alpha(Z_n + \alpha Z))$ soit égale à une matrice M_r définie dans la question 2.

4. Déduire des résultats précédents que M_r est la matrice de variance-covariance d'un vecteur aléatoire discret si et seulement si on a : $\frac{1}{1-n} \leqslant r \leqslant 1$.

Sujet 22

Développement dyadique d'un nombre

Sous réserve d'existence, on note $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

1. *Question de cours.* Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :

$$Z_0 = \frac{X_0}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Z_n = \frac{Z_{n-1} + X_n}{2}.$$

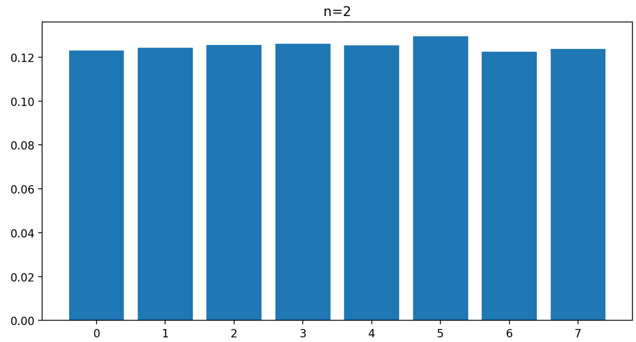
2. Écrire une fonction d'entête `sim_Z(n)` qui simule la variable Z_n.

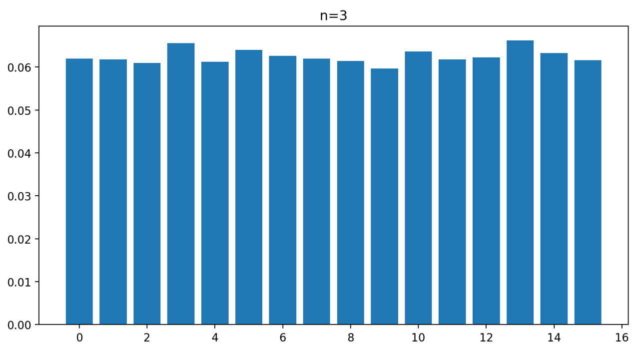
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{E}(Z_n)$ et $\mathbf{V}(Z_n)$.

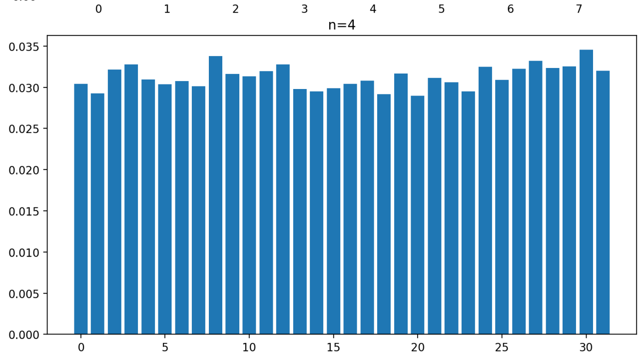
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer Z_n en fonction des variables aléatoires $X_0, X_1, \dots, X_n$.

5. À l'aide des codes suivants, conjecturer la loi de $2^{n+1} Z_n$. Prouver la conjecture.

```
m=20000
Ech=np.zeros(m)
for i in range(m):
    Ech[i]=2**(n+1)*simu_Z(n)
classe=np.linspace(0,2**(n+1),
2**(n+1)+1)-0.5
plt.hist(Ech,bins=classe,
    density=True,rwidth=0.8)
plt.show()
```







6. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera la loi.

Sujet 23

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $p \in]0,1[$.
On considère une urne U_0 contenant des boules blanches et des boules noires, la proportion de boules blanches étant égale à p. On effectue n tirages avec remise dans l'urne U_0.
Si le nombre de boules blanches tirées dans U_0 est égal à i, on fabrique une urne U_1 contenant i boules blanches

et $n-i$ boules noires. On effectue alors n tirages avec remise dans l'urne U_1. On fabrique de même une urne U_2 contenant n boules avec un nombre de boules blanches égal à celui obtenu lors des n tirages dans U_1, les autres boules étant noires. On procède de la même façon pour fabriquer une urne U_3 à partir de l'urne U_2, une urne U_4 à partir de l'urne U_3, etc... On note T_k le nombre de boules blanches tirées dans l'urne U_k.

1. Expliquer et compléter les codes suivants qui permettent de simuler la variable T_k.

```
import random as rd

def tirage(n,q) :
    C=0
    for i in range(n):
        if rd.random()<q :
            C+=1
    return C
```

```
def simulationT(k,n,p):
    i=1
    T=tirage(n,p)
    while i<=k:
        i+=1
        T=tirage( ... , ... )
    return T
```

2. Que fait le programme suivant?

```
def Bidule(k,n,p):
    m=5000
    S=0
    for i in range(m):
        S+=simulationT(k,n,p)
    return S/m
```

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la valeur de $\mathbf{E}(T_k)$.

   On pose $Z_k = T_k(n - T_k)$.

4. Calculer $\mathbf{E}(Z_0)$.
5. Justifier que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{E}(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}\mathbf{E}(Z_k).$$
6. Exprimer $\mathbf{E}(Z_k)$ en fonction de n, p, k et montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{E}(Z_k) = 0$.
7. Montrer que $\mathbf{E}(Z_k) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n-1} i\mathbf{P}(T_k = i)$. En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n-1} i\mathbf{P}(T_k = i) = 0$.
8. Montrer alors que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{P}(T_k = n) = p$.
9. Conclure en montrant qu'en répétant le procédé un grand nombre de fois, la probabilité qu'à partir d'un certain rang, les urnes U_k ne soient constituées que de boules blanches est égale à p.

