
PREMIER PROBLÈME

PARTIE I : Etude d'une solution de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$

1. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in [p, p+1]$, $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$. Comme $p \leq p+1$, en intégrant il vient :

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p} dt ; \text{ c'est à dire : } \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}.$$

$$\text{Alors } \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt - \frac{1}{p} \leq 0 \text{ ou } \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \geq \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \geq 0.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$. En sommant on obtient :

$$0 \leq a_n = \sum_{p=1}^n u_p \leq \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1. \text{ Ainsi } 0 \leq a_n \leq 1.$$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = u_{n+1} \geq 0$.

La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée donc convergente.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq 1$ donc $0 \leq \gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 1$.

La limite γ de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ vérifie : $0 \leq \gamma \leq 1$.

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1. a. $\varphi : x \rightarrow e^x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est positive. Alors φ est convexe sur $\mathbb{R}$. Ainsi la courbe représentative de φ est au dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geq \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0)$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq e^0(x-0) + e^0 = x + 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x.}$$

- b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit t un réel appartenant à $[0, n]$.

en appliquant 1. a. à $\frac{t}{n}$ et à $-\frac{t}{n}$ on obtient : $0 \leq 1 + \frac{t}{n} \leq e^{\frac{t}{n}}$ et $0 \leq 1 - \frac{t}{n} \leq e^{-\frac{t}{n}}$.

Ainsi $0 \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{t}{n}}\right)^n = e^t$ et $0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n = e^{-t}$. Poursuivons.

$$0 \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \text{ et } \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0 \text{ donc : } 0 \leq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

En multipliant par e^{-t} il vient : $0 \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n], \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t, \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}}$$

2. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall x \in [0, 1], \psi(x) = (1 - x)^n + nx - 1$.

ψ est dérivable sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1], \psi'(x) = -n(1 - x)^{n-1} + n = n[1 - (1 - x)^{n-1}] \geq 0$.

ψ est croissante sur $[0, 1]$ et $\psi(0) = 0$. Alors $\forall x \in [0, 1], \psi(x) \geq 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], (1 - x)^n + nx - 1 \geq 0.}$$

Remarque On peut également obtenir ce résultat en utilisant la convexité de $x \rightarrow (1 - x)^n$ sur $[0, 1]$.

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et t un réel appartenant à $[0, n]$.

$\frac{t^2}{n^2}$ appartient à $[0, 1]$. a. donne alors $\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n + n \frac{t^2}{n^2} - 1 \geq 0$. Donc : $1 - \frac{t^2}{n} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$.

Dès lors : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t}$.

1.b. donne enfin : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

Alors $e^{-t} - \frac{t^2}{n} e^{-t} = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

Finalement : $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$. Rappelons que : $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq 0$ et concluons.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, n], 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}}$$

.

3. a. $f_n : t \rightarrow \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)$ est continue sur $]0, n]$.

De plus : $\forall t \in]0, n], 0 \leq f_n(t) = \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leq \frac{1}{t} \frac{t^2}{n} e^{-t} = \frac{t}{n} e^{-t}$.

$\forall t \in]0, n], 0 \leq f_n(t) \leq \frac{t}{n} e^{-t}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{n} e^{-t}\right) = 0$. Par encadrement il vient alors $\lim_{t \rightarrow 0} f_n(t) = 0$.

Ainsi f_n est continue sur $]0, n]$ et prolongeable par continuité en 0. Par conséquent $\int_0^n f_n(t) dt$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt \text{ converge.}}$$

Remarque $\lim_{t \rightarrow 0} f_n(t) = 0$ s'obtient également sans difficulté à l'aide d'un développement limité. On a même $f_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2n} t$.

b. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in]0, n]$, $0 \leq f_n(t) \leq \frac{t}{n} e^{-t}$. Donc : $\int_0^n f_n(t) dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n t e^{-t} dt$.

$\forall t \in [0, +\infty[$, $t e^{-t} \geq 0$ et $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge et vaut 1.

