Nom :

Mathématiques approfondies
ECG 2

Partie I

Lycée Saint Louis 2025/2026

CHAPITRE 1

Analyse

1 Sommes finies

Exercice 1. ✦ ✎ [1] Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Calculer les sommes et produits suivants : *20min*

$$C_1 = \sum_{k=0}^{2n} |n-k|, \quad C_2 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^3}{(k-1)^2(k+1)}\right), \quad C_3 = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!, \quad C_4 = \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2+k-2}{k^2+2k-3}, \quad C_5 = \prod_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^{-2k}.$$

Exercice 2. ✦ **Sommes des puissances des premiers entiers** *30min*

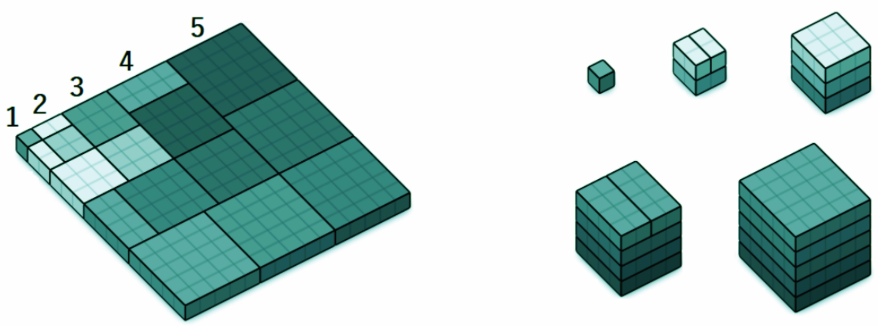
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_i(n) = \sum_{k=0}^{n} k^i \quad \text{et} \quad T_i(n) = \sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{i+1} - k^{i+1}\right).$$

1. *Cas particulier*

a) Rappeler les valeurs de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$ en fonction de n.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_3(n) = S_1(n)^2$.
Expliquer cette relation à l'aide du dessin suivant :



2. *Cas général*

a) i. Calculer $T_i(n)$. En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (n+1)^{i+1} - 1$$

ii. Développer $(k+1)^{i+1}$ à l'aide du symbole Σ. En déduire

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{i+1} = S_{i+1}(n) + (i+1)S_i(n) + \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n).$$

b) Conclure $\quad S_i(n) = \dfrac{1}{i+1}\left((n+1)^{i+1} - 1 - \displaystyle\sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n)\right).$

3. Démontrer que $S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$.

4. Écrire un programme Python qui prend en arguments n et i et calcule $S_i(n)/\left(n^{i+1}/(i+1)\right)$. Tester et commenter.

1. *Le symbole ✎ désigne les exercices classiques à maîtriser en priorité.*

2 Suites et séries

Analyse asymptotique

Méthode

- Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, prouver $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ revient à montrer $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, prouver $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ revient à montrer $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
- On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.

Exercice 3. ✦ ✎ Dans chacun des exemples suivants, déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_n$. *20min*

1. $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+1} + n$
3. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$
4. $u_n = \ln\left(\frac{1+e^{1/n}}{2}\right)$
5. $u_n = \sqrt{n} + \ln(1+e^n)$
6. $u_n = e^{1/n+1/n^2} - e^{1/n}$.

Exercice 4. ✦ **Contre-exemples** *15min*

1. Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ne soient pas équivalents.
2. Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que u_n et u_{n+1} ne soient pas équivalents.
3. Donner un exemple d'une fonction f et de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \sim v_n$ mais $f(u_n) \not\sim f(v_n)$.

Exercice 5. ✦ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$. *20min*
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et trouver un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les bases

Méthode

Comment justifier une convergence d'une série?

Il faut distinguer :
- *Si on ne demande pas le calcul de la somme.*
  - Utiliser les critères d'équivalence, de négligeabilité ou de comparaison en utilisant les séries de référence (en particulier, les séries de Riemann).
  - Revenir à la définition et montrer que la suite des sommes partielles ($S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$) est convergente. Par exemple, si u est à terme positif, $(S_n)_n$ est croissante et on peut appliquer le théorème de convergence monotone.
- *Si on demande le calcul de la somme.*
  - Reconnaître une somme de référence (exponentielle, géométrique, géométriques dérivées).
  - Réécrire le terme général sous la forme $a_{k+1} - a_k$ pour faire un télescopage.

Exercice 6. ✦ ✎ Étudier la convergence des séries : *30min*

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}},\quad \sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right),\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2^2+\cdots+n^2},\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln n)^5}{n^2},\quad \sum_{n\geqslant 2}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}.$$

✦✦ Discuter en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de la convergence de :

$$\sum_{n\geqslant 1}(\sqrt{n+7}-\sqrt{n})^{\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{\alpha}}{n^2+n^{\beta}}.$$

Exercice 7. ✦ ✎ Calculer les sommes suivantes $\quad A = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} e^{-k}, \quad B = \sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}.$ 15min

Méthode

Comment justifier la convergence d'une suite à l'aide des séries?

Pour étudier la convergence d'une suite u, on peut étudier celle de la série $\sum(u_n - u_{n-1})$.

Par exemple, montrons que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ converge en utilisant

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$,

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \Rightarrow \quad u_n - u_{n-1} &\sim \frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge. Or, si on note S_n la somme partielle d'ordre n de cette série, $S_n = \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge aussi.

Exercice 8. ✦ ✎ **Constante d'Euler** 15min

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire la convergence de la suite u.
2. En admettant qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^{n} 1/k = \ln(n) + \gamma + o(1)$, calculer la limite de la suite u.

Les exercices

Exercice 9. ✦✦ On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence 25min

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \ln\left(e^{x_n} - x_n\right) \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

1. Pourquoi cette suite est-elle bien définie et positive?
2. a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}}$.
   b) Justifier que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Démontrer la convergence de la série $\sum x_n$ et calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$.

⋙ *Solution en vidéo. Youtube : Michael Penn Putnam Exam | 2016 : B1*

Exercice 10. ✦✦ **Avec un peu d'algèbre linéaire** 30min

On définit les polynômes P_1, P_2, P_3 et P_3 sur $\mathbb{R}$ par

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x(x-1), \quad P_3(x) = x(x-1)(x-2)$$
$$\text{et} \quad P_4(x) = x(x-1)(x-2)(x-3).$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}_4[x]$. Avec un argument d'algèbre linéaire, justifier l'existence de $\alpha_0, \cdots, \alpha_4$ tels que $P = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i P_i$.

   On ne cherchera pas à calculer ici ces valeurs.

2. a) Vérifier que pour tout indice i, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_i(n)}{n!} = e$.

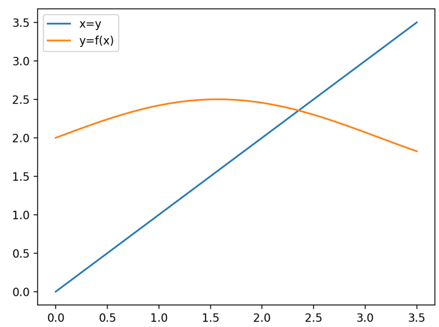
   b) Calculer en fonction de $\alpha_0, \cdots, \alpha_4$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}$.

3. *Application.* Donner la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - n^2}{n!}$.

Exercice 11. ✦✦ ✎ Étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ — *40min*

On considère la suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(u_n) + 2.$

1. Comment obtenir à l'aide de Python le graphe de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}\sin(x) + 2$ ainsi que celui de $x \in \mathbb{R} \mapsto x$ sur $[0; 7/2]$?



2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

   a) Prouver que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad \left|f(y) - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}|y - x|$.

   b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |v_n| \leqslant \frac{|v_0|}{2^n}$.

   c) Justifier la convergence de la suite u. Notons ℓ la limite

3. En utilisant la question 2.(a), démontrer que ℓ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

4. On note R_n, le reste d'ordre n de la série $\sum v_k$.

   a) comparer $\ell - u_n$ et R_{n-1}.

   b) En déduire que $|\ell - u_n| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. *On admet que* $|u_1 - u_0| \leqslant 1$.

5. Compléter le programme suivant qui prend en argument ε et renvoie une approximation de ℓ à ε-près.

```
(1)    def approx( ) :
(2)          u=    ....
(3)          erreur=2
(4)          while    ....
(5)                u=    ....
(6)                erreur=    ....
```

Exercice 12. ✦✦ ✎ Formule du binôme négatif — *D'après EDHEC 2015* — *25min*

1. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, vérifier l'équivalent $\binom{k}{p} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}$ En déduire la convergence de la série $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.

2. On définit, pour $x \in]-1, 1[$, $\quad S_p(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.

   a) Préciser $S_0(x)$.

b) À l'aide de la formule du triangle de Pascal, démontrer que $(1-x)S_{p+1}(x) = xS_p(x)$.

c) Conclure avec $\displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty}\binom{k}{p}x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$.

Exercice 13. ✦✦✦ **Recherche d'un équivalent par le Lemme de Cesaro** *d'après oraux H.E.C* *1h20*

On admet la propriété suivante :

$(\mathscr{P})$: Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre réel L,
alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad V_n = \tfrac{1}{n}(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1})$$

converge aussi vers L.

On se donne deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \frac{1+\alpha.u_n}{1+\beta.u_n}$$

1. Question de cours : Convergence et divergence des suites réelles monotones.
2. Dans cette question seulement, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.
   - **a)** Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x\dfrac{1+x}{1+2x}$.
   - **b)** Étudier la convergence de la suite (u_n).
   - **c)** Écrire un programme en Python permettant le calcul de u_{10}.
3. Dans le cas général, prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1/u_n$. Prouver que la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta - \alpha$.
5. En utilisant la propriété $(\mathscr{P})$, déduire du résultat précédent un équivalent de u_n de la forme $\frac{1}{q\cdot n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, où q est un réel strictement positif.
6. Discuter en fonction du réel $\gamma \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\sum {u_n}^\gamma$.

3 Limites et continuité

3.1 DLs

Exercice 14. ✧ ✎ Donner les développements limités à l'ordre 2 et $n \in \mathbb{N}$ de : *5min*

$$(1+x)^\alpha = \quad , \quad \frac{1}{1-x} = \quad , \quad e^x = \quad , \quad \ln(1+x) = \quad \cos(x) = \quad , \quad \sin(x) = \quad .$$

Méthode

Comment calculer le DL d'un produit de DLs usuels ?

Calculons le $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x\big(1+\sin(x)\big)$.
Précisons le DL de chacun des facteurs. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \quad \text{et} \quad 1+\sin(x) = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3).$$

On développe ensuite l'expression en omettant les termes de degré supérieur à 3, l'ordre du DL.

$$\begin{aligned} e^x\big(1+\sin(x)\big) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right)\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)\right) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + x + x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3). \end{aligned}$$

Finalement, on réorganise les termes suivants leur ordre : $e^x\big(1+\sin(x)\big) = 1 + 2x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + o_0(x^3)$.

Méthode

Comment effectuer un changement de variable dans un DL?

Exemple 1.

Déterminons le $DL_4(0)$ de $\sin(3t)$. On écrit le $DL_4(0)$ de $\sin(x)$ par $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o_0\left(x^4\right)$.

On peut remplacer x par $3t$ puisque $3t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\quad \sin(3t) = 3t - \dfrac{9}{2}t^3 + o_0\left(t^4\right)$.

Exemple 2.

Donnons le $DL_4(0)$ de $\ln(1+t^2)$. Partons du DL usuel : $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$.

Sachant que $t^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, en remplaçant x par t^2, on obtient : $\ln(1+t^2) = t^2 - \dfrac{1}{2}t^4 + o_0(t^4)$.
Notons que le DL du logarithme à l'ordre 2 a suffit.

Exercice 15. ✦ Écrire le DL à l'ordre n indiqué, au voisinage de 0 , pour les fonctions suivantes. *1h*

1. $x \mapsto 5 - 3x + 4x^2 + 4x^5 - 12x^7$, $n = 3$;
2. $x \mapsto \cos(x) + \ln(1+x)$, $n = 2$;
3. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$, $n = 2$;
4. $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $n = 3$;
5. $x \mapsto \ln(2+x)$, $n = 2$;
6. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 + x + x^4 + e^x$, $n = 3$;
7. $\left(3x^8 - 14x^6 + 13x^5 + 5x^3 - x^2 + 1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $n = 2$;
8. $x \mapsto e^x(1 + \sin(x))$, $n = 3$;
9. $x \mapsto \frac{3+x^2+x^3+\ln(1+x)}{1-x}$, $n = 2$;
10. $x \mapsto (\sin x)^2 \cos(x)$, $n = 4$;
11. $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$, $n = 4$;
12. ✦✦ $x \mapsto \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16. ✦ Calculer la limite en 0 des fonctions suivantes. *20min*

$$1.\ x \mapsto \frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2}\,; \qquad 2.\ x \mapsto \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}\,; \qquad 3.\ x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}.$$

3.2 Continuité

Méthode

Comment appliquer le théorème des valeurs intermédiaires?

En pratique, il est souvent judicieux de se ramener au cas où $y = 0$ à l'aide d'une fonction auxiliaire g et d'appliquer l'énoncer suivant :

Soit $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $g(a)g(b) < 0$ alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $g(c) = 0$.

• ✎ *Exemple*
Montrons que pour toute fonction continue $f : [0;1] \to [0;1]$, il existe $c \in [0;1]$ pour lequel

$$c = f(c).$$

Pour cela, on considère la fonction $g : x \in [0;1] \mapsto f(x) - x \in \mathbb{R}$. On a $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ puisque l'image de f est incluse dans $[0;1]$. g étant continue sur le segment $[0;1]$, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique. Il existe $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$. Autrement dit, $f(c) = c$.

Exercice 17. ✧ ✎ Prouver qu'il existe un réel $x > 0$ tel que $3^x + 5^x = 7^x$. *10min*

Attention. Il ne faut pas confondre le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection. Ce dernier permet souvent de justifier en plus une unicité.

Exercice 18. ✦✦ Soit $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application polynomiale. *25min*

1. Justifier que si P est de degré impair, alors P est surjective.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 19. ✦✦ *15min*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application continue. Montrer que si tout réel possède un ou deux antécédents par f, alors f est une bijection.

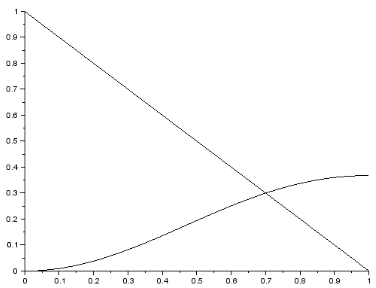
Le jury attend des candidats qu'ils sachent tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction ou soient capables d'illustrer un raisonnement par un petit schéma.

Rapport de Jury : Oraux, HEC 2023

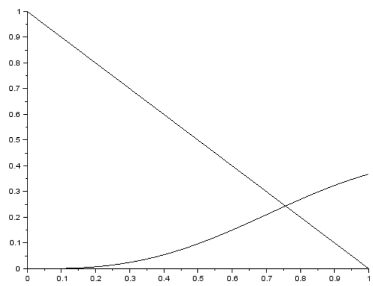
Exercice 20. ✦✦ ✎ **Exemple de suite implicite** *D'après EMLyon* *1h*

On note $f_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x^2} \end{array} \right.$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \mathrm{e}^{-x^2} \end{array} \right.$.

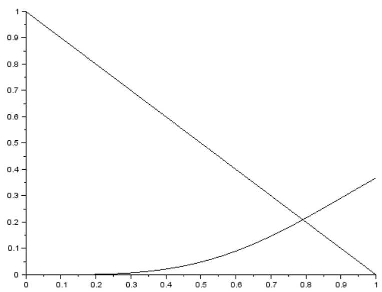
1. a) Justifier précisément que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser la dérivée.
   b) Préciser la parité de la fonction f_n.
   c) En déduire le tableau de variation et le graphe de f_n sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
   Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$. *Distinguer deux cas* $x \in [0,1]$ *et* $x \geqslant 1$.
   Que pouvez en déduire sur la position relative des courbes représentatives de f_{n+1} et f_n ?
3. a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $f_n(x) = 1 - x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet une unique solution. On note x_n, cette unique solution.
   b) Écrire un programme Python qui prend en argument n et trace les graphes de f_n et $x \mapsto 1 - x$ sur $[0,1]$.
   Voici quelques résultats :



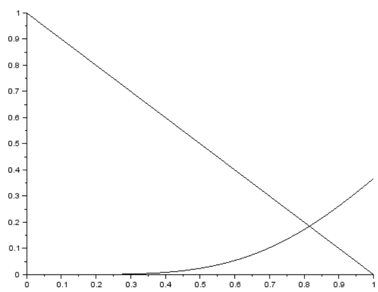
$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$

   c) Conjecturer la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$. Prouver votre conjecture. En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ vers une limite finie. Notons ℓ, cette limite.
   d) Raisonnons par l'absurde pour prouver que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers 1.
   On suppose que $\ell < 1$. Justifier que pour tout $n \geqslant 2$, $x_n \leqslant \ell$, en déduire que $({x_n}^n)_{n\geqslant 2}$ converge alors vers 0. En déduire une contradiction.
   e) Donner la limite de $({x_n}^n)_{n\geqslant 2}$.

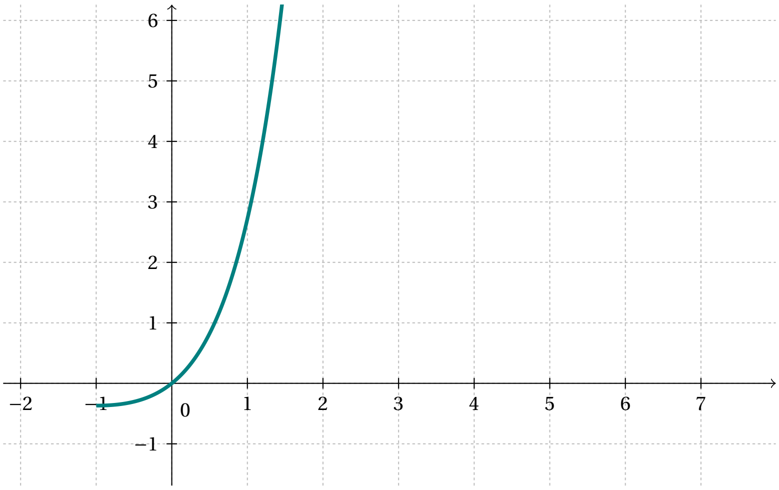
4 Dérivation et intégration

4.1 Dérivation

Exercice 21. ✦ On dit qu'un polynôme P non constant est scindé dans $\mathbb{R}$ s'il se factorise dans $\mathbb{R}$ en produit de polynômes du premier degré. Montrer que si P est un polynôme réel non constant scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, P' est aussi scindé à racines simples. *20min*

Exercice 22. ✦✦ ✎ Pour tout réel x, on pose $f(x) = xe^x$. *40min*

1. Justifier que la fonction f définit une bijection de $I = [-1, +\infty[$ sur $J = [-1/e, +\infty[$.
2. Dans la suite, on note W la bijection réciproque. Préciser les variations de W sur J.
3. Voici le graphe de f. Compléter avec le graphe de W.



4. a) Préciser W(0) et W(e).
   b) Justifier que W est dérivable sur $J \setminus \{-1/e\}$ avec pour tout $x \in J \setminus \{-1/e\}$, $\quad W'(x) = \dfrac{1}{x + e^{W(x)}}$.
   c) En déduire les équations des tangentes en 0 et en e de la fonction W.

Exercice 23. ✦✦ **Généralisation des accroissements finis** *20min*

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I et $a \in I$. On suppose que pour tout $x \in I$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que pour tout $b \in I \setminus \{a\}$: $g(b) - g(a) \neq 0$.
2. Montrer que pour tout $b \in I \setminus \{a\}$, il existe c_b compris entre a et b, tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_b)}{g'(c_b)}.$$

Indication. Considérer, pour un certain réel λ bien choisi, la fonction $h : x \longmapsto f(x) - \lambda g(x)$.

3. *Application : Règle de L'Hospital.*
   a) Montrer que si $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.
   b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2}$.

Exercice 24. ✦✦ **Étude de relations fonctionnelles** *30min*

1. Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. On se propose de trouver les fonctions dérivables qui vérifient : $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
   a) Justifier que si f s'annule une fois, alors f est la fonction nulle.
   b) Prouver si f est non nulle alors f est une fonction strictement positive.
   c) Conclure en utilisant $g = \ln \circ f$.
   d) Que dire si on suppose seulement la fonction dérivable en 0 ?

4.2 Intégration

Méthode

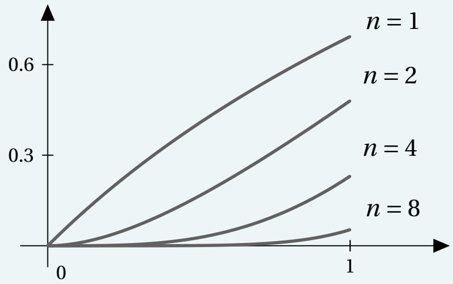
Comment encadrer une intégrale ?

Prenons l'exemple de $\mathrm{I}_n = \int_0^1 \ln(1+t)^n \,\mathrm{d}t$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R}_*^+, \quad & 0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t \\ \Rightarrow \quad & 0 \leqslant \ln(1+t)^n \leqslant t^n. \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale,

$$0 = \int_0^1 0 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \ln(1+t)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$



Par encadrement, la suite $(\mathrm{I}_n)_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers 0. Graphiquement, plus n devient grand, plus l'aire sous la courbe est proche de 0.

Exercice 25. ✧ Prouver par encadrement la convergence vers 0 des suites de terme général : *15min*

$$\mathrm{K}_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-tn} \cos(t/n) \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_n = \int_0^1 \sin\left(t^n\right) \mathrm{d}t.$$

Méthode

Comment rédiger une intégration par parties ?

Dans votre rédaction, il ne faut pas oublier de rappeler que les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$.

- *Exemple 1.* Calculons $\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

Posons u, v de classe $\mathscr{C}^1$, pour tout $t \in [0;\pi]$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} v(t) & = & t \\ u(t) & = & \sin(t) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v'(t) & = & 1 \\ u'(t) & = & \cos(t) \end{array}\right..$$

Ainsi, $$\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $$\left[u(t)v(t)\right]_0^\pi = \left[\sin(t)t\right]_0^\pi = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\cos(t)\right]_0^\pi = 2.$$

Finalement, $$\int_0^\pi t\cos(t)\,\mathrm{d}t = -2.$$

- *Exemple 2.* Calculons la primitive du logarithme qui s'annule en 1.

Posons u, v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} v(t) & = & \ln(t) \\ u(t) & = & t \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v'(t) & = & 1/t \\ u'(t) & = & 1 \end{array}\right..$$

Par intégration par parties, on a pour $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, $$\left[u(t)v(t)\right]_1^x = \left[t\ln(t)\right]_1^x = x\ln(x) \quad \text{et} \quad \int_1^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x 1\,\mathrm{d}t = [t]_1^x = x-1.$$

Méthode

Finalement, la primitive (qui s'annule en 1) est $x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x\ln(x) - x + 1$. Ce calcul montre que,

$$\text{Les primitives sur } \mathbb{R}_*^+ \text{ de ln sont } x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x\ln(x) - x + \mathrm{C} \quad \text{avec} \quad \mathrm{C} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 26. ✧ Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On pose $\mathrm{S} = \int_0^x \sin(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{C} = \int_0^x \cos(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$. *15min*

À l'aide de deux intégrations par parties, trouver deux relations (différentes) reliant S à C, et en déduire que :

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x) - \cos(x)) \quad \text{et} \quad \mathrm{C} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x)).$$

Méthode

Comment rédiger un changement de variable sur un segment ?

Donnons la rédaction du changement de variable lorsque l'on donne la nouvelle variable en fonction de l'ancienne.

- *Exemple 1.* Calculons l'intégrale $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1}\mathrm{d}t$.

⇀ Précisons que l'intégrale est bien définie puisque $t \mapsto \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$ est continue sur $[0;1]$.

⇀ Posons $u = \psi(t) = \mathrm{e}^t$. ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ avec « $\mathrm{d}u = \psi'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ », « $\frac{\mathrm{d}u}{u} = \mathrm{d}t$ ».

⇀ De plus, lorsque t varie de 0 à 1, u varie de $\psi(0) = 1$ à $\psi(1) = e$. On trouve :

$$\mathrm{I} = \int_{t=0}^{t=1} \frac{e^t - 1}{e^t + 1}\mathrm{d}t = \int_{u=1}^{u=e} \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

On a maintenant un calcul d'une intégrale d'une fraction rationnelle :

$$\mathrm{I} = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2u - (u+1)}{u(u+1)}\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2}{u+1} - \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \left[2\ln(u+1) - \ln(u)\right]_1^{\mathrm{e}} = 2\ln(\mathrm{e}+1) - 2\ln(2) - 1.$$

- *Exemple 2.* Calculons l'intégrale $\mathrm{J} = \int_1^2 e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

⇀ Notons que l'intégrale est bien définie puisque l'application $t \in [1;2] \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est bien continue.

⇀ Posons $u = \psi(t) = \sqrt{t}$. Ce changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;2]$ avec :

$$\text{« } \mathrm{d}u = \psi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \text{ », ou encore « } 2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t \text{ ».}$$

⇀ De plus, lorsque t varie de 1 à 2, u varie de $\sqrt{1} = 1$ à $\sqrt{2}$. Ainsi, en remplaçant $\int_{t=1}^{t=2} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{u=1}^{u=\sqrt{2}} 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$.
Or, on a déjà calculé ce type d'intégrale. Par intégration par parties, on a

$$\int_{u=1}^{u=2} u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \left[u\mathrm{e}^u\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = (\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}.$$

On peut conclure $\mathrm{J} = 2(\sqrt{2}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$.

Exercice 27. ✧ ✎ Calculer $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln(t)}}$ en posant $u = \ln(t)$. *5min*

Exercice 28. ✦✦ On pose $\quad \mathrm{I} = \int_0^{\pi/4} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \mathrm{J} = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right)\mathrm{d}t$. *20min*

1. Justifier que I et J sont bien définies.
2. Montrer que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
3. En déduire la valeur de $\mathrm{A} = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(t))\mathrm{d}t$.

Les exercices

Exercice 29. ✦ Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. *10min*
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(c) = \mathrm{e}^{-c}$.

Exercice 30. ✦✦ ✎ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$. *30min*

1. Préciser I_0 et I_1.
2. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_{n+1} = (2n+2)\big(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1}\big)$.

   b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{I}_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 31. ✦✦ Soit la fonction $\mathrm{F} : x \in \mathbb{R}_*^+ \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{t+x}\,\mathrm{d}t$. *30min*

1. Montrer que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$, fixé. Montrer que $\quad \mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{\mathrm{e}^u}{u}\mathrm{d}u$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, l'égalité : $\quad \mathrm{F}'(x) + \mathrm{F}(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{x+1} - \dfrac{1}{x}$.
4. Étudier la limite de F en $+\infty$.

Exercice 32. ✦✦✦ ✎ **Intégrale à paramètre** *d'après oral ESCP 2014* *1h*
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(x) = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   Puis, montrer que φ est à valeurs strictement positives, et que φ est paire.
2. Étudier la monotonie de φ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que : $\forall\, x,\ x_0 \in \mathbb{R}$, $\quad \left|\varphi(x) - \varphi(x_0)\right| \leqslant \left|x^2 - x_0^2\right| \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln(t)\mathrm{d}t$. En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que φ est dérivable en 0 , et préciser la valeur de $\varphi'(0)$.
5. a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En effectuant le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale, montrer que

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_x^{x\mathrm{e}} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u - \frac{\ln(x)}{x}\int_x^{x\mathrm{e}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

   b) Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 33. ✦✦✦ **Produit de convolution** *45min*
Pour toutes fonctions continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit la fonction $f * g$ via

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que $f * g = g * f$.
2. a) Expliciter $\exp * \exp$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose pour tout réel t, $f_n(t) = \begin{cases} t^n & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ puis pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{H}_{n,m} = f_n * f_m$.

   b) Justifier que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_{n,m} = \dfrac{m}{n+1}\mathrm{H}_{n+1,m-1}$.

   c) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^2$, on a $\mathrm{H}_{n,m} = \dfrac{m!n!}{(m+n)!}\mathrm{H}_{n+m,0}$.

   Explicitez pour tout $n, m \in \mathbb{N}^2$, $\mathrm{H}_{n,m}$.

Exercice 34. ✦✦✦ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par *Questions sans préparation HEC* *25min*

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\int_0^{\pi/4}\tan^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. **a)** Calculer $u_{n+2}+u_n$.

b) En déduire la limite de (u_n) ainsi qu'un équivalent de (u_n) lorsque n tend vers plus l'infini.

Terminons par une méthode à bien savoir maitriser : la comparaison série-intégrale.

Exercice 35. ✦ ✎ **Équivalent des sommes partielles d'une série divergente** *30min*

L'objectif est de prouver la divergence de la série $\sum_{k\geqslant 3}\frac{1}{k\ln k}$ et de déterminer un équivalent des sommes partielles :

$$\mathrm{S}_n=\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k\ln k}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{1}{t\ln t}$.

2. **a)** Montrer que pour tout $k\geqslant 2$: $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)}\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}\leqslant\frac{1}{k\ln k}$.

b) En déduire, pour tout $k\geqslant 3$, $\displaystyle\int_3^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}\leqslant\int_3^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}\leqslant \mathrm{S}_n\leqslant\int_2^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$.

3. Calculer, pour tous a,b réels strictement supérieurs à 1 : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. **a)** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k\ln k}$ diverge.

b) Utiliser la question 2.(b) pour trouver un équivalent de S_n.

Sommes de Riemann

Méthode

Comment reconnaître une somme de Riemann ?

En pratique, on choisit $a=0$, $b=1$. Le théorème devient pour une fonction f continue sur $[0;1]$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par exemple, pour $\alpha\in\mathbb{R}^+$, on considère la fonction continue $t\in[0;1]\mapsto t^\alpha$. Par suite,

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{n-1}k^\alpha=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 t^\alpha\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1=\frac{1}{\alpha+1}.$$

Exercice 36. ✦✦ Déterminer l'existence et la valeur de la limite des suites dont les termes généraux sont :

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\quad\left(n\in\mathbb{N}^*\right);$$

$$v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}\quad\left(n\in\mathbb{N}^*\right);\quad w_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}\quad\left(n\in\mathbb{N}^*\right).$$

25min

Exercice 37. ✦✦✦ Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+n+k^2}$. *30min*

Méthode

Comment rédiger une comparaison à une intégrale de Riemann ?

Exemple 1.

Justifions que l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\ln(t)}$ est convergente.

— La fonction $t \in [e;+\infty[\mapsto \dfrac{1}{t^2\ln(t)}$ est l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas, elle est donc continue. Nous sommes dans le cas d'une intégrale généralisée en $+\infty$.

— Pour tout $t \in [e;+\infty[$, $\dfrac{1}{t^2\ln(t)} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

— Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^2\ln(t)}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont positives.

— L'intégrale généralisée, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, est une intégrale de Riemann convergente (car $2 > 1$).

Par application du critère de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\ln(t)}$ est convergente.

Exemple 2.

Justifions que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2t}-1}{t^2}\mathrm{d}t$ est divergente.

— La fonction $t \in]0;1[\mapsto \dfrac{e^{-2t}-1}{t^2}$ est continue. Nous sommes dans le cas d'une intégrale généralisée en 0.

— Par application des équivalents usuels : $e^{-2t}-1 \underset{0}{\sim} -2t$, puis, $\dfrac{e^{-2t}-1}{t^2} \underset{0}{\sim} -\dfrac{2}{t}$.

— Les deux fonctions considérées sont de signe constant (négatif) au voisinage de 0.

— L'intégrale généralisée en 0, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$, est une intégrale de Riemann divergente (car $1 \leqslant 1$).

Par application du critère d'équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-2t}-1}{t^2}\mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 38. ✦ On pose pour tout entier naturel n non nul, *40min*

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre I_n.

2. On pose pour tout réel $\mathrm{A} > 0$ et tout entier naturel n non nul :

$$\mathrm{I}_n(\mathrm{A}) = \int_0^{\mathrm{A}} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Par une intégration par parties, montrer $\mathrm{I}_n(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{A}}{\left(1+\mathrm{A}^3\right)^n} + 3n\left(\mathrm{I}_n(\mathrm{A}) - \mathrm{I}_{n+1}(\mathrm{A})\right)$.

3. **a)** Montrer, pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3n-1}$.

b) On admet $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x = 0$.
En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

4. **a)** Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $\mathrm{I}_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\mathrm{I}_n$.

b) En déduire, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$$

5. On admet $\mathrm{I}_1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Écrire un script Python qui prend en argument un entier n supérieur à 2 et calcule puis affiche la valeur de I_n.

Exercice 39. ✦✦ ✎ Intégrale à paramètre — 30min

Partie I

1. Montrer que, pour tout x réel, $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe.

2. Montrer que $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Partie II

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

2. Montrer que pour tout $(t, x, h) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left|\sin(t(x+h)) - \sin(tx) - th\cos(tx)\right| \leqslant \frac{t^2h^2}{2}.$$

3. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{F}'(x) = \mathrm{G}(x)$.

4. En déduire F.

Exercice 40. ✦✦✦ Intégrales de Dirichlet et de Borwein — 50min

On pose
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I converge à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$\int_0^{\pi/2} f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)u\big)}{\sin(u)}\,\mathrm{d}u$. Vérifier que $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = 0$. En déduire I_n.