Sujet 24

Probabilité et optimisation *d'après HEC 2006*

1. *Question de cours*
   Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

   On considère trois variables aléatoires réelles X_1, X_2 et X_3, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, centrées et admettant un moment d'ordre 2.
   On définit la matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par
$$M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}, \quad \text{avec} \quad \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2, \quad m_{i,j} = \mathbf{E}\left(X_i X_j\right).$$

2. Montrer que la matrice M est diagonalisable.
3. Dans cette question seulement, on suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont discrètes et indépendantes. Que peut-on dire de la matrice M?
4. Montrer que les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

   Dans la suite, on suppose que
$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Déterminer les valeurs propres de M.

6. Soit Z une variable aléatoire d'espérance nulle; on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{E}\left[(Z - x_1X_1 - x_2X_2 - x_3X_3)^2\right].$$

Déterminer la matrice Hessienne de φ en (x_1, x_2, x_3).

7. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que φ admette un minimum en $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est

$$M \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(ZX_1) \\ \mathbf{E}(ZX_2) \\ \mathbf{E}(ZX_3) \end{bmatrix}.$$

Sujet 25

Estimation

Soit μ un réel supérieur ou égal à 1 que l'on cherche à estimer.
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On suppose que les suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sont mutuellement indépendantes, que chaque X_n suit la loi uniforme sur $[0, \mu]$ et que chaque Y_n suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose : $Z_n = \min(X_n, Y_n)$. On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k.$$

On note aussi Φ, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que Z_1 est une variable aléatoire à densité; déterminer sa loi et calculer son espérance.

2. Écrire une fonction d'entête `simulation(n, mu)` qui, pour un entier $n \geqslant 1$ et un réel mu donnés, renvoie une simulation de la variable aléatoire T_n.

3. a) 🔧 Montrer que la suite de variables aléatoires $(T_n)_n$ converge en probabilité vers un réel que l'on déterminera.

   b) 🔧 Déterminer un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lequel $\widetilde{T_n} = aT_n + b$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{\mu}$.
   Est-il convergent?

4. a) 🔧 Montrer que $\mathbf{V}(Z_1) \leqslant \frac{1}{12}$.

   b) Soit α un réel de $]0, 1[$. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, construire, pour n assez grand, à l'aide de $\widetilde{T_n}$, un intervalle de confiance pour $\frac{1}{\mu}$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ de la forme $[U_n, V_n]$.

   c) Construire alors, pour n assez grand, un intervalle de confiance pour μ au niveau de confiance $1 - \alpha$ à l'aide de U_n et V_n.

5. a) Justifier que $(T_n)_n$ converge en loi. Préciser la loi limite.

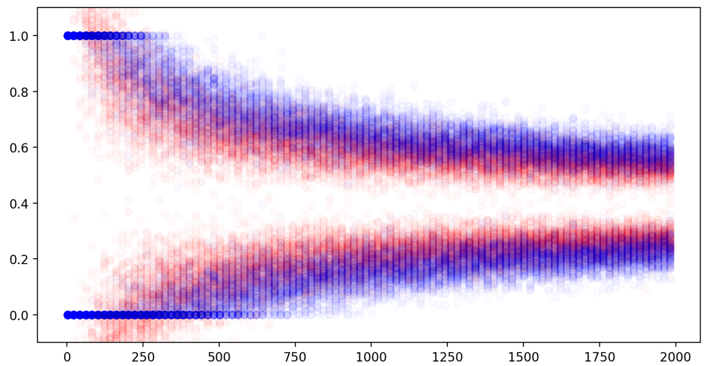
   b) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de $1/\mu$ de niveau de confiance α en fonction de n, T_n et $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$.

6. À l'aide des codes suivants, quel intervalle de confiance parmi les deux construits aux questions 4.b) et 5.b) vous semble le meilleur?

```
def test(n,mu):
    alpha=0.05
    e=np.sqrt(3/(n*alpha))
    Ttilde=3-6*simu_Tn(n,mu)
    u=max(0,Ttilde-e)
    v=min(1,Ttilde+e)
    return u,v
```

```
def test_asymp(n,mu):
    ta=1.95 # pour le choix alpha=0.05
    e=3*ta/(np.sqrt(n))
    Ttilde=3-6*simu_Tn(n,mu)
    u=Ttilde-e
    v=Ttilde+e
    return u,v
```

```
mu=2.5
N=np.arange(2,2000,20)
for n in N:
    for i in range(120):
        u,v=test_asymp(n,mu)
        plt.plot([n,n],[u,v],'ro')
        # r pour rouge
for n in N:
    for i in range(120):
        u,v=test(n,mu)
        plt.plot([n,n],[u,v],'bo')
        # b pour bleu
plt.ylim(-0.1,1.1)
plt.show()
```

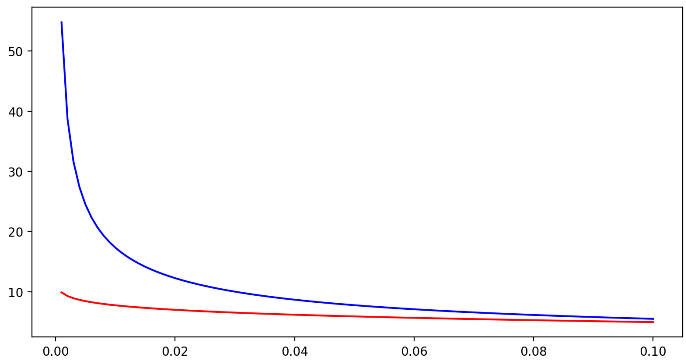


- La commande `ss.norm.ppf(x,0,1)` de la librairie scipy.stats (alias ss) renvoie la valeur de $\Phi^{-1}(x)$.