Alors $\int_0^n f_n(t) dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n t e^{-t} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$. Il vient alors sans difficulté par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

4. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{n}{k+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{k+1} \right]_0^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k+1} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \text{ Or :}$$

$$n a_n = n \sum_{k=1}^n u_k = n \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \right) = n \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \right) = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - n \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt.$$

$$\text{Ainsi } n a_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - n [\ln |t|]_1^{n+1} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - n \ln(n+1).$$

Ce qui donne : $n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = n(a_n + \ln(n+1))$. Finalement :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n(a_n + \ln(n+1)).$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall t \in]0, n]$, $g_n(t) = \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)$. g_n est continue sur $]0, n]$.

$$\forall t \in]0, n], g_n(t) = \frac{1}{n} \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k$$

$$\text{Alors } \lim_{t \rightarrow 0} g_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k \right) = \frac{1}{n} \times n = 1.$$

g_n est donc continue sur $]0, n]$ et prolongeable par continuité en 0. $\int_0^n g_n(t) dt$ existe.

$$\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*, J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt \text{ existe.}$$

Remarque $\lim_{t \rightarrow 0} g_n(t) = 1$ peut s'obtenir également en se rappelant $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \alpha u$.

$$\int_0^n g_n(t) dt = \int_0^n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = \frac{1}{n} \times n(a_n + \ln(n+1)).$$

$$\int_0^n g_n(t) dt = a_n + \ln(n+1).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt = a_n + \ln(n+1).$$

5. a. $h : t \rightarrow \frac{1 - e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 1$ car : $\frac{1 - e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-(-t)}{t} = 1$.

h est donc continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0, ce qui suffit pour dire que $\int_0^1 h(t) dt$ converge.

Ainsi :

$$U = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \text{ existe.}$$

Posons : $\forall t \in [1, +\infty[, \ell(t) = \frac{e^{-t}}{t}$. ℓ est continue sur $[1, +\infty[$.

De plus $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq \ell(t) = \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge car $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_1^{+\infty} \ell(t) dt$. Ainsi :

$$V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ existe.}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$J_n - I_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt - \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt = \int_0^n \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

$$\text{Donc } J_n - I_n = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \int_1^n \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = U + \int_1^n \frac{1}{t} dt - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt = U + [\ln |t|]_1^n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

$$J_n - I_n = U + \ln n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt. \text{ Rappelons alors que } J_n = a_n + \ln(n+1). \text{ Ainsi :}$$

$$a_n = J_n - \ln(n+1) = U + \ln n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt + I_n - \ln(n+1) = U - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt + I_n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\gamma = U - V$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \gamma$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt = V$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0.$$

$$\gamma = U - V.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

PARTIE I : Etude d'un exemple

1. Soit λ un réel et soient P , Q et R trois éléments de E .

$$\bullet \varphi(\lambda P + Q, R) = (\lambda P + Q)(0) R(0) + (\lambda P + Q)(1) R(1) + (\lambda P + Q)(-1) R(-1).$$

$$\varphi(\lambda P + Q, R) = (\lambda P(0) + Q(0)) R(0) + (\lambda P(1) + Q(1)) R(1) + (\lambda P(-1) + Q(-1)) R(-1).$$

$$\varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda [P(0) R(0) + P(1) R(1) + P(-1) R(-1)] + [Q(0) R(0) + Q(1) R(1) + Q(-1) R(-1)].$$

$$\varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda \varphi(P, R) + \varphi(Q, R).$$

$$\bullet \varphi(P, Q) = P(0) Q(0) + P(1) Q(1) + P(-1) Q(-1) = Q(0) P(0) + Q(1) P(1) + Q(-1) P(-1) = \varphi(Q, P).$$

$$\bullet \varphi(P, P) = (P(0))^2 + (P(1))^2 + (P(-1))^2 \geq 0.$$

$$\bullet \text{Supposons que } \varphi(P, P) = 0. \text{ Alors } (P(0))^2 + (P(1))^2 + (P(-1))^2 = 0.$$

$$\text{Donc } (P(0))^2 = (P(1))^2 = (P(-1))^2 = 0.$$

Ce qui donne $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$. P est alors un polynôme de degré au plus 2 qui a trois zéros distincts. P est donc le polynôme nul.