4. Soit $f(u) = \frac{1}{u} - \frac{1}{\sin u}$.
Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

5. En appliquant les résultats de la question 2, trouver la valeur de I puis celle de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

6. *Vers une généralisation ?*

a) Écrire une fonction python qui prend en arguments un réel $\mathrm{A} > 0$, une fonction f définie sur $[0;\mathrm{A}]$, un entier naturel n et renvoie la n-ième somme de Riemann associée à f sur $[0;\mathrm{A}]$.

b) Écrire une fonction Python qui prend en arguments un entier $n \geqslant 1$, un réel x et renvoie le nombre

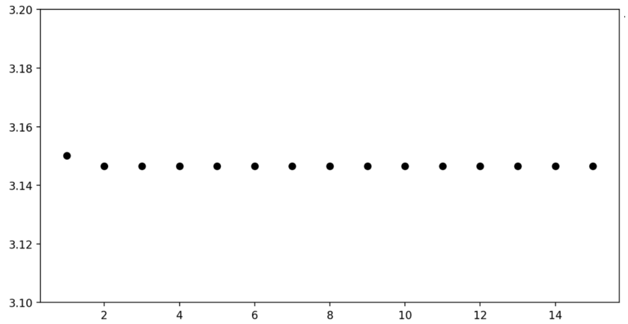
$$f_n(x) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\big(x/(2k-1)\big)}{x/(2k-1)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

c) En déduire une fonction Python **borwein** qui prend en argument A, un entier n et approxime l'intégrale convergente

$$\int_{-\mathrm{A}}^{+\mathrm{A}} \frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin(x/3)}{x/3}\cdots\frac{\sin\big(x/(2n-1)\big)}{x/(2n-1)}\,\mathrm{d}x$$

d) Commenter les simulations suivantes qui renvoie les résultats de **borwein(n,100)** pour différentes valeurs de n.

```python
nmax=15
L=np.zeros(nmax)
for n in range(1,nmax+1):
    A=500
    L[n-1]=borwein(n,A)
plt.ylim(3.1,3.2)
plt.plot(np.arange(1,nmax+1),L,'ko')
plt.show()
```




```python
>>> L
array([3.15013643, 3.14659287, 3.14659269, 3.14659265, 3.14659265,
       3.14659265, 3.14659265, 3.14659265, 3.14659262, 3.14659236,
       3.14659178, 3.14659091, 3.14658979, 3.14658851, 3.14658711])
```

6 Convexité

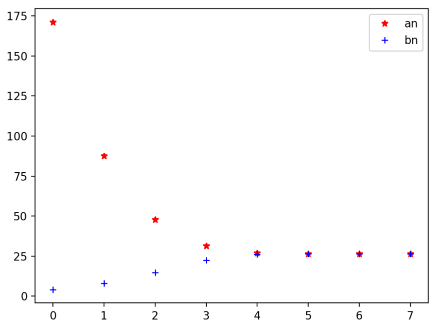
Exercice 41. ✦ **Une inégalité de convexité** *20min*

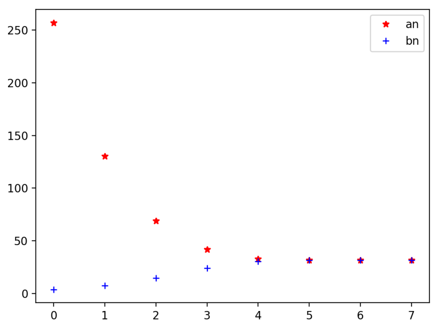
1. Étudier la convexité de $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur $]1;+\infty[$.
2. En déduire pour tous $a, b \in]1;+\infty[$, $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\cdot\ln(b)}$.

Exercice 42. ✦✦✦ Soient a, $b \in \mathbb{R}_*^+$ et $t_1, t_2 \in [0,1]$ tels que : $t_1 + t_2 = 1$. On appelle : *1h*

- *moyenne harmonique* pondérée (par (t_1, t_2)) de a et b, la valeur m_H définie par
$$\frac{1}{m_\mathrm{H}} = t_1 \cdot \frac{1}{a} + t_2 \cdot \frac{1}{b}.$$
- *moyenne géométrique* pondérée de a et b, la valeur m_G définie par
$$\ln m_\mathrm{G} = t_1 \cdot \ln a + t_2 \cdot \ln b.$$
- *moyenne arithmétique* pondérée de a et b, la valeur m_A définie par
$$m_\mathrm{A} = t_1 a + t_2 b.$$

1. En vous servant de la définition de la concavité de la fonction logarithme, montrer que $m_\mathrm{H} \leqslant m_\mathrm{G} \leqslant m_\mathrm{A}$.
2. On définit les suites (a_n), (b_n) par
$$a_0, b_0 \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \\ \dfrac{1}{b_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}\right). \end{cases}$$
Proposer un programme Python qui prend au hasard a_0 dans $[0;1]$, b_0 dans $[0;300]$ et affiche les 8 premiers termes des suites (a_n), (b_n) construites à partir des deux réels a_0, b_0.
3. Voici quelques tests :





Que peut-on conjecturer sur les suites (a_n), (b_n) ?

4. Étudier les variations de (a_n), (b_n). En déduire que ces deux suites convergent vers une limite commune ℓ. En calculant $a_n b_n$, donnez une relation liant ℓ et $a_0 b_0$.

5. a) Montrez que $a_{n+1} - \ell = \frac{1}{2}\frac{(a_n-\ell)^2}{a_n}$.
   Déduisez un résultat analogue pour $(a_{n+1} + \ell)$.

   b) Calculez $\dfrac{a_n - \ell}{a_n + \ell}$ en fonction de n. Déduisez un équivalent de $(a_n - \ell)$ quand $n \to +\infty$.

7 Problèmes

Exercice 43. ✦✦✦ **Autour de la constante d'Euler** *Sujet EMLyon 2002* *1h30*

On note, pour tout entier $p \geqslant 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad a_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = u_1 + \ldots + u_n.$$

PARTIE I : Étude de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$

1. Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et converge vers un réel, noté γ, tel que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1. a) Établir, pour tout réel x : $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$.

   b) En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^t \quad \text{et} \quad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$

$$\text{puis : } \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

2. a) Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x de $[0;1]$:

$$(1-x)^n + nx - 1 \geqslant 0$$

   b) En utilisant 1.b. et 2.a., montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}$$

3. a) On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{I}_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t$$

   Justifier l'existence de I_n.

   b) Établir que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

4. a) Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = n\left(a_n + \ln(n+1)\right).$$

   b) On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{J}_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1 - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t$$

   Justifier l'existence de J_n, et montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{J}_n = a_n + \ln(n+1)$$

5. On note :

$$\mathrm{U} = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{V} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

   a) Justifier l'existence de U et de V.

   b) Démontrer :

$$\gamma = \mathrm{U} - \mathrm{V}.$$

Exercice 44. ✦✦ Les restes ... 2h

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite réelle. Lorsque la série de terme général u_n est convergente, on définit le reste de la série d'ordre n par

$$\mathrm{R}_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si, à nouveau, la série de terme général $\mathrm{R}_{1,n}$ est convergente, on dit que la série $\sum u_n$ est doublement convergente et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{R}_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{R}_{1,k}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, la notion de double convergence.

1. *Exemple 1.*

   Dans cette question uniquement, on suppose que $u_0 = 0$ et : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = \dfrac{1}{(k+1)k}.$

   Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{R}_{1,n}$.

   Indication. On pourra d'abord simplifier $\sum\limits_{k=n+1}^{\mathrm{N}} u_k$.

   Est-ce que la série $\sum u_k$ est doublement convergente ?

2. *Exemple 2.*

   Reprendre la question précédente avec la suite u définie par $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \dfrac{1}{2^k}.$

3. *Exemple 3.*

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$. Dans cette question, on s'intéresse au cas où : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = \dfrac{1}{k^\alpha}.$

   a) Rappeler la condition nécessaire et suffisante de la convergence de la série $\sum u_k$.

   b) Préciser les variations de $t \mapsto 1/t^\alpha$. Prouver que pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$

   Puis, pour tout entier $k \geqslant 2$,
$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

   c) Soit $\mathrm{N} > n$, montrer que

$$\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

   Puis,
$$\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

   d) En déduire que

$$\mathrm{R}_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

   e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante la série $\sum u_k$ est doublement convergente.

   f) Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $\mathrm{R}_{p-1,n}$ converge, on dit que la série est p-convergente et on note $(\mathrm{R}_{p,n})_n$ la suite des restes :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{R}_{p-1,k}.$$

   Conjecturer la valeur du plus grand entier p pour lequel $\sum u_k$ est p-convergente.
   Prouver votre conjecture.

4. *Exemple 4.*

Dans cette question, on s'intéresse à la suite u définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

a) Justifier que

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Prouver que

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} u_k = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{\mathrm{N}+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

c) En déduire la convergence de la série et l'égalité $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

d) En adaptant les calculs précédents, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{R}_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

e) Généraliser le résultat précédent en prouvant que pour tous $p, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{R}_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t.$$

CHAPITRE 2

Algèbre

1 Systèmes linéaires et matrices

1.1 Le pivot de Gauss

Méthode

Calcul du noyau d'une matrice dont les coefficients sont explicites.

Calculons le noyau de la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ à l'aide d'un pivot de Gauss. Soit $X = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z & t \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A) \iff AX = 0_{4,1} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 4t & = & 0 \\ 3x & & & + & 3z & + & 5t & = & 0 \\ 4x & + & 2y & + & & & 2t & = & 0 \\ 5x & + & 3y & - & z & & & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - 5L_1}}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff}}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 4t & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & + & t & = & 0 \\ & & 2y & - & 4z & - & 10t & = & 0 \\ & & 4y & - & 8z & - & 20t & = & 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2}}{\overset{L_4 = 2L_3}{\iff}} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 4t & = & 0 \\ & & y & - & 2z & - & t & = & 0 \\ & & y & - & 2z & - & 5t & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow (L_3 - L_2)/4}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & + & z & + & 4t & = & 0 \\ & & y & - & 2z & - & t & = & 0 \\ & & & & & - & t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rclcl} x & = & \frac{1}{3}(-y-z) & = & -z \\ y & = & 2z & & \\ t & = & 0 & & \end{array}\right. .$$

Ainsi,
$$X \in \mathrm{Ker}(A) \iff X = \begin{bmatrix} -z \\ 2z \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = z \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En conclusion, le noyau est
$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ z \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Exercice 45. ✦ Calculer les noyaux des matrices suivantes : *5min pour A,* *20min pour B.*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_\alpha = \begin{bmatrix} 2-\alpha & 3 & 1 \\ 5 & 6+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & -2-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Méthode

Comment calculer l'inverse d'une matrice ?

D'après la proposition précédente, pour trouver l'inverse, il suffit de résoudre, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'équation $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Or, la résolution est efficace par la méthode du pivot de Gauss.

Méthode

Exemple. Inversons la matrice :
$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&3&-2\\1&2&0\end{bmatrix}.$$

Soient $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$AX=Y \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-x_3&=&y_1\\ x_1+3x_2-2x_3&=&y_2\\ x_1+2x_2&=&y_3\end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-x_3&=&y_1\\ x_1+3x_2-2x_3&=&y_2\\ x_3&=&y_3-y_1\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-x_3&=&y_1\\ x_2-x_3&=&y_2-y_1\\ x_3&=&y_3-y_1\end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2+L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2-x_3&=&y_1\\ x_2&=&y_2-2y_1+y_3\\ x_3&=&y_3-y_1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x_1&=&4y_1-2y_2-y_3\\ x_2&=&-2y_1+y_2+y_3\\ x_3&=&-y_1+y_3\end{array}\right. \iff X=\begin{bmatrix}4&-2&-1\\-2&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}Y.$$

Donc A est inversible d'inverse
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4&-2&-1\\-2&1&1\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

Exercice 46. ✦ Calculer, quand il existe, l'inverse des matrices suivantes : *10min*

$$D=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{bmatrix} \quad\text{et}\quad E=\begin{bmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\0&1&2&1\\1&-2&-3&-2\end{bmatrix}$$

Méthode

Comment calculer le rang d'une matrice par un pivot de Gauss ?

Par exemple, calculons le rang de la matrice $A=\begin{bmatrix}1&3&2\\1&4&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$.

Il suffit de reprendre la méthode pour calculer le rang d'une famille de vecteurs. Ici, on cherche le rang de la famille des vecteurs colonnes
$$C_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\qquad C_2=\begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad C_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Cherchons les relations linéaires entre ces vecteurs. Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1C_1+\lambda_2C_2+\lambda_3C_3=0$. On trouve le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3&=&0\\ \lambda_1+4\lambda_2+\lambda_3&=&0\\ -\lambda_2+\lambda_3&=&0\end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3&=&0\\ \lambda_2-\lambda_3&=&0\\ -\lambda_2+\lambda_3&=&0\end{array}\right. \underset{L_3=-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1&=&-5\lambda_3\\ \lambda_2&=&\lambda_3.\end{array}\right.$$

En choisissant par exemple $\lambda_3=1$, on trouve $\lambda_2=1$ et $\lambda_1=-5$, ainsi $-5C_1+C_2+C_3=0$. Le vecteur C_1 peut s'écrire comme combinaison linéaire de C_2 et C_3, donc $\mathrm{Vect}(C_1,C_2,C_3)=\mathrm{Vect}(C_2,C_3)$.
Comme C_2 et C_3 sont clairement linéairement indépendants, on a prouvé que $\mathrm{rg}(A)=2$.

1.2 Inversibilité et puissances d'une matrice

Méthode

Comment justifier qu'une matrice est inversible ?

On résume :

- *Si on demande l'inverse.*

  1. Pour une matrice carrée simple dont les coefficients sont explicites, on peut faire un **pivot de Gauss**.
  2. Si on a une équation polynomiale simple sur A, isoler le terme I_n de A.
     Plus généralement, on peut chercher une matrice carrée B telle que $AB = I_n (= BA)$;
  3. Si la matrice est diagonale, on vérifie que les coefficients diagonaux sont non nuls et l'inverse est la matrice diagonale obtenue an inversant tous les coefficients diagonaux.
  4. Dans le cas d'une matrice de taille 2, on a une formule explicite avec le déterminant.

- *Si on ne demande pas l'inverse.*

  5. Vérifier que le noyau de la matrice ne contient que la matrice colonne nulle.
  6. Vérifier que le rang de la matrice est maximal. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.
  7. Se souvenir qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont non nuls.
  8. Pour les matrices de taille 2, utiliser le déterminant.

Exercice 47. ✦ Calculer, s'il existe, l'inverse des matrices suivantes : *15min*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 48. ✦ **Vrai ou faux ?** *5min*

1. La somme de deux matrices inversibles est inversible. ✓ ×
2. Toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles. ✓ ×

Exercice 49. ✦ ✎ *Extrait oraux ESCP* *25min*

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que la matrice suivante soit une matrice de projecteur :

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   On suppose désormais que α prend cette valeur et on note J la matrice associée.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = I_3 + (-1 + e^x)J$ et $G(x) = I_3 - (1 + e^x)J$. Calculer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x)F(y)$.
   La matrice $F(x)$ est-elle inversible ? Préciser l'inverse.
   La matrice $G(x)$ est-elle inversible ?

Méthode

Calcul des puissances via la formule du binôme de Newton.

Posons :
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3 + N \quad \text{avec} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les puissances de N sont faciles à calculer

Méthode

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \forall\, k \geqslant 3, \quad N^k = N^{k-3}N^3 = 0_3.$$

Comme $2I_3$ et N commutent, la formule du binôme s'applique : pour $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A^p &= (2I_3+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k (2I_3)^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{p}{k} 2^{p-k} N^k = 2^p \binom{p}{0} I_3 + 2^{p-1}\binom{p}{1} N + 2^{p-2}\binom{p}{2} N^2. \end{aligned}$$

On en déduit la formule explicite : $$A^p = 2^{p-2}\begin{bmatrix} 4 & 2p & \frac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2p \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 50. ✦ ✎ On pose $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

20min

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
2. a) Déterminer deux réels α et β de sorte que $A = \alpha P + \beta Q$.
   b) En déduire une expression de A^p valable pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Méthode

Comment calculer les puissances par « diagonalisation » ?

Limitons nous à un exemple. Posons $$A = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -30 & 4 & 6 \\ -36 & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

On vérifie par calcul que

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Par récurrence, on prouve que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = \underbrace{(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{p \text{ fois}} = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I_n}DP^{-1}\cdots PDP^{-1} = PD^pP^{-1}.$$

Un dernier calcul donne pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$A^p = PD^pP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^p & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0^p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -22+4(-2)^p & 4 & 4-(-2)^p \\ -44-4(-2)^p & 8 & 8+(-2)^p \end{bmatrix}.$$

Remarque. Cette méthode est un cas simple de raisonnements plus globaux de la théorie de la réduction (au programme de deuxième année). Nous verrons que la décomposition $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale est possible « pour la plupart » des matrices.

Exercice 51. ✦✦ On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

En examinant les instructions en Python suivantes, calculer les puissances de A. *20min*

Console

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array(([1, -6, 0], [2, -6, 2], [2, -4, 3]))
>>> P = np.array(([6, 2, -1], [2, 1, 0], [-1, 0, 1]))
>>> P_inv = np.linalg.inv(P)  # calcule l'inverse de la matrice P
>>> P_inv
array([[ 1., -2.,  1.],
       [-2.,  5., -2.],
       [ 1., -2.,  2.]])
>>> P_inv @ A @ P       # La commande @ permet le produit matriciel
array([[-1.00000000e+00,  0.00000000e+00,  0.00000000e+00],
       [ 6.66133815e-16, -2.00000000e+00,  0.00000000e+00],
       [ 4.44089210e-16,  0.00000000e+00,  1.00000000e+00]])
```

2 Polynômes

Exercice 52. ✦ Localisation des racines d'un polynôme. *20min*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $|a_0| + \cdots + |a_{n-1}| \leqslant |a_n|$.

1. Justifier que les racines réelles du polynôme d'expression

$$\mathrm{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

sont toutes comprises dans $[-1; 1]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que le polynôme Q défini par $\mathrm{Q}(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x + 1$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{Z}$.

Méthode

Comment prouver qu'un polynôme est nul ?

Il suffit de justifier l'un des énoncés suivants :

i) Tous les coefficients du polynôme sont nuls ;

ii) Le polynôme admet une infinité de racines ;

iii) Le polynôme admet strictement plus de racines (comptées avec multiplicité) que son degré.

Par exemple, prouvons que le seul polynôme P vérifiant pour tout réel x, $\mathrm{P}(x) + \mathrm{P}(x+1) = 0$ est le polynôme nul. On a $\mathrm{P}(0)\mathrm{P}(1) = -\mathrm{P}(0)^2 \leqslant 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (P est continue car polynomial), il existe, $\alpha \in [0; 1]$ une racine de P. On constate que d'après la relation, $\alpha + 1$ est aussi racine. Par récurrence immédiate, pour tout entier n, $\alpha + n$ est racine. Le polynôme P admet une infinité de racines, il est donc nul.

Noter que pour prouver une égalité entre polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$, on peut se ramener au cas précédent en montrant que $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ est le polynôme nul.

Exercice 53. ✦✦ ✎ Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts. *30min*

1. a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{L}_k \in \mathbb{R}_n[x]$ (où $0 \leqslant k \leqslant n$) tel que :

$$\forall i \neq k, \qquad \mathrm{L}_k(x_i) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_k(x_k) = 1$$

b) Vérifier que L_k est de degré n.

c) Montrer que la famille $(\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. Soit $y_0, \ldots, y_n$ des réels quelconques. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad \mathrm{P}(x_i) = y_i$$

Le polynôme P est appelé le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Exercice 54. ✦✦ **Étude des polynômes de Bernoulli** ⏲ *40min*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'équation d'inconnue $P \in \mathbb{R}[x]$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = nx^{n-1}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit P une solution de $(\bullet)_n$. Démontrer que $\deg(P) = n$.
2. Soient P_1, P_2 deux solutions de $(\bullet)_n$. Justifier que $P_1 - P_2$ est un polynôme constant.
3. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Vérifier que si P est solution de $(\bullet)_n$ alors $\frac{1}{n}P'$ est solution de $(\bullet)_{n-1}$.
4. On définit la suite de polynôme $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par la récurrence $B_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \quad \text{et} \quad B_n'(x) = n\,B_{n-1}(x).$$

   a) Pourquoi la suite $(B_n)_n$ est bien définie. Préciser B_1, B_2 et B_3.
   b) Calculer $\int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t$ puis $\int_1^2 B_n(t)\mathrm{d}t$.
   c) Donner $B_n(0)$ et $B_n(1)$.

3 Espaces vectoriels

3.1 Généralités

Méthode

Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, on se contente de vérifier que pour tout scalaire λ et tous vecteurs u, v de F,

$$\lambda \cdot u + v \in F \quad \text{et} \quad F \neq \varnothing.$$

Pour le second point, il suffit d'exhiber un élément de F, le plus simple étant 0_E. En effet, comme F est non-vide, il existe $u \in F$. F est stable par multiplication par un scalaire, donc $0_E = 0 \cdot u \in F$.
Précisons que si $0_E \notin F$, alors F ne peut pas être un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 55. ✦✦ Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels? ⏲ *20min*

$$E_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y\right\}, \quad E_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 2a + c\right\}, \quad E_3 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b = 2\right\},$$
$$E_4 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + c^2 = b\right\}, \quad E_5 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc = 0\right\}, \quad E_6 = \{P \in \mathbb{R}[x], P(0) = 3\},$$
$$E_7 = \{P \in \mathbb{R}[x], P(3) = 0\}, \quad E_8 = \left\{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant K\right\},$$
$$E_9 = \left\{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant K\right\} \text{ où } K \in \mathbb{R} \text{ est fixé}, \quad E_{10} = \{f \in \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}), f \text{ est paire}\}.$$

Méthode

Comment justifier qu'une famille est libre?

Appliquons la définition pour démontrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ où

$$\varepsilon_1 = (2,-1,2), \quad \varepsilon_2 = (0,1,2) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = (0,-1,3).$$

Soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que $\lambda_1 \cdot \varepsilon_1 + \lambda_2 \cdot \varepsilon_2 + \lambda_3 \cdot \varepsilon_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. C'est équivalent à

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \cdot (2,-1,2) + \lambda_2 \cdot (0,1,2) + \lambda_3 \cdot (0,-1,3) &= (0,0,0) \\
\iff (2\lambda_1, -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) &= (0,0,0)
\end{aligned}$$

Méthode

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 &=& 0 \\ -\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 &=& 0 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& 0 \\ \lambda_2-\lambda_3 &=& 0 \\ 2\lambda_2+3\lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. .$$

On en déduit que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. La famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est libre.

Exercice 56. ✦ ✎ **Familles libres - exemples** *35min*

1. *Dans* $\mathbb{R}^n$.
   Montrer que la famille $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ définie par $\varepsilon_1=(3,-1,1,0)$, $\varepsilon_2=(1,1,-1,0)$, $\varepsilon_3=(-1,2,1,0)$ et $\varepsilon_4=(1,1,1,1)$ est libre.
2. *Dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $\quad C=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\quad$ et $\quad D=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$.
   a) Justifier que la famille (A,B,C,D) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b) Que dire de la liberté de la famille (A,B,C,D,I_2) ?
3. ✦✦ *Dans les espaces fonctionnels.*
   a) Étudier la liberté de la famille formée de $f_1=\ln$, $f_2=\exp$ et $f_3=\mathrm{id}_{\mathbb{R}_*^+}$ dans $\mathscr{A}(\mathbb{R}_*^+,\mathbb{R})$.
   b) Étudier la liberté de la famille $\mathscr{F}=\left(\tan,\tan^2,\ldots,\ \tan^n\right)$ dans l'espace vectoriel E des fonctions définies sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

Exercice 57. ✦ **Avec un peu d'algèbre linéaire...** *15min*

On définit les fonctions f, g et h par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\cos(x),\quad g(x)=\sin\left(x^2\right)\quad \text{et}\quad h(x)=\cos\left(x^3\right).$$

1. Donner les développements limités de f,g et h en 0 à l'ordre 4.
2. En déduire que la famille (f,g,h) est une famille libre dans l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Méthode

Comment justifier que deux sous-espaces sont supplémentaires ?

Pour prouver que F et G sont supplémentaires, il faut justifier que pour tout $w\in E$:

- Il existe un couple (u,v) tel que $w=u+v$ avec $u\in F$ et $v\in G$.
- Ce couple est unique.

Considérons $E=\mathbb{R}[X]$ et posons

$$F=\{P\in\mathbb{R}[X]\,|\,P \text{ est un polynôme pair}\}\quad \text{et}\quad G=\{P\in\mathbb{R}[X]\,|\,P \text{ est un polynôme impair}\}.$$

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$.

Analyse (recherche des conditions nécessaires).
On suppose que $P\in F+G$, il existe donc P_i et P_p des polynômes respectivement impair et pair tels que $P(X)=P_i(X)+P_p(X)$. On a aussi :

$$P(-X)=P_i(-X)+P_p(-X)=-P_i(X)+P_p(X).$$

Il vient : $$P_i(X)=\frac{P(X)-P(-X)}{2}\quad \text{et}\quad P_p(X)=\frac{P(X)+P(-X)}{2}.$$

Ainsi, les seuls candidats pour P_i et P_p sont ceux donnés par ces formules.

Synthèse (recherche des conditions suffisantes).

Posons $$P_i(X)=\frac{P(X)-P(-X)}{2}\quad \text{et}\quad P_p(X)=\frac{P(X)+P(-X)}{2}.$$

On vérifie :

Méthode

- P_p est un polynôme pair car $P_p(-X) = \dfrac{P(-X)+P(X)}{2} = P_p(X)$. De même, on montre que P_i est un polynôme impair ;
- $P_p(X) + P_i(X) = \dfrac{P(X)-P(-X)}{2} + \dfrac{P(X)+P(-X)}{2} = P(X)$.

Conclusion.
Tout polynôme s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair. Cela justifie l'égalité $F \oplus G = \mathbb{R}[X]$.

Remarquons que l'analyse justifie l'unicité du couple tandis que la synthèse justifie son existence.

Exercice 58. ✦ ✎ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques de taille n. Justifier que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont supplémentaires.
Rappels : A est symétrique si ${}^t A = A$, antisymétrique si ${}^t A = -A$. *20min*

3.2 Précision en dimension finie

Méthode

Comment montrer qu'une famille est une base ?

Il suffit de montrer que :

- La famille est libre ;
- Elle admet exactement dim(E) éléments.

→ C'est ainsi que l'on montre que la famille suivante est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\varepsilon_1 = (2,3,4), \quad \varepsilon_2 = (0,3,1) \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = (0,0,4).$$

En effet, cette famille est libre : soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels tels que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On trouve un système triangulaire :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 & = & 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 & = & 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Comme la famille contient $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs, il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}^3$.
→ De même, la famille suivante est une base de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$P_1(X) = 1, \quad P_2(X) = X+3, \quad P_3(X) = X^2+4 \quad \text{et} \quad P_4(X) = 2X^3 + X + 1.$$

En effet, elle est libre (car de degrés échelonnés) et contient $\dim\big(\mathbb{R}_3[X]\big) = 3+1 = 4$ vecteurs.
Plus rarement, on montre qu'une famille est génératrice et qu'elle admet le bon nombre d'éléments.

Comment prouver une égalité entre deux sous-espaces vectoriels ?

Pour prouver l'égalité entre sous-espaces vectoriels F = G, on prouve :

- Une inclusion, par exemple $F \subset G$;
- L'égalité des dimensions.

Dans $\mathbb{R}^2$, posons $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (2,-1)$ et considérons $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.
On a bien sûr l'inclusion $\mathrm{Vect}(u_1,u_2) \subset \mathbb{R}^2$. De plus, les vecteurs u_1 et u_2 sont non-colinéaires, donc $\dim\big(\mathrm{Vect}(u_1,u_2)\big) = 2$. Finalement, $\mathrm{Vect}(u_1,u_2) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 59. ✦ Donner une base des espaces vectoriels suivants, préciser la dimension. *20min*

1. $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a+b+c+d=0 \right\}$.
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(4)=0\}$.
3. $E_3 = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ est diagonale}\}$.
4. E_4, le sev des matrices symétriques de taille n.

4 Applications linéaires

Méthode

Comment déterminer une base du noyau ?

Considérons l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3x-y, -2x+2y-2z, -x-y+2z) \end{array} \right.$

Soit $X = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. En procédant par pivot de Gauss, on établit les équivalences suivantes :

$$X \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(X) = (0,0,0) \iff (3a-b, -2a+2b-2c, -a-b+2c) = (0,0,0)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3a-b &=& 0 \\ -2a+2b-2c &=& 0 \\ -a-b+2c &=& 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow -L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2/2}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} a+b-2c &=& 0 \\ -a+b-c &=& 0 \\ 3a-b &=& 0 \end{array} \right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} a+b-2c &=& 0 \\ 2b-3c &=& 0 \\ -4b+6c &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 = -2L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} a+b-2c &=& 0 \\ 2b-3c &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& -b+2c = \frac{1}{2}c \\ b &=& \frac{3}{2}c \end{array} \right. \iff (a,b,c) = \frac{1}{2}c\,(1,3,2)$$

$$\iff X \in \mathrm{Vect}\big((1,3,2)\big).$$

On peut vérifier notre calcul en remarquant que $f\big((1,3,2)\big) = 0_{\mathbb{R}^3}$. En conclusion :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,3,2)\big).$$

La famille contenant le vecteur $(1,3,2)$ est une base du noyau.

Exercice 60. ✧ Soient $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ deux applications linéaires. Établir l'équivalence entre : *10min*

i) $\psi \circ \varphi = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$; ii) $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\psi)$.

Exercice 61. ✦ ✎ **Noyaux et images itérés** *10min*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $\mathrm{Ker}\big(f^k\big) \subset \mathrm{Ker}\big(f^{k+1}\big)$ et $\mathrm{Im}\big(f^{k+1}\big) \subset \mathrm{Im}\big(f^k\big)$.

Exercice 62. ✦✦ Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. *25min*

1. Préciser $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.
3. Vérifier que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$.
4. Conclure que $(\mathrm{Ker}\, f) \cap (\mathrm{Im}\, g) = \{0_E\}$.

Méthode

Comment prouver qu'une application p est un projecteur ?

D'après la caractérisation précédente, il suffit de justifier que p est linéaire *et* que $p^2 = p$.

- *Exemple 1.*

→ Soit $p : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\dfrac{2x+2y}{3}, \dfrac{x+y}{3} \right) \in \mathbb{R}^2$. Vérifions tout d'abord que p est un projecteur.

Méthode

p est linéaire et $p^2\big((x,y)\big) = \left(\dfrac{2\frac{2x+2y}{3}+2\frac{x+y}{3}}{3}, \dfrac{\frac{2x+2y}{3}+\frac{x+y}{3}}{3}\right) = \left(\dfrac{2x+2y}{3}, \dfrac{x+y}{3}\right) = p\big((x,y)\big)$.

→ Calculons le noyau de p :

$$(x,y)\in\mathrm{Ker}(p) \iff \begin{cases} \dfrac{2x+2y}{3} &= 0 \\ \dfrac{x+y}{3} &= 0 \end{cases} \iff \{\ x+y = 0 \iff (x,y)\in\mathrm{Vect}\big((1,-1)\big).$$

→ Calculons l'image de p : soit $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$,

$$v\in\mathrm{Im}(p) \iff \exists x,y\in\mathbb{R},\quad v = p\big((x,y)\big) \iff \exists x,y\in\mathbb{R}, \begin{cases} \dfrac{2x+2y}{3} &= a \\ \dfrac{x+y}{3} &= b \end{cases}$$

$$\iff \exists x,y\in\mathbb{R}, \begin{cases} x+y &= \frac{3}{2}a \\ x+y &= 3b \end{cases} \iff \frac{3}{2}a = 3b \iff v=(2b,b)=b(2,1).$$

Ainsi $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Vect}\big((2,1)\big)$.

→ Finalement, p est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\big((2,1)\big)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big((1,-1)\big)$.

• *Exemple 2. Les projecteurs associés*
Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Montrons que $q=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}-p$ est le projecteur sur G parallèlement à F.
L'application q est linéaire et comme id_{E} et p commutent,

$$q^2 = (\mathrm{id}_{\mathrm{E}}-p)^2 = {\mathrm{id}_{\mathrm{E}}}^2 - 2p\circ\mathrm{id}_{\mathrm{E}} + p^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} - 2p + p = \mathrm{id}_{\mathrm{E}} - p = q.$$

Soit $u\in\mathrm{E}$.
$u\in\mathrm{F}$ si et seulement si $p(u)=u$, c'est-à-dire $q(u)=u-p(u)=u-u=0_{\mathrm{E}}$.
$u\in\mathrm{G}$ si et seulement si $p(u)=0_{\mathrm{E}}$, c'est-à-dire $q(u)=u-p(u)=u$.

Par suite, $\qquad \mathrm{Im}(q)=\mathrm{G} \quad\text{et}\quad \mathrm{Ker}(q)=\mathrm{F}.$

Exercice 63. ✦ Soit p, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : *10min*

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\qquad p(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y-\frac{1}{2}z\ ,\ y\ ,\ -\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z\right).$$

Montrer que p est une projection, et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 64. ✦ Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le vecteur $u=(1,2,-1)$ et les espaces *20min*

$$\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(u) \quad\text{et}\quad \mathrm{G}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z=0\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer l'expression de la projection p sur F parallèlement à G, et celle de la projection q sur G parallèlement à F.

Méthode

Comment calculer le rang d'une application à l'aide du noyau ?

Calculons par exemple le rang de l'application linéaire :

$$\varphi : \mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mapsto \mathrm{P}''\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \quad\text{avec}\quad n\geqslant 2.$$

On constate que le noyau de φ s'identifie à $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]=\{a\mathrm{X}+b \mid a,b\in\mathbb{R}\}$. Ce dernier est de dimension 2. Par la formule du rang, φ est donc de rang $(n+1)-2=n-1$.

Exercice 65. ✦ Soient $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Posons *20min*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AMB. \end{array} \right.$$

1. Vérifier que φ est linéaire.
2. Montrer que φ est bijective et exprimer φ^{-1}.
3. Montrer que $\mathscr{B} = (I_2, A, B, AB)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer la matrice de φ dans $\mathscr{B}$.
Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser ce calcul Python :

Editeur

```python
import numpy as np
A=np.array([[2,1],[5,3]])
print(np.dot(A,A)-5*A+np.eye(2))