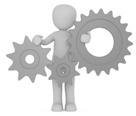
```
import scipy.stats as ss
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

alpha=np.linspace(0.001,0.1,100)
A=np.zeros(100)
B=np.zeros(100)
for i in range(100):
    A[i]=3*ss.norm.ppf(1-alpha[i
        ]/2,0,1)
    B[i]=np.sqrt(3/alpha[i])

plt.plot(alpha,A,'r')
plt.plot(alpha,B,'b')
plt.show()
```



Exercices sans préparation



La question sans préparation rêvée est une question courte, ouverte, parfois volontairement vague, réclamant une initiative du candidat (étude de cas particuliers, choix d'une hypothèse supplémentaire, formulation d'une conjecture,...) et permettant des réponses partielles. L'objectif est de tester la capacité du candidat à mobiliser l'ensemble de ses connaissances et de son savoir-faire pour aborder un problème nouveau.

Rapport de Jury : HEC

Les exercices avec le symbole ♣ seront traités en classe. Pour être efficace, ne les cherchez pas en avance.

À dominante algèbre

✦ Exercice 1 — Endomorphisme nilpotent ♣

Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $\varphi^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.
Calculer le rang de φ.

✦ Exercice 2 — d'après l'oral ESCP 2022 ♣

Soit φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, par :

$$\varphi(M) = {}^tM.$$

Déterminer la trace d'une matrice représentative de φ.

✦✦ Exercice 3 — d'après l'oral HEC 2006

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que P' divise P.

1. Montrer que, si $\deg P > 1$, P'' divise P'.

2. En déduire tous les polynômes de $\mathbb{R}[x]$ divisible par leur polynôme dérivé.

✦✦ ✎ Exercice 4 — d'après l'oral HEC 2012

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Établir l'existence d'un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(A) = 0_n$.

2. On suppose que la matrice A est inversible. Montrer que A^{-1} s'écrit comme un polynôme en A.

✦✦ Exercice 5 — d'après l'oral ESCP 2021

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On pose

$$C(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

1. Vérifier rapidement que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer :

$$\max_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim C(A) \quad \text{et} \quad \min_{A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \dim C(A).$$

✦✦ ✎ **Exercice 6** d'après l'oral HEC 2014 ♣

Soit M une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle telle que $M^2 = 0$. Montrer que M est semblable à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

✦✦ ✎ **Exercice 7** d'après l'oral HEC 2015

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$.

2. Prouver qu'il existe un unique polynôme annulateur de f de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1. Montrer que toutes ses racines sont valeurs propres de f.

3. Si on ne suppose plus E de dimension finie, tout endomorphisme admet-il un polynôme annulateur ?

✦✦✦ **Exercice 8** d'après l'oral HEC 2011

Soit E l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles. Soit Φ l'endomorphisme de E qui, à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Déterminer les noyaux de Φ, de $\Phi\circ\Phi$ et de Φ^k pour $k \geqslant 3$ et leurs dimensions respectives.

2. Quelle est l'image de Φ ?

✦ **Exercice 9** ♣

Justifier que si φ est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension finie, son noyau et son image sont supplémentaires dans E.

✦ **Exercice 10**

1. Parmi les matrices élémentaires constituant la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, préciser les matrices diagonalisables.

2. Exhiber une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables.

✦✦ **Exercice 11** ♣

Soient F et G, les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \text{Vect}\{(1,-1,1)\} \quad \text{et} \quad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\right\}.$$

1. Expliciter un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau et l'image sont respectivement F et G.

2. Peut-on le choisir diagonalisable ?

✦✦ **Exercice 12**

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et φ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont $P(x) = x(x-\alpha)$ est un polynôme annulateur. Montrer que φ est diagonalisable.

✦✦ ✎ Exercice 13 — Diagonalisation simultanée

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f, g deux endomorphismes de E. On suppose de plus que f admet n valeurs propres distinctes. Établir l'équivalence entre les énoncés :

i) Les endomorphismes f et g commutent;

ii) Les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g.

✦✦ Exercice 14 ♣

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a_1 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. On pose

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Justifier que A est diagonalisable. Préciser les valeurs propres de A.

✦✦ Exercice 15 ♣

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E qui commute avec tous les projecteurs de E.

1. Montrer que pour tout $u \in E \setminus \{0_E\}$ est vecteur propre de φ.

2. ✎ En déduire que φ est une homothétie.

✦✦✦ Exercice 16 ♣

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres distinctes. Justifier que l'application linéaire suivante est diagonalisable.

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM. \end{array} \right.$$

✦✦ ✎ Exercice 17 — Polynômes de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2 \ldots, a_n$, n réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on pose

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k \in [\![1;n]\!] \\ k \neq i}} \frac{x - a_k}{a_i - a_k} \quad \text{et} \quad P_i(x) = (x - a_i) L_i(x)^2.$$

1. Justifier que l'application φ définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^2, \qquad \varphi(P, Q) = \sum_{k=1}^{n} P(a_k) Q(a_k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $(L_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une base orthonormée.

2. Justifier que l'application ψ définie par : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]^2$

$$\psi(P, Q) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) Q(x_k) + \sum_{k=1}^{n} P'(x_k) Q'(x_k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$ et $(P_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une famille orthonormée.

✦✦ **Exercice 18** — *d'après l'oral HEC 2013*

Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathscr{A}(\mathrm{E})$ l'ensemble des éléments f de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \qquad \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle.$$

1. Que peut-on dire de la matrice d'un élément $f \in \mathscr{A}(\mathrm{E})$ dans une base orthonormée de E ?
On note $\mathscr{C}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes g de E qui commutent avec tous les éléments de $\mathscr{A}(\mathrm{E})$, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\forall f \in \mathscr{A}(\mathrm{E}), \qquad f \circ g = g \circ f.$$

2. Montrer que lorsque la dimension de E est égale à 2, $\mathscr{C}(\mathrm{E})$ est un plan vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ qui contient $\mathscr{A}(\mathrm{E})$.