$$\text{Ainsi } \varphi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0_E.$$

Les quatre points précédents indiquent alors que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

$$2. \text{ a. Soit } P \text{ un élément de } E = \mathbb{R}_2[X]. \text{ La formule de Taylor donne } P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2.$$

$$\text{Alors } P(1) - P(-1) = P(0) + P'(0) + \frac{P''(0)}{2} - \left(P(0) - P'(0) + \frac{P''(0)}{2} \right) = 2P'(0). \text{ Ainsi :}$$

$$\boxed{\forall P \in E, 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0.}$$

$$2. \text{ b. Soit } P \text{ un élément de } E. U(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X.$$

$$U(P)(0) = 0, U(P)(1) = 2P'(0) - (P(1) + P(-1)) = -2P(-1) \text{ (d'après a.) et } U(P)(-1) = 2P'(0) + (P(1) + P(-1)) = 2P(1) \text{ (toujours d'après a.)}. \text{ Alors :}$$

$$\varphi(u(P), P) = u(P)(0)P(0) + u(P)(1)P(1) + u(P)(-1)P(-1) = 0 \times P(0) - 2P(-1)P(1) + 2P(1)P(-1) = 0.$$

$$\boxed{\forall P \in E, \varphi(u(P), P) = 0. u \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } E.}$$

3. a. $P_1 = \frac{1}{2} (X^2 + X)$. $P'_1 = X + \frac{1}{2}$. $P'_1(0) = \frac{1}{2}$, $P_1(1) = 1$ et $P_1(-1) = 0$.

Alors $u(P_1) = 2P'_1(0)X^2 - (P_1(1) + P_1(-1))X = X^2 - X$. Notons que $(X^2 - X)' = 2X - 1$

Plus rapidement : $u^2(P_1) = u(X^2 - X) = 2(-1)X^2 - (0 + 2)X = -2(X^2 + X) = -4P_1$.

Alors P_1 est un élément non nul de E tel que $u^2(P_1) = -4P_1$.

P_1 est un vecteur propre de u^2 associé à la valeur propre -4 .

u est antisymétrique donc P_1 et $u(P_1)$ sont orthogonaux. P_1 et $\frac{1}{2}u(P_1)$ le sont également. Ainsi (P_1, P_2) est une famille orthogonale de E .

De plus $\|P_1\|^2 = \varphi(P_1, P_1) = (P_1(0))^2 + (P_1(1))^2 + (P_1(-1))^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2$. $\|P_1\| = 1$.

$u(P_1) = X^2 - X$. $P_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$. $P_2(0) = 0$, $P_2(1) = 0$ et $P_2(-1) = 1$.

Alors $\|P_2\|^2 = (P_2(0))^2 + (P_2(1))^2 + (P_2(-1))^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$. $\|P_2\| = 1$.

$\varphi(P_1, P_2) = 0$, $\|P_1\| = 1$ et $\|P_2\| = 1$. Finalement :

(P_1, P_2) est une famille orthonormale de E .

b. Soit P un élément de E .

$P \in \text{Ker } u \iff 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X = 0_E \iff 2P'(0) = P(1) + P(-1) = 0$.

Rappelons que $2P'(0) = P(1) - P(-1)$

$P \in \text{Ker } u \iff P(1) - P(-1) = P(1) + P(-1) = 0 \iff P(1) = P(-1) = 0 \iff (X - 1)(X + 1) \text{ divise } P$.

Comme P est un polynôme de degré au plus 2 : $P \in \text{Ker } u \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, P = \lambda(X^2 - 1)$.

$\text{Ker } u$ est la droite vectorielle de E engendrée par $X^2 - 1$.

Posons $P_3 = X^2 - 1$. $\|P_3\|^2 = (P_3(0))^2 + (P_3(1))^2 + (P_3(-1))^2 = (-1)^2 + 0^2 + 0^2$. $\|P_3\| = 1$.