B=np.array([[4,1],[7,2]])
print(np.dot(B,B)-6*B+np.eye(2))
```

Console

```
>>> # script executed

[[0. 0.]
 [0. 0.]]
[[0. 0.]
 [0. 0.]]
```

Exercice 66. ✦ Soit E, un ev de dimension finie n. On considère deux endomorphismes f et g de E tels que :

$$f + g = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n.$$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Im} f$ puis qu'il y a égalité. Que peut-on en déduire sur $g \circ f$?
2. En déduire que f et g sont des projecteurs de E. *20min*

Exercice 67. ✦✦ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On suppose que

$$f \circ f = -\mathrm{id}_E.$$

1. f est-elle injective ? surjective ? bijective ? *30min*
2. Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$.
Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$, montrer que $\big(x, f(x)\big)$ est une base de E. Préciser la matrice J de f dans cette base.
3. ✦✦✦ *Généralisation.*
Justifier que dans le cas général d'une dimension n paire, il existe une base $\mathscr{B}$ pour laquelle, on a la matrice par blocs

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} J & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 0_2 & J & \ddots & 0_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & \cdots & J \end{bmatrix}.$$

Exercice 68. ✦✦ Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$c(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad s(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

On considère aussi le sous-espace vectoriel de E, $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin, c, s)$. *25min*

1. Justifier que la famille $\mathscr{B} = (\cos, \sin, c, s)$ est une base de F.
2. Vérifier que F est stable par dérivation, c'est-à-dire, pour tout $f \in F$, $f' \in F$.
On introduit alors l'endomorphisme

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right. .$$

3. Donner M, la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.
4. Préciser M^k où $k \in \mathbb{N}$. *Distinguer* $k = 4p$, $k = 4p+1$, $k = 4p+2$ *et* $k = 4p+3$ *où* $p \in \mathbb{N}$.

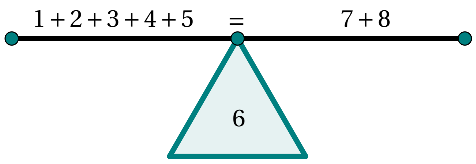
Problème

Exercice 69. ✦ Les nombres balances *2h40*

Un nombre $b \in \mathbb{N}^*$ est dit *nombre balance* s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$1+2+3+\cdots+(b-2)+(b-1)=(b+1)+(b+2)+\cdots+(b+r).$$

Par exemple, $b=6$ est un nombre balance (avec $r=2$).



A. Introduction et simulation

1. Écrire un programme `sommes` qui prend en argument deux entiers b, r et renvoie la somme

$$\mathrm{S}(b,r)=(b+1)+(b+2)+\cdots+(b+r)=\sum_{k=1}^{r}\left(b+k\right).$$

2. Compléter le programme de gauche qui prend en argument un entier naturel n et renvoie tous les nombres balances compris entre 1 et n. *On pourra utiliser le programme précédent et remarquer que si b est un nombre de balance, alors $r \leqslant b$.*
À droite, on teste avec $n=220$, on obtient 3 nombres balances entre 1 et 220.

Editeur

```
def TestBalance(n):
    for b in range( ... ):
        for r in range( ... ):
            if .... :
                print(b,'est un
                    nombre
                    balance avec
                     r=',r)
```

Console

```
>>> TestBalance(220)
6 est un nombre balance avec r= 2
35 est un nombre balance avec r= 14
204 est un nombre balance avec r= 84
```

B. Étude théorique, condition (•)

1. **a)** Soient $r, b \in \mathbb{N}^*$. Donner les expressions de $\mathrm{S}(0, b-1)$ et $\mathrm{S}(b,r)$.
   b) Justifier que b est un nombre balance si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$r^2+(2b+1)r=b(b-1) \qquad (\star).$$

   c) Justifier que le discriminant de l'équation polynomiale de degré 2 (en r) est $\Delta = 8b^2+1$. Puis vérifier qu'il existe une unique solution positive à l'équation $(\star)$ dont on précisera une expression.
2. Justifier que pour tout entier n, n^2 est impair si et seulement si n est impair.
3. À partir des questions précédentes, montrer que b est un nombre balance si et seulement si il existe un entier $a \in \mathbb{N}$ tel que

$$8b^2+1=a^2 \qquad (\bullet)$$

C. Étude de la condition (•)

Considérons l'ensemble : $\mathscr{E}=\left\{(a;b)\in\mathbb{Z}^2 \mid a^2-8b^2=1\right\}.$

1. Vérifier que $(1,0)$ et $(3,1)$ appartiennent à $\mathscr{E}$.
2. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & 1 \\ b_0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 3a_n + 8b_n \\ b_{n+1} & = & 3b_n + a_n. \end{array}\right.$$

   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + \sqrt{8}b_n = (3+\sqrt{8})^n$ et $a_n - \sqrt{8}b_n = (3-\sqrt{8})^n$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_n; b_n) \in \mathscr{E}$.

   c) Calculer a_2 et b_2 pour obtenir un nouveau couple appartenant à $\mathscr{E}$.

3. **a)** À l'aide de la question 2.a, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \dfrac{1}{2\sqrt{8}}\left((3+\sqrt{8})^n - (3-\sqrt{8})^n\right)$.

   b) Justifier que que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{8}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \sqrt{8}^k \left(1 - (-1)^k\right), \quad \text{puis,} \quad b_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1} 3^{n-2i-1} 8^i.$$

4. La formule obtenue à la question précédente n'est pas pratique pour calculer b_n. Donnons une seconde méthode.

   a) En revenant à la définition de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = 6b_{n+1} - b_n$.

   b) En déduire un programme Python qui prend en argument n et renvoie b_n.

5. *Conséquences.* Préciser b_3 et b_4 et comparer avec le test de la première page. Pourquoi peut-on dire qu'il existe une infinité de nombres balances ?

D. Approche matricielle du problème

Pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on pose
$$\mathrm{S}(a,b) = \begin{bmatrix} a & \sqrt{8}\,b \\ \sqrt{8}\,b & a \end{bmatrix}.$$

On définit aussi E, comme l'ensemble des matrices carrées $\mathrm{S}(a,b)$, de déterminant 1. Autrement dit,

$$\mathrm{E} = \left\{ \mathrm{S}(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, \quad \det\left(\mathrm{S}(a,b)\right) = 1 \right\}.$$

1. *Structure de* E.

   a) Démontrer que : $\quad (a,b) \in \mathscr{E} \iff \mathrm{S}(a,b) \in \mathrm{E}$.

   b) Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, justifier que $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$.

   c) Justifier que E est un ensemble stable par produit. C'est-à-dire, si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{E}$ alors $\mathrm{AB} \in \mathrm{E}$.

   d) Justifier que E est un ensemble stable par passage à l'inverse. C'est-à-dire, si $\mathrm{A} \in \mathrm{E}$, alors A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} \in \mathrm{E}$.

2. *Exemple.*

   a) Vérifier que $\mathrm{A}_0 = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 3 \end{bmatrix} \in \mathrm{E}$.

   b) On pose $\mathrm{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Exprimer A_0 à l'aide de I_2 et J.

   c) Posons $\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vérifier que $\mathrm{J} = \mathrm{P}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{P}$.

   d) En déduire les puissances de A_0 à l'aide de P et P^{-1}. Puis, vérifier que ${\mathrm{A}_0}^n = \mathrm{S}(a_n, b_n)$.

   e) Justifier que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n > m$, $b_{n+m} = b_n a_m + b_m a_n$.

3. *Toutes les solutions de l'équation* $(\bullet)$ *!*
   L'objectif de cette dernière question est de montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donne en réalité tous les nombres balances sans aucune exception.

   Soit $(x,y) \in \mathscr{E}$ avec $x, y \geqslant 0$. Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(x,y) = (a_n, b_n)$.

a) Justifier qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$(3+\sqrt{8})^n \leqslant x+\sqrt{8}\,y < (3+\sqrt{8})^{n+1}.$$

En déduire $$a_n+\sqrt{8}\,b_n \leqslant x+\sqrt{8}\,y < \left(3+\sqrt{8}\right)\left(a_n+\sqrt{8}\,b_n\right).$$

b) Justifier, à l'aide de la question 1 que $\mathrm{S}(x,y)\mathrm{S}(a_n,b_n)^{-1} \in \mathrm{E}$. En déduire l'existence de $(x_0,y_0) \in \mathscr{E}$ tel que

$$\mathrm{S}(x,y)=\mathrm{S}(x_0,y_0)\mathrm{S}(a_n,b_n).$$

c) On pose $\mathrm{X}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

1. Pour $a,b \in \mathbb{Z}$, vérifier que $\mathrm{S}(a,b)\mathrm{X}=(a+\sqrt{8}\,b)\mathrm{X}$.
2. En déduire, $$\left(x+\sqrt{8}\,y\right)=\left(x_0+\sqrt{8}\,y_0\right)\left(a_n+\sqrt{8}\,b_n\right), \quad \text{puis,} \quad 1 \leqslant x_0+\sqrt{8}\,y_0 < 3+\sqrt{8}.$$
3. En se rappelant que $(x_0,y_0) \in \mathscr{E}$, montrer que $$x_0-\sqrt{8}\,y_0=\frac{1}{x_0+\sqrt{8}\,y_0}, \quad \text{puis,} \quad -1 \leqslant \sqrt{8}y_0-x_0<0.$$
4. Vérifier que $y_0=0$, $x_0=1$, puis $\mathrm{S}(x,y)=\mathrm{S}(a_n,b_n)$, conclure.

Exercice 70. ✦✦✦ ✎ **Polynôme d'interpolation de Lagrange** *1h*

Pour tous $i,\ j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par $\delta_{i,j}=1$ si $i=j$ et $\delta_{i,j}=0$ sinon. Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $(a_1,\ldots,a_n)$ une famille de nombres réels distincts deux à deux.

1. **a)** Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{L}_i\left(a_j\right)=\delta_{i,j}$.

b) Montrer que la famille $(\mathrm{L}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

2. Soit $\pi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x], \qquad \pi(\mathrm{P})=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(a_i)\,\mathrm{L}_i.$$

a) Montrer que π est un projecteur de $\mathbb{R}[x]$.

b) Déterminer le noyau et l'image de π.

c) On note

$$\mathrm{F}=\left\{\mathrm{Q}\prod_{i=1}^{n}(x-a_i) : \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]\right\}.$$

Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathbb{R}_{n-1}[x]=\mathbb{R}[x]$.

d) Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(\mathrm{L}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

3. Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_{n-1}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{P} \longmapsto (\mathrm{P}(a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\,.$$

a) Montrer que ε est un isomorphisme.

b) Soit $f \in \mathscr{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (une application de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $\mathrm{P}(a_i)=f(a_i)$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Ce polynôme s'appelle le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f aux points $(a_1,\ldots,a_n)$.

4. Soient $a,b \in \mathbb{R}$, tels que $a<b$. Soient $f \in \mathscr{C}^n([a,b],\mathbb{R})$, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ tels que $a \leqslant a_1 < \cdots < a_n \leqslant b$ et P le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à f et aux points $(a_1,\ldots,a_n)$.

a) Soit $x \in [a,b] \setminus \{a_1,\ldots,a_n\}$ et K réel. On définit la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$t \longmapsto f(t)-\mathrm{P}(t)-\mathrm{K}\prod_{i=1}^{n}(t-a_i)\,.$$

Montrer qu'il existe K tel que $\varphi(x)=0$.

b) Montrer que pour cette valeur de K, il existe $\zeta \in [a,b]$ tel que $\varphi^{(n)}(\zeta)=0$

c) Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, on a :

$$\left|f(x)-\mathrm{P}(x)\right| \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{n}|x-a_i|}{n!}\sup_{[a,b]}\left|f^{(n)}\right|.$$

CHAPITRE 3

Probabilité

Exercice 71. ✦✦ **Rang du premier Pile-Face** 25min

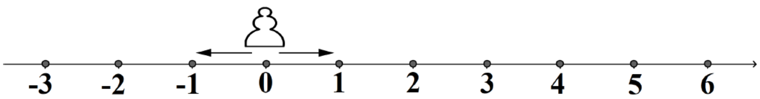
Considérons une infinité de lancers mutuellement indépendants d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Pile-Face (dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k). Si une telle succession ne se produit pas, on pose $X = 0$.

Notons A_i l'événement : « Un pile apparaît au i-ème lancer ».

1. En utilisant le système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$, prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$,
$$\mathbf{P}\big([X = k+1]\big) = \frac{1}{2}\mathbf{P}\big([X = k]\big) + \frac{1}{2^{k+1}}.$$
2. En déduire $\mathbf{P}\big([X = k]\big)$ pour tout $k \geqslant 2$.
On pourra introduire la suite v définie, pour tout entier $k \geqslant 2$, par $v_k = 2^k \mathbf{P}\big([X = k]\big)$.
3. Préciser $\mathbf{P}\big([X \geqslant 2]\big)$ puis $\mathbf{P}\big([X = 0]\big)$.
4. Justifier que X admet une espérance. La calculer.

Exercice 72. ✦✦ ✎ Un pion se déplace sur un axe gradué. Il est initialement à l'origine.

On lance de manière mutuellement indépendante n fois une pièce equilibrée. À chaque lancer, on déplace d'une unité le pion vers la gauche si un face apparaît et vers la droite si un pile sort. Notons X_n l'abscisse du pion à la fin des n lancers et Y_n le nombre de faces obtenus.



30min

1. Donner la loi de Y_n. Préciser l'espérance et la variance.
2. a) Exprimer X_n en fonction de Y_n.
   b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Notons Z_n la distance à l'origine du pion à la fin des n lancers.
   a) Donner la loi de Z_2 et Z_3.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\mathbf{V}(Z_n) \leqslant \mathbf{V}(X_n)$.
4. a) Préciser $\mathbf{P}([X_n = 0])$ en fonction de la parité de n.
   b) En utilisant la formule de Stirling
   $$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
   donner un équivalent simple de $\mathbf{P}([X_{2n} = 0])$.

Exercice 73. ✦✦✦ ✎ **Les fonctions génératrices** 40min

Soient $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $[\![0; n]\!]$.

On définit alors la *fonction génératrice* G_X de X par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\big([X = k]\big)\, t^k.$$

1. a) Préciser $G_X(1)$.
   b) Justifier que $\mathbf{E}(X) = G'_X(1)$.
   c) Trouver une relation simple entre $\mathbf{V}(X)$, $G''_X(1)$ et $G'_X(1)$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$, $\mathbf{E}(t^X) = G_X(t)$.
3. *Une application.*
   Un basketteur à n paniers à trois points à mettre. Il s'arrête au premier échec. On suppose que s'il se présente au i-ème lancer, la probabilité de réussir le panier est $q_i \in]0;1[$. Soit X_n la variable aléatoire qui renvoie le nombre de paniers réussis.
   a) Donner la loi de X_n en fonction des nombres q_i.
   b) On se place dans le cas où pour tout indice i, $q_i = q$. Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1/q\}$
   $$G_{X_n}(t) = p\frac{1-(qt)^n}{1-qt} + (qt)^n.$$
   c) En déduire que $\mathbf{E}(X_n) = \dfrac{q}{p}(1-q^n)$. Préciser la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n)$.

Exercice 74. ✦✦✦ ✎ **Une seconde expression de l'espérance** *35min*

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

1. *Préliminaires.*
   a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbf{P}([X=k])$ à l'aide de $\mathbf{P}([X>k])$ et $\mathbf{P}([X>k-1])$.
   b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\sum_{k=1}^{n} k\mathbf{P}([X=k]) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}([X>k])\right) - n\mathbf{P}([X>n]).$$
2. On suppose que X admet une espérance.
   a) Montrer que $n\mathbf{P}([X>n]) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   b) En déduire que la série $\sum \mathbf{P}([X>k])$ est convergente et que $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X>k])$.
3. Réciproquement, supposons que la série $\sum \mathbf{P}([X>k])$ converge.
   Montrer que X admet une espérance, et que $\mathbf{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X>k])$.

Exercice 75. ✦✦ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $p \in]0;1[$. On pose $q = 1-p$. *45min*

On effectue des tirages dans une urne contenant des boules blanches et noires. On suppose que la proportion de boules blanches est p. On tire avec remise et on arrête les tirages dans l'une des deux situations suivantes :

- Une boule blanche apparaît;
- On obtient n boules noires.

Les tirages sont indépendants. Dans la suite, on note :

- B_i : l'événement "On tire une boule blanche au i-ème lancer".
- T_n : La variable aléatoire donnant le nombre de lancers effectués.
- X_n : La variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues.
- Y_n : La variable aléatoire donnant le nombre de boules noires obtenues.

1. *Étude de* T_n
   a) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Exprimer l'événement $[T_n = k]$ à l'aide des événements B_i. En déduire $\mathbf{P}([T_n = k])$.
   b) Démontrer que
   $$\mathbf{P}([T_n = n]) = q^n + q^{n-1}p.$$
   c) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}([T_n = 1]) = 1$.
   d) Exprimer l'espérance de T_n avec les nombres $\mathbf{P}([T_n = k])$. Faire le calcul.
   Pour le calcul, on pourra dériver f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

2. *Étude de* X_n

   a) Vérifier que X_n suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

   b) En déduire l'espérance et la variance de X_n.

3. *Étude de* Y_n

   a) Exprimer Y_n avec X_n et T_n.

   b) Donner l'espérance de Y_n.

Exercice 76. ✦✦ Racines d'un polynômes à coefficients aléatoires *35 minutes*

Soient U et V deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ avec U suivant une loi uniforme sur $\{-1;0;1\}$ et V de loi géométrique de paramètre p. Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit $N(\omega)$ comme le nombre de racines du polynôme

$$Q_\omega(x) = x^2 + 2U(\omega)x + V(\omega).$$

Donner la loi de N. Proposer un programme python qui simule N.

Exercice 77. ✦✦✦ ✎ Sommes et produits de variables aléatoires *40 minutes*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{-1;1\}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p = \mathbf{P}([X_n = 1])$, et on suppose que $p \in]0,1[$.

1. *Le produit*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
   $$Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

   a) Déterminer les lois de Y_2 et de Y_3.

   b) On pose, pour $n \geqslant 1$, $\mathbf{P}([Y_n = 1]) = p_n$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, puis la valeur de p_n pour tout $n \geqslant 1$.

   c) Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles les variables Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?

2. *La somme*
   On pose : $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

3. *Python*
   Écrire un programme permettant de simuler les variables S_n et Y_n.

Exercice 78. ✦✦✦ *D'après oral ESCP* *1h10*

Un individu gravit un escalier. À chaque fois, avant de faire un pas, il lance une pièce non équilibrée donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$) et progresse d'une marche s'il obtient "pile» et enjambe deux marches d'un coup s'il obtient «face».

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n le nombre de marches gravies à l'issue des n premiers pas et X'_n le nombre de fois ou l'individu a progressé par enjambées de 2 marches au cours des n premiers pas.

   a) Déterminer une relation simple liant X_n et X'_n. En déduire la loi de X_n.

   b) Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Y_n le nombre aléatoire de pas justes nécessaires pour atteindre ou dépasser la $n^{\text{ème}}$ marche et $\mathbf{E}(Y_n)$ l'espérance de Y_n.

   a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y_n ?

   b) Déterminer la loi de Y_1, puis celle de Y_2 et préciser l'espérance de ces deux variables aléatoires.

   c) Montrer que pour tout entier naturel k, et tout entier $n \geqslant 3$, on a :
   $$\mathbf{P}(Y_n = k) = p\,\mathbf{P}(Y_{n-1} = k-1) + (1-p)\,\mathbf{P}(Y_{n-2} = k-1)$$

   d) Montrer que pour $n \geqslant 3, \mathbf{E}(Y_n) = p \cdot \mathbf{E}(Y_{n-1}) + (1-p)\mathbf{E}(Y_{n-2}) + 1$.

3. On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \geqslant 3$, on ait :
   $$u_n = pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + 1$$

   a) Montrer qu'il existe un réel α, que l'on déterminera, tel que la suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartient à E.

b) Montrer que u appartient à E si et seulement si la suite $v : n \mapsto u_n - \alpha n$ vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = p v_{n-1} + (1-p) v_{n-2}.$$

c) En déduire la valeur de $\mathbf{E}(Y_n)$.

Exercice 79. ✦✦✦ **Les moments déterminent la loi** *d'après oraux HEC* *45min*

1. Rappeler la définition de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire discrète.
2. Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ qui prend les valeurs 0 , 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $\mathbf{E}(Y) = 1$ et $\mathbf{E}\left(Y^2\right) = 5/3$.
   Calculer p_0, p_1 et p_2.
3. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ réels distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[x]$, associe le $(n+1)$-uplet $(Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_n))$.
   a) Montrer que φ est une application linéaire bijective.
   b) Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
   c) Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs x_0, x_1, …, x_n. On suppose que l'on connaît les valeurs de $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}\left(X^2\right)$, …, $\mathbf{E}(X^n)$.
   Peut-on déterminer la loi de X?

Proba et Python

Exercice 80. ✦ **Moments** *20min*

Soit X une variable aléatoire sur un univers fini. On rappelle que donner la loi de X signifie donner

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1; m]\!], \quad \mathbf{P}([X = x_i]).$$

Dans ce cas, on définit les listes val et Loi par :

$$\text{val} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Loi} = [\mathbf{P}([X = x_1]) \quad \mathbf{P}([X = x_2]) \quad \cdots \quad \mathbf{P}([X = x_m])]$$

1. Écrire une fonction Python, nommée `moment`, qui prend en argument les deux listes (val, Loi), un entier s et renvoie renvoie le moment $\mathbf{E}(X^s)$.
2. En utilisant uniquement la fonction `moment`, écrire une nouvelle fonction qui calcule la variance.

Exercice 81. ✦✦ **Lois usuelles avec random()** *30min*

Une urne contient 5 boules (1 rouge et 4 bleues). On considère l'expérience suivante

On tire une boule au hasard et on note la couleur. On replace ensuite la boule dans l'urne.

1. Soit X la variable aléatoire qui renvoie 1 si la boule est rouge et 0 sinon.
   Préciser la loi de X.
   En utilisant uniquement la commande `random`, écrire un programme qui simule la variable X.
2. On repète maintenant n fois l'expérience élémentaire. On suppose les tirages mutuellement indépendants. On note Y le nombre de boules rouges obtenues.
   Quelle est la loi de Y?
   Avec la commande `random`, écrire un programme qui prend en argument n et simule Y.
3. On repète maintenant une infinité de fois l'expérience élémentaire. On suppose toujours les tirages mutuellement indépendants. On note Z le numéro du tirage où on a obtenu la première boule rouge.
   Quelle est la loi de Z? Écrire un programme qui simule la variable Z.
4. Modifier le programme précédent pour simuler la variable X_2 qui donne le numéro du tirage où on obtient la seconde boule rouge.
   Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Généralisez la question avec X_r, la variable aléatoire qui renvoie le tirage de la r-ième boule rouge.

CHAPITRE 4

Informatique

Il ne faut pas négliger l'informatique. Citons le dernier rapport de jury des concours :

> *Avec la dernière réforme du programme, l'informatique a encore gagné en importance. Si plusieurs candidats ont su bien traiter les questions d'informatique, encore trop de candidats s'étaient contentés d'un survol rapide de la matière, quand ils ne l'avaient pas délaissée totalement.*
> *Presque tous les sujets comportaient une question d'informatique lors de cette session et cette proportion devrait continuer de croître l'an prochain, le but étant que tous les candidats soient interrogés sur une partie du programme d'informatique. Ces questions nous permettent d'évaluer l'esprit pratique et de relier les mathématiques à des cas concrets.*
>
> *Rapport de Jury : Oraux, HEC 2023*

1 Quelques programmes de référence

1.1 Tracé d'une courbe

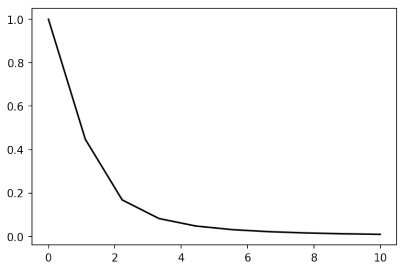
La commande `plt.plot(x,y)` permet de tracer une ligne brisée reliant les points du plan de coordonnées (x_i, y_i). Ainsi, pour tracer la courbe représentative d'une fonction, il suffit de créer une liste `x` pour l'axe des abscisses avec la commande `np.linspace()` ou `np.arange()` puis de créer une nouvelle liste `y` pour l'axe des ordonnées en appliquant la fonction à chaque élément de `x`. Bien sûr, plus le nombre de points est grand, plus le tracé sera précis.
Par exemple, donnons la courbe de $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[0;10]$.

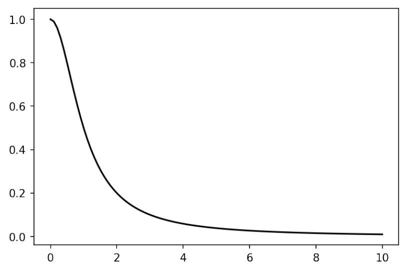
Editeur

```
A = np.linspace(0,10,10)
D = 1/(1+A**2)
plt.plot(A,D)
```

Editeur

```
A = np.linspace(0,10,100)
D = 1/(1+A**2)
plt.plot(A,D)
```





Exercice 82. ✦ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x/(1+|x|)$. *15min*

1. Comment obtenir le graphe de f sur $[-5;5]$?
2. Justifier que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à préciser.
3. Donner le graphe de la réciproque ?

1.2 Boucle for - Calcul du n-ième terme d'une suite

Ordre 1

Donnons un programme utilisant une boucle inconditionnelle `for` pour déterminer le n-ième terme d'une suite récurrente d'ordre 1. Par suite récurrente d'ordre 1, nous entendons une suite où le calcul du $(n+1)$-ième terme dépend du n-ième terme de la suite. Par exemple :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = {u_n}^2 - 3u_n + 5.$$

Editeur

```python
def Suite(n) :
     u=1
     # Initialisation
     for i in range(1,n+1):
         u=u**2-3*u+5
         # Formule de récurrence
     return u
```

Console

```
>>> Suite(1)
3

>>> Suite(3)
15
```

Exercice 83. ✦ ✎ **Calcul d'un n-ième terme d'une suite via Python** *10min*

1. Écrire une fonction qui prend n en argument et qui renvoie les n-ièmes termes de la suite u définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{{u_n}^2 + 1}$$

2. Conjecturer et prouver une formule simple pour u_n.
3. Comment écrire une fonction qui prend en argument n et renvoie $[u_0, \quad u_1, \quad \ldots, u_n]$?

Récurrence à plusieurs pas

Prenons l'exemple d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n.$$

Editeur

```python
def rec2(u0,u1,n):
    u=u0
    v=u1
    for i in range(n-1) :
        w=2*v+u
        u=v
        v=w
    print("u{}={}".format(n,w))
```

Console

```
rec2(0,1,2)
>>> u2 = 2

rec2(0,1,5)
>>> u5 = 29
```

1.3 Boucle for - Calcul d'une somme/d'un produit

Illustrons l'utilisation d'une boucle `for` dans le calcul d'une somme. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k^3$. En remarquant que $S_i = S_{i-1} + i^3$, on revient au cas précédent. Voici une fonction Python qui prend en argument n et renvoie S_n.

Editeur

```python
def Somme_S(n):
    s=0
    for i in range(0,n+1):
        s=s+i**3
        #ou s+=i**3
    return s
```

Console

```
>>> print(Somme_S(10))

3025
```

Exercice 84. ✦ Écrire un programme qui calcule $\prod_{k=0}^{99} \cos\left(k\pi/(200)\right)$? *5min*

1.4 Boucle for - Principe d'un compteur

Il arrive régulièrement qu'on compte le nombre d'éléments d'un ensemble E vérifiant une certaine propriété $\mathscr{P}$. Pour créer un algorithme qui exécute cette tâche, on peut procéder de la manière suivante.

1. On introduit une variable `Compteur` qui va compter le nombre d'éléments vérifiant $\mathscr{P}$.
   Au début, `Compteur=0`.
2. On parcourt chaque élément de l'ensemble E à l'aide d'une boucle `for`.
3. Pour chaque élément, on teste (à l'aide d'une structure `if`), si l'élément vérifie la propriété ou non. Si la propriété est bien satisfaite, on augmente la valeur de `Compteur` de 1.
4. À la fin de la boucle, `Compteur` donne le nombre d'éléments vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

Exemple. Donnons un algorithme qui compte les nombres premiers inférieurs à 100.

Editeur

```python
Compteur  = 0

for k in range(2,101)  :
# On ne traite ni 0 ni 1, en revanche on traite 100

    Diviseurs = 0
    for i in range(2, k//2+1):
        if (k % i) == 0:
        # i est un diviseur de k
           Diviseurs +=1
    if Diviseurs == 0 :
      Compteur +=1

print("Nombre premier inférieur à 100 :",Compteur)

# Une fois ce code exécuté, Python renvoie la réponse : 25.
```

1.5 While - Algorithme de seuil

Ce type d'algorithme intervient lorsqu'on cherche le plus petit entier n tel que la propriété $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Il est très courant de le rencontrer dans l'étude des suites.

Exemple. On montre que la suite u, définie par la formule de récurrence suivante converge vers 2.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} + u_n \quad \text{et} \quad u_0 = 0.$$

On cherche l'indice n tel que $u_n - 2$ devient inférieur à un seuil donné. Déterminons par exemple, le plus petit entier n pour lequel $|u_n - 2| \leqslant 10^{-3}$.

Editeur

```python
u=0  # Initialisation
n=0
while (abs(u-2) > 0.001) :
    u=u+2/((n+1)*(n+2))
    # Calcul du terme suivant par la formule de récurrence
    n=n+1

print("La plus petite valeur est : ",n)

# Ce code affiche la valeur 1999.
```

Exercice 85. ✦ 10min

Écrire un programme qui prend en argument un réel A et renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$.

1.6 While - Approximation de limite à une précision donnée

Soit u une suite convergente vers une limite finie ℓ. On souhaite obtenir une approximation de la limite.
On a $|u_n - \ell| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En définissant une précision voulue, on peut donc déterminer une approximation de ℓ à cette précision près, on cherche donc un entier n tel que $|u_n - \ell| <$ précision.

Exemple. On considère la suite u définie par le terme général

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

On montre que la suite est bien définie et qu'elle converge vers une limite finie ℓ avec $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le programme suivant donne une approximation de ℓ à 10^{-3}-près.

Editeur

```python
def limite(precision) :
    s=1 # initialisation somme
    n=1 # initialisation indice
    erreur=1 # initialisation écart à la limite
    while erreur > precision :
        n+=1
        s+=1/(n**2)
        erreur=1/n
    return s
```

Cette fonction exécutée avec la précision `0.001` donne `1.6439345666815615`. Testons ce résultat sachant que la limite de la suite u est $\pi^2/6$.

Console

```
>>> m.pi**2/6
1.6449340668482264
```

Exercice 86. ✦✦ ✎ **Approximation d'une limite** 15min

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Écrire une fonction qui prend en argument un réel strictement positif ε et renvoie une approximation de la limite $e = \exp(1)$ à une précision ε-près.

1.7 While - Algorithme de Dichotomie

On rappelle le code pour approximer un zéro d'une fonction f.

Editeur

```
def dichotomie(a0,b0,precision):
    a=a0
    b=b0
    p=precision
    while b-a>p :
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<=0:
            b=c
        else :
            a=c
    return(b)
```

2 Les exercices

Exercice 87. ✦ ✎ Écrire un programme qui prend en argument une fonction f, un entier naturel non nul n et deux réels a, b (avec $a < b$) et renvoie la somme de Riemann d'ordre de f :

$$\mathrm{S}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Tester ensuite votre programme en calculant *20min*

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{4\,\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Exercice 88. ✦ *10min*

Écrire une fonction `puissance` qui prend en argument entier n, un réel a strictement positif et renvoie la plus petite puissance de a supérieure ou égale à n.

Exercice 89. ✦✦ On définit la suite réelle u par : *20min*

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{1+{u_0}^2}{1}, \quad u_2 = \frac{1+{u_0}^2+{u_1}^2}{2}, \quad \cdots, \quad u_n = \frac{1+{u_0}^2+\cdots+{u_{n-1}}^2}{n}.$$

Écrire un programme qui calcule les dix premiers termes de cette suite.

Exercice 90. ✦✦ *10min*

La série $\sum \frac{1}{n^3}$ est convergente. Écrire un programme qui calcule les termes successifs de la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de cette série jusqu'à ce que $\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1} < 10^{-10}$ et renvoie le dernier S_n calculé.

Exercice 91. ✦✦ **Suite périodique** *30min*

On définit la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ par disjonction des cas :

$$\forall x \in [0;1], \qquad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0;1/2], \\ 2(1-x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner le graphe de f.

   On définit ensuite la suite u par : $u_0 \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Écrire un programme qui prend comme arguments u_0 et n et renvoie les n premiers termes de la suite initialisée à u_0.

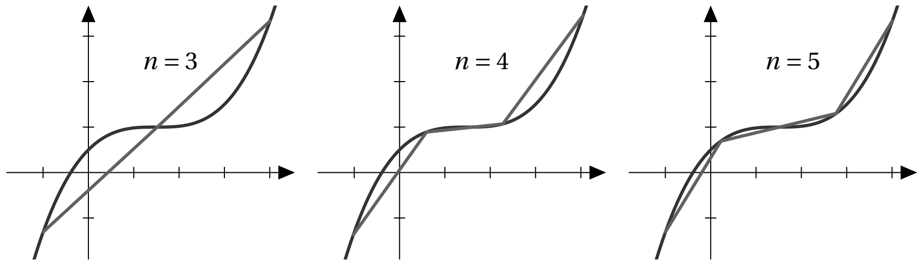
3. (a) Tester le programme pour $u_0 = 1/2$, $u_0 = 1/4$, $u_0 = 1/8$... Que se passe-t-il ?
Énoncer un résultat pour tout $u_0 = 1/2^p$ où $p \in \mathbb{N}$. *Facultatif.* Prouvez-le.
   (b) Tester ensuite $u_0 \in \{2/5; 2/7; 2/11 \cdots\}$. Que constatez-vous ?

Exercice 92. ✦✦✦ Approximation de la longueur d'une courbe — *30min*

1. Écrire une fonction qui prend en argument deux points A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B) de $\mathbb{R}^2$ et renvoie la distance entre A et B.
Pour rappel, $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$.
2. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$.
Afin d'approximer la longueur de la courbe représentative de f, on découpe l'intervalle $[a;b]$ régulièrement

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Puis, on somme les distances entre les points $\big(x_i, f(x_i)\big)$ et $\big(x_{i+1}, f(x_{i+1})\big)$ pour tout indice i.
Écrire un programme qui prend en entrée une fonction f, un entier n et renvoie une approximation de la longueur de la courbe représentatif de f.



Exercice 93. ✦✦✦ Suites adjacentes — *30min*

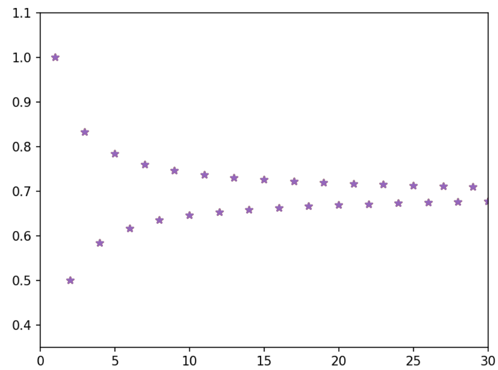
On considère le programme suivant :

Editeur
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n=30
x=np.arange(1,n+1)
y=np.zeros(n)
eps=1
for i in range(n):
    y[i]=eps/(i+1)
    eps=eps*(-1)
z=np.cumsum(y)

plt.axis([0, 30, 0.35, 1.1])
plt.plot(x,z,'*')
plt.show()
```

Ci-dessous, le résultat obtenu :



1. Préciser le contenu des variables y et z après l'exécution du programme.
2. Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles ?
3. Démontrer cette conjecture.