✧ ✎ **Exercice 19** — *Matrice Atilla*

Soit un entier $n \geqslant 2$.

1. Préciser le spectre et une base de vecteurs propres de la matrice $\mathrm{J} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des « 1 ».

2. Même question pour la matrice $\mathrm{J}_{\alpha,\beta} = \alpha \mathrm{I}_n + \beta \mathrm{J}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

✦ **Exercice 20**

Soient A et B deux matrice symétriques réelles telles que les formes quadratiques associées q_{A} et q_{B} soient égales. Justifier que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.
Pour rappel, la forme quadratique associée à une matrice A *est l'application* $q_{\mathrm{A}} : \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mapsto {}^t\mathrm{X}\mathrm{A}\mathrm{X} \in \mathbb{R}$.

✦ ✎ **Exercice 21** — *Encadrement de Rayleigh*

Soit A une matrice symétrique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que

$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \qquad \|\mathrm{X}\|^2 \cdot \min \mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \leqslant {}^t\mathrm{X}\mathrm{A}\mathrm{X} \leqslant \|\mathrm{X}\|^2 \cdot \max \mathrm{Sp}(\mathrm{A}),$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

✦ ✎ **Exercice 22** — *Matrice définie positive*

On dit qu'une matrice symétrique M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a ${}^t\mathrm{X}\mathrm{M}\mathrm{X} > 0$.
Montrer l'équivalence entre les quatre énoncés suivants :

- **i)** La matrice M est définie positive.
- **ii)** Les valeurs propres de M sont strictement positives.
- **iii)** Il existe P orthogonale, D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $\mathrm{M} = \mathrm{P}\mathrm{D}\,{}^t\mathrm{P}$.
- **iv)** Il existe une matrice R inversible et symétrique telle que $\mathrm{M} = \mathrm{R}^2$.

✦ **Exercice 23** ♣

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Justifier que l'application linéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \mapsto & \mathrm{A}\mathrm{M} \end{array} \right.$$

est aussi diagonalisable.
On pourra introduire le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

✦ **Exercice 24**

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.

1. Justifier que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle p \circ q \circ p(x), x \rangle \geqslant 0$.

2. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

✦✦ ✎ **Exercice 25**

Soit p un projecteur d'un espace euclidien E.

1. Soient $x, y \in \mathrm{E}$. Justifier que x et y sont orthogonaux si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|y + \lambda x\| \geqslant \|y\|$.

2. En déduire que p est un projecteur orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

À dominante analyse

✦ ✎ **Exercice 26** — d'après l'oral ESCP 2018 ♣

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue. On appelle point fixe de f, tout réel x tel que $f(x) = x$.

1. Montrer que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe.

2. Montrer que le nombre de points fixes de f est inférieur ou égal à celui de $f \circ f$.

✦ **Exercice 27** — Fonction höldérienne

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$. On suppose que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^{\alpha}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et même constante si $\alpha > 1$.

✦✦ **Exercice 28** ♣

Soit $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application polynomiale. À quelle condition nécessaire et suffisante sur le degré de P, P est une application surjective ?

✦✦ ✎ **Exercice 29**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 et vérifiant pour tous x, y réels

$$f(x+y) = f(x) f(y).$$

1. Montrer que pour tout réel x, f est dérivable en x et

$$f'(x) = f(x) f'(0).$$

2. En déduire que soit f est la fonction nulle, soit il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

✦ **Exercice 30** d'après oral ESCP 2008 ♣

Représenter dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ l'ensemble des points de coordonnées (a, b) tels que $a > 0, b > 0$ et la série de terme général $u_n = a^n / (1 + b^n)$ soit convergente.

✦✦ **Exercice 31** ♣

Soit $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ une fonction décroissante. Soit u la suite définie par la récurrence

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + f(u_n).$$

Justifier que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

✦✦ **Exercice 32**

Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0;1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = f(1/n)$. Justifier l'équivalence entre les deux énoncés suivants :

i) $f(0) = 0 = f'(0)$.

ii) La série $\sum u_n$ convergence absolument.

✦✦ **Exercice 33**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction polynomiale $P_n(x) = x^{2n} - 2nx + 1$ et u_n comme la plus grande racine de P_n.

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On pourra regarder la limite $P_n\left(1 + 1/\sqrt{n}\right)$ *lorsque* $n \to +\infty$ *et* $P_n(1)$.

2. Écrire un programme python qui prend en argument $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie une approximation à 10^{-3} de u_n.

✦✦ **Exercice 34**

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad f(n+2) = f(n+1) + f(n) + n.$$

Calculer $f(666)$.

✦✦ ✎ **Exercice 35** Transformation d'Abel

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et que la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est bornée.

1. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_n v_n - S_0 v_1.$$

b) En déduire la convergence de la série $\sum u_n v_n$.

2. Étudier la nature de la série $\sum (-1)^n / n$.

✦✦✦ **Exercice 36**

On souhaite déterminer les fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(3)}(x) = f(x)$$

avec $f(0) = 1, f'(0) = f''(0) = 0$.

1. Soit $r \in \mathbb{R}_*^+$. Justifier qu'il existe $\mathrm{M}_r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in [-r; r], \qquad |f(x)| \leqslant \mathrm{M}_r, \quad |f'(x)| \leqslant \mathrm{M}_r \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leqslant \mathrm{M}_r.$$

En déduire que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [-r; r]$, on a $|f^{(k)}(x)| \leqslant \mathrm{M}_r$.

2. À l'aide d'une formule de Taylor, en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{3j}}{(3j)!}$.