$\varphi(P_1, P_3) = P_1(0)P_3(0) + P_1(1)P_3(1) + P_1(-1)P_3(-1) = 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0$

$\varphi(P_2, P_3) = P_2(0)P_3(0) + P_2(1)P_3(1) + P_2(-1)P_3(-1) = 0 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 0 = 0$.

Alors (P_1, P_2, P_3) est une famille orthonormale, donc libre, de trois éléments de E qui est un espace vectoriel de dimension 3. Ainsi (P_1, P_2, P_3) est une base orthonormale de E .

Rappelons que $u(P_1) = 2P_2$, $u(P_2) = \frac{1}{2}u^2(P_1) = \frac{1}{2}(-4P_1) = -2P_1$ et $u(P_3) = 0_E$. Finalement :

$\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_2) = (\frac{1}{2}(X^2 + X), \frac{1}{2}(X^2 - X), X^2 - 1)$ est une base orthonormale de E et la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PARTIE II : Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

1. Soient x et y deux éléments de E .

$$\langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x) + u(y), x+y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle.$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x+y), x+y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle.}$$

• Supposons que u est antisymétrique. $\forall t \in E, \langle u(t), t \rangle = 0$.

$$\text{Alors } \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x+y), x+y \rangle = 0.$$

$$\text{Donc } \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle = 0.$$

$$\text{Ce qui donne encore : } \forall (x, y) \in E^2, 0 + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + 0 = 0.$$

$$\text{Finalement } \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

• Réciproquement supposons que : $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$ et montrons que u est antisymétrique.

$$\text{Par hypothèse : } \forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = -\langle x, u(x) \rangle = -\langle u(x), x \rangle.$$

$$\text{Donc } \forall x \in E, 2\langle u(x), x \rangle = 0 \text{ ou } \forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0. \text{ } u \text{ est antisymétrique.}$$

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si : } \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.}$$

2. a. Soient i et j deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. $u(e_j) = \sum_{k=1}^n m_{k,j} e_k$.

$$\text{Alors } \langle e_i, u(e_j) \rangle = \langle e_i, \sum_{k=1}^n m_{k,j} e_k \rangle = \sum_{k=1}^n m_{k,j} \langle e_i, e_k \rangle.$$

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ étant une base orthonormale on obtient } \langle e_i, u(e_j) \rangle = m_{i,j}.$$

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle.}$$

b. M est la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

• Supposons que u est un endomorphisme antisymétrique.

Alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{j,i} = \langle e_j, u(e_i) \rangle = - \langle u(e_j), e_i \rangle = - \langle e_i, u(e_j) \rangle = -m_{i,j}$. Ainsi ${}^t M = -M$.

• Réciproquement supposons que ${}^t M = -M$ et montrons que u est un endomorphisme antisymétrique.

Soient x et y deux éléments de E de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soient $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ et $(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$ les coordonnées de $u(x)$ et $u(y)$ dans $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ étant orthonormale $\langle u(x), y \rangle = \sum_{k=1}^n x'_k y_k$ et $\langle x, u(y) \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y'_k$.

$$\langle u(x), y \rangle = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{k,j} x_j \right) y_k = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{k=1}^n m_{k,j} y_k \right) = - \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{k=1}^n m_{j,k} y_k \right) = - \sum_{j=1}^n x_j y'_j.$$

Ainsi $\langle u(x), y \rangle = - \langle x, u(y) \rangle$. Ce qui achève de prouver que u est antisymétrique.

Remarques 1. Au niveau de la réciproque on aurait pu se contenter de prouver que $\forall x \in E \langle u(x), x \rangle = 0$.

2. On peut également obtenir cette réciproque en faisant intervenir les matrices X et Y de x et y dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ et écrire :

$$\langle u(x), y \rangle = \langle MX, Y \rangle = {}^t(MX)Y = {}^tX^tMY = -{}^tXMY = - \langle X, MY \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^t M = -M$.

PARTIE III : Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

1. Soit λ un réel valeur propre de u . Il existe un élément non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$.

$$\langle u(x), x \rangle = 0 \text{ et } \langle u(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2. \text{ Donc } \lambda \|x\|^2 = 0.$$

Comme x n'est pas nul sa norme ne l'est pas davantage et λ est nul.