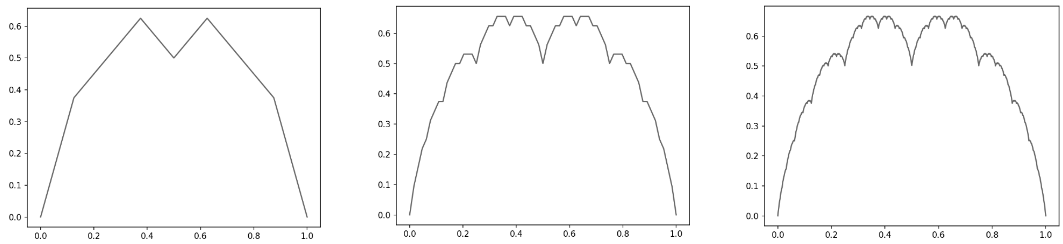
Exercice 94. ✦✦ La courbe Blanc-manger — *30min*

Pour tout réel x, on note $d(x)$ la distance de x avec le plus proche entier. On montre que $d(x) = \dfrac{1 - \big|1 - 2x + 2\lfloor x \rfloor\big|}{2}$.

1. Tracer la courbe de d sur $[-3;3]$.
2. Écrire un script qui prend en argument n et renvoie la courbe représentative de S_n définie par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d\big(2^k x\big)}{2^k}.$$

Commenter. *Ci-dessous quelques graphes pour* $n \in \{3, 6, 10\}$.



3. Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite $\left(S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Notons $S(x)$ la limite obtenue. Que dire de la régularité de la fonction S ?

Exercice 95. ✦✦ ✎ **Indice de nilpotence** *30min*

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2. On dit qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que M^k est la matrice nulle. On appelle indice de nilpotence d'une matrice nilpotente M le plus petit entier strictement positif k tel que M^k est la matrice nulle.

1. Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. ✎ Soit φ, l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice nilpotente M d'indice p. Justifier que la famille
$$\left(x, \varphi(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^{p-1}(x)\right)$$
est libre. En déduire que l'indice de nilpotence d'une matrice de taille n est inférieur à n.
3. *Python*
   a) Si M est une matrice, que teste la commande np.sum(abs(M)) ?
   b) En déduire un programme qui prend en argument une matrice carrée, teste si la matrice est nilpotente et renvoie son indice de nilpotence si c'est bien le cas.

Exercice 96. ✦✦ ✎ Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre p. Soit $f(p)$, la probabilité que la matrice suivante soit inversible
$$A = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}.$$

1. Proposer un programme qui prend en argument p et donne une approximation de $f(p)$ (notée dans la suite $\tilde{f}(p)$). *On rappelle que d'après la loi faible des grands nombres, la fréquence empirique est proche de la probabilité de l'événement.*
2. Comment tracer le graphe de $p \mapsto \tilde{f}(p)$ pour $p \in]0;1[$ à l'aide de python.
3. Faire le calcul exact de $f(p)$ et comparer avec les résultats précédents.

Vous pouvez aussi regarder les sujets :

- **Analyse**
  - → ECRICOME 2017, exercice 1.
  - → ECRICOME 2016, exercice 1.
  - → ECRICOME 2012, exercice 1.
  - → EDHEC-3 2018, exercice 1.
  - → EDHEC 2015, exercice 1.
- **Algèbre**
  - → ECRICOME 2014, exercice 1 (question 1 à la première partie de la 5).
  - → EDHEC-1 2018, exercice 2.
  - → EDHEC 2016, exercice 2.
- **Probabilité**
  - → EDHEC-2 2018, exercice 3.
  - → EDHEC 2015, problème.

– FIN –

Analyse

Révisé ?

- **ℕ, ℝ et sommes, max/sup**

— Coefficient binomiaux (définition, formule explicite, formule du triangle de Pascal). ☐☐☐ √
— Formule du binôme de Newton $(a+b)^n = ...$, factorisation de $a^n - b^n = ...$ ☐☐☐ √
— Somme géométrique. ☐☐☐ √
— Définition d'un maximum (minimum), de la borne supérieure (inférieure). ☐☐☐ √
— Théorème de la borne supérieure. ☐☐☐ √

- **Application**

— Définitions de : Injectivité, surjectivité, bijectivité. ☐☐☐ √
— Composition d'applications injectives/surjectives/bijectives. ☐☐☐ √

- **Polynôme**

— Racine. Nombre de racines d'un polynôme de degré n. ☐☐☐ √
— Diviseur. Division euclidienne. ☐☐☐ √
— Définition d'une racine et caractérisations. Multiplicité d'une racine. ☐☐☐ √
— Factorisation dans le cas réel d'un polynôme. ☐☐☐ √

- **Suites et séries**

— Théorème de limite monotone. ☐☐☐ √
— Suites adjacentes. ☐☐☐ √
— Comment obtenir l'expression explicite d'une suite arithmético-géométrique (exemple $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ? ☐☐☐ √
— Règles de calculs sur les limites. Croissances comparées. ☐☐☐ √
— Théorème d'encadrement. ☐☐☐ √
— Petit "o", équivalent. Exemples usuels. ☐☐☐ √
— Séries de référence : séries géométriques, série exponentielle, série de Riemann. ☐☐☐ √
— Critères de convergence pour les séries à termes positifs. ☐☐☐ √

- **Limite et continuité**

— Définition de la continuité en un point a, sur un intervalle I. ☐☐☐ √
— Théorème des valeurs intermédiaires. Théorème de la bijection. ☐☐☐ √
— Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ et f est continue en a, $f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$. ☐☐☐ √
— Existence d'un maximum et minimum sur une fonction continue sur un segment. ☐☐☐ √

- **Dérivation d'une fonction d'une variable**

— Définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement. Interprétation avec la tangente. ☐☐☐ √
— Développement limité d'ordre 1 : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$. ☐☐☐ √
— Formules de dérivation d'une composée, d'une réciproque ☐☐☐ √
— Théorème de Rolle. Égalité et inégalité des accroissements finis. ☐☐☐ √
— Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$. ☐☐☐ √
— Dérivées successives. Formule de Leibniz. ☐☐☐ √

- **Intégration sur un segment**

— Définition de l'intégrale avec l'aire. Croissance de l'intégrale lorsque les bornes sont dans le bon sens. ☐☐☐ √
— Approximation d'intégrales par les sommes de Riemann. ☐☐☐ √
— Connaître les primitives usuelles. ☐☐☐ √
— Changement de variable. ☐☐☐ √
— Intégration par parties. ☐☐☐ √
— Simplification d'une intégrale d'une fonction paire (ou impaire) sur un intervalle symétrique centrée en 0. ☐☐☐ √
— Si f est continue, positive et d'intégrale sur $[a;b]$ alors f est nulle sur $[a;b]$. ☐☐☐ √

- **Intégration sur un intervalle quelconque**

— Définitions et règles de calculs. ☐☐☐ √
— Critère de convergence (par majoration, négligeabilité et équivalent). ☐☐☐ √
— Intégrales de Riemann. ☐☐☐ √

Algèbre

- **Calcul matriciel**

— Formule du produit matriciel. Transposée. Trace. □□□ $\surd$

— Matrices symétriques/antisymétriques. □□□ $\surd$

— Système linéaire, pivot de Gauss. □□□ $\surd$

— Déterminant d'une matrice de taille 2. □□□ $\surd$

- **Espaces vectoriels**

— Somme de sous-espace vectoriels. □□□ $\surd$

— Famille génératrice, libre, base. □□□ $\surd$

— Théorème de la base incomplète. □□□ $\surd$

— Dimension. Définition et calculs. Formule de Grassmann. □□□ $\surd$

— Rang d'une famille. □□□ $\surd$

— Caractérisations de sous-espaces supplémentaires. □□□ $\surd$

- **Algèbre linéaire**

— Définition d'une application linéaire.

— Définition du noyau et de l'image. Lien avec l'injectivité et la surjectivité. □□□ $\surd$

— Définition et propriétés des projecteurs (noyau, image, $p \circ p$..) □□□ $\surd$

— Définition du rang, formule du rang. □□□ $\surd$

— Lien entre le rang et l'injectivité/surjectivité/bijectivité. Cas des endomorphismes. □□□ $\surd$

— Matrice d'une famille, de passage et d'une application linéaire. □□□ $\surd$

— Composition application et produit matriciel : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G,\mathscr{B}_F}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f)$. □□□ $\surd$

— Bijectivité et inversibilité : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,B_F}\left(f^{-1}\right) = ..$ □□□ $\surd$

— En dimension finie, isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Conséquence $\dim \mathscr{L}(E,F) = ...$ □□□ $\surd$

— Polynôme d'endomorphisme et de matrice. □□□ $\surd$

Probabilités

- **Généralités sur les probabilités**

— Définition d'une probabilité (comme une application de ...) □□□ $\surd$

— Formule du crible $\mathbf{P}(A \cup B) = ...$ □□□ $\surd$

— Définition de l'indépendance entre événements. □□□ $\surd$

— Probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées. □□□ $\surd$

— Définition d'un système complet d'événements. □□□ $\surd$

— Formule des probabilités totales. □□□ $\surd$

— Formule de Bayes. □□□ $\surd$

— Théorème de la limite monotone. □□□ $\surd$

- **Variables aléatoires**

— Définition d'une variable aléatoire et de la fonction de répartition. □□□ $\surd$

— Propriété de la fonction de répartition. Caractérisation de la loi. □□□ $\surd$

— Définition d'une variable aléatoire discrète. □□□ $\surd$

— Indépendance. □□□ $\surd$

- **Lois usuelles**

— Les discrètes finies. Bernoulli, binomiale, uniforme discrète. □□□ $\surd$

— Les discrètes infinies dénombrables. Géométrique, Poisson. □□□ $\surd$

— Les continues. Uniforme continue, exponentielle, normale, gamma. □□□ $\surd$

- **Espérance et variance**

— Définition des moments et de la variance. □□□ $\surd$

— Croissance de l'espérance et linéarité. ☐☐☐ √
— Espérance et variance des lois usuelles. ☐☐☐ √
— Existence par le théorème de domination. ☐☐☐ √
— Montrer que si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre $s \leqslant r$. ☐☐☐ √
— Formule de transfert (version discrète). ☐☐☐ √
— Formule de Koenig-Huygens. ☐☐☐ √

• **Couple de variables aléatoires**

— Loi d'un couple de variables discrètes. Lois marginales de variables discrètes. ☐☐☐ √
— Loi d'une somme de lois binomiales indépendantes. ☐☐☐ √
— Loi d'une somme de lois de Poisson indépendantes. ☐☐☐ √
— Espérance de $Z = g(X, Y)$ et théorème de transfert : Sous réserve de convergence absolue ☐☐☐ √

$$E(Z) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y) P([X = x] \cap [Y = y])..$$

— Espérance d'un produit dans le cas d'indépendance. ☐☐☐ √
— Variance d'une somme de variables indépendantes. ☐☐☐ √
— $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + 2\text{cov}(X, Y) + \mathbf{V}(Y)$. ☐☐☐ √

• **Convergences et approximations**

— Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. ☐☐☐ √
— Loi faible des grands nombres. Preuve. ☐☐☐ √
— Approximation de lois binomiales par les lois de Poisson. ☐☐☐ √

Le symbole ✎ désigne les exercices classiques à maîtriser en priorité.

CHAPITRE 5

Solutions

1 Du chapitre 1 : analyse

Solution 1

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} |n-k| &= \sum_{k=0}^{n} |n-k| + \sum_{k=n+1}^{2n} |n-k| \\ &= \sum_{k=0}^{n} (n-k) + \sum_{k=n+1}^{2n} (k-n).\end{aligned}$$

Or par le changement de variable $p = n-k$,

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{p=0}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Et par le changement de variable $p = k-n$, lorsque k varie de $n+1$ à $2n$, p varie de 1 à n et

$$\sum_{k=n+1}^{2n} (k-n) = \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Finalement, $\boxed{C_1 = n(n+1).}$

• On a pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}&C_2 \\ = &\sum_{k=2}^{n} 3\ln(k) - 2\ln(k-1) - \ln(k+1) \\ = &3\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - 2\sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1).\end{aligned}$$

Or, $$\sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln(n) + \ln(2),$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \\ &= \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln(2) + \ln(1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) &= \sum_{k=3}^{n+1} \ln(k) \\ &= \sum_{k=3}^{n-1} \ln(k) + \ln(n) + \ln(n+1).\end{aligned}$$

Il reste :

$$\begin{aligned}C_2 &= 3\ln(n) + 3\ln(2) - 2\ln(2) \\ &\quad - \ln(n) - \ln(n+1).\end{aligned}$$

En conclusion, $\boxed{C_2 = \ln\left(\frac{2n^2}{n+1}\right).}$

• On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)-1\big) \cdot k! \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!.\end{aligned}$$

Il vient par télescopage, $\boxed{C_3 = (n+1)! - 1.}$

• Factorisons le numérateur et le dénominateur. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}k^2 + k - 2 &= (k-1)(k+2) \\ k^2 + 2k - 3 &= (k-1)(k+3).\end{aligned}$$

Ainsi, $$C_4 = \prod_{k=3}^{n} \frac{(k-1)(k+2)}{(k-1)(k+3)} = \prod_{k=3}^{n} \frac{k+2}{k+3}.$$

Par télescopage, $\boxed{C_4 = \frac{5}{n+3}.}$

• $$C_5 = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} e^{-2k}\right).$$

Or, $$\prod_{k=1}^{n} k = n!.$$

Et, $$\prod_{k=1}^{n} e^{-2k} = \exp\left(-2\sum_{k=1}^{n} k\right).$$

Finalement, $\boxed{C_5 = n! e^{-n(n+1)}.}$

Solution 2.

1.a) On a

$$\begin{aligned}S_0(n) &= n+1 \\ S_1(n) &= n(n+1)/2 \\ S_2(n) &= n(n+1)(2n+1)/6.\end{aligned}$$

1.b) On vérifie par récurrence que

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

D'où $$S_3(n) = S_1(n)^2.$$

Ici $n=5$. Puisqu'il ne s'agit que d'un réarrangement, les deux figures ont même volume.
À gauche, un parallélépipède rectangle dont le volume est

$$\begin{aligned} V &= \text{Longeur} \times \text{Largeur} \times \text{Profondeur} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \times 1. \end{aligned}$$

À droite, chaque cube d'arête k a pour volume k^3. Le volume total est donc

$$V = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

On retrouve bien l'égalité

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

2.a)i) Par télescopage

$$T_i(n) = (n+1)^{i+1} - 1.$$

De plus

$$\begin{aligned} T_i(n) &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{i+1} - \sum_{k=1}^{n} k^{i+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{i+1} - S_{i+1}(n). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.a)ii) Par la formule du binôme de Newton

$$(k+1)^{i+1} = \sum_{q=0}^{i+1} \binom{i+1}{q} k^q.$$

Puis

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{i+1} &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=0}^{i+1} \binom{i+1}{q} k^q \\ &= \sum_{q=0}^{i+1} \binom{i+1}{q} \sum_{k=1}^{n} k^q \\ &= \sum_{q=0}^{i+1} \binom{i+1}{q} S_q(n). \end{aligned}$$

On obtient la relation demandée en isolant les termes pour $q=i$ et $q=i+1$.
Il vient

$$\begin{aligned} & S_{i+1}(n) + (n+1)^{i+1} - 1 \\ &= S_{i+1}(n) + (i+1)S_i(n) + \sum_{q=0}^{i-1} \binom{i+1}{q} S_q(n). \end{aligned}$$

D'où le résultat

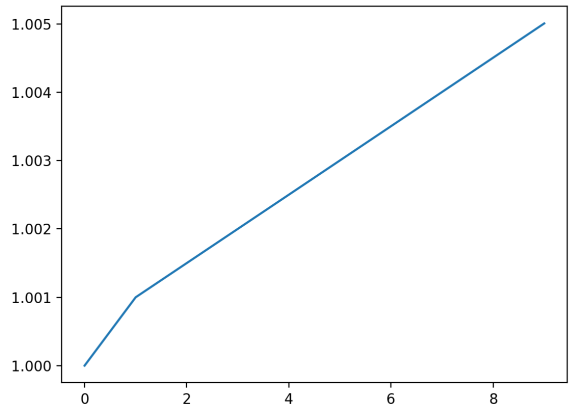
3. On a

$$S_4(n) = \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - 1 - \sum_{q=0}^{3} \binom{5}{q} S_q(n)\right)$$

Or on a les expressions de S_q pour $q \in \{0;1;2;3\}$. Le reste se résume à un long calcul.

4.

```
def Somme(n,i):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S+=k**i
    return (i+1)*S/n**(i+1)
```



obtenu par

```
Ord=np.zeros(10)
n=1000
for i in range(10):
    Ord[i]=Somme(n,i)
ab=np.arange(10)
plt.plot(ab,Ord)
plt.show()
```

Et le test qui permet de conjecturer que

$$\frac{S_i(n)}{n^{i+1}/(i+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

C'est-à-dire

$$S_i(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{i+1}}{i+1}.$$

On peut donner une preuve via les sommes de Riemann pour approximer une aire.

Solution 3.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$. La réduction au même dénominateur donne

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+1} \\ &= \frac{1}{n^2(n^2+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^4}. \end{aligned}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2+1} + n = |n|\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + n \\ &= n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1\right). \end{aligned}$$

et

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$$

avec $2 \neq 0$, donc :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$u_n = \sqrt{n^2-1} - n = n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right).$$

Or

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2},$$

et comme $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Conclusion :
$$\sqrt{n^2+1}-n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

4. On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. Comme
$$\frac{1+\mathrm{e}^{1/n}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$
on a : $\quad u_n=\ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{1/n}}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1+\mathrm{e}^{1/n}}{2}-1=\dfrac{\mathrm{e}^{1/n}-1}{2}.$

Or $\mathrm{e}^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc
$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a
$$\ln\left(1+\mathrm{e}^n\right)=\ln\left(\mathrm{e}^n\left(\mathrm{e}^{-n}+1\right)\right)=n+\ln\left(\mathrm{e}^{-n}+1\right).$$
On a
$$\ln\left(\mathrm{e}^{-n}+1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
donc $\quad \ln\left(\mathrm{e}^{-n}+1\right) \underset{n\to\infty}{=} o(n).$

On a aussi $\quad \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{=} o(n).$

D'après les propriétés des équivalents :
$$\sqrt{n}+\ln\left(1+\mathrm{e}^n\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n.$$

6. Pour $n\in\mathbb{N}^*$:
$$u_n=\mathrm{e}^{1/n+1/n^2}-\mathrm{e}^{1/n}=\mathrm{e}^{1/n}\left(\mathrm{e}^{1/n^2}-1\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathrm{e}^{1/n^2}-1$$
car $\mathrm{e}^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Enfin $\mathrm{e}^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc :
$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Solution 4.

1. Vérifier que les suites de terme général $n!$ ou e^n donnent des exemples.

2. On peut procéder de même avec une décroissance très rapide vers 0 : $1/n!$ ou e^{-n}.

3. Prendre f la fonction exponentielle et $(n)_n$ et $(n+1)_n$.

Solution 5.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$, $u_{n-1}\geqslant u_n\geqslant u_{n+1}$, donc, en ajoutant u_n :
$$u_{n-1}+u_n\geqslant 2u_n\geqslant u_n+u_{n+1}$$
$$n\left(u_{n-1}+u_n\right)\geqslant 2nu_n\geqslant n\left(u_n+u_{n+1}\right)\quad (*).$$

Grâce à l'hypothèse $u_n+u_{n+1}\sim\frac{1}{n}$, on sait que
$$n\left(u_n+u_{n+1}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$
Mais l'hypothèse donne aussi :
$$u_{n-1}+u_n\sim\frac{1}{n-1}\sim\frac{1}{n},$$
donc $\quad n\left(u_{n-1}+u_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$

Finalement, on peut appliquer le théorème d'encadrement à partir de $(*)$ pour conclure que $2nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, autrement dit :
$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$
Il en résulte bien sûr que
$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Solution 6.

✦

- Le terme général de la série est positif ($\sqrt{n}<n$ donc $(-1)^n\sqrt{n}<n$). Comme $\sqrt{n}=o(n)$, on a $n+(-1)^n\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\sim} n$. Donc
$$\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
D'après les *critères de convergences des séries à termes positifs*, la série est de même nature que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui diverge (série de Riemann avec $\alpha<1$).
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}} \text{ diverge.}}$$

- La série est à termes négatifs, de même nature que la série opposée qui est à termes positifs. Or
$$1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$
D'après les *critères de convergences des séries à termes positifs*, la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$ est de même nature que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ qui converge (série de Riemann avec $\alpha=2$).
$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \text{ converge.}}$$

- Le terme général de la série est positif. On a, pour $n\geqslant 1$: $1+2+\cdots+n^2>n^2>0$. D'où
$$\frac{1}{1+2^2+\cdots+n^2}<\frac{1}{n^2}.$$
Or $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha>1$). Donc, d'après *les critères sur les séries à termes positifs* :
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2^2+\cdots+n^2} \text{ converge.}}$$

- On a $\dfrac{(\ln n)^5}{n^2}=o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ car $(\ln n)^5=o(\sqrt{n})$ par les croissances comparées. Or la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ est un série de Riemann à termes positifs qui converge. D'après le *critère de convergence par négligeabilité* :
$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\frac{(\ln n)^5}{n^2} \text{ converge.}}$$

- Le terme général de la série est positif. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Passons par la forme exponentielle :
$$\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}=\exp\left((\ln n)^2-n\ln(\ln n)\right).$$
Montrons que $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}=o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On a :
$$n^2\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}=\exp\left(2\ln n+(\ln n)^2-n\ln(\ln n)\right).$$

Les croissances comparées donnent $\ln n = o(n)$ et $(\ln n)^2 = o(n)$.
Donc $\ln n = o(n\ln(\ln n))$ et $(\ln n)^2 = o(n\ln(\ln n))$.
D'où $2\ln n + (\ln n)^2 - n\ln(\ln n) = -n\ln(\ln n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

Ainsi $\quad n^2\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad$ Donc $\quad \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$) et est à termes positifs. D'après le critère de convergence par négligeabilité

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 2}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \text{ converge.}}$$

✦✦

• En utilisant les équivalents classiques :

$$\begin{aligned}\sqrt{n+7}-\sqrt{n} &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}-1\right)\\ &\sim \sqrt{n}\cdot\frac{7}{2n} = \frac{7}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Puis $\qquad \left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right)^\alpha \sim \dfrac{7^\alpha}{2^\alpha}\cdot\dfrac{1}{n^{\alpha/2}}$.

Par *le critère d'équivalence* des séries à termes positifs la série $\sum\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n}\right)^\alpha$ est de même nature que la série de Riemann $\sum 1/n^{2\alpha}$.
En conclusion, on a convergence si et seulement si

$$\boxed{\alpha > 2.}$$

• Procédons par disjonction des cas :

→ Si $\beta < 2$, $n^\beta = o(n^2)$ et

$$n^2+n^\beta \sim n^2, \quad \text{et} \quad \frac{n^\alpha}{n^2+n^\beta} \sim \frac{1}{n^{2-\alpha}}.$$

D'après *le critère d'équivalence des séries à termes positifs*, la série $\sum\dfrac{n^\alpha}{n^2+n^\beta}$ est de même nature que la série de Riemann $\sum\dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$. On a donc convergence si et seulement si $2-\alpha > 1$, c'est-à-dire $\alpha < 1$.
→ Si $\beta = 2$,

$$\frac{n^\alpha}{n^2+n^\beta} = \frac{1}{2n^{2-\alpha}}.$$

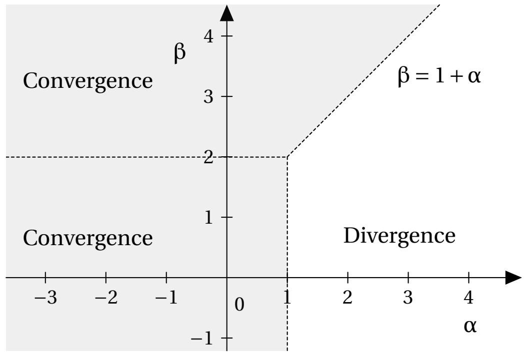
De nouveau, on a convergence si et seulement si $\alpha < 1$.
→ Si $\beta > 2$, $n^2 = o(n^\beta)$ et

$$n^2+n^\beta \sim n^\beta, \quad \text{et} \quad \frac{n^\alpha}{n^2+n^\beta} \sim \frac{1}{n^{\beta-\alpha}}.$$

Par comparaison aux séries de Riemann, on a convergence si et seulement si $\beta - \alpha > 1$.
Résumons les différents cas de convergence :

— $\beta \leqslant 2$ et $\alpha < 1$;

— $\beta > 2$ et $\beta > 1+\alpha$.



Solution 7.

• On reconnaît une somme géométrique de raison $1/\mathrm{e} \in]-1;1[$. Cela justifie la convergence de la série avec

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\mathrm{e}^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} - 1.$$

On trouve $\qquad \boxed{\mathrm{A} = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}.}$

• Soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$,

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\cdot\ln(k+1)} &= \frac{\ln(k+1)-\ln(k)}{\ln(k)\cdot\ln(k+1)}\\ &= \frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}.\end{aligned}$$

Calculons les sommes partielles.
Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\cdot\ln(k+1)} &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)}\\ &= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}.\end{aligned}$$

Il vient : $\qquad \boxed{\mathrm{B} = \sum_{k=2}^{+\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\cdot\ln(k+1)} = \dfrac{1}{\ln(2)}.}$

Solution 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}&u_{n+1}-u_n\\ &= \sum_{k=(n+1)+1}^{2(n+1)}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+2}^{2n+2}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\\ &= \left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}+\sum_{k=n+2}^{2n}\frac{1}{k}\right)\\ &\qquad -\left(\frac{1}{n+1}+\sum_{k=n+2}^{2n}\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.\end{aligned}$$

On en déduit l'équivalence :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \boxed{\frac{1}{4n^2}.}$$

Par *le critère d'équivalence* des séries à termes positifs, les séries $\sum u_{n+1}-u_n$ et $\sum 1/4n^2$ sont de même nature. Or, la série $\sum 1/4n^2$ est convergente. Concluons :

$$\boxed{\text{La série } \sum u_{n+1}-u_n \text{ converge.}}$$

En reprenant le raisonnement de la méthode, c'est équivalent à

$$\boxed{\text{La suite de terme général } u_n \text{ converge.}}$$

On démontre que la limite de cette suite est $\ln(2)$.

Solution 9.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1$. L'expression $\ln\left(\mathrm{e}^x - x\right)$ a donc bien un sens. Elle est de plus positive. La suite $(x_n)_n$ est donc bien définie et positive.

2.a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$x_{n+1} = \ln\left(\mathrm{e}^{x_n} - x_n\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{\ln\left(\mathrm{e}^{x_n}-x_n\right)} = \mathrm{e}^{x_n} - x_n.$$

D'où, $\boxed{x_n = \mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{x_{n+1}}.}$

2.b) D'après la question 1), la suite $(x_n)_n$ est positive. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{x_{n+1}} = x_n \geqslant 0 \quad \text{Donc} \quad \mathrm{e}^{x_n} \geqslant \mathrm{e}^{x_{n+1}}.$$

Enfin, par croissance de la fonction logarithme, $x_n \geqslant x_{n+1}$. Finalement,

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ est décroissante.}}$$

La suite $(x_n)_n$ est décroissante et minorée, d'après *le théorème de convergence monotone*, la suite est convergente. Notons ℓ sa limite. Passons à la limite dans la relation de la question 2 a), par continuité de la fonction exponentielle,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{x_{n+1}} \quad \text{donc} \quad \ell = \mathrm{e}^{\ell} - \mathrm{e}^{\ell} = 0.$$

Finalement, $\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.}$

3. Prouvons la convergence et le calcul de la somme en explicitant les sommes partielles. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} x_n = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{x_n} - \mathrm{e}^{x_{n+1}} = \mathrm{e}^{x_0} - \mathrm{e}^{x_{\mathrm{N}+1}} \qquad \text{(télescopage).}$$

Or, $x_0 = 1$, et par continuité de l'exponentielle (en 0),

$$x_{\mathrm{N}+1} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{x_{\mathrm{N}+1}} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$$

Concluons $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = \mathrm{e} - 1.}$

Solution 10.

1. La famille $(\mathrm{P}_0,\cdots,\mathrm{P}_4)$ est libre car échelonnée en degré. De plus, elle contient autant d'éléments que la dimension de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ (i.e $5 = 4+1$). En conclusion,

$$\boxed{(\mathrm{P}_0,\cdots,\mathrm{P}_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}_4[\mathrm{X}].}$$

En particulier, la famille est génératrice. Les coefficients $\alpha_0,\cdots,\alpha_4$ sont les coordonnées du polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ dans la base $(\mathrm{P}_0,\cdots,\mathrm{P}_4)$.

2.(a) Calculons pour tout $i \in [\![0;4]\!]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}_i(n)}{n!}$.

Fixons $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{P}_0(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n!}.$$

On reconnaît les sommes partielles d'une série exponentielle :

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n!} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

$$\text{et} \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{P}_1(n)}{n!} &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n-1)!} \\ &\underset{k=n-1}{=} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{k!} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}. \end{aligned}$$

$$\text{Puis,} \quad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{P}_2(n)}{n!} &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{n(n-1)}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{n(n-1)}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n-2)!} \\ &\underset{k=n-2}{=} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-2} \frac{1}{k!} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}. \end{aligned}$$

De même, on prouve que pour tout indice i,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{P}_i(n)}{n!} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}.}$$

2.(b) De plus,

$$\frac{\mathrm{P}(n)}{n!} = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \frac{\mathrm{P}_i(n)}{n!}.$$

Par linéarité, on a la convergence de la série avec :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(n)}{n!} &= \sum_{i=0}^{4} \alpha_i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}_i(n)}{n!} \\ &= \sum_{i=0}^{4} \alpha_i e \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{P}(n)}{n!} = \boxed{\mathrm{e} \sum_{i=0}^{4} \alpha_i.}$$

3. Déterminons les coordonnées du polynôme

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2,$$

dans la base $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3,\mathrm{P}_4)$.
Il existe $\alpha_0,\cdots,\alpha_4$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \alpha_0\mathrm{P}_0(\mathrm{X}) + \alpha_1\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) + \alpha_2\mathrm{P}_2(\mathrm{X}) \\ + \alpha_3\mathrm{P}_3(\mathrm{X}) + \alpha_4\mathrm{P}_4(\mathrm{X}). \end{aligned}$$

Comme P est de degré 3, on a directement

$$\alpha_4 = 0.$$

Évaluons en les racines des polynômes.

$X \leftarrow 0,$

$$\mathrm{P}(0) = \alpha_0 \mathrm{P}_0(0) + \alpha_1 \mathrm{P}_1(0) + \alpha_2 \mathrm{P}_2(0) + \alpha_3 \mathrm{P}_3(0).$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(0) = \alpha_0.$$

$X \leftarrow 1,$

$$\mathrm{P}(1) = \alpha_0 \mathrm{P}_0(1) + \alpha_1 \mathrm{P}_1(1) + \alpha_2 \mathrm{P}_2(1) + \alpha_3 \mathrm{P}_3(1).$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(1) = \alpha_0 + \alpha_1.$$

$X \leftarrow 2,$

$$\mathrm{P}(2) = \alpha_0 \mathrm{P}_0(2) + \alpha_1 \mathrm{P}_1(2) + \alpha_2 \mathrm{P}_2(2) + \alpha_3 \mathrm{P}_3(2).$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(2) = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2.$$

$X \leftarrow 3,$

$$\mathrm{P}(3) = \alpha_0 \mathrm{P}_0(3) + \alpha_1 \mathrm{P}_1(3) + \alpha_2 \mathrm{P}_2(3) + \alpha_3 \mathrm{P}_3(3).$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{P}(3) = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3.$$

On obtient un système linéaire triangulaire,

$$\begin{cases} 0 &= \alpha_0 \\ 0 &= \alpha_0 + \alpha_1 \\ 4 &= \alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 18 &= \alpha_0 + 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + 6\alpha_3 \end{cases}.$$

D'où :

$$\boxed{\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 1.}$$

D'après ce qui précède,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - n^2}{n!} = \mathrm{e} \sum_{i=0}^{4} \alpha_i = \boxed{3\mathrm{e}.}$$

Solution 11.