✦✦✦ **Exercice 37** ♣

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

2. Justifier qu'à partir d'un certain rang, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

✦ ✎ **Exercice 38** Équivalents de sommes partielles

1. Justifier l'équivalent : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2. Pour $\alpha \in]0; 1]$. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

3. Donner $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

✦ **Exercice 39** d'après l'oral ESCP 2009

Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) = \mathrm{e}^{-a}$.

✦✦✦ **Exercice 40**

Pour tout entier n, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/4} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x.$$

Étudier les limites des suites $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

✦ ✎ **Exercice 41** ♣

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n}.$$

✦✦ ✎ **Exercice 42** d'après l'oral HEC 2014

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2. Calculer $u_{n+2}+u_n$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

✦✦ ✎ Exercice 43 — Restes de Riemann ♣

Soit $\alpha > 1$. Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad ?$$

✧ ✎ Exercice 44

Pour $a \in \mathbb{R}^*$, on définit les fonctions f et g_a sur $\mathbb{R}^2$ et $\left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ par

$$f(x,y) = \mathrm{e}^x\left(x+y^2+\mathrm{e}^x\right) \quad \text{et} \quad g_a(x,y) = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{(x-y)^2}{a^2}.$$

Donner le nombre de points critiques de ces fonctions.

✦ Exercice 45 — Notation de Monge

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{O}$ de $\mathbb{R}^2$. Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on note $\mathrm{H}_{(a,b)}$ la matrice hessienne de l'application au point (a,b).

$$\mathrm{H}_{(a,b)} = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}.$$

Supposons que $(a,b)\in\mathscr{O}$ est un point critique de f. Justifier que

1. Si $rt-s^2<0$, alors $f(a,b)$ est un point col.

2. Si $rt-s^2>0$, alors $f(a,b)$ est un extremum local. Dans ce cas, si $r<0$, alors $f(a,b)$ est un maximum local et, si $r>0$, alors $f(a,b)$ est un minimum local.

✦✦ ✎ Exercice 46

Soient $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j.$$

1. Vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et exprimer M la matrice hessienne comme combinaison linéaire de I_n et J où J est le matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant des 1.

2. Justifier que f n'admet pas d'extrema locaux sur $\mathbb{R}^n$.

3. **a)** Exprimer $f(x)$ en fonction de la matrice hessienne M et de la matrice colonne X dont les coefficients sont les coordonnées de x dans la base canonique.

b) En déduire les extrema de g définie sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ par

$$g(x) = \frac{f(x)}{\|x\|^2}.$$

✦✦ Exercice 47

Soient a, b et c, trois réels strictement positifs. On définit sur $\mathbb{R}^3$, la fonction f par

$$f(x,y,z) = xyz.$$

Déterminer les extrema globaux de f sous les contraintes

$$ax+by+cz = abc, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad z\geqslant 0.$$

À dominante probabilité

✦ **Exercice 48**

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 4\mathbf{P}(X = n+1) = 9\mathbf{P}(X = n) - 2\mathbf{P}(X = n-1).$$

Donner la loi de X, préciser son espérance et sa variance, si elles existent.

✦ **Exercice 49**

Soient U et V deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec U et V suivant une loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit $N(\omega)$ comme le nombre de racines du polynôme

$$Q_\omega(x) = x^2 + 2U(\omega)x + V(\omega).$$

1. Proposer un programme python qui simule N.

2. Donner la loi de N.

✦ **Exercice 50**

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

1. Calculer le minimum de la fonction $a \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{E}\left((X-a)^2\right)$.

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant |x - y|.$$

Montrer que $\mathbf{V}(f(X))$ existe et que $\mathbf{V}(f(X)) \leqslant \mathbf{V}(X)$.

✦✦ ✎ **Exercice 51**

Soient A et B deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes avec A de loi de Poisson de paramètre λ et B de loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. On définit de plus la matrice aléatoire

$$M(A,B) = \begin{bmatrix} 1 & A \\ 1 & B \end{bmatrix}.$$

1. Calculer la probabilité de l'évènement « M(A, B) est inversible ».

2. Calculer la probabilité de « M(A, B) est diagonalisable ».

✦✦ **Exercice 52** d'après l'oral ESCP 2023 ♣

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Soit un entier $k > 1$. Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = [\![1, k]\!]$. On considère k variables aléatoires $(X_i)_{i \in [\![1;k]\!]}$ qui suivent une même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes. On définit enfin une variable aléatoire Y par :

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \sum_{i=1}^{T(\omega)} X_i(\omega).$$

1. Montrer que si, pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, X_i a une espérance, alors Y a une espérance.

2. Donner une expression de $\mathbf{E}(Y)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(T)$.

✦✦ **Exercice 53**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $[\![1;n]\!]$. Justifier que $\mathbf{P}(X=Y) \geqslant \frac{1}{n}$ avec égalité si et seulement si X et Y suivent une loi uniforme.

✦✦ Exercice 54

d'après l'oral ESCP 2009

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes, de même loi et admettant une espérance. Montrer que

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{\mathbf{E}(X)}{\mathbf{E}(X+Y)}.$$

✦✦ Exercice 55 ♣

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires mutuellement indépendantes toutes de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. On définit la matrice aléatoire $M = (M_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall\, i, j \in [\![1,n]\!], \qquad M_{i,j} = X_i X_j.$$

1. Donner la loi de $\mathrm{rg}(M)$ et $\mathrm{Tr}(M)$.

2. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?

✦ ✎ Exercice 56

Méthode d'inversion

Soient $I =]a,b[$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où a et b sont réels ou infinis. Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité f vérifie :

- f est continue et strictement positive sur I ;
- f est nulle en dehors de I.

Soit F, la fonction de répartition de X et G, la restriction de F à I.