Si λ est un réel valeur propre de u , λ est nul.

2. Soit x un élément de $\text{Ker } u$ et y un élément de $\text{Im } u$. Il existe un élément t de E tel que $y = u(t)$.

$\langle x, y \rangle = \langle x, u(t) \rangle = - \langle u(x), t \rangle = - \langle 0_E, t \rangle = 0$. Ceci achève de montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont orthogonaux.

En particulier $\text{Ker } u \cap \text{Im } u = \{0_E\}$. Le théorème du rang donne $\dim E = \dim \text{Ker } u + \dim \text{Im } u$. Il est alors clair que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires.

$\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont orthogonaux et supplémentaires.

Sans aucun doute $\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de $\text{Ker } u^2$. $u(u(x)) = 0_E$ donc $u(x)$ est élément de $\text{Ker } u$... et de $\text{Im } u$.

Comme $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires : $u(x) = 0_E$ et x appartient à $\text{Ker } u$.

Par conséquent $\text{Ker } u^2 \subset \text{Ker } u$ et finalement :

$$\boxed{\text{Ker } u = \text{Ker } u^2.}$$

3. Soit M la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E . D'après **II 2. b.**, ${}^tM = -M$.

M^2 est la matrice de u^2 dans $\mathcal{B}$ et ${}^tM^2 = {}^tM {}^tM = (-M)(-M) = M^2$.

La matrice de u^2 dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est symétrique donc u^2 est symétrique.

Soit λ une valeur propre de u^2 . Il existe un élément non nul x de E tel que $u^2(x) = \lambda x$.

$$\lambda \|x\|^2 = \langle \lambda x, x \rangle = \langle u^2(x), x \rangle = - \langle u(x), u(x) \rangle = -\|u(x)\|^2.$$

x n'est pas nul donc $\lambda = -\frac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2}$. Il devient alors clair que λ est un réel négatif ou nul.

$$\boxed{u^2 \text{ est un endomorphisme symétrique de } E \text{ et toute valeur propre de } u^2 \text{ est négative ou nulle.}}$$

4. a. u^2 est un endomorphisme symétrique de E donc u^2 est diagonalisable. Ainsi il existe une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u^2 .

Supposons que 0 soit la seule valeur propre de u^2 . Comme u^2 est un endomorphisme symétrique, u^2 est diagonalisable et $\text{Ker } u^2$ est le seul sous-espace propre de u^2 .

Alors $\text{Ker } u^2 = E$. **2.** donne alors $\text{Ker } u = E$. u est alors l'endomorphisme nul ce qui contredit l'hypothèse faite au début de la partie.

$$\boxed{u^2 \text{ admet au moins une valeur propre non nulle.}}$$

b. Il existe un réel non nul λ tel que $u^2(x) = \lambda x$. Notons que, d'après ce qui précède, λ est strictement négatif.

$$u(F) = u(\text{Vect}(x, u(x))) = \text{Vect}(u(x), u^2(x)) = \text{Vect}(u(x), \lambda x) \subset \text{Vect}(x, u(x)) = F. \text{ } F \text{ est stable par } u.$$

Ne reste plus qu'à montrer que $F = \text{Vect}(x, u(x))$ est un plan vectoriel de E . Pour ce faire il suffit de montrer que la famille $(x, u(x))$ est libre car c'est déjà une famille génératrice de F .

Supposons $(x, u(x))$ liée. Comme x n'est pas nul il existe un réel γ tel que $u(x) = \gamma x$. Alors $u^2(x) = \gamma^2 x$ or $u^2(x) = \lambda x$. Ainsi $\gamma^2 x = \lambda x$. x n'étant pas nul, $\lambda = \gamma^2$ ce qui contredit le fait que λ est strictement négatif.

Finalement $(x, u(x))$ est libre.

$$F = \text{Vect}(x, u(x)) \text{ est un plan vectoriel de } E \text{ stable par } u.$$

c. Qui peut le plus peut le moins. Prenons donc un sous-espace vectoriel G stable par u et montrons que $G^\perp$ est également stable par u .