1.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

ab = np.linspace(0,7/2,100) # On trace sur
    l'intervalle [0;7/2]
ord = np.sin(ab)/2+2
plt.plot(ab,ord)
plt.plot(ab,ab)
plt.show()
```

2.(a) On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{2}\cos(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|y - x|.$$

2.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la relation précédente à $y = u_{n+1}$ et $x = u_n$.

$$|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leqslant \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|$$

d'où
$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|u_{n+1} - u_n|$$

C'est-à-dire,
$$\boxed{|v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|v_n|.}$$

Procédons par récurrence sur la propriété :

$$n \in \mathbb{N}, \qquad \mathscr{P}(n) : |v_n| \leqslant \frac{|v_0|}{2^n}.$$

Initialisation. On a bien $|v_0| \leqslant \dfrac{|v_0|}{2^0}$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. D'après ce qui précède :

$$|v_{n+1}| \leqslant \frac{|v_n|}{2} \leqslant \frac{|v_0|/2^n}{2} = \frac{|v_0|}{2^{n+1}}.$$

La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

2.(c) → Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |v_n| \leqslant \frac{|v_0|}{2^n}.$$

→ La série $\sum \dfrac{|v_0|}{2^n}$ est une série géométrique convergente ($1/2 \in]-1;1[$).
Par *le critère de comparaison*, la série $\sum |v_n|$ converge.
Dit autrement, la série $\sum v_n$ converge absolument donc elle converge. Or,

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

On en déduit la convergence de la suite u.

3. La réponse s'effectue en deux temps. Premièrement, il faut justifier que $\ell = f(\ell)$, puis que ℓ est l'unique solution.

- *L'égalité* $\ell = f(\ell)$.

On a,
$$u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

De plus, par continuité de la fonction f,

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

Or, par définition de la suite u,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Par unicité de la limite,

$$\ell = f(\ell).$$

- *Unicité.*

Soient x_1, x_2 deux réels tels que

$$f(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad f(x_2) = x_2.$$

D'après *l'inégalité des accroissements finis* (question 2.(a)).

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Si $x_1 \neq x_2$ alors $|x_1 - x_2| \neq 0$. En divisant par $|x_1 - x_2|$ la relation précédente, il vient $1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. C'est donc absurde et $x_1 = x_2$.
Il y a unicité.

4.(a) Soient $n, \mathrm{N} \in \mathbb{N}$ avec $n < \mathrm{N}$.

$$\sum_{k=n}^{\mathrm{N}} v_k = \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} u_{k+1} - u_k = u_{\mathrm{N}+1} - u_n.$$

Or, $u_{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Par passage à la limite,

$$\boxed{R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k = \ell - u_n.}$$

4.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. *L'inégalité triangulaire dans le cas de séries convergentes* donne

$$|\ell - u_n| \leqslant \left|\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |v_k| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{|v_0|}{2^k}.$$

Or, on admet que $|v_0| \leqslant 1$,

$$|\ell - u_n| \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

On retrouve le reste d'une série géométrique de raison $1/2$,

$$|\ell - u_n| \leqslant \frac{(1/2)^n}{1-1/2} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

5. On définit l'erreur par la quantité $|u_n - \ell|$. D'après ce qui précède, à chaque itération, l'erreur est au moins divisée par 2. Dès que l'erreur est inférieure à ε,

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon,$$

u_n est une approximation de ℓ à ε près.
On complète.

```
def approx(eps) :
    u=1
    erreur=1 # initialisation
    while erreur>eps:
# Tant que l'erreur commise est
# supérieure à la précision demandée,
# on continue
          u=np.sin(u)/2+2
          erreur=erreur/2
# A chaque étape, l'erreur commise
# est au moins divisée par 2.
    return u
```

• Testons :

```
--> l=approx(0.001)    --> sin(1)/2+2
 l  =   2.3542448      ans  =  2.354242
```

Solution 12.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $k \geqslant p$,

$$\frac{\binom{k}{p}}{\frac{k^p}{p!}} = \frac{\frac{k!}{p!(k-p)!}}{\frac{k^p}{p!}} = \frac{1}{k^p} \cdot \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{1}{k^p} \cdot \prod_{i=1}^{p} (k-p+i) = \prod_{i=1}^{p} \frac{k-p+i}{k}.$$

Or, $$\frac{k-p+i}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

par produit, $$\prod_{i=1}^{p} \frac{k-p+i}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

$$\boxed{\binom{k}{p} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}.}$$

Soit $x \in]-1,1[$. À l'aide du résultat précédent puis des croissances comparées,

$$k^2 \binom{k}{p} x^k \sim \frac{k^{p+2} x^k}{p!} \quad \text{et} \quad \frac{k^{p+2}}{p!} x^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où, $$\binom{k}{p} x^k \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Comme la série de Riemann $\sum 1/k^2$ est convergente, le critère de négligeabilité des séries à termes positifs s'applique.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k \text{ converge.}}$$

2.(a) $S_0(x)$ est la série géométrique de raison x. D'après le cours,

$$\boxed{S_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.}$$

2.(b) Soient $x \in]-1,1[$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(1-x)S_{p+1}(x) &= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k}{p+1} (1-x) x^k \\
&= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k}{p+1} x^k - \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k}{p+1} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k}{p+1} x^k - \sum_{i=p+2}^{+\infty} \binom{i-1}{p+1} x^i \\
&= \sum_{i=p+1}^{+\infty} \left(\binom{i}{p+1} - \binom{i-1}{p+1}\right) x^i \\
&= \sum_{i=p+1}^{+\infty} \binom{i-1}{p} x^i
\end{aligned}$$

$$(1-x)S_{p+1}(x) = \sum_{j=p}^{+\infty} \binom{j}{p} x^{j+1} = xS_p(x).$$

2.(c) Fixons $x \in]-1,1[$. D'après ce qui précède,

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad S_{p+1}(x) = \frac{x}{1-x} \cdot S_p(x).$$

$(S_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{x}{1-x}$ et premier terme $S_0 = \frac{1}{1-x}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.}$$

Solution 13.

2.a) Vérifier que f est croissante.

2.b) En utilisant la croissance de f, prouvons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
→ *Initialisation.* On vérifie que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
→ *Hérédité.* Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
On a donc

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

par croissance de f

$$f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$$

c'est-à-dire

$$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$

Ce qui prouve $\mathscr{P}(n+1)$.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

La suite est décroissante et minorée par 0, elle converge.

Si ℓ est la limite, par continuité de f, les égalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

donne par passage à la limite (et unicité de la limite)

$$\ell = f(\ell).$$

Soit $(1+2\ell)\ell = \ell(1+\ell)$. Si $\ell \neq 0$, $1+2\ell = 1+\ell$ est absurde donc $\ell = 0$. Finalement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2.c) Un code possible :

```
def terme_dix(u0):
    u=u0
    for i in range(10):
        u=u*(1+u)/(1+2*u)
    return u
```

3. Par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 0.$$

D'où
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\alpha u_n}{1+\beta u_n} < 1$$

car $\alpha < \beta$. La suite est décroissante et minorée, elle converge. En reprenant le raisonnement précédent, la limite est 0.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n} \cdot \frac{1+\beta u_n}{1+\alpha u_n} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n}\left(\frac{1+\beta u_n}{1+\alpha u_n} - 1\right) \\ &= \frac{1}{u_n}\left(\frac{(\beta-\alpha)u_n}{1+\alpha u_n}\right) = \frac{\beta-\alpha}{1+\alpha u_n} \\ v_{n+1} - v_n &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha \end{aligned}$$

car on a vu que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. D'après la propriété $(\mathscr{P})$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha.$$

D'où par télescopage

$$\frac{v_n - v_0}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha, \quad \text{puis} \quad \frac{v_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha.$$

Comme $\beta - \alpha \neq 0$ et $v_n = 1/u_n$,

$$n\frac{1}{u_n} \sim \beta - \alpha, \quad \text{soit} \quad u_n \sim \frac{1}{n(\beta-\alpha)}.$$

6. Par élévation à la puissance γ,

$$u_n{}^\gamma \sim \frac{\text{Cste}}{n^\gamma}.$$

On a par les critères de Riemann et d'équivalence de séries à termes positifs, il y a convergence si et seulement si $\gamma > 1$.

Solution 14.

Voir cours.

Solution 15.

Voici les résultats.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$5 - 3x + 4x^2 + 4x^5 - 12x^7 \underset{x\to 0}{=} 5 - 3x + 4x^2 + o(x^3).$$

2. Pour $x \in]-1, +\infty[$,

$$\cos(x) + \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - x^2 + o(x^2).$$

3. Pour $x \in]-1, +\infty| \setminus \{0\}$,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2).$$

4.

$$\ldots$$

5.

$$\ldots$$

6. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 + x + x^4 + e^x \underset{x\to 0}{=} 3 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

7. Pour $x \in [-1, +\infty[$,

$$(3x^8 - 14x^6 + 13x^5 + 5x^3 - x^2 + 1)(1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + o(x^2).$$

8. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

9. Pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{3 + x^2 + x^3 + \ln(1+x)}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 3 + 4x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

10. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(\sin x)^2 \cos(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).$$

11. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4).$$

12. Pour $x \in]-1, +\infty[$,

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x^n).$$

En effet, cela devient quasiment immédiat quand on pense à remarquer que

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n),$$

et donc aussi que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x) + o(x^n).$$

Solution 16.

1. Soit $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 - \sin(x)^2}{x^2 \sin(x)^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{(x^4/3) + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \underset{x\to 0}{=} \frac{(1/3) + o(1)}{1 + o(1)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. Rappelons que $e^t \underset{t\to 0}{=} 1 + t + o(t)$, donc, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + o\left(x^2\right).$$

Avec $$\cos(x) \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right),$$
on obtient
$$e^{x^2} - \cos(x) \underset{x\to0}{=} \frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right),$$
et donc, pour $x \neq 0$,
$$\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} \underset{x\to0}{=} \frac{3}{2} + o(1) \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.$$

3. Pour $x \in]-1, +\infty[$ tel que $x \neq 0$, on a
$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} &= \frac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)}\\ &\underset{x\to0}{=} \frac{-x^2/2 + o\left(x^2\right)}{x^2 + o\left(x^2\right)} = \frac{-1/2 + o(1)}{1 + o(1)}.\end{aligned}$$
Cela permet de conclure :
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Solution 17.

Considérons la fonction
$$g : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto 3^x + 5^x - 7^x \in \mathbb{R}$$
de sorte que, trouver un réel x tel que $3^x + 5^x = 7^x$ est équivalent à trouver un réel x tel que $g(x) = 0$. De plus,
$$g(1) = 1, \quad g(2) = 3^2 + 5^2 - 7^2 = -15 < 0.$$
Comme, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$,
$$x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \alpha^x = \exp(x\ln(\alpha)),$$
est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ par composition, g est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ par somme. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c (compris entre 1 et 2) tels que $g(c) = 0$. Un tel c est solution du problème.

Solution 18.

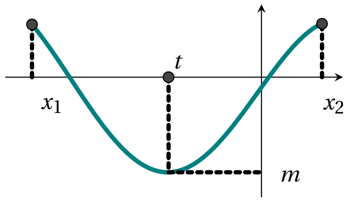
1. Soit $y_0 \in \mathbb{R}$. Considérons le polynôme $Q = P - y_0$. Suivant le signe du coefficient dominant de Q,
$$Q(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad Q(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$$
ou $$Q(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad Q(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Le polynôme Q est continue sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et le théorème des valeurs intermédiaires s'applique. Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x_0) = 0$. Puis $P(x_0) = y_0$. En résumé, tout réel admet au moins un antécédent par P.

$$\boxed{\text{P est surjective.}}$$

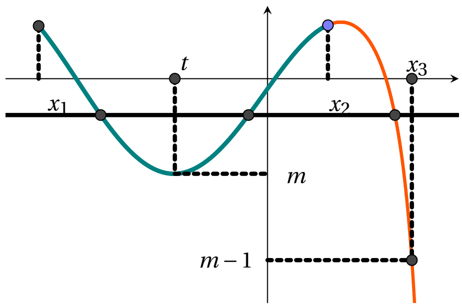
2. La réciproque est fausse. Si P est de degré pair, non constant.
$$P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{ou} \quad P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$
On montre alors que P admet un minimum (ou un maximum). P ne peut être surjective.

Solution 19.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un réel avec deux antécédents. On suppose donc l'existence de x_1 et x_2 tels que
$$x_1 < x_2 \quad \text{et} \quad f(x_1) = f(x_2).$$
Par continuité de f sur le segment $[x_1, x_2]$, on peut définir
$$m = \min_{[x_1,x_2]} f \quad \text{et} \quad M = \max_{[x_1,x_2]} f.$$
Notons que
$$m \leqslant f(x_1) = f(x_2) \leqslant M.$$
Il n'est pas possible d'avoir $m = M$ sans contredire avec l'hypothèse sur le nombre d'antécédents. Traitons le cas $m < f(x_1)$, le cas $M > f(x_1)$ étant symétrique. Par définition du minimum, il existe $t \in]x_1, x_2[$ tel que $m = f(t)$.



Le réel $m-1$ admet au moins un antécédent par f, notons x_3 un antécédent. Par symétrie, on peut supposer comme dans la figure $x_2 < x_3$. On constate alors que tout réel strictement compris entre $]f(x_1), m[$ admet au moins trois antécédents : un dans $]x_1, t[$, un dans $]t, x_2[$ et un troisième dans $]x_2, x_3[$. C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. On a donc une contradiction, le réel ne peut avoir deux antécédents.
Finalement, tout réel admet un unique antécédent par f, c'est la définition de la bijection de f.



Solution 20.

1.a) La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions (exp et $x \mapsto -x^2$) dérivables sur $\mathbb{R}$.
Par produit avec la fonction polynomiale $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f_0'(x) = -2xe^{-x^2}.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned}f_n'(x) &= -2x \cdot x^n e^{-x^2} + nx^{n-1} \cdot e^{-x^2}\\ &= (-2x^2 + n)x^{n-1}e^{-x^2}\\ &= 2(\sqrt{n/2} - x)(\sqrt{n/2} + x)x^{n-1}e^{-x^2}.\end{aligned}$$

1.b) f_n est une fonction paire ($\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = f_n(-x)$) si n est un nombre pair (il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$).
f_n est une fonction impaire lorsque n est un nombre impair.

1.c) On constate que pour $x \in \mathbb{R}^+$, le signe de $f_n'(x)$ dépend du signe de $\sqrt{n/2} - x$. Ainsi, $f_n'(x)$ est positif si $x \in [0, \sqrt{n/2}]$ et négatif si $x \in [\sqrt{n/2}, +\infty[$. Ainsi, f_n est croissante sur $[0, \sqrt{n/2}]$ et décroissante sur $[\sqrt{n/2}, +\infty[$. On a un maximum en $\sqrt{n/2}$.
Pour obtenir le graphe sur $\mathbb{R}$, il suffit de faire la symétrie :

- suivant l'axe des ordonnées si n est pair.
- centrale par rapport à l'origine si n est impair.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2} + x^n\mathrm{e}^{-x^2} = (x-1)x^n\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Si $x \in [0,1]$, la différence est négative, si $x \geqslant 1$, elle est positive. Sur $[0,1]$ la courbe représentative de f_n est au-dessus de celle de f_{n+1}. Cela s'inverse sur $[1,+\infty]$.

3.a) Soit $n \geqslant 2$. Posons $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f_n(x) - (1-x)$. g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ avec $g_n(0) = -1 < 0$ et $g_n(1) = f_n(1) = e^{-1} > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, g_n s'annule *au moins* une fois sur $[0,1]$.
Montrons que cela n'arrive qu'une fois sur $\mathbb{R}^+$.
Premièrement, si $x \in [1,+\infty[$, on a $g_n(x) \geqslant f_n(x) > 0$.
De plus, g_n est aussi dérivable sur $[0,1]$ avec

$$g_n'(x) = f_n'(x) + 1 > 0.$$

g_n est strictement positive sur $[0,1]$, elle ne peut s'annuler qu'une seule fois sur $[0,1]$. On peut noter x_n, cette unique solution. On a bien $x_n \in [0,1]$.

3.b) Par exemple :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def graphefn(n) :
    x=np.linspace(0,2,200)
    y=(x**n)*np.exp(-x**2)
    plt.plot(x,y)
    plt.plot(x,1-x)
    plt.show()
```

3.c) On conjecture que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. D'après la question 2, la courbe de f_{n+1} est en dessous de celle de f_n (sur $[0;1]$). Par conséquent, elle intersecte la droite d'équation $y = 1-x$ après la courbe de f_n. Comme l'abscisse du point d'intersection de la droite et de la courbe de f_n est x_n, on a bien $x_{n+1} \geqslant x_n$.
La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et majorée par 1. Par le théorème de la limite monotone, elle converge.

3.d) Précisons que $\ell \in [0,1]$. Raisonnons par l'absurde en supposant $0 \leqslant \ell \neq 1$. Ainsi $\ell < 1$. Comme la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante, on a pour $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant x_n \leqslant \ell \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant {x_n}^n \leqslant \ell^n.$$

De plus $\ell \in]-1;1[$ et $\ell^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, la suite $({x_n}^n)_{n\geqslant 2}$ tend vers 0. Or, par définition de la suite $({x_n}^n)_{n\geqslant 2}$, on a pour tout $n \geqslant 2$,

$$f_n(x_n) = 1 - x_n \quad \Rightarrow \quad {x_n}^n\mathrm{e}^{-x_n^2} = 1 - x_n$$

$$\Rightarrow \quad {x_n}^n = (1-x_n)\mathrm{e}^{x_n^2}.$$

Par continuité de l'application $x \mapsto (1-x)\mathrm{e}^{x^2}$, on a aussi

$$(1-x_n)e^{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-\ell)\mathrm{e}^{\ell^2}.$$

$${x_n}^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (1-\ell)\mathrm{e}^{\ell^2}.$$

Or cette limite n'est pas nulle. On a une contradiction avec l'unicité de la limite.

La suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ tend vers 1.

3.e) D'après ce qui précède, la bonne limite de $({x_n}^n)$ est 0.

Solution 21.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P. Il se factorise en n polynômes de degré 1 dont les n racines sont distinctes. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ces n racines classées par ordre croissant : $a_1 < a_2 < \ldots a_n$.
Pour chaque indice i entre 1 et $n-1$, la fonction polynomiale $\mathrm{P} : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{P}(x)$ est continue sur $\left[a_i, a_{i+1}\right]$, dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$ et $\mathrm{P}\left(a_i\right) = \mathrm{P}\left(a_{i+1}\right) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que : $\mathrm{P}'\left(b_i\right) = 0$.
On a : $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \cdots < a_{n-1} < b_{n_1} < a_n$. Donc les valeurs $b_1, b_2, \cdots b_{n-1}$ sont distinctes. Le polynôme P' admet, dans $\mathbb{R}$, $n-1$ racines distinctes. Or, il est de degré $n-1$, donc il n'admet pas d'autre racine et il se factorise entièrement avec des polynômes de degré 1.
Conclusion : P' est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

Solution 22.

La fonction W *est connue sous le nom de fonction de Lambert.*

1. f est dérivable sur I en tant que produit de fonctions dérivables sur I.
Pour $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$. On constate que pour tout $x \in \mathrm{I} \setminus \{-1\}$, $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur l'intervalle I. *Remarque* Il ne faut pas oublier de préciser que l'on se place sur un intervalle. On pourra penser à $x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x$ pour un contre-exemple. La dérivée est bien négative mais la fonction n'est pas strictement décroissante. $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

De plus, $\qquad f(-1) = -1/\mathrm{e} \quad$ et $\quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

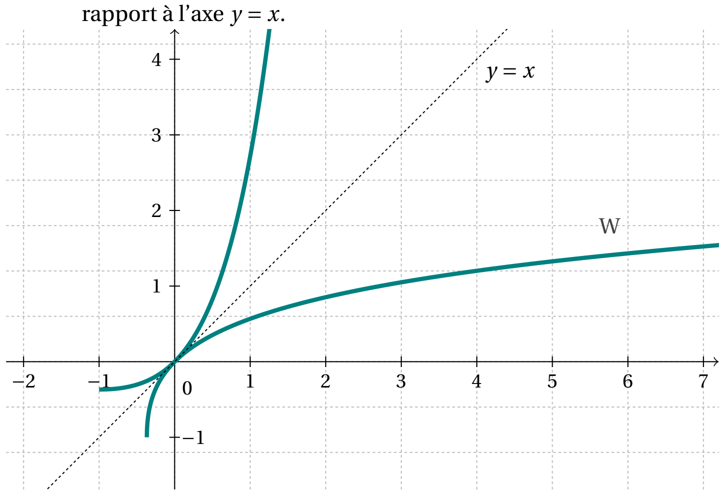
D'après *le théorème de la bijection,*

$$\boxed{f \text{ définit une bijection de } [-1,+\infty[\text{ dans } [-1/\mathrm{e},+\infty[.}$$

2. De nouveau, *le théorème de la bijection* précise que l'application réciproque est continue et la réciproque a le même sens de variation que la fonction. Ici,

$$\boxed{\mathrm{W} \text{ est strictement croissante sur J.}}$$

3. Pour obtenir le graphe de W, il suffit de faire la symétrie par rapport à l'axe $y = x$.



4.a) Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = \mathrm{e}$, on a $\mathrm{W}(0) = 0$ et $\mathrm{W}(\mathrm{e}) = 1$.

4.b) Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) \neq 0$. Précisons que $f(-1) = -1/\mathrm{e}$ et $f'(-1) = 0$. Il faut donc exclure $-1/\mathrm{e}$ de l'ensemble de dérivation de W. D'après *le théorème de dérivation des* *applications réciproques*, W est dérivable sur $J \setminus \{-1/e\}$ avec pour tout $x > -1/e$,

$$\begin{aligned}
W'(x) &= \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} \text{ car } f^{-1} = W \\
&= \frac{1}{f'\big(W(x)\big)} \text{ car } f'(t) = (1+t)e^t \\
&= \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}} \\
&= \frac{1}{x + e^{W(x)}}.
\end{aligned}$$

4.c) L'équation de la tangente en 0 est $y = W'(0)(x-0) + W(0)$. Or, on a vu

$$W(0) = 0 \quad \text{et} \quad W'(0) = \frac{1}{0 + e^{W(0)}} = 1, \quad \text{d'où,} \quad \boxed{\mathcal{T}_0 : y = x.}$$

- Comme $W(e) = 1$, $W'(e) = 1/(e + e^{W(e)}) = 1/(2e)$.
  L'équation de la tangente en e est

$$\boxed{\mathcal{T}_e : y = \frac{1}{2e}(x - e) + 1.}$$

Solution 23.

1. La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après l'*égalité des accroissements finis*, il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que :

$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(\alpha).$$

Par hypothèse, $g'(\alpha) \neq 0$. Ainsi :

$$\boxed{g(b) - g(a) \neq 0.}$$

2. Posons $h : x \mapsto f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. Elle est dérivable sur $]a,b[$.

$$\forall x \in]a,b[,\ h'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)).$$

On a : $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Comme h est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, on sait d'après le théorème de Rolle qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $h'(c) = 0$. On a alors : $f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$.
Finalement : Il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3.a) Soit $x \in I$. Il existe d'après ce qui précède c_x compris entre a et x tel que

$$\frac{f'(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Par encadrement $c_x \underset{x \to a}{\longrightarrow} a$ et par continuité de f' et g'

$$f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a) \quad \text{et} \quad g'(c_x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} g'(a).$$

D'où

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \ell.$$

Remarque. La continuité de f' et g' est importante pour cette preuve mais on peut se limiter à f, g dérivables sur I et écrire les $DL_1(a)$

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)(x-a) + o_a(x-a)}{g'(a)(x-a) + o_a(x-a)} = \frac{f'(a) + o_a(1)}{g'(a) + o_a(1)}$$

D'où

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

3.b) Pour $x \in]0;+\infty[$, on pose les fonctions f, g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = (x-1) - \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = (x-1)^2$$

et $\qquad f'(x) = (x-1)/x, \quad g'(x) = 2(x-1).$

On constate que le résultat de la question 2 s'applique ($a = 1$, $f(a) = g(a) = 0$). On trouve finalement $1/2$.

Solution 24.

Commentaire. Un classique où l'on montre que la seule fonction dérivable qui vérifie la relation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{et} \quad f'(0) = 1$$

est la fonction exponentielle.

1. On raisonne par analyse-synthèse.
- Analyse (recherche des conditions nécessaires).

Supposons qu'une telle fonction f existe. Si on teste la relation pour $x = y = 0$, il vient :

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \text{ donc } f(0) = 0.$$

Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Posons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x+y)$. La fonction g est dérivable par composée de fonctions dérivables (f et la fonction affine $a : x \mapsto x + y$). Ainsi, par la formule des dérivées composées :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (f \circ a)'(x) = a'(x) \times f'(a(x))$$

i.e. $\qquad g'(x) = f'(x+y).$

Or, par hypothèse : $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) + f(y)$. D'après cette nouvelle expression, la dérivée est aussi :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= f'(x). \\
f'(x+y) &= f'(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x+y) = f'(x)$$

En particulier, pour $x = 0, f'(y) = f(0)$. Comme cette égalité est valable pour tout $y \in \mathbb{R}, f'$ est une fonction constante. On sait alors que f est une fonction affine. Comme $f(0) = 0$, f est linéaire.

- Synthèse (recherche des conditions suffisantes).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction linéaire. Autrement dit, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha x$$

On a alors pour $x, y \in \mathbb{R}$: $\quad f(x+y) = a(x+y) = \alpha x + \alpha y = f(x) + f(y)$. f est solution de l'équation fonctionnelle. • Conclusion. Les seules fonctions solutions sont $x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha x \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.(a) Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. On en déduit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f((x - x_0) + x_0) = f(x - x_0) \times f(x_0) = 0.$$

Si f s'annule au moins une fois, f est la fonction nulle.

2.(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a d'après la relation fonctionnelle :

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

La fonction f est donc positive. Puisque cette fonction est non nulle, le résultat de la question précédente permet de justifier qu'elle est même strictement positive.

Commentaire. On aurait pu prouver que f est de signe constant en raisonnant par l'absurde. Si f change de signe, le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue) justifie l'existence d'une valeur d'annulation de f, ce qui est absurde d'après le point précédent.

2.(c) Posons $g = \ln \circ f$. Précisons que g est bien définie puisque f est strictement positive. g est aussi dérivable par composition. Soient $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

donc $\ln(f(x+y)) = \ln(f(x) \times f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y))$.

Ainsi : $$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

La fonction g est solution de la relation fonctionnelle de la question 1, donc g est linéaire et il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha x \quad \text{i.e.} \quad f(x) = \mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Finalement : Les solutions non nulles sont $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x} \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.(d) Justifions que si f est dérivable en 0 et solution de l'équation fonctionnelle alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Notons que $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$. Ainsi,

- si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle;
- sinon $f(0) = 1$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{f(a)f(h) - f(a)f(0)}{h} \\ &= f(a) \cdot \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f(a) \cdot f'(a).\end{aligned}$$

En particulier, f est dérivable en a. On retrouve exactement les hypothèses des questions précédentes. De nouveau, les seules solutions sont la fonction nulle et les fonctions exponentielles $x \mapsto e^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Solution 25.

- On utilise l'encadrement suivant

$$\forall t \in [0;1], \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^{-nt} \cos(t/n) \leqslant \mathrm{e}^{-nt}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \mathrm{K}_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Par encadrement, $$\boxed{\mathrm{K}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.}$$

- On utilise l'inégalité « classique », $0 \leqslant \sin(t) \leqslant t$, valable pour tout $t \in [0;\pi]$.

Pour démontrer, cette inégalité, on peut étudier la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x - \sin(x)$. Ainsi,

$$0 \leqslant \mathrm{L}_n \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Par encadrement, $$\boxed{\mathrm{L}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Solution 26.

Par intégration par parties, les applications $t \mapsto \cos(t)$, $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto \mathrm{e}^t$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= \left[\sin(t)e^t\right]_0^x - \int_0^x \cos(t)e^t\,\mathrm{d}t \\ &= \sin(x)e^x - \mathrm{C}. \\ \mathrm{C} &= \left[\cos(t)e^t\right]_0^x - \int_0^x -\sin(t)e^t\,\mathrm{d}t \\ &= \cos(x)e^x - 1 + \mathrm{S}.\end{aligned}$$

De ces deux relations, on déduit que :

$$\mathrm{S} = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x + 1 - \mathrm{S},$$

d'où

$$2\,\mathrm{S} = 1 + e^x(\sin(x) - \cos(x))$$

D'où, $$\boxed{\mathrm{S} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^x(\sin(x) - \cos(x)).}$$

Puis, $\mathrm{C} = \cos(x)e^x - 1 + \mathrm{S}$, et

$$\boxed{\mathrm{C} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^x(\sin(x) + \cos(x)).}$$

Solution 27.

On effectue le changement de variable $\mathscr{C}^1$ $u = \ln(t)$, $\mathrm{e}^u = t$

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t.$$

De plus, lorsque t varie de 1 à e, u varie de 0 à 1.

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln(t)}} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^u\sqrt{1+u}} = \int_0^1 (1+u)^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{1}{2}(1+u)^{1/2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.\end{aligned}$$

Solution 28.

1. L'application cos est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, et : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}], \cos(t) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1] \subset \mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\frac{\pi}{4} - x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

   Par composition, les applications $t \mapsto \ln\big(\cos(t)\big)$ et $x \mapsto \ln\Big(\cos\big(\frac{\pi}{4} - x\big)\Big)$ sont continues sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, car ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et cos est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Ainsi les intégrales I et J sont bien définies.

2. Avec le changement de variable affine « $x = \frac{\pi}{4} - t$ » (donc « $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ ») :

$$\mathrm{I} \underset{x = \frac{\pi}{4} - t}{=} \int_{\pi/4}^0 -\ln\Big(\cos\big(\frac{\pi}{4} - x\big)\Big)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{I} = \mathrm{J}.}$$

3. Remarquons que tan est continue et positive ou nulle sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, il en résulte par composition que l'application $t \mapsto \ln\big(1 + \tan(t)\big)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Puis :

$$\mathrm{A} = \int_0^{\pi/4} \ln\big(1 + \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \ln\big(\frac{\cos(t) + \sin(t)}{\cos(t)}\big)\,\mathrm{d}t.$$

Or : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(t) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$, donc :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{\cos(t)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\sqrt{2}\right)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\mathrm{d}t \\ &\quad - \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos(t)\right)\mathrm{d}t \\ A &= \frac{\pi}{8}\ln(2) + J - I = \boxed{\frac{\pi}{8}\ln(2)} \text{ (car } I = J) \end{aligned}$$

Solution 29.

Posons $g : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto f(x) - e^{-x}$. Montrons que g s'annule au moins une fois. Raisonnons par l'absurde en supposant que g ne s'annule pas. Comme g est continue, cela revient à supposer que g est de signe constant (c'est le théorème des valeurs intermédiaires). De plus,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Par linéarité $\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ existe et

$$\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Comme g est de signe constant positive, g est nulle sur $\mathbb{R}^+$. Absurde. Il existe donc $c \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire

$$f(c) = e^{-c}.$$

Solution 30.

1.

$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{d}t = [t]_0^1 = \boxed{1} \quad \text{et}$$

$$I_1 = \int_0^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

2.a) Intégrons par parties en considérant les fonctions u et v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ avec :

$$\forall t \in [0,1], \quad \begin{cases} u(t) &= t \\ u'(t) &= 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(t) &= (1-t^2)^{n+1} \\ v'(t) &= -2(n+1)t(1-t^2)^n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \underbrace{\left[t(1-t^2)^{n+1}\right]_0^1}_{=0} + 2(n+1)\textstyle\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t \\ &= 2(n+1)\textstyle\int_0^1 \left((t^2-1)+1\right)(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = 2(n+1)(I_n - I_{n+1}). \end{aligned}$$

2.b) Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathscr{P}(n) \quad : \quad I_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- *Initialisation.* $I_0 = 1 = \frac{4^0(0!)^2}{1!}$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie
- *Hérédité.* Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

La question précédente permet d'exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.

$$\begin{aligned} I_{n+1} \underset{1.b)}{=} \frac{2n+2}{2n+3}I_n &\underset{\mathscr{P}(n)}{=} \frac{2n+2}{2n+3}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2(n+1)}{2n+3}\frac{2(n+1)}{2n+2}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+3)!}. \end{aligned}$$

Donc, si $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion.* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.}$

3. Posons *le changement de variable* $t = \sin(u)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ (« $\mathrm{d}t = \cos u\,\mathrm{d}u$ »).

$$\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \left(1-(\sin u)^2\right)^n (\cos u\,\mathrm{d}u) = \int_0^1 (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = I_n.$$

Dès lors, $$\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1}\,\mathrm{d}u = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Remarque. Ces dernières intégrales — un classique des concours — sont connues sont le nom d'*intégrales de Wallis*, d'après John Wallis, mathématicien britannique du XVIIᵉ siècle.