1. Justifier que G réalise une bijection de I sur $]0;1[$.

2. Soient U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;1[$ et $Y = G^{-1}(U)$. Justifier que X et Y ont même loi.

✦ Exercice 57

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ et U une variable aléatoire loi uniforme sur $]0;1]$. On lance une pièce équilibrée. Soit X définie par $X = U^2$ si la pièce donne pile et $X = 1 - U^2$ sinon. Justifier que X est à densité et donner une densité.

✦✎ Exercice 58

d'après l'oral ESCP 2022

Soit X une variable aléatoire positive, qui admet une espérance, de densité f définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

✦✦ Exercice 59

Soit f une densité d'une variable aléatoire X à valeurs positives. Dans chaque cas, donner un exemple explicite de densité telle que :

1. X n'admet pas d'espérance.

2. X admet une espérance mais pas de variance.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. X admet un moment d'ordre k mais pas d'ordre $k+1$.

4. Simuler en Python une réalisation de la variable X de la question 2.

✦✦ Exercice 60

On considère trois variables aléatoires X, Y, Z mutuellement indépendantes et de même loi.

1. On suppose dans cette question que les variables aléatoires sont à densité et qu'elles possèdent une densité bornée sur $\mathbb{R}$.
Calculer $\mathbf{P}(\max(X,Y,Z) = X)$.

2. À t-on le même résultat pour des variables aléatoires discrètes ? Proposer un code Python illustrant cela.

✦✦ Exercice 61

d'après l'oral HEC 2013

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et de même loi $\mathscr{N}(0,1)$.
On pose :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$ et $\mathbf{P}(XY > 0)$.

2. Trouver la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

✦✦✦ Exercice 62

Soient $Z, X_1, \ldots, X_n$, $n+1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$.

1. Justifier que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une variable à densité et qu'il existe une densité f_n dont la restriction à $[0;1]$ est donnée par :

$$\forall\, x \in [0;1], \qquad f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2. Calculer $\mathbf{P}(Z > X_1 + X_1 + \ldots + X_n)$.

✦✦✦ Exercice 63 ♣

Soient X_1, X_2, X_3 et X_4, 4 variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0;1[$.

1. Écrire un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de la probabilité que la matrice aléatoire ci-dessous soit inversible.

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}.$$

2. Calculer cette probabilité.
On pourra utiliser le fait que si $U \hookrightarrow \mathscr{U}(]0;1[)$ *alors* $-\ln(U) \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

✦ Exercice 64 ♣

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires admettant une même variance σ^2. On définit la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall\, i, j \in [\![1;n]\!], \qquad M_{ij} = \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right).$$

1. Justifier que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t XMX \geqslant 0$.

2. On suppose que pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$ avec $i \neq j$, $\operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right) = \alpha$. En déduire que

$$\alpha \geqslant -\frac{\sigma^2}{n-1}.$$

✦✦ ✎ **Exercice 65**

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1;m]\!]$.

1. Justifier que : $\mathbf{E}(\mathrm{N}) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}(\mathrm{N} > k)$.

2. *Application.*
Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$, m variables aléatoires de même loi, mutuellement indépendantes et indépendantes de N. On suppose de plus que X_1 admet une espérance et on pose

$$\mathrm{S}_\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}_i = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \ldots + \mathrm{X}_\mathrm{N}.$$

a) Comparer S_N et $\sum_{i=0}^{m-1} \mathrm{X}_i \mathbf{1}_{[\mathrm{N}>i]}$.

b) En déduire que S_N a une espérance et $\mathbf{E}(\mathrm{S}_\mathrm{N}) = \mathbf{E}(\mathrm{X}_1)\,\mathbf{E}(\mathrm{N})$.

✦✦ **Exercice 66** ♣

Soient $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$, trois variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On considère les trois points d'un repère orthonormé :

$$\mathrm{M}_1 : (1, \mathrm{X}_1), \quad \mathrm{M}_2 : (2, \mathrm{X}_2) \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_3 : (3, \mathrm{X}_3).$$

1. Calculer la probabilité que ces trois points soient alignés ?

2. Calculer la probabilité que $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ soit un triangle rectangle en M_2 ?

✦✦✦ **Exercice 67** ♣

Soit n un entier supérieur à 2. Soient $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$, n variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi normale.

1. Quelle est la probabilité que $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ soit orthogonal à u (pour le produit scalaire canonique) ?

2. En déduire la probabilité que $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ appartienne à F, un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ fixé.

✦ **Exercice 68**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant un moment d'ordre 2.

1. Justifier que $\mathbf{P}(\mathrm{X} > 0) \leqslant \mathbf{E}(\mathrm{X})$.

2. Montrer que si $\mathbf{E}(\mathrm{X}) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(\mathrm{X} = 0) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(\mathrm{X})}{(\mathbf{E}(\mathrm{X}))^2}$.

✦ **Exercice 69**

Soient $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0;1]\big)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Y}_n \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1;n]\!]\big)$.
Comparer

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{E}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{Y}_n}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\big(\arctan(\mathrm{Z})\big).$$

✧ **Exercice 70**

Soit $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ un échantillon de variables aléatoires indépendantes de même loi avec $\mathbf{E}(\mathrm{X}_1) = \mu$ et $\mathbf{V}(\mathrm{X}_1) = \sigma^2$. On dispose de deux estimateurs de μ :

$$\mathrm{T}_1(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n) = \frac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2}{2}, \quad \mathrm{T}_2(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i - \frac{\mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2}{2}.$$

Comparer les variances de ces deux estimateurs. Interprétez.

✦✦ **Exercice 71**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Soit $n \geqslant 2$. Vérifier que $1/S_n$ admet une espérance et la calculer.