Soit z un élément de $G^\perp$. Montrons que $u(z)$ appartient encore à $G^\perp$.

$$\forall x \in G, u(x) \in G. \text{ Donc } \forall x \in G, \langle u(x), z \rangle = 0.$$

u étant antisymétrique on a encore : $\forall x \in G, -\langle x, u(z) \rangle = 0$ ou $\forall x \in G, \langle x, u(z) \rangle = 0$. Ce qui signifie que $u(z)$ est un élément de $G^\perp$.

$\forall z \in G^\perp, u(z) \in G^\perp$. $G^\perp$ est stable par G . Ce résultat appliqué à F permet de dire que :

$$F^\perp \text{ est stable par } u.$$

d. u_1 est un endomorphisme de $F^\perp$ et $\forall (x, y) \in (F^\perp)^2, \langle u(x), x \rangle_1 = \langle u(x), x \rangle = 0$.

u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$.

$\text{Im } u_1$ est un sous-espace vectoriel de $F^\perp$ donc $F \cap \text{Im } u_1 = \{0_E\}$. F et $\text{Im } u_1$ sont en somme directe.

Montrons alors, par double inclusion, que $\text{Im } u = F \oplus \text{Im } u_1$.

• λ n'est pas nul et $u(x) = \lambda x$ donc $x = u(\frac{1}{\lambda} x)$ est un élément de l'image de u . Alors x et $u(x)$ sont deux éléments de l'image de u . Ainsi $F = \text{Vect}(x, u(x))$ est contenu dans $\text{Im } u$.

$$\text{Im } u_1 = u_1(F^\perp) = u(F^\perp) \subset \text{Im } u.$$

F et $\text{Im } u_1$ étant contenu dans $\text{Im } u$, $F \oplus \text{Im } u_1$ est contenu dans $\text{Im } u$.

• Réciproquement soit y un élément de $\text{Im } u$. Il existe un élément t de E tel que $y = u(t)$.

F et $F^\perp$ sont supplémentaires donc il existe un unique élément (t', t'') de $F \times F^\perp$ tel que $t = t' + t''$.

$y = u(t) = u(t') + u(t'') = u(t') + u_1(t'')$. $u(t')$ appartient à F car t' est dans F qui est stable par u , et $u_1(t'')$ est un élément de $\text{Im } u_1$. Alors y appartient à $F + \text{Im } u_1 = F \oplus \text{Im } u_1$.

Ceci achève de montrer que $\text{Im } u$ est contenu dans $F \oplus \text{Im } u_1$.

$$u_1 \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } F^\perp \text{ et } \text{Im } u = F \oplus \text{Im } u_1$$

5. Montrons le résultat à l'aide d'une récurrence faible sur la dimension de E .

• Soit u un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel E de dimension 0.

Nécessairement $\text{Im } u = \{0_E\}$ et donc le rang de u qui vaut 0 est pair. La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que tout endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel euclidien de dimension inférieure ou égale à n soit de rang pair. Montrons qu'il en est encore de même pour les endomorphismes antisymétriques des espaces vectoriels euclidiens de dimension $n + 1$.

Soit u un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n + 1$.

Si u est nul son rang, qui vaut 0, est pair. Supposons désormais que u n'est pas nul et utilisons à plein **4.**

u^2 possède une valeur propre non nulle (et même strictement négative). Soit x un vecteur propre associé à cette valeur propre. $F = (x, u(x))$ est un plan vectoriel stable par u . $F^\perp$ est stable par u .

Soit u_1 l'endomorphisme de $F^\perp$ défini par : $\forall x \in F^\perp, u_1(x) = u(x)$. u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et $\text{Im } u = F \oplus \text{Im } u_1$.

$\dim F^\perp = (n + 1) - 2 = n - 1$. L'hypothèse de récurrence nous permet alors de dire que le rang de u_1 est pair.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\text{rg } u = \dim \text{Im } u = \dim (F \oplus \text{Im } u_1) = \dim F + \dim \text{Im } u_1 = 2 + \text{rg } u_1$ pour dire que le rang de u est pair et ainsi achever la récurrence.