Solution 31.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$ avec $0 < x \leqslant y$ alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $0 < t + x \leqslant t + y$ d'où $\frac{e^t}{t+x} \geqslant \frac{e^t}{t+y}$. Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{e^t}{t+y}\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui revient à écrire :

$$F(x) \geqslant F(y).$$

$$\boxed{\text{La fonction F est décroissante sur } \mathbb{R}_*^+.}$$

2. L'application $t \longmapsto u = t + x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $[x, x+1]$. On peut effectuer le changement de variable affine $u = t + x$ et on obtient

$$F(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^{u-x}}{u}\,\mathrm{d}u = e^{-x}\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u$$

3. Soit G une primitive de la fonction $u \longmapsto \frac{e^u}{u}$. On a alors $F(x) = e^{-x}[G(x+1) - G(x)]$. Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ par différence et sa dérivée F' est définie par :

$$F'(x) = -e^{-x}[G(x+1) - G(x)] + e^{-x}\left[G'(x+1) - G'(x)\right].$$

Puis, $F'(x) = -F(x) + e^{-x}\left[\frac{e^{x+1}}{x+1} - \frac{e^x}{x}\right]$. Finalement

$$F'(x) + F(x) = \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $t \longmapsto \frac{1}{t+x}$ est décroissante sur $[0,1]$ donc :

$$0 \leqslant \frac{1}{t+x} \leqslant \frac{1}{x}$$

et en multipliant cette inégalité par e^t, qui est strictement positif, on obtient

$$0 \leqslant \frac{e^t}{t+x} \leqslant \frac{e^t}{x}$$

d'où : $$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire $$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{e-1}{x}.$$

Par encadrement, on conclut que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 0.}$$

Solution 32.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in [1,e]$, on a $1+x^2t^2 \geqslant 1 > 0$, donc la fonction rationnelle $t \mapsto \dfrac{1}{1+x^2t^2}$ est définie sur $[1,e]$, et y est continue. Comme ln est continue sur [1, e], l'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+x^2t^2}$ est continue sur $[1,e]$, et l'intégrale $\varphi(x)$ est définie. De plus, on a : pour tout $t \in [1,e]$, $\ln(t) \geqslant 0$, avec $\ln(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 1$.
Ainsi l'application $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+x^2t^2}$ est continue et positive ou nulle sur [1, e], et non identiquement nulle, on peut alors affirmer que

$$\boxed{\varphi(x) = \int_1^e \frac{\ln(t)}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t > 0.}$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(-x) = \int_1^e \frac{\ln(t)}{1+(-x)^2t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{\ln(t)}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t = \varphi(x).$$

On conclut que $\boxed{\varphi \text{ est paire.}}$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Pour tout $t \in [1,e]$.

$$\begin{aligned}
&0 < 1+x^2t^2 < 1+y^2t^2\\
&\quad\text{car } u \mapsto t^2u^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\\
&\Rightarrow \frac{1}{1+x^2t^2} > \frac{1}{1+y^2t^2}\\
&\quad\text{car } u \mapsto \frac{1}{u} \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*\\
&\Rightarrow \frac{\ln(t)}{1+x^2t^2} \geqslant \frac{\ln(t)}{1+y^2t^2}\\
&\quad\text{car } \ln(t) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_1^e \frac{\ln(t)}{1+y^2t^2}\,\mathrm{d}t$, c'est à dire $\varphi(x) \geqslant \varphi(y)$.
On conclut que $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$

3. Soient $x, x_0 \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\varphi(x)-\varphi(x_0) &= \int_1^e \frac{\ln(t)}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t - \int_1^e \frac{\ln(t)}{1+x_0^2t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_1^e \left(\frac{\ln(t)}{1+x^2t^2} - \frac{\ln(t)}{1+x_0^2t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_1^e \ln(t)\frac{(1+x_0^2t^2)-(1+x^2t^2)}{(1+x^2t^2)(1+x_0^2t^2)}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_1^e \frac{t^2\ln(t)(x_0^2-x^2)}{(1+x^2t^2)(1+x_0^2t^2)}\,\mathrm{d}t\\
\varphi(x)-\varphi(x_0) &= (x_0^2-x^2)\int_1^e \frac{t^2\ln(t)}{(1+x^2t^2)(1+x_0^2t^2)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right| &= |x^2-x_0^2|\cdot\left|\int_1^e \frac{t^2\ln(t)}{(1+x^2t^2)(1+x_0^2t^2)}\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant |x^2-x_0^2|\int_1^e \left|\frac{t^2\ln(t)}{(1+x^2t^2)(1+x_0^2t^2)}\right|\mathrm{d}t\\
\left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right| &\leqslant |x^2-x_0^2|\int_1^e \frac{t^2\ln(t)}{(1+x^2t^2)(1+x_0^2t^2)}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

car, pour $t \in [1,e]$, $\dfrac{t^2\ln(t)}{(1+x^2t^2)(1+x_0^2t^2)} \geqslant 0$. De plus,

$$(1+x^2t^2)(1+x_0^2t^2) \geqslant 1,$$

donc $$\frac{t^2\ln(t)}{(1+x^2t^2)(1+x_0^2t^2)} \leqslant t^2\ln(t).$$

La croissance de l'intégrale donne :

$$\boxed{0 \leqslant \left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right| \leqslant |x^2-x_0^2|\int_1^e t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Remarquons que l'intégrale à droite de cette expression ne dépend pas de x. On a directement : $|x^2 - x_0^2|\displaystyle\int_1^e t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$, donc le théorème d'encadrement permet d'affirmer que : $\left|\varphi(x)-\varphi(x_0)\right| \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$,

autrement dit $\varphi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \varphi(x_0)$, ce qui signifie que φ est continue en x_0. Ceci étant valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on conclut que $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

4. On reprend le résultat précédent avec $x_0 = 0$, et $x \in \mathbb{R}^*$, et on divise par $|x|$, cela donne :

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right| \leqslant |x|\int_1^e t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $|x|\displaystyle\int_1^e t^2\ln(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, le théorème d'encadrement permet d'affirmer que

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

ce qui montre que $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en 0 et } \varphi'(0) = 0.}$

5.(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Avec le *changement de variable* affine « $u = xt$ » (donc « $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$ »), on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{x}\int_1^e \frac{\ln(t)}{1+(xt)^2}\,x\,\mathrm{d}t\\
&\underset{u=xt}{=} \frac{1}{x}\int_x^{xe} \frac{\ln(\frac{u}{x})}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{x}\int_x^{xe} \frac{\ln(u)-\ln(x)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

et donc par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_x^{xe} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u - \frac{\ln(x)}{x}\int_x^{xe} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.}$$

5.(b) L'application $u \mapsto \dfrac{\ln(u)}{1+u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons F_1 une primitive de cette application sur $\mathbb{R}_+^*$. L'application $u \mapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, et arctan est une primitive de cette application sur $\mathbb{R}$.
Avec ces notations, le résultat précédent se réécrit : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\big(\mathrm{F}_1(xe) - \mathrm{F}_1(x)\big) - \frac{\ln(x)}{x}\big(\arctan(xe) - \arctan(x)\big).$$

Or les applications F_1, arctan, ln, et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par composition, produits, et sommes, l'application φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Comme de plus φ est paire, on en déduit par symétrie que φ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$, et donc finalement

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*.}$$

Solution 33.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue le changement de variable affine « $u = x - t$ » (donc « $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$ ») :

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t \\ &\underset{u=x-t}{=} \int_x^0 f(x-u)g(u)(-\mathrm{d}u) \\ &= \int_0^x f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

ce qui montre que $f * g(x) = g * f(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on conclut :

$$\boxed{f * g = g * f.}$$

2.(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$\exp * \exp(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{x-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^x.$$

Ainsi : $\boxed{\exp * \exp : x \longmapsto x\mathrm{e}^x.}$

2.(b) Soit $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_n(t) f_m(x-t) \neq 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t > 0 \\ x - t > 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t > 0 \\ t < x \end{array} \right. .$$

- Il en résulte que si $x \leqslant 0$, alors $\mathrm{H}_{n,m}(x) = \displaystyle\int_0^x 0\,\mathrm{d}t = 0$.

De même, $\mathrm{H}_{n+1,m-1}(x) = 0$ quand $x \leqslant 0$, donc on a bien :

$$\mathrm{H}_{n,m}(x) = \frac{m}{n+1}\mathrm{H}_{n+1,m-1}(x) \text{ quand } x \leqslant 0.$$

- Supposons maintenant que $x > 0$. Alors, par intégration par parties, les applications $t \longmapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ et $t \longmapsto (x-t)^m$ étant de classe C^1 sur $[0, x]$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{n,m}(x) &= f_n * f_m(x) \\ &= \int_0^x t^n (x-t)^m\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}(x-t)^m\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1}(-1)m(x-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Le crochet est nul car $n+1 > 0$ et $m > 0$. Il reste :

$$\mathrm{H}_{n,m}(x) = \frac{m}{n+1}\int_0^x f_{n+1}(t) f_{m-1}(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{m}{n+1}\mathrm{H}_{n+1,m-1}(x).$$

- Finalement : $\boxed{\mathrm{H}_{n,m} = \dfrac{m}{n+1}\mathrm{H}_{n+1,m-1} \text{ sur } \mathbb{R}.}$

2.(c) Montrons par récurrence que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathscr{P}(m) : \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{H}_{n,m} = \frac{m!n!}{(m+n)!}\mathrm{H}_{n+m,0}$$

• *Initialisation.* Soit $m = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{0!n!}{(0+n)!} = 1$. Donc $\mathscr{P}(0)$ vraie.

• *Hérédité.* Soit $m \geqslant 0$. Supposons $\mathscr{P}(m)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(m+1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{n,m+1} &\underset{2.(b)}{=} \frac{m+1}{n+1}\mathrm{H}_{n+1,m} \\ &= \frac{m+1}{n+1} \times \frac{m!(n+1)!}{(m+n+1))!}\mathrm{H}_{m+n+1,0} \\ &= \frac{(m+1)!n!}{(m+n+1)!}\mathrm{H}_{m+n+1,0} \end{aligned}$$

• *Conclusion.* D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{H}_{n,m} = \frac{m!n!}{(n+m)!}\mathrm{H}_{m+n,0}.}$$

Calculons $\mathrm{H}_{n+m,0}$. Pour $x \leqslant 0$, on a $\mathrm{H}_{n+m,0}(x) = 0$ (voir 2.(a)). Soit $x > 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_{n+m,0}(x) &= \int_0^x t^{n+m}(x-t)^0\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t^{n+m}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{n+m+1}}{n+m+1}\right]_0^x \\ &= \frac{x^{n+m+1}}{n+m+1}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{H}_{n,m}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ \frac{m!n!}{(n+m+1)!}x^{n+m+1} \text{ si } x > 0. \end{array} \right.}$$

Solution 34.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $t \in [0; \pi/4]$, on a $0 \leqslant \tan t \leqslant 1$. Donc

$$0 \leqslant (\tan t)^{n+1} \leqslant (\tan t)^n.$$

Puis par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/4} (\tan t)^{n+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n\,\mathrm{d}t$$

d'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 0, elle converge d'après le théorème de la limite monotone (et sa limite est positive).

2.a) La fonction tangente est dérivable $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, par formule de la dérivée d'un quotient, pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \frac{\cos^2 x - \left(-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} u_{n+2} + u_n &= \int_0^{\pi/4} \left((\tan t)^{n+2} + (\tan t)^n\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/4} \underbrace{\left(\tan^2 t + 1\right)}_{f'(t)} \underbrace{(\tan t)^n}_{f^n(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/4}. \end{aligned}$$

D'où $\qquad u_{n+2} + u_n = \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$

2.b) Notons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Alors

$$u_{n+2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

donc $\qquad u_{n+2} + u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 2\ell.$

Comme $\qquad \dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$

on obtient par unicité de la limite $2\ell = 0$ soit $\ell = 0$. En conclusion,

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

...

Solution 35.

1. Pour tout $t \in]1,+\infty[$, $f'(t) = -\dfrac{\ln(t)+1}{(t\ln t)^2} < 0$. La fonction f est décroissante.

2.a) Soit $k \geqslant 2$. La fonction f est décroissante sur $]1,+\infty[$, donc, pour tout réel t tel que $k \leqslant t \leqslant k+1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \frac{1}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{k\ln k}.$$

Par croissance de l'intégrale ($k < k+1$), il vient

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k\ln k}.$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \frac{1}{k\ln k}.$$

2.b) En utilisant la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale,

$$\int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int_3^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} + \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \geqslant \int_3^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}.$$

La première inégalité est justifiée.

Pour la seconde inégalité, on somme de 3 à n, l'inégalité de droite de la question précédente. Cela donne

$$\sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

En utilisant la relation de Chasles

$$\int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \mathrm{S}_n.$$

Pour la dernière inégalité, on somme de 2 à $n-1$ l'inégalité de gauche de la question précédente. Cela donne

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}.$$

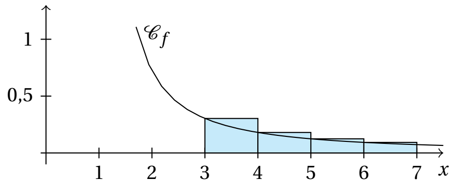
La relation de Chasles pour la somme des intégrales et un changement d'indice pour la somme de gauche donnent :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{p=3}^{n} \frac{1}{p\ln p} \leqslant \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}.$$

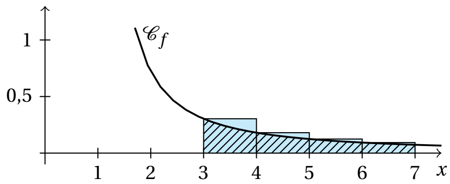
Conclusion, pour tout $k \geqslant 3$,

$$\int_3^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}.$$

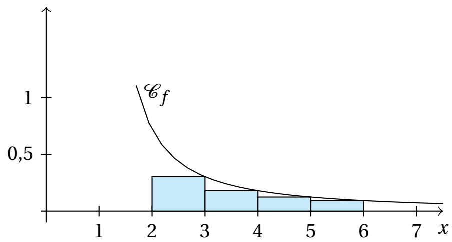
Remarque Illustrons par des dessins l'encadrement de S_6. Selon que les rectangles ont le coin supérieur droit ou gauche sur la courbe, on obtient l'une ou l'autre des inégalités.



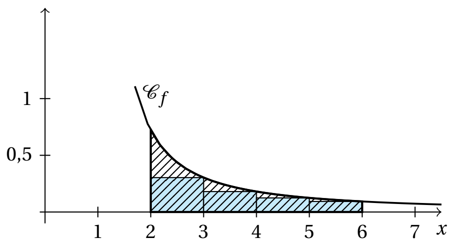
$$\mathrm{S}_6 = \sum_{k=3}^{6} f(k)$$



$$\mathrm{S}_6 \geqslant \int_3^7 f(t)\,\mathrm{d}t$$



$$\mathrm{S}_6 = \sum_{k=3}^{6} f(k)$$



$$\mathrm{S}_6 \leqslant \int_2^6 f(t)\,\mathrm{d}t$$

3. On introduit la fonction $u(t) = \ln t$ pour $t > 0$. On constate que

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \int_a^b \frac{1/t}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{u'(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t = \big[\ln|\ln t|\big]_a^b = \ln|\ln b| - \ln|\ln a|.$$

4.a) Pour tout $n \geqslant 3$, on a donc $\displaystyle\int_3^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 3) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

D'après la question 2 b) $\displaystyle\int_3^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \mathrm{S}_n$. Donc $\mathrm{S}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln k}$ diverge.

4.b) Soit $n \geqslant 3$. L'encadrement de la question 2 b) et la question 4) donnent

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 3) \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

En divisant par $\ln(\ln n)$ qui est positif ($n \geqslant 3 > \mathrm{e}$) :

$$1 - \frac{\ln(\ln 3)}{\ln(\ln n)} \leqslant \frac{\mathrm{S}_n}{\ln(\ln n)} \leqslant 1 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)}.$$

D'après le théorème d'encadrement, il vient $\dfrac{\mathrm{S}_n}{\ln(\ln n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Conclusion $\qquad \mathrm{S}_n \sim \ln(\ln n)$.

Solution 36.

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\quad\text{où}\quad f:x\in[0,1]\mapsto\frac{1}{1+x}.$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à l'application f, qui est continue sur $[0,1]$. On sait alors par théorème que

$$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\Big[\ln(1+x)\Big]_0^1,$$

donc en calculant le crochet : $\boxed{u_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ln(2).}$

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $$g:x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{1+x}{1+x^2}.$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à l'application g, qui est continue sur $[0,1]$. On sait alors par théorème que

$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{k}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On calcule l'intégrale

$$\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\Big[\arctan(x)\Big]_0^1+\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1,$$

et donc après calcul $$v_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2}.$$

3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $w_n>0$, puis

$$\ln(w_n)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à l'application $h:x\mapsto\ln(1+x^2)$, qui est continue sur $[0,1]$ (car pour tout $x\in[0,1]$, $1+x^2>0$ et ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$). On sait alors que

$$\ln(w_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h\left(\frac{k}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

On calcule l'intégrale par intégration par parties, sachant que les applications $x\mapsto x$ et $x\mapsto\ln(1+x^2)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned}\int_0^1\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x&=\Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\ln(2)-\int_0^1\frac{2(1+x^2)-2}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\ln(2)-\int_0^1\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln(2)-\Big[2x-2\arctan(x)\Big]_0^1\end{aligned}$$

$$\int_0^1\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x=\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}.$$

En passant à l'exponentielle (continue)

$$w_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^{\ln(2)-2+\frac{\pi}{2}}=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}-2}.$$

Solution 37.

La suite $(u_n)_n$ n'est pas une somme de Riemann, mais elle ressemble beaucoup à la somme de Riemann $(v_n)_n$ étudiée à l'exercice précédent. On conjecture que la limite est la même. Pour le montrer, on pose $w_n=v_n-u_n$ et on montre que $w_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

• Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}u_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.\end{aligned}$$

Posons $v_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ et $w_n=v_n-u_n$.

• On reconnaît en v_n une somme de Riemann associée à la fonction $f:x\mapsto\dfrac{1+x}{1+x^2}$, qui est continue sur $[0,1]$. On renvoie à l'exercice précédent pour vérifier que

$$v_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2}.$$

• On calcule, en rassemblant les sommes et en mettant au même dénominateur :

$$\begin{aligned}w_n&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{\left(1+\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)-\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(1+\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}\\&=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(1+\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}.\end{aligned}$$

On a tout d'abord : $w_n\geqslant 0$.
Puis on remarque que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $1+\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2\geqslant 1+\left(\frac{k}{n}\right)^2$, donc par passage à l'inverse et multiplication par un nombre positif,

$$\frac{1+\frac{k}{n}}{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(1+\frac{1}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}\leqslant\frac{1+\frac{k}{n}}{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^2}.$$

En sommant, on obtient

$$0\leqslant w_n\leqslant\frac{1}{n}\times\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{k}{n}}{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^2}}_{t_n}.\qquad(*)$$

Notons t_n le nombre indiqué. On reconnaît en t_n une somme de Riemann associée à la fonction $g:x\mapsto\dfrac{1+x}{(1+x^2)^2}$, qui est continue sur $[0,1]$. On sait donc que $t_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$, et il en résulte que $\dfrac{1}{n}t_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.
Ceci, avec la relation $(*)$, permet d'appliquer le théorème d'encadrement pour conclure que $w_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.
• Finalement, on a :

$$u_n=v_n-w_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2}.$$

Solution 38.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto 1/\left(1+x^3\right)^n$ est définie, continue et positive sur $[0;+\infty[$. On a donc une intégrale généralisée en $+\infty$.
De plus,

$$\frac{1}{\left(1+x^3\right)^n} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{3n}}$$

Comme $n \geqslant 1, 3n \geqslant 3 > 1$. Par le critère d'équivalence pour des fonctions positives et une comparaison à une intégrale de Riemann, on en déduit la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x$. Puis l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x$.

2. Soit un réel $\mathrm{A}>0$.

$$\mathrm{I}_{n+1}(\mathrm{A}) = \int_0^{\mathrm{A}} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{A}} \frac{1+x^3-x^3}{\left(1+x^3\right)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

$$= \int_0^{\mathrm{A}} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,dx - \int_0^{\mathrm{A}} x^3\left(1+x^3\right)^{-n-1}\,\mathrm{d}x$$

On pose $u(x)=x$ et $v(x) = -\frac{1}{3n}\left(1+x^3\right)^{-n}$. Alors, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\mathrm{A}]$ et :

$$u'(x)=1 \quad v'(x) = x^2\left(1+x^3\right)^{-n-1}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\mathrm{A}} x^3\left(1+x^3\right)^{-n-1}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\mathrm{A}} u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} u'(x)v(x)\mathrm{d}x\\
&= \left[-\frac{x}{3n}\left(1+x^3\right)^{-n}\right]_0^{\mathrm{A}} + \frac{1}{3n}\int_0^{\mathrm{A}}\left(1+x^3\right)^{-n}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{\mathrm{A}}{3n}\left(1+\mathrm{A}^3\right)^{-n} + \frac{1}{3n}\mathrm{I}_n(\mathrm{A})
\end{aligned}$$

D'où

$$3n\mathrm{I}_{n+1}(\mathrm{A}) = 3n\mathrm{I}_n(\mathrm{A}) + \frac{\mathrm{A}}{\left(1+\mathrm{A}^3\right)^n} - \mathrm{I}_n(\mathrm{A})$$

Puis

$$\mathrm{I}_n(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{A}}{\left(1+\mathrm{A}^3\right)^n} + 3n\left(\mathrm{I}_n(\mathrm{A}) - \mathrm{I}_{n+1}(\mathrm{A})\right)$$

3.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [1,+\infty[$

$$\frac{1}{\left(1+x^3\right)^n} \leqslant \frac{1}{x^{3n}}$$

Par croissance de l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{X}} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_1^{\mathrm{X}} \frac{1}{x^{3n}}\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant \left[-\frac{1}{(3n-1)x^{3n-1}}\right]_1^{\mathrm{X}}\\
&\leqslant -\frac{1}{(3n-1)\mathrm{X}^{3n-1}} + \frac{1}{(3n-1)x^{3n-1}}.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand X tend vers $+\infty$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3n-1}$$

3.b) On a

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

L'inégalité démontrée précédemment assure, par positivité de l'intégrale et théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}\,\mathrm{d}x = 0$$

Comme la limite de $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers $+\infty$ est nulle, on a le résultat attendu.

4. a) Par passage à la limite quand A tend vers $+\infty$ à partir de la relation de la 2 :

$$\mathrm{I}_n = 3n\left(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1}\right)$$

d'où

$$\mathrm{I}_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\mathrm{I}_n.$$

4.b) Soit $n \geqslant 2$. Prouvons par récurrence la propriété

$$\mathscr{P}_n : \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k-1}{3k}$$

est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

- *Initialisation* pour $n=2$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\frac{3k-1}{3k} = \prod_{k=1}^{2-1}\frac{3k-1}{3k} = \frac{3\times1-1}{3\times1} = \frac{2}{3}$$

Or, $\mathrm{I}_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{I}_2 = \frac{3\times1-1}{3\times1}\mathrm{I}_1 = \frac{2}{3}\mathrm{I}_1$, ce qui est bien compatible avec le calcul précédent. Ainsi, $\mathscr{P}_2$ est vérifiée.

- *Hérédité* Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\mathscr{P}(n)$.

$$\mathrm{I}_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\mathrm{I}_n = \frac{3n-1}{3n} \times \prod_{k=1}^{n-1}\frac{3k-1}{3k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{3k-1}{3k}$$

Ce qui justifie $\mathscr{P}_{n+1}$.

- *Conclusion.* La propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

5.

```python
import numpy as np


def Integr(n):
    I=2*np.pi/(3*3**(1/2))
    for k in range(1,n):
        I=I*(3*k-1)/(3*k)
    return I
```

Solution 39.

I.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. L'intégrale $\mathrm{G}(x)$ est donc généralisée en $+\infty$. De plus

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \left|\cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Par le critère de comparaison, $\mathrm{G}(x)$ est bien convergente.

I.2. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^+$. Procédons par intégration par parties (les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$).

$$\int_0^{\mathrm{A}} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\cos(tx)\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\right]_0^{\mathrm{A}} + \int_0^{\mathrm{A}} (-x)\sin(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_0^{\mathrm{A}} \sin(tx)\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\sin(tx)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{\mathrm{A}} + \int_0^{\mathrm{A}} x\cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Par passage à la limite (sinus et cosinus étant bornées)

$$\cos(\mathrm{A}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \sin(\mathrm{A}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}} \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 + \left(-x^2\right)\int_0^{+\infty} \cos(tx)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

D'où

$$\left(1+x^2\right)G(x)=\left(1+x^2\right)\int_0^{+\infty}\cos(tx)e^{-t}\,dt=1.$$

Ce qui conclut.

II.1. L'intégrande est continue sur $]0;+\infty[$. On a donc une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$.

→ Étude en 0. On sait que

$$\frac{\sin t}{t}e^{-t}\sim_0\frac{t}{t}\times 1=1.$$

La fonction est prolongeable par continuité en 0. On a donc une intégrale faussement impropre en 0.

→ Étude en $+\infty$. Pour tout $t\geqslant 1$

$$\left|\frac{\sin(tx)}{t}e^{-t}\right|\leqslant e^{-t}.$$

En reprenant le raisonnement de la question I.1, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{t}e^{-t}\,dt$$

converge. Finalement, l'intégrale $F(x)$ converge.

II.2. Soit $t\in\mathbb{R}$ fixé. Bosons $f:x\mapsto\sin(tx)$.
Soient $x,\ h\in\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ entre x et $x+h$:

$$\left|f(x+h)-f(x)-((x+h)-x)f'(x)\right|\leqslant\frac{M|(x+h)-x|^2}{2}$$

où $M=\sup_{s\in I_{x,h}}\left|f''(s)\right|=\sup_{s\in I_{x,h}}x^2|\sin(tx)|\leqslant t^2$

et $I_{x,h}$ est le segment dont les extrémités sont x et $x+h$. Le résultat s'en déduit.

II.3. Appliquons l'inégalité triangulaire (toutes les intégrales sont convergentes)

$$\begin{aligned}&|F(x+h)-F(x)-hG(x)|\\&=\left|\int_0^{+\infty}(\sin(t(x+h)-\sin(tx)-th\cos(tx))\,e^{-t}\,dt\right|\\&\leqslant\int_0^{+\infty}|\sin(t(x+h))-\sin(tx)-th\cos(tx)|e^{-t}\,dt\\&\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{t^2h^2}{2}e^{-t}\,dt=\mathrm{Cst}\,h^2.\end{aligned}$$

En divisant par $|h|>0$, on obtient

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-G(x)\right|\leqslant\mathrm{Cst}\,h.$$

Par encadrement

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}G(x).$$

Par définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement, F est dérivable en x avec $F'(x)=G(x)$.

II.4. Si on résume, on a

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F'(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad\text{et}\quad F(0)=0.$$

On en déduit par intégration que

$$F(x)=\arctan(x).$$

Solution 40.

1. La fonction $\varphi:t\mapsto\sin t/t$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$. On a une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$. Or $\sin t\sim_0 t$, φ est prolongeable par continuité en 0. I est une intégrale faussement impropre en 0.
Soit $A>1$. Intégrons par parties

$$\int_1^A\frac{\sin t}{t}\,dt=\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^A-\int_1^A\frac{\cos t}{t^2}\,dt$$

Le crochet est convergent lorsque $A\to+\infty$ car la fonction cosinus est bornée. Par majoration et comparaison à une intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty}\cos t/t^2$ absolument converge, donc convergente.
I est donc convergente.

2. *Lemme de Riemann-Lebesgue.*
On a par intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

$$\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt=\left[f(t)\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_0^\pi+\frac{1}{n}\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,dt.$$

On constate que le crochet convergence lorsque $n\to+\infty$ car la fonction cosinus est bornée. De plus, par l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,dt\right|\leqslant\int_0^\pi\left|f'(t)\cos(nt)\right|\,dt\leqslant\pi\max\left(|f'|\right).$$

D'où le résultat par le théorème d'encadrement.
Précisons que le maximum de $|f|$ est bien défini puisque que $|f|$ est continue sur un segment.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}I_{n+1}-I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left((2n+3)u\right)-\sin\left((2n+1)u\right)}{\sin u}\,du\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\left((2n+2)u\right)\sin(u)}{\sin(u)}\,du\end{aligned}$$

en utilisant pour $a=(2n+2)u$, $b=u$, la relation trigonométrique

$$\sin(a+b)-\sin(a-b)=2\cos(a)\sin(b)$$

D'où

$$\begin{aligned}I_{n+1}-I_n&=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2(n+1)u)\,du\\&=\frac{2}{2(n+1)}\left[\sin(2(n+1)u)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{1}{(n+1)}\sin(n+1)\pi=0.\end{aligned}$$

La suite $(I_n)_n$ est constante avec pour constante

$$I_n=I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,du=\frac{\pi}{2}.$$

4. Au voisinage de 0

$$f(u)=\frac{\sin(u)-u}{u\sin(u)}\sim\frac{-u^3/3!}{u^2}\sim-\frac{u}{3!}$$

Il vient $\qquad f(u)\underset{u\to 0^+}{\longrightarrow}0.$

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0. Si on note encore f, le prolongement, on a donc $f(0)=0$. De plus f est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ par les théorèmes généraux avec

$$\begin{aligned}f'(u)&=-\frac{1}{u^2}+\frac{\cos(u)}{\sin(u)^2}=\frac{-\sin(u)^2+u^2\cos(u)}{u^2\sin(u)^2}\\&=\frac{u^2-\sin(u)^2+u^2(\cos(u)-1)}{u^2\sin(u)^2}\end{aligned}$$

Or $\quad u^2-\sin(u)^2=(u-\sin(u)(u+\sin(u))\sim\dfrac{2}{3!}u^4=\dfrac{u^4}{3}$

et $\quad u^2(\cos(u)-1)\sim-\dfrac{u^4}{2}.$

D'où $\quad f'(u)=\dfrac{1/3u^4-\frac12 u^4+o(u^4)}{u^4+o(u^4)}.$

Par passage à la limite

$$f'(u)\xrightarrow[u\to0]{}-\frac16$$

Enfin, d'après le théorème de prolongement, f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ avec

$$f'(0)=-\frac16.$$

5. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)u}{\sin(u)}\,\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n+1)u\cdot f(u)+\frac{\sin(2n+1)u}{u}\,\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n+1)u\cdot f(u)\,\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)u}{u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Or par le changement de variable affine $v=(2n+1)u$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)u}{u}\,\mathrm{d}u=\int_0^{(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(v)}{v}\mathrm{d}v \xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{I}$$

Or d'après 2,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\big((2n+1)u\big)f(u)\,\mathrm{d}u\xrightarrow[n\infty]{}0$$

et $\mathrm{I}_n=\frac{\pi}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi

$$\mathrm{I}=\frac{\pi}{2}.$$

• Par parité de l'intégrande et convergence de l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$$

est bien convergente et vaut π.

6. Précisons que par parité, on a

$$\int_{-\mathrm{A}}^{+\mathrm{A}}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\cdots\frac{\sin\big(x/(2n-1)\big)}{x/(2n-1)}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\mathrm{A}}f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

On utilise les sommes de Riemann pour approximer cette intégrale.
Le code affiche des approximations pour différentes valeurs de n. On constate des valeurs très semblables pour cette approximation ce qui laisse penser que la valeur de l'intégrale est indépendante de n et vaut donc π.

Remarque. Bien que séduisante, cette conjecture est fausse. On montre bien que

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\pi\\
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\,\mathrm{d}x=\pi\\
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\frac{\sin(x/5)}{x/5}\,\mathrm{d}x=\pi.\\
&\qquad\cdots\\
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\cdots\frac{\sin(x/13)}{x/13}\,\mathrm{d}x=\pi
\end{aligned}$$

mais avec beaucoup d'effort, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin(x/3)}{x/3}\cdots\frac{\sin(x/15)}{x/15}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{935615849426881477393075728938}{935615849440640907310521750000}\pi\\
&\simeq\pi-4,61\times10^{-11}.
\end{aligned}$$

```python
def RieRie(f,A,m):
    S=0
    pas=A/n
    for i in range(m):
        S+=f(i*pas)
    return pas*S
```

```python
def fn(n,x):
    if x==0: return 1
    p=1
    for k in range(1,n+1):
        tk=x/(2*k-1)
        p=p*np.sin(tk)/tk
    return p
```

```python
def borwein(n,A):
    m=200*int(A)
    S=0
    pas=A/m
    for i in range(m):
        S+=fn(n,i*pas)
    return 2*pas*S
```

Solution 41.

1. f est clairement de classe $\mathscr{C}^2$ avec pour tout réel $x>1$,

$$f''(x)=-\frac{\ln(x)}{\big(x\ln(x)\big)^2}\leqslant0.$$

D'après la caractérisation de la concavité pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$,

$$\boxed{f\text{ est concave.}}$$

2. Par définition de la concavité : pour tous $a,b\in]1;+\infty[$,

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\geqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
\ln\Big(\ln\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big)&\geqslant\frac{\ln\big(\ln(a)\big)+\ln\big(\ln(b)\big)}{2}\\
&=\ln\Big(\sqrt{\ln(a)\ln(b)}\Big).
\end{aligned}$$

Par composition avec la fonction exponentielle (croissante) :

$$\boxed{\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\cdot\ln(b)}.}$$

Solution 42.

1. En regardant la dérivée seconde (positive), la fonction logarithme est convexe. Donc pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$t_1 \ln(a) + t_2 \ln(b) \leqslant \ln(t_1 a + t_2 b).$$

Soit

$$\ln(a^{t_1} b^{t_2}) \leqslant \ln(t_1 a + t_2 b).$$

par application de la fonction exponentielle (croissante), on a

$$m_{\mathrm{G}} \leqslant m_{\mathrm{A}}$$

En appliquant la relation maintenant à $1/a$ et $1/b$.

$$\frac{1}{a^{t_1}} \cdot \frac{1}{b^{t_2}} \leqslant \frac{t_1}{a} + \frac{t_2}{b}$$

Par application de la fonction inverse, décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, on a aussi $m_{\mathrm{G}} \geqslant m_{\mathrm{H}}$.