2. En déduire un estimateur sans biais de λ.

Python

✧ **Exercice 72**

Écrire un programme permettant de donner une valeur approchée à $0,001$ de l'unique réel ℓ vérifiant $\ell = \cos \ell$.

✦ **Exercice 73** — Approximation de π

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \pi - p_n < \frac{1}{n} \quad \text{où} \quad p_n = 2\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}.$$

Écrire un programme qui prend en argument un réel strictement positif e et renvoie une approximation de π à e près.

✦ **Exercice 74** — Nombre de Hardy-Ramanujan

1. Écrire un programme qui prend en argument un entier naturel n non nul et renvoie le nombre de façons (lorsque cela est possible) de l'écrire comme la somme de deux cubes

$$n = a^3 + b^3 \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{N}^2, \quad a \leqslant b.$$

2. Donner le plus petit nombre naturel qui peut s'écrire de comme somme de deux cubes de deux manière différentes.

✦✦ **Exercice 75** — Suite de Tribonacci

On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n.$$

1. Écrire un programme qui prend en argument $n \in \mathbb{N}$ et renvoie la matrice ligne $T_n = [t_n,\ t_{n+1},\ t_{n+2}]$.

2. Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = AT_n$. En déduire un second programme qui prend en argument n et renvoie T_n.

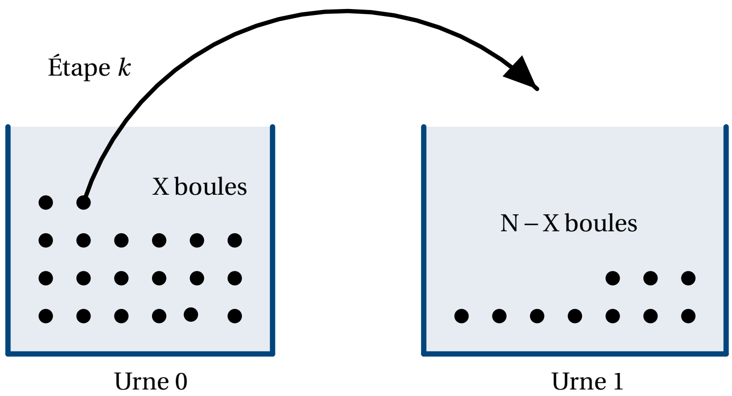
✦✦ **Exercice 76**

Un pion se trouve à l'origine de l'axe des abscisses. Il se déplace vers la gauche ou vers la droite d'une unité à chaque fois de manière équiprobable.
Écrire une fonction python qui prend en argument $n \in \mathbb{N}$ et qui simule son déplacement en renvoyant :

- un tableau à une ligne de $n+1$ colonnes dont le coefficient en position k est la position du pion après k déplacements;
- un tableau à deux lignes et $2n+1$ colonnes où la première ligne contient les entiers de $-n$ à n, la deuxième ligne indique le nombre de fois où le pion est passé par cette case.

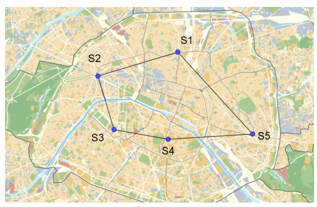
✦✦✦ **Exercice 77** Urnes d'Ehrenfest

Soient N, $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne numérotée 0 contenant N boules indiscernables et d'une autre urne vide numérotée 1. À chaque étape de l'expérience on sélectionne de manière aléatoire uniformément une boule (située dans l'une ou l'autre des deux urnes) et on la change d'urne. Proposer une fonction Python prenant en argument deux entiers N et n et renvoyant une simulation empirique de la proportion de boules appartenant à l'urne numéro 1 après n étapes.



✦✦✦ **Exercice 78** Anton et Emilie (le retour) ♣

Anton et Emilie ont rendez-vous sur Paris dans un des cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-dessous. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, Anton se présente au site S_1 et Emilie au site S_2.



Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres. Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes).
- Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

On montre que presque sûrement, Anton et Emilie se retrouvent. Soit T, le nombre d'étapes nécessaires avant leurs retrouvailles. Écrire un programme Python qui simule T. En déduire une estimation de $\mathbf{E}(\mathrm{T})$.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et à permis de sauver des oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Rapport de Jury : Oral, HEC 2021

Indications

Sujet n° 1.

2.a) Raisonner par double implication. Justifier que f admet une b.o.n $(e_1, \dots, e_n)$ composée de vecteurs propres de f.

3.b) Justifier que S est inversible. Poser ensuite $\mathrm{O} = \mathrm{MS}^{-1}$ et vérifier que O est orthogonale.

3.c) Introduire g et h, les endomorphismes associés à O et S dans la base $\mathscr{B}$ et remarquer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|g(x)\| = \|x\|$.

Sujet n° 2.

3.a) Quel est le lien entre le spectre de A et celui de A^{-1} ? Utiliser ensuite la question 2.

3.c) Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathrm{B} = \lambda \mathrm{I}_n$. Conclure.

4.b) Notons α_1, …, α_n les valeurs propres de A et β_1, …, β_n les valeurs propres de B, on peut les supposer ordonnées

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_n,$$

$$\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \dots \leqslant \beta_n.$$

- Justifier que $\mathrm{N}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqslant \alpha_n + \beta_n$.
- Montrer que

$$\min_{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{X} \neq 0} \frac{\|(\mathrm{A}+\mathrm{B})\mathrm{X}\|}{\|\mathrm{X}\|} \geqslant \alpha_1 + \beta_1.$$

- En déduire que $\mathrm{C}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqslant \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_1 + \beta_1}$ pour conclure.

Sujet n° 4.

1.c) Calculer $\mathrm{H}^{-1}\mathrm{GH}$.

3.b) À l'aide de la formule du binôme, vérifier que

$$m_{p,q} = \binom{q}{p} \alpha^p \beta^{q-p}.$$

avec la convention que $\binom{q}{p} = 0$ si $p > q$.