Le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair.

PARTIE IV : Application

1. ${}^t A = -A$. Comme A est la matrice de u relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$ on peut dire que :

u est un endomorphisme antisymétrique de E .

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Alors } A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -9 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $u^2(f_1) = -9 f_1$. f_1 n'étant pas nul :

$f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est un vecteur propre de u^2 associé à la valeur propre -9

2. Ce que nous avons vu plus haut (**III 4.**) permet déjà de dire que F est un plan vectoriel stable par F et que $(f_1, u(f_1))$ en est une base et même une base orthogonale car f_1 et $u(f_1)$ sont orthogonaux.

Posons dès lors $e'_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1$ et $e'_2 = \frac{1}{\|u(f_1)\|} u(f_1)$. (e'_1, e'_2) est alors une base orthonormale de F .

$f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ et $u(f_1) = 3e_1 - 3e_2 - 3e_4$. Par conséquent $\|f_1\| = \sqrt{3}$ et $\|u(f_1)\| = 3\sqrt{3}$.

$$(e'_1, e'_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4) \right) \text{ est une base orthonormale de } F.$$

Cherchons $F^\perp$. Nous pouvons déjà dire que $F^\perp$ est un plan vectoriel ($\dim F^\perp = \dim E - \dim F = 4 - 2 = 2$) stable par u .

Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$ un élément de E .

Comme (e'_1, e'_2) est une base de F :

$$x \in F^\perp \iff \langle x, e'_1 \rangle = \langle x, e'_2 \rangle = 0 \iff x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 - x_4 = 0 \iff x_3 = x_1 + x_2 \text{ et } x_4 = x_1 - x_2.$$

Pas de doute, $f_3 = e_1 + e_3 + e_4$ est un élément de $F^\perp$. Alors $u(f_3)$ est également un élément de $F^\perp$.

Notons que $u(f_3) = -6(e_2 + e_3 - e_4)$ (ce qui confirme son appartenance à $F^\perp$).

$(f_3, u(f_3))$ est alors une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls de $F^\perp$. $(f_3, u(f_3))$ est donc une famille libre et orthogonale de deux éléments du plan vectoriel $F^\perp$. $(f_3, u(f_3))$ est une base orthogonale de $F^\perp$.

Posons $e'_3 = \frac{1}{\|f_3\|} f_3$ et $e'_4 = \frac{1}{\|u(f_3)\|} u(f_3)$. (e'_3, e'_4) est alors une base orthonormale de $F^\perp$.

$f_3 = e_1 + e_3 + e_4$ et $u(f_3) = -6(e_2 + e_3 - e_4)$. Par conséquent $\|f_3\| = \sqrt{3}$ et $\|u(f_3)\| = 6\sqrt{3}$.

$$(e'_3, e'_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}(-e_2 - e_3 + e_4) \right) \text{ est une base orthonormale de } F^\perp.$$

3. (e'_1, e'_2) est une base orthonormale de F , (e'_3, e'_4) est une base orthonormale de $F^\perp$ et, F et $F^\perp$ sont supplémentaires et orthogonaux donc $\mathcal{B}_0 = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base orthonormale de E .

Cherchons la matrice de u dans cette base.

Rappelons que $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} f_1$ et que $e'_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} u(f_1)$. Alors $u(e'_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} u(f_1) = 3e'_2$.

Rappelons également que $u^2(f_1) = -9f_1 = -9\sqrt{3}e'_1$.

Alors $u(e'_2) = \frac{1}{3\sqrt{3}} u^2(f_1) = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-9\sqrt{3}e'_1) = -3e'_1$.

$e'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4)$ et $e'_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-e_2 - e_3 + e_4)$,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $u(e'_3) = 6e'_4$ et $u(e'_4) = -6e'_3$. Finalement :

$\mathcal{B}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}(-e_2 - e_3 + e_4) \right)$ est une base orthonormale de E et la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$