2.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def oraux():
    a=300*np.random.rand()
    b=5*np.random.rand()
    A=[a]
    B=[b]
    m=7
    x=np.linspace(0,m,m+1)

    for i  in range(1,m+1):
        c=a
        a=(a+b)/2
        b=2/(1/c+1/b)
        A.append(a)
        B.append(b)
    plt.plot(x,A,'r*')
    plt.plot(x,B,'b+')
    plt.legend(['an','bn'])
    plt.show()

```

3. On conjecture que les suites sont adjacentes à partir du rang 1, donc convergentes vers une limites communes.

4. Avec les pondérations $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, on constate que

$$a_{n+1} = m_{\mathrm{A}}(a_n, b_n)$$
$$b_{n+1} = m_{\mathrm{H}}(a_n, b_n)$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = m_{\mathrm{H}}(a_n, b_n) \leqslant m_{\mathrm{A}}(a_n, b_n) = a_{n+1}$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$b_n \leqslant a_n.$$

Il vient

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) \leqslant 0$$
$$\frac{b_n - b_{n+1}}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{b_n}\right) \leqslant 0$$

On a donc montré que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante alors que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^2}$ est croissante. De plus, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par b_1 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majoré par a_1, par le théorème de la limite monotone, ces deux suites sont convergentes.

Soient ℓ_a, ℓ_b les limites respectives. À partir de

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

on obtient par passage à la limite

$$\ell_a = \frac{1}{2}(\ell_a + \ell_b).$$

Finalement $\ell_a = \ell_b$. Ce qui conclut.

On vérifie que

$$a_n b_n = a_{n-1} b_{n-1} = a_0 b_0$$

Par passage à la limite, $\ell^2 = a_0 b_0$. Comme $\ell \geqslant 0$, nous déduisons

$$\ell = \sqrt{a_0 b_0}.$$

5.a) Sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = \ell^2$, nous pouvons écrire :

$$a_{n+1} - \ell = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \ell = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\ell^2}{a_n}\right) - \ell$$
$$= \frac{1}{2}\frac{a_n^2 + \ell^2 - 2a_n\ell}{a_n} = \frac{1}{2}\frac{(a_n - \ell)^2}{a_n}$$

De même, on a

$$a_{n+1} + \ell = \frac{1}{2}\frac{(a_n + \ell)^2}{a_n}.$$

5.b) Par quotient, on obtient

$$\frac{a_n - \ell}{a_n + \ell} = \frac{(a_{n-1} - \ell)^2}{(a_{n-1} + \ell)^2}$$

On démontre par récurrence que

$$a_n - \ell = (a_n + \ell)\left[\frac{a_0 - \ell}{a_0 + \ell}\right]^{2^n}$$

Puis l'équivalent

$$a_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ell\left[\frac{a_0 - \ell}{a_0 + \ell}\right]^{2^n} = 2\sqrt{a_0 b_0}\left[\frac{\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0}}{\sqrt{a_0} + \sqrt{b_0}}\right]^{2^n}.$$

Solution 43.

Voir corrigé en ligne sur le cahier de prépa.

Solution 44.

1. Notons que pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

De sorte que par télescopage

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{R}_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

De plus $\mathrm{R}_{1,0} = 0$. Comme la série harmonique est diverge, la série $\sum u_k$ n'est pas doublement convergente.

2. On a maintenant

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+(n+1)}} \qquad (i = k-(n+1))\\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

On retrouve (la même) série géométrique convergente, la série est donc doublement convergente.

3.a) Dans le cas d'une série de Riemann, la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3.b) C'est une conséquence de la décroissance de la fonction f.

3.c) Utiliser la relation de Chasles.

3.d) La série est doublement convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

3.f) Par récurrence, on montre que la série est p-convergente si et seulement si $\alpha > p$.

4.

2 Du chapitre 2 : algèbre

Solution 45.

• Calculons le noyau de la matrice A à l'aide d'un pivot de Gauss.
Soit $\mathrm{X} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{X} \in \ker(\mathrm{A}) \iff \mathrm{AX} = 0_{3,1}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0\\ 3x & - & 3y & & & = & 0\\ -2x & + & 2y & & & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{-3\mathrm{L}_3=2\mathrm{L}_2\\ \mathrm{L}_1\leftrightarrow -\mathrm{L}_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0\\ x & - & y & & & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & x\\ y & = & x\end{array}\right. \iff \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x\\ x\\ x\end{bmatrix}.$$

Finalement, le noyau est

$$\boxed{\ker(\mathrm{A}) = \left\{ x \cdot \begin{bmatrix} 1\\1\\1\end{bmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}.}$$

• Soit $\mathrm{X} = {}^t\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{X} \in \ker(\mathrm{B}_\alpha) \iff \mathrm{B}_\alpha \mathrm{X} = 0_{3,1} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-\alpha)x & + & 3y & + & z & = & 0\\ 5x & + & (6+\alpha)y & + & z & = & 0\\ x & + & y & - & (2+\alpha)z & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{\mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_2-5\mathrm{L}_3\\ \mathrm{L}_1\leftarrow \mathrm{L}_1-(2-\alpha)\mathrm{L}_3}}{\iff}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & (1+\alpha)y & + & (5-\alpha^2)z & = & 0\\ & & (1+\alpha)y & + & (11+5\alpha)z & = & 0\\ x & + & y & - & (2+\alpha)z & = & 0\end{array}\right.$$

$$\underset{\mathrm{L}_1\leftarrow \mathrm{L}_2-\mathrm{L}_1}{\iff}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & & & (2+\alpha)(3+\alpha)z & = & 0\\ & & (1+\alpha)y & + & (11+5\alpha)z & = & 0\\ x & + & y & - & (2+\alpha)z & = & 0.\end{array}\right.$$

En effet,

$$11+5\alpha-5+\alpha^2 = \alpha^2+5\alpha+6 = (2+\alpha)(3+\alpha).$$

Procédons par disjonction des cas.
⟶ Si $\alpha \notin \{-2,-3\}$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0\\ (1+\alpha)y+(11+5\alpha)z & = & 0\\ x+y-(2+\alpha)z & = & 0\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0\\ (1+\alpha)y & = & 0\\ x+y & = & 0.\end{array}\right.$$

Ainsi, si $\alpha \notin \{-1;-2;-3\}$, il n'y a que ${}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ comme solution.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour } \alpha \notin \{-1;-2;-3\},\\ \text{le noyau est } \{0_{3,1}\}\end{array}}$$

⟶ Si $\alpha = -1$, le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0\\ x+y & = & 0.\end{array}\right.$$

On obtient :

$$\mathrm{X} \in \ker(\mathrm{B}_{-1}) \iff \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x\\ -x\\ 0\end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\ker(\mathrm{B}_{-1}) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1\\-1\\0\end{bmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}.}$$

⟶ Si $\alpha = -2$, le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} -y+z & = & 0\\ x+y & = & 0.\end{array}\right.$$

On obtient :

$$\mathrm{X} \in \ker(\mathrm{B}_{-2}) \iff \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x\\ -x\\ -x\end{bmatrix}.$$

Puis,
$$\boxed{\ker(\mathrm{B}_{-2}) = \left\{ x \begin{bmatrix} 1\\-1\\-1\end{bmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\}.}$$

⟶ Si $\alpha = -3$, le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2y-4z & = & 0\\ x+y+z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -2z\\ x & = & z\end{array}\right..$$

Il vient :

$$\mathrm{X} \in \ker(\mathrm{B}_{-3}) \iff \mathrm{X} = \begin{bmatrix} z\\ -2z\\ z\end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\ker(B_{-3}) = \left\{ z \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Solution 46.

• Soient $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$DX = Y \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 &=& y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &=& y_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &=& y_3 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 &=& y_1 \\ x_2 - x_3 &=& y_2 - y_1 \\ -x_2 - 3x_3 &=& y_3 - 2y_1 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 &=& y_1 \\ x_2 - x_3 &=& y_2 - y_1 \\ -4x_3 &=& y_3 + y_2 - 3y_1 \end{array} \right.$$

$$\iff$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& y_1 - x_2 - 2x_3 = -\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{3}{4}y_3 \\ x_2 &=& y_2 - y_1 + x_3 = -\frac{1}{4}y_1 + \frac{3}{4}y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ x_3 &=& \frac{3}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{4}y_3 \end{array} \right. .$$

On en déduit que D est inversible d'inverse

$$\boxed{D^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.}$$

• En reprenant la rédaction précédente, on montre que E est inversible avec

$$\boxed{E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & -10 & -6 \end{bmatrix}.}$$

Solution 47.

Quelques exemples de calcul de l'inverse d'une matrice via un pivot de Gauss.

• La première matrice est carrée d'ordre 2. Pour justifier l'inversibilité, on vérifie que le déterminant est non nul : $\det(A) = 1 \times 5 - 2 \times 2 = 1 \neq 0$. On peut appliquer la formule de l'inverse :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.}$$

• Pour B, on effectue un pivot de Gauss. Soient $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a les équivalences

$$BX = Y \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 - 6x_3 &=& y_1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &=& y_2 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 &=& y_3 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 - 6x_3 &=& y_1 \\ 3x_2 - 4x_3 &=& y_1 + y_2 \\ x_2 - x_3 &=& y_1 + y_3 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 - 6x_3 &=& y_1 \\ x_2 - x_3 &=& y_1 + y_3 \\ 3x_2 - 4x_3 &=& y_1 + y_2 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 - 6x_3 &=& y_1 \\ x_2 - x_3 &=& y_1 + y_3 \\ -x_3 &=& -2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 &=& y_1 - 2y_2 + 2y_2 \\ x_2 &=& 3y_1 - y_2 + 4y_3 \\ x_3 &=& 2y_1 - y_2 + 3y_3. \end{array} \right.$$

En conclusion, B est inversible et $\boxed{B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.}$

Il ne faut pas hésiter à vérifier son calcul en calculant au moins un des coefficients. Par exemple, pour B*,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

• On procède de la même manière pour C. On trouve :

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution 48.

1. $\boxed{\text{Faux.}}$
Si A est inversible, $-A$ aussi mais la somme $A + (-A) = 0_n$ ne l'est pas.

2. $\boxed{\text{Vrai.}}$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut toujours écrire A sous la forme

$$A = U + L$$

où U et L sont respectivement des matrices triangulaires supérieures et inférieures avec des coefficients diagonaux tous non nuls. Donnons un exemple avec une matrice A avec un coefficient diagonal nul

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Les matrices U et L sont inversibles et sont solutions du problème.

Solution 49.

1. Le calcul donne :

$$J^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 - 2 & 0 & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & 1 & 1 \\ -2\alpha + 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $J^2 = J$ si et seulement si $\alpha = 2$.

2. Comme $J^2 = J$, le calcul donne

$$F(x)F(y) = F(x + y).$$

On remarque que $F(0) = I_3$, donc $F(x)F(-x) = I_3$, $F(x)$ est inversible d'inverse $F(x)^{-1} = F(-x)$. On remarque de même que $G(x)G(y) = F(x + y)$, donc $G(x)G(-x) = I_3$, donc $G(x)$ est inversible d'inverse $G(x)^{-1} = G(-x)$.

Solution 50.

1. On trouve $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $PQ = QP = 0_3$.
2.a) Soient α et β deux réels, alors

$$\alpha P + \beta Q = \begin{bmatrix} -\alpha + 2\beta & 0 & -2\alpha + 2\beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha - \beta & 0 & 2\alpha - \beta \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\alpha P + \beta Q = A$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\alpha + 2\beta &=& 5 \\ -2\alpha + 2\beta &=& 6 \\ \alpha &=& -1 \\ \alpha - \beta &=& -3 \\ 2\alpha - \beta &=& -4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha &=& -1 \\ \beta &=& 2. \end{array} \right.$$

En conclusion, $\boxed{A = 2Q - P.}$

2.b) Appliquons la formule du binôme de Newton sachant que les matrices 2Q et P commutent d'après la question 1). Pour $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = (2Q - P)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (2Q)^k (-P)^{p-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^k (-1)^{p-k} Q^k P^{p-k}.$$

Or, pour $k \in [\![1, p-1]\!]$,

$$Q^k P^{p-k} = Q^{k-1} \cdot (QP) \cdot P^{p-k-1} = 0_3 \quad \text{car} \quad QP = 0_3.$$

La somme précédente se réduit à 2 termes (obtenus pour $k = 0$ et $k = p$).

Comme $P^p = P$ et $Q^p = Q$, il vient

$$\boxed{A^p = 2^p Q + (-1)^p P.}$$

Remarque. On teste le résultat final dans des cas particuliers afin de détecter des éventuelles erreurs de calcul.

Pour $p = 0$: $\qquad A^0 = I_3 = Q + P = 2^0 Q + (-1)^0 P.$

Pour $p = 1$: $\qquad A^1 = A = 2Q - P = 2^1 Q + (-1)^1 P.$

Solution 51.

Interprétons dans un premier temps les instructions en Python. Si l'on pose

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

alors P est inversible,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

et $D = P^{-1}AP$, les flottants de l'ordre de 10^{-16} étant à considérer comme de simples erreurs d'arrondi par la machine.

Calculons maintenant les puissances de A en remarquant que la relation précédente peut être réécrite $A = PDP^{-1}$.

Remarque. Commençons par regarder ce qu'il se passe pour quelques petites puissances :

$$A^2 = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

$$A^3 = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}D\underbrace{P^{-1}P}_{I_3}DP^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

Ces premiers calculs permettent de conjecturer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PD^pP^{-1}$. C'est ce que l'on va prouver par récurrence.

Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathscr{P}(p) : \quad A^p = PD^pP^{-1}$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.**

D'une part, $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ et, d'autre part, $A^0 = I_3$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie et démontrons que $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A^pA & &\downarrow \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= PD^pP^{-1} \cdot PDP^{-1} & &\downarrow \text{ simplification avec } PP^{-1} = I_3 \\ &= PD^p \cdot DP^{-1} \\ &= PD^{p+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

$\mathscr{P}(p+1)$ est donc prouvée.

- **Conclusion.**

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PD^pP^{-1}$. On pose le calcul, et après simplifications,

$$A^p = \begin{bmatrix} 6(-1)^p + 2(-2)^{p+1} - 1 & -12(-1)^p + 10(-2)^p + 2 & 6(-1)^p - 4(-2)^p - 2 \\ 2(-1)^p + (-2)^{p+1} & -4(-1)^p + 5(-2)^p & 2(-1)^p + (-2)^{p+1} \\ (-1)^{p+1} + 1 & 2(-1)^p - 2 & (-1)^{p+1} + 2 \end{bmatrix}.$$

Solution 52.

1. Soit α, une racine de P. Raisonnons par l'absurde en supposant $|\alpha| > 1$.

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = P(\alpha) = 0.$$

D'où $\qquad a_n\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i.$

À l'aide de *l'inégalité triangulaire*

$$\left|a_n\alpha^n\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left|a_i\right| \cdot |\alpha|^i.$$

En divisant par $\alpha^n \neq 0$

$$|a_n| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left|a_i\right| |\alpha|^{i-n} = \sum_{i=0}^{n-1} \left|a_i\right| \frac{1}{|\alpha|^{n-i}}.$$

Comme $|\alpha| > 1$, $1/|\alpha|^{n-i} < 1$ et

$$|a_n| < \sum_{i=0}^{n-1} \left|a_i\right|.$$

Absurde par hypothèse sur les nombres a_i. Finalement, $\alpha \in [-1; 1]$.

2. Le polynôme Q vérifie l'hypothèse de la question précédente. Ainsi, s'il existe une racine entière, elle appartient nécessairement à $\{0; 1; -1\}$. Or, $Q(0) = 1$,

$$Q(1) = n - (n-1) + 1 = 2 \neq 0.$$

$$Q(-1) = n(-1)^n - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k + 1 \neq 0,$$

car la somme $\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k$ vaut 0 ou -1 suivant la parité de n. La somme $-\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k + 1$ vaut 1 ou 2. Or, $n(-1)^n$ est toujours distinct de 1 et 2 dès que $n \geqslant 2$. Finalement,

$$\boxed{\text{Q n'a pas de racine entière.}}$$

Solution 53.

...

Solution 54.

...

Solution 55.

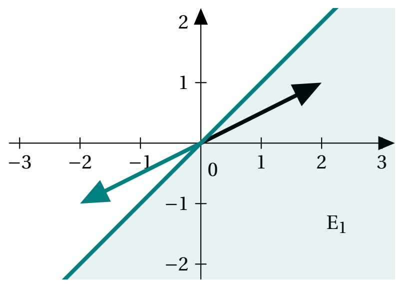
- $\boxed{\text{Non, } E_1 \text{ n'est pas un e.v.}}$

Par exemple, E_1 n'est pas stable par multiplication par un réel.

$$(2, 1) \in E_1,$$

mais $\qquad -1 \cdot (2, 1) = (-2, -1) \notin E_1.$

Graphiquement, E_1 est un demi-plan.



• Afin de prouver que E_2 est un espace vectoriel, on peut prouver que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on vérifie que E_2 est non vide et stable par combinaison linéaire.

→ E_2 est non vide car $(0,0,0) \in E_2$.

→ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x, y, z) \in E_2$ et $X' = (x', y', z') \in E_2$. Par définition de E_2, on a $2x + z = y$ et $2x' + z' = y'$.

Il vient

$$X + \lambda X' = (x, y, z) + \lambda(x', y', z') = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z').$$

Puis,

$$2(x + \lambda x') + (z + \lambda z') = (2x + z) + \lambda(2x' + z') = y + \lambda y'.$$

C'est-à-dire, $\quad X + \lambda X' \in E_2$.

En conclusion, E_2 est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis

$$\boxed{E_2 \text{ est un espace vectoriel.}}$$

• $\boxed{E_3 \text{ n'est pas un espace vectoriel,}}$ puisque l'élément neutre pour addition n'appartient pas à E_3.

$$(0,0,0) \notin E_3 \quad \text{car} \quad 0 - 0 \neq 2.$$

• $\boxed{\text{Non, } E_4 \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$
Il n'est pas stable par somme. Par exemple,

$$X = (1,1,0) \in E_4 \quad \text{car} \quad 1^2 + 0^2 = 1$$

$$\text{et} \quad X' = (-1,1,0) \in E_4 \quad \text{car} \quad (-1)^2 + 0^2 = 1.$$

Par contre, $\quad X + X' = (0,1,0) \notin E_3 \quad \text{car} \quad 0^2 + 0^2 \neq 1.$

• $\boxed{\text{Non, } E_5 \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$
Il n'est pas stable par somme. Par exemple $(1,1,0) \in E_5$, $\quad (0,0,1) \in E_5 \quad$ mais $\quad (1,1,1) \notin E_5$.

• $\boxed{E_6 \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$
Le polynôme nul $x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ n'est pas dans E_6.

• Prouvons que E_7 est un sous-espace vectoriel du espace vectoriel $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

→ Le polynôme nul $x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ est clairement un élément de E_6 qui n'est donc pas vide.

→ Soient $P, Q \in E_6$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a par définition de $P + \lambda Q$,

$$(P + \lambda Q)(3) = P(3) + \lambda Q(3) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad P + \lambda Q \in E_6.$$

E_6 est stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. D'où

$$\boxed{E_7 \text{ est un espace vectoriel.}}$$

• Justifions que E_8, l'ensemble des applications bornées, est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

→ L'application nulle $x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ est clairement bornée, c'est un élément de E_8.

→ Soient $f, g \in E_8$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe deux réels M_f et M_g tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)| \leqslant M_f \quad \text{et} \quad |g(x)| \leqslant M_g.$$

Posons $M = M_f + |\lambda| M_g$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |(f + \lambda g)(x)| &= |f(x) + \lambda g(x)| \leqslant |f(x)| + |\lambda| \cdot |g(x)| \\ &\leqslant M_f + |\lambda| \cdot M_g = M. \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $(f + \lambda g)$ est bornée, c'est un élément de E_8. En conclusion,

$$\boxed{E_8 \text{ est un espace vectoriel.}}$$

• L'ensemble E_9 n'est pas stable par multiplication par un scalaire, donc

$$\boxed{E_9 \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

• On vérifie que

$$\boxed{E_{10} \text{ est un espace vectoriel.}}$$

Solution 56.

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 quatre réels tels que $\lambda_1 \cdot \varepsilon_1 + \lambda_2 \cdot \varepsilon_2 + \lambda_3 \cdot \varepsilon_3 + \lambda_4 \cdot \varepsilon_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. C'est équivalent à

$$\begin{aligned} &(3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4, -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4, \\ &\quad \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_4) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &=& 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 &=& 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &=& 0 \\ \lambda_4 &=& 0 \end{array} \right. .$$

Par un pivot de Gauss, on montre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. La famille est libre.

2.a) Comme précédenement, on suppose l'existence de quatre réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_4$ tels que

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = 0_2.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par unicité des coefficients d'une matrice, on obtient le système linéaire :

$$\mathscr{S} \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 &=& 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 &=& 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &=& 0 \end{array} \right. .$$

Résolvons ce système par un pivot de Gauss,

$$\mathscr{S} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 &=& 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 &=& 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 &=& 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 &=& 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 \\ 2\lambda_3 + \lambda_4 &=& 0 \end{array} \right. .$$

On en déduit que $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_1 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (A, B, C, D) \text{ est libre.}}$$

2.b) Une famille à 5 vecteurs dans un espace de dimension 4 ne peut être libre. En étudiant les relations de linéarité, on montre que :

$$-3I_2 + 2A - B - C + 2D = 0_2.$$

$$\boxed{\text{La famille } (A, B, C, D, I_2) \text{ n'est pas libre.}}$$

3.a) Soient λ_1, λ_2 et λ_3, trois réels tels que

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3 = \mathbf{0}.$$

($\mathbf{0}$ désigne ici l'application nulle). Dit autrement,

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \lambda_1 \ln(x) + \lambda_2 \exp(x) + \lambda_3 x = 0.$$

On divise par $\exp(x) \neq 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \lambda_1 \frac{\ln(x)}{\exp(x)} + \lambda_2 + \lambda_3 \frac{x}{\exp(x)} = 0.$$

Or, par *les croissances comparées*,

$$\lambda_1 \frac{\ln(x)}{\exp(x)} + \lambda_2 + \lambda_3 \frac{x}{\exp(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda_2.$$

Par unicité de la limite, $\qquad \lambda_2 = 0.$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \lambda_1 \ln(x) + \lambda_3 x = 0.$$

À ce stade, on peut procéder de même en divisant par x. On peut aussi simplement considérer $x = 1$,

$$\lambda_1 \ln(1) + \lambda_3 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = 0.$$

Nécessairement, $\lambda_1 = 0$. Finalement,

$$\boxed{\text{La famille } (f_1, f_2, f_3) \text{ est libre.}}$$

3.b) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \tan + \lambda_2 \tan^2 + \lambda_3 \tan^3 + \cdots + \lambda_n \tan^n = \mathbf{0}.$$

Comme l'application tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \cdots + \lambda_n x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_1 = 0.$$

$$\boxed{\text{La famille } (\tan^i)_{i \in [\![1;n]\!]} \text{ est libre.}}$$

Solution 57.

Voilà un exercice qui mélange des notions d'algèbre linéaire et les développements limités. Il n'est pas pourtant pas difficile au sens où la stricte application de la définition d'une famille libre permet de conclure.

1. On a $x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $x^3 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Pour g et h on utilise donc les développements limités de sin et cos au voisinage de 0 :

$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$, $\quad g(x) = \sin(x^2) \underset{x\to 0}{=} (x^2)^1 + o\big((x^2)^2\big) = x^2 + o(x^4)$,

$$h(x) = \cos(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{(x^3)^2}{2} + o((x^3)^2) = 1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6),$$

donc en tronquant : $h(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x^4)$.

2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 h = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ est l'application nulle.

D'après la question précédente :

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 h(x) \underset{x\to 0}{=} (\lambda_1 + \lambda_3) + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{2}\right) x^2 + \frac{\lambda_1}{24} x^4 + o(x^4).$$

Or

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 h(x) = 0 \underset{x\to 0}{=} o(x^4).$$

Par unicité du développement limité

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 - \frac{\lambda_1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1}{24} = 0,$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Concluons : $\boxed{\text{La famille } (f, g, h) \text{ est libre.}}$

Solution 58.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- *Analyse (recherche des conditions nécessaires).*

Supposons qu'il existe deux matrices carrées A, S respectivement antisymétrique et symétrique telles que $M = A + S$. En transposant, il vient

$$^tM = {^tA} + {^tS} = -A + S.$$

On en déduit par somme et différence des deux relations précédentes,

$$A = \frac{1}{2}\big(M - {^tM}\big) \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2}\big(M + {^tM}\big).$$

Résumons, si une telle décomposition $M = A + S$ (avec A antisymétrique et S symétrique) existe, alors les matrices A et S sont uniques.

- *Synthèse (recherche des conditions suffisantes).*

Posons $\quad A = \dfrac{1}{2}\big(M - {^tM}\big) \quad$ et $\quad S = \dfrac{1}{2}\big(M + {^tM}\big)$,

de sorte que

$$\begin{aligned} {^tA} &= \frac{1}{2}{^t}\big(M - {^tM}\big) = \frac{1}{2}\big({^tM} - {^t}({^tM})\big) \\ &= -\frac{1}{2}\big(M - {^tM}\big) = -A. \end{aligned}$$

et $\quad {^tS} = \dfrac{1}{2}{^t}\big(M + {^tM}\big) = \dfrac{1}{2}\big({^tM} + {^t}({^tM})\big) = S.$

De plus, $\quad A + S = \dfrac{1}{2}\big(M - {^tM}\big) + \dfrac{1}{2}\big(M + {^tM}\big) = M.$

Résumons :

→ Les matrices A et S sont respectivement antisymétrique et symétrique ;

→ $A + S = M$.

On vient de justifier l'existence d'une telle décomposition.

- *Conclusion.* On a prouvé que toute matrice carrée M s'écrit, de manière unique, comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

$$\mathcal{A}_n \oplus \mathcal{S}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Solution 59.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & M \in E_1 \\ \iff & \exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R},\ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ & \quad \text{avec} \quad a + b + c + d = 0 \\ \iff & \exists\, a, b, c \in \mathbb{R},\ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{bmatrix} \\ \iff & \exists\, a, b, c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$M = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A_2} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A_3}.$$

On a donc l'équivalence :

$$M \in E_1 \iff M \in \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3).$$

Puis, $\quad \boxed{E_1 = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3).}$

La famille (A_1, A_2, A_3) est génératrice de E_1. On vérifie que la famille est libre, c'est donc une base de E_1. Elle contient 3 vecteurs. Concluons :

$$\boxed{\dim E_1 = 3.}$$

2. Une base de E_2 est donnée par les polynômes P_1, P_2, P_3 définis par

$$P_1(x) = x - 4, \quad P_2(x) = (x-4)^2, \quad P_3(x) = (x-4)^3.$$

D'où $\quad \dim E_2 = 3.$

3. Si E_{ij} désigne la matrice élémentaire de taille (n, n) ne contenant que des 0 sauf un "1"en position (i, j), alors les matrices $(E_{ii})_{i \in [\![1,n]\!]}$ forment une base de E_3.

$$\dim E_3 = n.$$

4. Vérifier que les matrices E_{ii} pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $E_{ij} + E_{ji}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ forment une base de E_4. Donc

$$\dim E_4 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution 60.

Raisonnons par double implication.

- Supposons i). Soit $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$, il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) = y$. Dès lors,

$$\psi(y) = \psi\big(\varphi(x)\big) = \psi \circ \varphi(x) = 0_G.$$

Ainsi, $y \in \ker(\psi)$. On a bien prouvé ii) par l'inclusion

$$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi) \subset \ker(\psi).}$$

→ Supposons ii). Soit $x \in E$,

$$\psi \circ \varphi(x) = \psi\big(\varphi(x)\big) = 0_G,$$

car $\varphi(x) \in \mathrm{Im}(\varphi) \subset \ker(\psi)$. Cette égalité étant vérifiée pour tout $x \in E$, $\boxed{\psi \circ \varphi = 0_{\mathcal{L}(E,G)}}$ et i) est prouvé.

Solution 61.

...

Solution 62.

1. On a $f\circ g=\mathrm{id}_E$, et id_E est surjective, donc f est surjective :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = E.}$$

On a aussi $f\circ g=\mathrm{id}_E$, et id_E est injective, donc g est injective :

$$\boxed{\operatorname{Ker} g = \{0_E\}.}$$

2. • Soit $y\in \operatorname{Im}(g\circ f)$. Il existe $x\in E$ tel que $y=g\circ f(x)=g\big(f(x)\big)$, ce qui montre que $y\in\operatorname{Im} g$.
On en déduit : $\operatorname{Im}(g\circ f)\subset \operatorname{Im} g$. Montrons l'autre inclusion.
• Soit $y\in\operatorname{Im} g$.
Il existe $x\in E$ tel que $y=g(x)$, et comme $f\circ g=\mathrm{id}_E$, $x=f\circ g(x)$, d'où $y=g\circ f\circ g(x)$, ce qui montre en particulier que $y\in\operatorname{Im}(g\circ f)$.
Ceci étant valable pour tout $y\in\operatorname{Im} g$, on a montré la deuxième inclusion $\operatorname{Im} g\subset\operatorname{Im}(g\circ f)$. Finalement

$$\boxed{\operatorname{Im}(g\circ f)=\operatorname{Im} g.}$$

3. • Soit $x\in\operatorname{Ker} f$.
Alors $f(x)=0_E$, donc $g\big(f(x)\big)=0_E$, i.e. $g\circ f(x)=0_E$, et ainsi $x\in\operatorname{Ker}(g\circ f)$.
On en déduit $\operatorname{Ker} f\subset\operatorname{Ker}(g\circ f)$. Montrons l'autre inclusion.
• Soit $x\in\operatorname{Ker}(g\circ f)$.
Alors $g\big(f(x)\big)=0_E$, donc $f\Big(g\big(f(x)\big)\Big)=0_E$, i.e. $f\circ g\big(f(x)\big)=0_E$, et comme $f\circ g=\mathrm{id}_E$, on obtient $f(x)=0_E$, i.e. $x\in\operatorname{Ker} f$. Ceci étant valable pour tout $x\in\operatorname{Ker}(g\circ f)$, on a montré $\operatorname{Ker}(g\circ f)\subset\operatorname{Ker} f$.

Finalement $\boxed{\operatorname{Ker}(g\circ f)=\operatorname{Ker} f.}$

4. Soit $x\in(\operatorname{Ker} f)\cap(\operatorname{Im} g)$.
Comme $x\in\operatorname{Im} g$, il existe $y\in E$ tel que $x=g(y)$.
Comme $x\in\operatorname{Ker} f$, on a $f(x)=0_E$, donc $f\big(g(y)\big)=0_E$, c'est à dire $f\circ g(y)=0_E$.
Or par hypothèse, $f\circ g=\mathrm{id}_E$, donc $f\circ g(y)=y$. On obtient $y=0_E$, et donc $x=g(y)=0_E$. Ainsi : $\boxed{(\operatorname{Ker} f)\cap(\operatorname{Im} g)=\{0_E\}.}$
(On n'a montré qu'une inclusion, mais l'autre inclusion est immédiate.)

Solution 63.

• Vérifions d'abord que $p^2=p$. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
& p^2(x,y,z)\\
= \;& p\big(p(x,y,z)\big) = p\Big(\big(\tfrac12 x-\tfrac14 y-\tfrac12 z\,,\ y\,,-\tfrac12 x-\tfrac14 y+\tfrac12 z\big)\Big)\\
= \;& \Big(\tfrac12\big(\tfrac12 x-\tfrac14 y-\tfrac12 z\big)-\tfrac14 y-\tfrac12\big(-\tfrac12 x-\tfrac14 y+\tfrac12 z\big)\,,\ y\,,\\
& \qquad -\tfrac12\big(\tfrac12 x-\tfrac14 y-\tfrac12 z\big)-\tfrac14 y+\tfrac12\big(-\tfrac12 x-\tfrac14 y+\tfrac12 z\big)\ \Big)\\
= \;& \big(\tfrac12 x-\tfrac14 y-\tfrac12 z,\ y,\ -\tfrac12 x-\tfrac14 y+\tfrac12 z\big).
\end{aligned}$$

On a bien : $\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ p^2(x,y,z)=p(x,y,z)$.

L'application est linéaire et $p\circ p=p$, c'est un projecteur.

• On sait alors par théorème que $\ker(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, et que p est la projection sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
Il reste à déterminer ces deux espaces. On montre que

$$\boxed{\ker(p)=\operatorname{Vect}\big((1,0,1)\big)}$$

et

$$\boxed{\operatorname{Im}(p)=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 2x+y+2z=0\big\}.}$$

Solution 64.

On sait que

$$\mathbb{R}^3=F\oplus G \iff (\forall a\in\mathbb{R}^3,\ \exists!(b,c)\in F\times G,\ a=b+c).$$

Raisonnons par analyse-synthèse.

• *Analyse.*
Soit $a=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Supposons $a=b+c$ avec $(b,c)\in F\times G$.
Comme $b\in F$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $b=\lambda u$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
c\in G &\iff a-\lambda u\in G \iff (x,y,z)-\lambda(1,2,-1)\in G\\
&\iff (x-\lambda,\ y-2\lambda,\ z+\lambda)\in G\\
&\iff 2(x-\lambda)+y-2\lambda+z+\lambda=0 \iff \lambda=\frac23 x+\frac13 y+\frac13 z.
\end{aligned}$$

Donc, nécessairement, $b=\lambda u$ et $c=a-\lambda u$ où λ est la solution du système précédent. Ceci clôt la partie « unicité ».

• *Synthèse.*
Soient b et c les vecteurs donnés par l'analyse. Alors
→ $b+c=\lambda u+(a-\lambda u)=a$.
→ $b=\lambda u\in G$.
→ Comme $c\in G$ a été résolu par équivalence, on a $c=a-\lambda u\in G$.
Ce qui termine la synthèse.

• *Conclusion* : $\boxed{F\oplus G=\mathbb{R}^3.}$

2. De plus, avec les calculs précédents, on sait que pour tout $a=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, en reprenant les notations ci-dessus, l'écriture $a=b+c$ est l'unique décomposition de a comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.
On en déduit, par définition des projections, que

$$p(a)=b=\lambda u=\Big(\frac23 x+\frac13 y+\frac13 z\Big)\big(1,2,-1\big),$$

donc :

$$\boxed{p(a)=\Big(\frac23 x+\frac13 y+\frac13 z,\ \frac43 x+\frac23 y+\frac23 z,\ -\frac23 x-\frac13 y-\frac13 z\Big),}$$

et : $q(a)=c=(x,y,z)-p(a)$, donc après simplification

$$\boxed{q(a)=\Big(\frac13 x-\frac13 y-\frac13 z,\ -\frac43 x+\frac13 y-\frac23 z,\ \frac23 x+\frac13 y+\frac43 z\Big).}$$

Solution 65.

1. On a, pour tous $\alpha\in\mathbb{R}$, $M,N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\varphi(\alpha M+N)=A(\alpha M+N)B=\alpha AMB+ANB=\alpha\varphi(M)+\varphi(N)$$

donc φ est linéaire.

2. Les déterminants sont non nuls, les matrices A et B sont inversibles et :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-7&4\end{bmatrix}.$$

On peut donc poser l'application linéaire

$$\psi:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\quad N\longmapsto A^{-1}NB^{-1},$$

Or

$$\begin{cases}\forall M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), & (\psi\circ\varphi)(M)=A^{-1}(AMB)B^{-1}=M\\ \forall N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), & (\varphi\circ\psi)(N)=A\big(A^{-1}NB^{-1}\big)B=N,\end{cases}$$

Autrement dit

$$\psi\circ\varphi=\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\quad\text{et}\quad\varphi\circ\psi=\mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}.$$

D'après la caractérisation de la bijectivité, φ est bijective et que $\varphi^{-1}=\psi$.

3. Comme la famille contient autant de vecteurs que la dimension, il suffit de prouver que la famille est libre.

$$\begin{aligned}
&\alpha I_2+\beta A+\gamma B+\delta AB=0\\
\iff\ &\alpha\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}4&1\\7&2\end{bmatrix}+\\
&\delta\begin{bmatrix}15&4\\41&11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\\
\iff\ &\begin{cases}\alpha+2\beta+4\gamma+15\delta=0\\ \beta+\gamma+4\delta=0\\ 5\beta+7\gamma+41\delta=0\\ \alpha+3\beta+2\gamma+11\delta=0\end{cases}\\
\iff\ &\begin{cases}\alpha+2\beta+4\gamma+15\delta=0\\ \beta+\gamma+4\delta=0\\ 5\beta+7\gamma+41\delta=0\\ \beta-2\gamma-4\delta=0 & L_4\longleftarrow L_4-L_1\end{cases}\\
\iff\ &\begin{cases}\alpha+2\beta+4\gamma+15\delta=0\\ \beta+\gamma+4\delta=0\\ 2\gamma-21\delta=0 & L_3\longleftarrow L_3-5L_2\\ -3\gamma-8\delta=0 & L_4\longleftarrow L_4-L_2\end{cases}
\end{aligned}$$

Il vient
$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$
La famille $\mathscr{B}$ est libre. C'est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Le calcul Python donne
$$A^2=5A-I_2 \quad \text{et} \quad B^2=6B-I_2.$$
Calculons les images de la base :
$$\varphi(I_2)=AB, \quad \varphi(A)=(5A-I_2)B=-B+5AB,$$
$$\varphi(B)=A(6B-I_2)=-A+6AB$$
$$\begin{aligned}\varphi(AB)=A(AB)B=A^2B^2&=(5A-I_2)(6B-I_2)\\&=I_2-5A-6B+30AB.\end{aligned}$$
On conclut, la matrice demandée est
$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&-5\\0&-1&0&-6\\1&5&6&30\end{bmatrix}.$$

Solution 66.

...

Solution 67.

...

Solution 68.

1. Soient λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 4 réels tels que
$$\lambda_1\cos+\lambda_2\sin+\lambda_3 c+\lambda_4 s=\mathbf{0} \quad \text{(l'application nulle).}$$
On a alors $\quad \underbrace{\lambda_1\cos+\lambda_3 c}_{\text{fonction paire}}=\underbrace{-\lambda_2\sin-\lambda_4 s}_{\text{fonction impaire}}.$

Sachant que la seule fonction paire et impaire est la fonction nulle :
$$\lambda_1\cos+\lambda_3 c=\mathbf{0} \quad \text{et} \quad \lambda_2\sin+\lambda_4 s=\mathbf{0}.$$
En étudiant par exemple les limites en $+\infty$ ou en évaluant en $\pi/2$ ou en π, on constate que les familles $(\cos, c)$ et $(\sin, s)$ sont libres et $\lambda_1=\lambda_3=0$, $\lambda_2=\lambda_4=0$. Finalement, la famille $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de F, c'est une base de F.

2. On a
$$\cos'=-\sin\in F, \quad \sin'=\cos\in F, \quad c'=s\in F \quad \text{et} \quad s'=c\in F.$$
Comme la dérivation est linéaire, on a bien la stabilité de F.

3. On a
$$\varphi(\cos)=-\sin, \quad \varphi(\sin)=\cos, \quad \varphi(c)=s \quad \text{et} \quad \varphi(s)=c.$$
On en déduit la matrice (diagonale par blocs)
$$M=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

4. Par le calcul, on a
$$M^2=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}, \quad M^3=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^4=I_4.$$
Soit $k\in\mathbb{N}$.

- Si k est un multiple de 4, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $k=4p$ et
$$M^k=M^{4p}=M^{4^p}=I_4{}^p=I_4.$$
- De même, on a
$$\begin{aligned}M^k&=M \quad \text{si } k=4p+1,\\M^k&=M^2 \quad \text{si } k=4p+2,\\M^k&=M^3 \quad \text{si } k=4p+3.\end{aligned}$$

Solution 69.

...

Solution 70.

1.a) ⋆ Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Posons :
$$L_i(x)=\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\left(X-a_j\right)}{\left(a_i-a_j\right)}.$$
Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on a bien $L_i\left(a_j\right)=\delta_{i,j}$ et L_i est de degré $n-1$.
⋆ Soit $R_i\in\mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $R_i\left(a_j\right)=\delta_{i,j}$. On a alors, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $(R_i-L_i)\left(a_j\right)=0$. Ainsi, R_i-L_i est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui a n racines, donc $R_i=L_i$, ce qui donne l'unicité voulue.

1.b) Soit $\left(\lambda_i\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i L_i=0$. Alors, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i L_i\left(a_j\right)=0$, soit $\lambda_j=0$.
Ainsi, la famille $\left(L_i\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est libre et de cardinal n : c'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

2.a) Soit $P\in\mathbb{R}[x]$. Montrons que $(\pi\circ\pi)(P)=P$.
Comme $\pi(P)=\sum\limits_{i=1}^{n}P\left(a_i\right)L_i$, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $\pi(P)\left(a_j\right)=P\left(a_j\right)$.
De plus, $\pi(P)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$, d'où $\pi(\pi(P))=\pi(P)$.

2.b) On obtient :
$$\operatorname{Ker}\pi=\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(x-a_i\right)Q \mid Q\in\mathbb{R}[x]\right\}$$
et $\operatorname{Im}\pi=\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

2.c) On sait que pour un projecteur, image et noyau sont supplémentaires.

2.d) D'après la question 2.a), les coordonnées de P dans la base $\left(L_i\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$
$$\text{sont } \left(P\left(a_i\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}.$$

3.a) La linéarité de ε est aisée. Montrons que ε est injective.
Soit $P\in\mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $P\left(a_i\right)=0$. Ainsi, P est de degré au plus $n-1$ et possède n racines, soit $P=0$. Comme $\dim\mathbb{R}_{n-1}[x]=\dim\mathbb{R}^n=n$ et que ε est un morphisme injectif, ε est bijectif.

3.b) Soit f une fonction à valeurs réelles. Comme $\left(f\left(a_i\right)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}\in\mathbb{R}^n$ et que ε est surjective, d'après la question précédente, il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et un seul tel que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $P\left(a_i\right)=f\left(a_i\right)$.

4.a) Comme x n'est pas l'un des a_i, on a :
$$K=\frac{f(x)-P(x)}{(x-a_1)\dots(x-a_n)}.$$

4.b) La fonction φ possède au moins $n+1$ zéros, donc, comme f est de classe $\mathscr{C}^n$, en appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, il existe $\xi\in]a,b[$ tel que $\varphi^{(n)}(\xi)=0$.

4.c) Ainsi, $f^{(n)}(\xi)-n!\times K=0$.
Comme $f^{(n)}$ est continue sur le segment $[a,b]$, elle admet une borne supérieure. D'où, pour $x\notin\{a_1,\dots,a_n\}$:
$$|f(x)-P(x)|\leqslant\sup_{[a,b]}\left|f^{(n)}\right|\frac{\prod_{i=1}^{n}\left|x-a_i\right|}{n!}.$$
Le résultat est encore vrai si x est l'un des a_i, d'où la conclusion.

Solution 71.

1. Soit un entier $k \geqslant 2$.
Appliquons *la formule des probabilités totales* avec le système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$:

$$\mathbf{P}\big([X = k+1]\big) = \mathbf{P}\big(A_1 \cap [X = k+1]\big) + \mathbf{P}\big(\overline{A_1} \cap [X = k+1]\big)$$

Si on note B_k l'événement : « La première succession d'un Pile-Face (premier lancer exclu) a lieu aux rangs k et $k+1$ »

$$A_1 \cap [X = k+1] = A_1 \cap B_k.$$

Or, les lancers sont mutuellement indépendants, donc A_1 et B_k sont indépendants et

$$\mathbf{P}(A_1 \cap B_k) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B_k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(B_k).$$

Et, par simple décalage d'un lancer,

$$\mathbf{P}(B_k) = \mathbf{P}\big([X = k]\big).$$

De plus, si on commence directement par un Pile et que la *première succession* de Pile-Face intervient aux k et $(k+1)$-ièmes lancers, il n'y a que des piles entre les lancers 1 et k, puis un Face au lancer $k+1$. Autrement dit,

$$A_1 \cap [X = k+1] = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}}.$$

Comme les lancers sont mutuellement indépendants, il vient :

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\big(A_1 \cap [X = k+1]\big)\\ &= \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}})\\ &= \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(A_2) \times \cdots \times \mathbf{P}(A_k) \times \mathbf{P}(\overline{A_{k+1}}) = \frac{1}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbf{P}\big([X = k+1]\big) = \frac{1}{2}\mathbf{P}\big([X = k]\big) + \frac{1}{2^{k+1}}.}$$

2. En multipliant par 2^{k+1}, l'équation précédente devient :

$$2^{k+1}\mathbf{P}\big([X = k+1]\big) = 2^k\mathbf{P}\big([X = k]\big) + 1.$$

D'où, $$v_{k+1} = v_k + 1.$$

On reconnaît une suite arithmétique. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$,

$$v_k = v_2 + (k-2).$$

Comme $$v_2 = 4\mathbf{P}\big([X = 2]\big) = 4\mathbf{P}(A_1 \cap \overline{A_2}) = 1,$$

on trouve $$\boxed{\mathbf{P}\big([X = k]\big) = (k-1)2^{-k}.}$$

3. On a

$$[X \geqslant 2] = \bigcup_{k=2}^{+\infty} [X = k].$$

Comme les événements sont deux à deux disjoints :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big([X \geqslant 2]\big) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\big([X = k]\big) = \sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)2^{-k}\\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.\end{aligned}$$

On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4.$$

Finalement, $$\boxed{\mathbf{P}\big([X \geqslant 2]\big) = 1.}$$

Comme $\mathbf{P}\big([X = 1]\big) = 0$, on a

$$\mathbf{P}\big([X = 0]\big) = 1 - \mathbf{P}\big(\overline{[X \geqslant 2]}\big) = 1 - 1 = \boxed{0.}$$

Presque sûrement, un Pile-Face apparaît dans l'infinité de tirages.

4. La série de terme général

$$k\mathbf{P}\big([X = k]\big) = k(k-1)2^{-k},$$

est une série géométrique dérivée. Il y a convergence puisque $1/2 \in]-1;1[$. Comme le terme général est positif, on a même une convergence absolue. L'espérance existe avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbf{P}\big([X = k]\big) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)2^{-k}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{(1-1/2)^3}.\end{aligned}$$

Concluons : $$\boxed{\mathbf{E}(X) = 4.}$$

Solution 72.

1. La variable Y_n compte le nombre de succès (avoir un « face ») dans une répétition de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes. La probabilité de succès est $1/2$. Finalement,

$$\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n;1/2).}$$

D'après le cours,

$$\boxed{\mathbf{E}(Y_n) = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(Y_n) = \frac{n}{4}.}$$

2.a) Sur les n lancers, il y a :
- Y_n déplacements sur la gauche,
- $n - Y_n$ déplacements sur la droite.

Ainsi,

$$\boxed{X_n = (-1) \cdot Y_n + (+1) \cdot (n - Y_n) = n - 2 \cdot Y_n.}$$

2.b) On en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_n) &= n - 2\mathbf{E}(Y_n) = \boxed{0.}\\ \mathbf{V}(X_n) &= (-2)^2\mathbf{V}(Y_n) = \boxed{n.}\end{aligned}$$

3.a) • Listons les possibilités (G pour gauche et D pour droite).

GG,	GD,	DG,	DD
$X_2 = -2$,	$X_2 = 0$,	$X_2 = 0$	$X_2 = 2$
$Z_2 = 2$,	$Z_2 = 0$,	$Z_2 = 0$	$Z_2 = 2$.

Z_2 peut ainsi prendre deux valeurs 0 et 2. La loi de Z_2 est :

$$\boxed{\begin{gathered} Z_2(\Omega)=\{0;2\}, \\ \mathbf{P}\big([Z_2=2]\big)=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\big([Z_2=0]\big)=\frac{1}{2}. \end{gathered}}$$

- De même,

$$\begin{array}{cccc} \text{GGG}, & \text{GGD}, & \text{GDG}, & \text{DGG} \\ X_3=-3, & X_3=-1, & X_3=-1 & X_3=-1, \\ Z_3=3, & Z_3=1, & Z_3=1 & Z_3=1, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{GDD}, & \text{DGD}, & \text{DDG}, & \text{DDD} \\ X_3=1, & X_3=1, & X_3=1 & X_3=3, \\ Z_3=1, & Z_3=1, & Z_3=1 & Z_3=3. \end{array}$$

Z_3 peut prendre deux valeurs,

$$\boxed{\begin{gathered} Z_3(\Omega)=\{1;3\}, \\ \mathbf{P}\big([Z_3=3]\big)=\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\big([Z_3=1]\big)=\frac{3}{4}. \end{gathered}}$$

3.b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Précisons que

$$Z_n=|X_n| \quad \text{et} \quad {Z_n}^2={X_n}^2.$$

D'après *la formule de Koenig-Huygens*,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Z_n) &= \mathbf{E}({Z_n}^2)-\mathbf{E}(Z_n)^2 \\ &= \mathbf{E}({X_n}^2)-\mathbf{E}(Z_n)^2. \end{aligned}$$

D'après la question 2.(b),

$$\mathbf{V}(X_n)=\mathbf{E}({X_n}^2)-\mathbf{E}(X_n)^2=\mathbf{E}({X_n}^2).$$

En particulier $\boxed{\mathbf{V}(Z_n)\leqslant\mathbf{V}(X_n).}$

4.a) Si n est impair, on ne peut être à l'origine. Dans ce cas,

$$\mathbf{P}\big([X_n=0]\big)=0.$$

Si n est pair,

$$\mathbf{P}\big([X_n=0]\big)=\mathbf{P}\big([Y_n=n/2]\big)=\boxed{\frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2}.}$$

4.b) On trouve

$$\mathbf{P}\big([X_{2n}=0]\big)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Solution 73.

1.a) La variable X est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, la famille $\big([X=k]\big)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est un système complet d'événements. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\big([X=k]\big)=1,$$

et donc $$\boxed{G_X(1)=\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\big([X=k]\big)1^k=1.}$$

1.b) La fonction G_X est dérivable en tant que fonction polynomiale. Soit $t\in\mathbb{R}$,

$$G_X'(t)=\sum_{\mathbf{k=1}}^{n}\mathbf{P}\big([X=k]\big)kt^{k-1}.$$

Donc $$G_X'(1)=\sum_{k=1}^{n}k\mathbf{P}\big([X=k]\big)=\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\big([X=k]\big).$$

On reconnaît l'expression de l'espérance pour une variable à valeurs dans $[\![0;n]\!]$.

On a bien $\boxed{\mathbf{E}(X)=G_X'(1).}$

1.c) La fonction G_X est polynomiale donc dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. Soit $t\in\mathbb{R}$,

$$G_X''(t)=\sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}\big([X=k]\big)k(k-1)t^{k-2}.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} G_X''(1) &= \sum_{k=2}^{n}\mathbf{P}\big([X=k]\big)k(k-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\big([X=k]\big)k(k-1). \end{aligned}$$

Par linéarité et *le théorème de transfert* pour la première somme, on obtient

$$\begin{aligned} G_X''(1) &= \sum_{k=0}^{n}k^2\mathbf{P}\big([X=k]\big)-\sum_{k=0}^{n}k\mathbf{P}\big([X=k]\big) \\ &= \mathbf{E}(X^2)-\mathbf{E}(X). \end{aligned}$$

Or, $\mathbf{E}(X)=G_X'(1)$, il vient :

$$G_X''(1)+G_X'(1)=\mathbf{E}(X^2).$$

De plus, *la formule de Koenig-Huygens* impose

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}(X^2)-\mathbf{E}(X)^2 \\ &= \boxed{G_X''(1)+G_X'(1)-G_X'(1)^2.} \end{aligned}$$

2. Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$. D'après *le théorème de transfert* avec la fonction

$$\varphi : x\in\mathbb{R}\mapsto t^x=e^{x\ln(t)}$$

$$\mathbf{E}\big(\varphi(X)\big)=\sum_{k=0}^{n}\varphi(k)\mathbf{P}\big([X=k]\big)=\sum_{k=0}^{n}t^k\mathbf{P}\big([X=k]\big),$$

car $X(\Omega)=[\![0;n]\!]$. C'est-à-dire

$$\boxed{\mathbf{E}(t^X)=G_X(t).}$$

3.a) La variable X_n ne peut prendre que les valeurs entières entre 0 et n,

$$\boxed{X_n(\Omega)=[\![0;n]\!].}$$

Précisons maintenant pour tout $i\in X_n(\Omega)$, les probabilités $\mathbf{P}\big([X=i]\big)$. Pour cela, notons A_k l'événement « Le basketteur réussi le k-ème lancer ». Soit $i\in[\![0;n]\!]$. D'après l'énoncé

$$\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{i-1}}(A_i)=q_i.$$

Comme $\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{i-1}}$ est une probabilité, on a aussi

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{i-1}}(\overline{A_i}) &= 1-\mathbf{P}_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{i-1}}(A_i) \\ &= 1-q_i. \end{aligned}$$

Et, pour $i\in[\![0;n-1]\!]$,

$$[X_n=i]=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i\cap\overline{A_{i+1}}.$$

Par *la formule des probabilités composées*,

$$\mathbf{P}\big([X_n=i]\big)=\Big(\prod_{j=1}^{i}q_j\Big)\cdot(1-q_{i+1}).$$

De plus,

$$[X_n=n]=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n,$$

et $$\boxed{\mathbf{P}\big([X_n = n]\big) = \prod_{j=1}^{n} q_j.}$$

3.b) Posons $p = 1 - q$. La loi de X_n se simplifie. Pour $i \in [\![0; n-1]\!]$,

$$\mathbf{P}\big([X_n = i]\big) = p \cdot q^i \quad \text{et} \quad \mathbf{P}\big([X_n = n]\big) = q^n.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_{X_n}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}\big([X_n = k]\big)\, t^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}\big([X_n = k]\big)\, t^k\right) + \mathbf{P}\big([X_n = n]\big)\, t^n \\ G_{X_n}(t) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} p q^k t^k\right) + q^n t^n. \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression d'une suite géométrique de raison qt. Pour $qt \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} p q^k t^k = p \sum_{k=0}^{n-1} (qt)^k = p \frac{1-(qt)^n}{1-qt}.$$

Finalement,

$$\boxed{G_{X_n}(t) = \begin{cases} p\dfrac{1-(qt)^n}{1-qt} + (qt)^n & \text{si } qt \neq 1 \\ np+1 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

3.c) Utilisons la relation de la question 1.(b). Dérivons G_X à partir de la nouvelle expression obtenue à la question précédente. Pour $qt \neq 1$,

$$G'_{X_n}(t) = n(qt)^{n-1} + \frac{p}{(1-qt)^2}\Big(-n(qt)^{n-1}(1-qt) + q\big(1-(qt)^n\big)\Big).$$

En particulier, (rappelons que $p = 1-q$),

$$\begin{aligned} &G'_{X_n}(1) \\ &= nq^{n-1} + \frac{p}{(1-q)^2}\big(-nq^{n-1}(1-q) + q(1-q^n)\big) \\ &= nq^{n-1} + \frac{1}{1-q}\big(-nq^{n-1}(1-q) + q(1-q^n)\big) \\ &= nq^{n-1} - nq^{n-1} + \frac{q}{1-q}(1-q^n) = \frac{q}{p}(1-q^n). \end{aligned}$$

Finalement, $$\boxed{\mathbf{E}(X_n) = \frac{q}{p}(1-q^n).}$$

Comme $q \in]0;1[$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n) = \frac{q}{p}.}$$

Solution 74.

...

Solution 75.

...

Solution 76.

...

Solution 77.

1.a) Comme les variables X_i sont à valeurs dans $\{-1;1\}$, Y_2 et Y_3 sont aussi à valeurs dans $\{-1;1\}$. Par indépendance

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_2 = 1) &= \mathbf{P}([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \\ &\quad + \mathbf{P}([X_1 = -1] \cap [X_2 = -1]) \\ &= p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1 \\ \mathbf{P}(Y_2 = -1) &= 1 - \mathbf{P}(Y_2 = 1) = 2p(1-p). \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_3 = -1) = &\mathbf{P}(X_1 = -1, X_2 = 1, X_3 = 1) \\ &+ \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = -1, X_3 = 1) \\ &+ \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = -1) \\ &+ \mathbf{P}(X_1 = -1, X_2 = -1, X_3 = -1) \\ = &3p^2(1-p) + (1-p)^3 \end{aligned}$$

Enfin $$\mathbf{P}(Y_3 = 1) = 1 - \mathbf{P}(Y_3 = -1).$$

1.b) Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements formés par $[X_{n+1} = 1]$ et $[X_{n+1} = -1]$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Y_{n+1} = 1) \\ =&\mathbf{P}_{[X_{n+1}=1]}(Y_{n+1} = 1)\,\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) \\ &+ \mathbf{P}_{[X_{n+1}=-1]}(Y_{n+1} = 1)\,\mathbf{P}(X_{n+1} = -1) \\ =&\mathbf{P}(Y_n = 1)\,\mathbf{P}(X_{n+1} = 1) + \mathbf{P}(Y_n = -1)\,\mathbf{P}(X_{n+1} = -1) \end{aligned}$$

par indépendance de Y_n et X_{n+1}. D'où

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p \cdot p_n + (1-p)\big(1-p_n\big) \\ &= pp_n + 1 - p - p_n + pp_n \\ &= 1 - p + p_n(2p-1). \end{aligned}$$

On obtient la formule explicite en reconnaissant une suite arithmético-géométrique.

1.c) Si Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y_n = 1] \cap [Y_{n+1} = 1]) &= \mathbf{P}(Y_n = 1)\,\mathbf{P}(Y_{n+1} = 1) \\ p_n \cdot p &= p_n p_{n+1} \end{aligned}$$

Comme $p_n \neq 0$, on doit donc avoir $p_{n+1} = p$. Soit $1 - 2p + p_n(2p-1) = 0$, puis $(1-2p)\big(1-p_n\big) = 0$.

- Si $p \neq \frac{1}{2}$, $p_n = 1$ ce qui n'est pas possible.
- Si $p = \frac{1}{2}$, $p_n = \frac{1}{2}$ pour tout n. On vérifie alors que Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes.

2. Posons $X'_i = 2X_i - 1$. On vérifie que $X'_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. Par le lemme des coalitions, les variables X'_i sont mutuellement indépendantes. On sait alors, par stabilité par somme des lois binomiales que $\sum\limits_{i=1}^{n} X'_i \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Puis

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 2\sum_{i=1}^{n} X'_i - n$$

est à valeurs dans $\{2k - n \mid k \in [\![0;n]\!]\}$ et

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 2k - n\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

4.a)