3.c) $\mathrm{M}_n(\mathrm{G})$ est une matrice triangulaire.

4.a) Utiliser 1.c) et 2.b).

Sujet n° 5.

1.A.b) Si $a \in \operatorname{Ker} \mathrm{S}$, alors pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\langle x, a \rangle = 0$. Que dire de a ?

1.A.c) On pourra remarquer que $\dim \mathrm{E} = \dim \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$.

1.B Écrire pour $x \in \mathrm{E}$, $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$.

2. Appliquer la question 1 avec $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[x]$ et le produit scalaire défini par

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.a) Remarquer dans un premier qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in [0;1]$, $|\mathrm{P}(t)| \leqslant \mathrm{M}$.

Sujet n° 6.

2.b) Notons $(e_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Exprimer $p(e_j)$ dans la base canonique à l'aide de a, b et c.

4.a) Vérifier que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{P} - \mathrm{I}_3$.

4.c) Non. Vérifier que 0 est la seule valeur propre de f.

5.a) Vérifier que $\mathrm{M}^3 = -\mathrm{M}$. En déduire f^3.

5.c) Remarquer que $g_0 = \mathrm{id}$ pour en déduire une application h telle que $g_t \circ h = h \circ g_t = \mathrm{id}$.

Sujet n° 7.

2.b) Justifier que 0 est valeur propre. Calculer $u_a(a)$ pour trouver une seconde valeur propre.

3.a) Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(b)$.

3.b) Justifier que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(b)^{\perp}$. Conclure sur l'égalité en partant de la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0(u) \oplus \mathrm{E}_\mu(u)$.

3.d) Pour l'injectivité, regarder u_a et u_{-a}.

4.b) Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $a_\perp \in \operatorname{Vect}(a)^\perp$ tels que

$$f(a) = \lambda a + a_\perp.$$

Justifier ensuite que si f est symétrique, $a_\perp = 0_{\mathrm{E}}$.

Sujet n° 8.

2.c) Justifier dans un premier temps que

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{T}) = \operatorname{Ker}(\mathrm{A}).$$

2.e) Déterminer une matrice N nilpotente telle que

$$\mathrm{T} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{N}^k.$$

Calculer $(\mathrm{I}_n - \mathrm{N})\mathrm{T}$. En déduire l'inversibilité de T, puis de A.

4.a) Si X est une matrice colonne, vérifier que

$${}^t\mathrm{X}\Sigma_{\mathrm{S}}\mathrm{X} = \mathbf{V}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{S}_i\Big).$$

Sujet n° 11.

3.b) Prouver et utiliser l'encadrement de Rayleigh

$$\|\mathrm{X}\|^2 \min \operatorname{Sp}(\mathrm{A}) \leqslant {}^t\mathrm{XAX} \leqslant \|\mathrm{X}\|^2 \max \operatorname{Sp}(\mathrm{A}).$$

4.b) Justifier que $\nabla^2 f(\hat{x}) = \mathrm{A}$ avec les choix

$$a = \mathrm{e}^x > 0, \quad b = \mathrm{e}^y > 0, \quad c = \mathrm{e}^z > 0.$$

Sujet n° 13.

2.b) Justifier par croissance de f que pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

En déduire que

$$0 \leqslant u_n \leqslant f(1) - f(0).$$

4. Pour $\alpha \geqslant 0$, utiliser un question précédente. Pour $\alpha < 0$, montrer que

$$n \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant u_n.$$

Expliciter ensuite le membre de gauche.

Sujet n° 16.

2. Rappel : si (α_n), (β_n) sont deux suites avec $(\beta_n)_n$ strictement positive et

$$\alpha_n \sim \beta_n$$

alors la suite $(\alpha_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang.
En déduire la croissance de $(u_n)_n$ à partir d'un certain rang.

3.b) Utiliser le rappel précédent.

3.c) Montrer que :

$$\forall n > \mathrm{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{u_\mathrm{N}}{v_\mathrm{N}} \cdot v_n.$$

Sujet n° 18.

3.b) Justifier que la variable discriminant est une variable à densité. Que dire de $\mathbf{P}(\Delta) = 0)$ dans ce cas ?

4.a) Si X est la variable qui renvoie le nombre de racines. Expliciter $\mathbf{E}(\mathrm{X})$ à l'aide de $\mathbf{P}(\mathrm{B})$.

4.c) Remarquer que $\mathbf{P}(\mathrm{U}^2 < \mathrm{U}) = 1$.

Sujet n° 20.

2. Appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $\mathrm{Y} = \mathrm{e}^{t\mathrm{X}}$.

Sujet n° 22.

5. $2^{n+1}\mathrm{Z}_n$ suit une loi uniforme sur $[\![0; a_n]\!]$ où par lecture graphique $a_2 = 7 = 8-1$, $a_3 = 15 = 16-1$ ..
Pour la preuve, on pourra procéder par récurrence.

6. Si $\mathrm{U} \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1; m]\!])$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de U est donnée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathrm{F}(t) = \frac{\lfloor t \rfloor}{m}.$$

Exprimer la fonction de répartition de Z_n à l'aide de F.

Sujet n° 25.

3.a) Penser à la loi faible des grands nombres.

3.b) La réponse est dans la question 6 !

4.a) Partir de $\mathbf{V}(\mathrm{Z}_1) \leqslant \mathbf{E}\left(\mathrm{Z}_1^2\right)$.

Lettres grecques

Il est utile de connaitre les lettres grecques. Il est parfois difficile de suivre les étudiants lorsqu'ils confondent deux lettres de leurs énoncés.

Rapport de Jury : Oral, HEC 2021

- FIN -

$0 + 0 = \theta\tau\tau$