```python
import numpy.random as rd

def simu_X(p):
    return (-1)**(rd.rand()>p)
def simu_S(p,n):
    s=0
    for i in range(n):
        s+=simu_X(p)
    return s
def simu_Y(p,n):
    y=1
    for i in range(n):
        y*=simu_X(p)
    return y
```

Solution 78.

...

Solution 79.

1. Voir cours.

2. On a le système linéaire

$$\begin{cases} \mathbf{E}(1)=1 \\ \mathbf{E}(Y)=1 \\ \mathbf{E}(Y^2)=5/3 \end{cases} \iff \begin{cases} p_0+p_1+p_2=1 \\ 0\times p_0+1\times p_1+2\times p_2=1 \\ 0^2\times p_0+1^2\times p_1+2^2\times p_2=5/3 \end{cases}$$

On trouve

$$p_0=p_1=p_2=\frac{1}{3}.$$

La variable Y suit donc une loi uniforme sur $\{0;1;2\}$.

3.a) La linéarité de φ est claire.
Soit $Q\in\operatorname{Ker}\varphi$.

$$\varphi(Q)=(0,0,\dots,0)$$

implique

$$Q(x_0)=0, Q(x_1)=0,\cdots,Q(x_n)=0.$$

Autrement dit, $x_0,x_1,\dots,x_n$ sont racines de Q. Or Q est un polynôme de degré au plus n. Avec au moins $n+1$ racines, c'est en fait le polynôme nul. φ est donc injective car son noyau est trivial.
De plus,

$$\dim\mathbb{R}_n[x]=\dim\mathbb{R}^{n+1},$$

φ est donc un isomorphisme.

3.b) Vérifier que

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Notons que A est inversible car φ est bijective. ${}^tA$ est donc aussi inversible.

3.c) Les variables sont finies donc les moments existent. Par la formule de transfert

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad \mathbf{E}\left(X^k\right)=\sum_{i=0}^{n} x_i{}^k\mathbf{P}\left(X=x_i\right).$$

On constate que

$${}^tA\begin{pmatrix}\mathbf{P}(X=x_0)\\ \mathbf{P}(X=x_1)\\ \vdots\\ \mathbf{P}(X=x_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n 1\cdot\mathbf{P}(x=x_i)\\ \sum_{i=0}^n x_i\mathbf{P}(X=x_i)\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^n x_i^n\mathbf{P}(X=x_i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{E}(X)\\ \vdots\\ \mathbf{E}(X^n)\end{pmatrix}.$$

On vient de voir que ${}^tA$ est inversible et

$$\begin{pmatrix}\mathbf{P}(X=x_0)\\ \mathbf{P}(X=x_1)\\ \vdots\\ \mathbf{P}(X=x_n)\end{pmatrix}={}^tA^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{E}(X)\\ \vdots\\ \mathbf{E}(X^n)\end{pmatrix}.$$

Ce dernier calcul montre que la loi de X est bien unique une fois connu les n premiers moments.

Solution 80.

1.

```python
def moment(val,loi,s) :
    n=len(val)
    m=0
    for i in range(n) :
        m=m+loi[i]*val[i]**s
    return m
```

2.

```python
def variance(val,loi) :
# utilisation de la formule de Koenig-Huygens
    v=moment(val,loi,2)-moment(val,loi,1)**2
    return v
```

Solution 81.

1. La variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=1/5$. Un code possible est

```python
import numpy.random as rd
p=1/5
print(rd.random()<p)
```

On identifie ici `True` avec 1 et `False` avec 0.

2. La variable Y compte le nombre de succès dans n répétitions d'une expérience de Bernoulli de paramètre p. Les expériences sont mutuellement indépendantes. C'est donc une loi binomiale.

$$\boxed{Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n;1/5).}$$

Pour simuler la variable Y, on simule n parties et on compte le nombre de parties gagnantes.

```python
def SimuY(p,n) :
    Compteur=0
    for i in range(n) :
        Compteur+=rd.random()<p
    return Compteur
```

On peut aussi écrire

```python
def SimuY(p,n):
    Y=sum(rd.random(n)<p)
    return Y
```

3. La variable Z est le rang du premier succès dans une infinité de répétitions d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes. La probabilité de succès est p. Par conséquent, Z suit une loi géométrique de paramètre p.

$$\boxed{Z\hookrightarrow\mathcal{G}(p).}$$

On peut simuler la loi par

```python
def SimuZ(p) :
    Rang=1
    while rd.random()>p :
        Rang+=1
    return Rang
```

4. La variable X_2 peut s'obtenir comme la somme de deux variables aléatoires de loi géométrique de paramètre p. Ainsi,

```
def SimuX2(p) :
    x2=SimuZ(p)+SimuZ(p)
    return x2
```

Ce code se généralise à r boules :

```
def SimuXr(p,r) :
    x=0
    for i in range(r) :
        x+=SimuZ(p)
    return x
```

4 Du chapitre 4 : Python

Solution 82.

...

Solution 83.

...

Solution 84.

...

Solution 85.

...

Solution 86.

```
def limite2(precision) :
    s=1 # initialisation somme
    n=1 # initialisation indice
    fac=1
    erreur=1/2 # initialisation écart à la
         limite
    while erreur > precision :
        fac=n*fac
        s+=1/fac
        erreur=1/(n*2**n)
        n+=1
    return s
```

Solution 87.

1. Le programme suivant calcule de proche en proche la somme $\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k(b-a)/n)$ sauvegardée dans la variable S, en ajoutant un à un ses termes à l'aide d'une boucle inconditionnelle `for`. On obtient la somme de Riemann $S_n(f)$ en multipliant par le pas $(b-a)/n$ à la toute fin.

```
def Riemann(a,b,f,n):
    S=0
    pas  = (b-a)/n
     # Largeur du rectangle
    for k in range(n):
        S += f(a + k*pas)
        # On somme les hauteurs
    S=pas*S
    return S
```

Noter ici que pour limiter le nombre de multiplications, il est préférable de partir de la formule

$$S_n(f) = \text{pas} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(a+k\cdot\text{pas}\big)$$

plutôt que

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\big(a+k\frac{b-a}{n}\big).$$

Solution 88.

On ne connaît pas la valeur finale donc on doit incrémenter la puissance jusqu'à atteindre la condition terminale. Une boucle `while` semble par conséquent adaptée :

```
def puissance(n,a) :
    i=0
    while a**i < n :
        i+=1
    return a**i
```

Solution 89.

On calcule le terme ${u_0}^2 + \cdots + {u_{n-1}}^2$ à l'aide d'une boucle `for`.

```
def suite(n) :
    u = 1
    termes = [u]
    for i in range(1,n) :
        somme_carrés = 0
        for j in range(i) :
            somme_carrés +=termes[j]**2
        u = (1 + somme_carrés)/i
        termes.append(u)
    print(termes)
```

On obtient par exemple :

```
>>> suite(10)
[1, 2.0, 3.0, 5.0, 10.0, 28.0, 154.0,
    3520.0, 1551880.0, 267593772160.0]
```

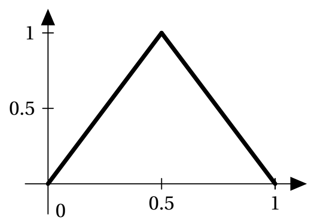
Remarques. La division en Python renvoie toujours un flottant (`float`) *même lorsque le résultat est entier. Ceci peut poser problème si l'on veut évaluer* `suite(30)` *qui est gigantesque par exemple. En effet, le nombre de chiffres d'un flottant est borné en Python contrairement aux entiers.*
De plus, on pourrait conjecturer que la suite ne contient que des entiers, il n'en est rien, le 42^e *terme n'est pas entier... Prudence donc dans les conjectures.*

Solution 90.

...

Solution 91.

1. Le graphe de f est donné par :



2. On utilise des tableaux `numpy` pour résoudre ce problème car l'utilisation de listes peut amener à des erreurs d'arrondi. On peut écrire :

```python
def suite2(u0,n):
    u=u0
    termes = np.zeros(n)
    termes[0] = u0
    for i in range(1,n) :
        if u<=(1/2) :
            u = 2*u
            termes[i] = u
        else :
            u = 2*(1-u)
            termes[i] = u
    return termes
```

3.a) Testons le programme.

```
>>> suite2(1/2,7)
array([0.5, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
    0.0] )

>>> suite2(1/4,7)
array([0.25, 0.5, 1.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
     0.0])

>>> suite2(1/8,7)
array([0.125, 0.25, 0.5, 1.0, 0.0, 0.0,
    0.0, 0.0])

>>> suite2(1/16,7)
array([0.0625, 0.125, 0.25, 0.5, 1.0, 0.0,
     0.0, 0.0])
```

À partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont nuls. Plus précisément, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, la suite définie par :

$$u_0 = 2^{-p}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n),$$

est nulle à partir du rang $p+1$.

• Prouvons ce résultat par récurrence.
Pour $k \in [\![0; p]\!]$, on pose $\mathscr{P}(k)$: $\quad u_k = 2^{k-p}$.
Initialisation. Comme $u_0 = 2^{-p}$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in [\![0; p-1]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. On a par hypothèse de récurrence,

$$u_k = 2^{k-p} = \frac{1}{2^{p-k}} \in [0; \frac{1}{2}].$$

Par définition de la suite u,

$$u_{k+1} = f(u_k) = 2 \cdot u_k = 2^{k+1-p}.$$

$\mathscr{P}(k+1)$ est prouvée.
Conclusion. La propriété est vraie pour tout entier $k \in [\![0; p]\!]$.

En particulier, $\qquad u_p = 2^{p-p} = 2^0 = 1 \in [\frac{1}{2}; 1].$

Puis, $\qquad u_{p+1} = f(u_p) = f(1) = 0.$

Comme $f(0) = 0$, par récurrence immédiate, on a pour tout entier k,

$$\boxed{k > p \quad \Rightarrow \quad u_k = 0.}$$

3.b) Testons comme indiqué.

```
>>> suite2(2/5,7)
array([0.4, 0.8, 0.4, 0.8, 0.4, 0.8, 0.4,
    0.8])
>>> suite2(2/7,7)
array([0.28571429, 0.57142857, 0.85714286,
     0.28571429, 0.57142857,
       0.85714286, 0.28571429])
>>> suite2(2/11,7)
[0.2857, 0.5714, 0.8572, 0.2856, 0.5712,
    0.8576, 0.2848, 0.5696]
array([0.18181818, 0.36363636, 0.72727273,
     0.54545455, 0.90909091,
       0.18181818, 0.36363636])
```

On obtient successivement une suite 2-périodique, une suite 3-périodique et une suite 5-périodique.

En poursuivant, on obtient des suites 7-périodiques, 9-périodiques..
Retenons de cet exemple qu'une légère modification de la condition initiale u_0 aboutit à des comportements de la suite bien distincts.

Solution 92.

On pourra faire l'analogie avec le programme sur les sommes de Riemann et l'approximation de l'aire sous la courbe.

1. Un code possible est

```python
def distance(xA,yA,xB,yB) :
    return ((yB-yA)**2 + (xB-xA)**2)
        **(1/2)
```

• Par exemple, la distance entre l'origine et le point $(1,1)$ est $\sqrt{2}$.

```
>>> distance(0,0,1,1)
1.4142135623730951
>>> 2**(1/2)
1.4142135623730951
```

2.

```python
def longueur(f,n,a,b) :
    d = 0
    x = np.linspace(a,b,n)
    # abscisses des points
    f_x = f(x)
    # ordonnées
    for i in range(len(x)-1) :
        d += distance(x[i], f_x[i], x[i
            +1], f_x[i+1])
        # On somme les distances entre
            chaque point créé
    return d
```

• On peut tester la fonction avec la fonction cube.

```python
def cube(x) :
    return x**3

>>> longueur(cube,30,0,20)
8000.651084040342
```

Solution 93.

...

Solution 94.

1,2.

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def d(x) :
     y=(1-abs(1-2*x+2*np.floor(x)))/2
     return y

x=np.linspace(0,1,1000)
y=d(x)
#plt.plot(x,y)
#plt.show()

n=10
S=d(x)
for i in range(1,n) :
     S+=d(2**i*x)/2**i
     plt.plot(x,S)
     plt.show()
```

3.

4.

Solution 95.

...

Solution 96.