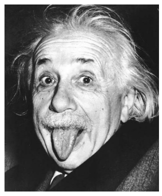
CHAPITRE 1

Révisions en analyse

Do not worry too much about your difficulties in mathematics, I can assure you that mine are still greater.

ALBERT EINSTEIN



1 Suites et séries

Exercice 1. ✦ Est-ce que les séries suivantes sont convergentes ? # RA1

$$\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}, \qquad \sum \frac{\dfrac{\cos(1/n)^{\pi}}{\sin(\pi/n)} e^{\ln(n+666)-\ln(n)} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}}{7\cdot n^{\alpha}} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

≫ Solution p. 9

Exercice 2. ✦ *d'après EMlyon* # RA2

Soient x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie :

$$u_0 = x, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2\sqrt{u_n}}$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 1$.

2. **a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.

b) Déterminer la limite de cette suite.

3. On suppose maintenant que $x \neq 1$ et on considère la série de terme général $v_n = -1 + u_n$.

a) Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de v_{n+1}/v_n.

b) Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?

c) En déduire que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{P}_n = \prod_{k=0}^{n} u_k.$$

≫ Solution p. 10

Exercice 3. ✦ **Suite de Sylvester** # RA3

On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$s_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k.$$

1. a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad s_{n+1} = s_n(s_n - 1) + 1 \qquad (\star)$
   b) Démontrer la relation de récurrence d'ordre 2 suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{n+2} = {s_{n+1}}^2 - s_n(s_n - 1) \qquad (\star\star)$$

   c) Préciser la limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *Python*
   a) En utilisant la relation $(\star)$, écrire une fonction python d'entête `Sylvester` d'argument n et qui renvoie la matrice ligne $[s_0 \ s_1 \ \dots \ s_n]$.
   b) Reprendre la question précédente en utilisant maintenant la relation $(\star\star)$.
3. Le code suivant permet de conjecturer la convergence d'une certaine série. Laquelle ?

Editeur

```
n=10, indice=np.linspace(0,n,n+1)
A=sylvetser(n)
B=np.zeros(n+1)
B[0]=1/A[0]
for i in range(1,n+1):
    B[i]+=B[i-1]+1/A[i]

# résultat :
>>> B
array([0.5       , 0.83333333, 0.97619048, 0.99944629, 0.99999969,
       1.        , 1.        , 1.        , 1.        , 1.        , 1.  ])
```

4. Prouver votre conjecture en montrant dans un premier temps que $1/(s_n - 1) - 1/(s_{n+1} - 1) = 1/s_n$.

2 Intégrales et intégrales généralisées

Exercice 4. ✦ **Le rêve du deuxième année** # RA4

L'objectif de l'exercice est d'établir l'égalité suivante :

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-k} \qquad (\bullet)$$

1. Soit $h :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = -x\ln x$. Donner les variations de h. Que dire en 0^+ ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence d'une fonction continue R_n telle que

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} + \mathrm{R}_n(u) \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \mathrm{R}_n(u) \leqslant \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{|u|}.$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $\mathrm{J}_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} u^k \,\mathrm{d}u$.
   a) Justifier l'existence de J_k.
   b) Calculer J_k.
   c) En déduire l'existence et le calcul de $\mathrm{I}_k = \displaystyle\int_0^1 x^k (\ln x)^k \,\mathrm{d}x$.
   On pourra effectuer le changement de variable $u = -(k+1)\ln x$.
4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\mathrm{I}_k + r_n \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant r_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}}{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}}.$$

   b) En déduire l'égalité $(\bullet)$.

≫ Solution p. 12

Exercice 5. ✦✦ *adapté de l'écrit EDHEC 93* # RA5

Pour tout entier naturel non nul n, on note

$$\mathrm{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

On introduit aussi les fonctions f_n et g_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}(x+i)}.$$

Enfin, on introduit les intégrales :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{U}_n = \int_0^{1/\sqrt{\mathrm{H}_n}} g_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_n = \int_{1/\sqrt{\mathrm{H}_n}}^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partie I

1. **a)** La suite de terme général H_n est-elle convergente ? La suite de terme général S_n est-elle convergente ?

b) Pour tout nombre réel positif ou nul x, prouver les inégalités :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

c) En appliquant la double inégalité précédente à $x = \frac{1}{k}$ montrer que

$$\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.$$

2. **a)** Exprimer $g_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire, à l'aide de la double inégalité (1), les inégalités :

$$\int_0^{1/\sqrt{\mathrm{H}_n}} \mathrm{e}^{-x\mathrm{H}_n}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{U}_n \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{S}_n}{2\mathrm{H}_n}} \int_0^{1/\sqrt{\mathrm{H}_n}} \mathrm{e}^{-x\mathrm{H}_n}\,\mathrm{d}x.$$

c) En conclure que $\mathrm{U}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{H}_n}$.

d) Montrer de façon analogue les inégalités : $0 \leqslant \mathrm{V}_n \leqslant e^{-\sqrt{\mathrm{H}_n}} \frac{e^{\frac{\mathrm{S}_n}{2}}}{\mathrm{H}_n}$

e) Démontrer que $\mathrm{V}_n = o\left(\frac{1}{\mathrm{H}_n}\right)$ quand n tend vers l'infini.

3. À l'aide des questions précédentes, établir que

$$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}.$$

Partie II

4. On considère la famille de polynômes $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ définie par :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad e_k(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)(x+k)\cdots(x+n) = \prod_{\substack{i\neq k\\ 1\leqslant i\leqslant n}} (x+i).$$

a) Montrer que cette famille est libre. En déduire que c'est une base de E_n.

b) En déduire l'existence de coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad n! = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$$

c) Calculer λ_k en fonction de n et du coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$.

5. Déduire de la question 1 de la partie II la formule :

$$\mathrm{I}_n = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k-1}\big(\ln(k+1)-\ln(k)\big).$$

6. Utiliser cette égalité et l'équivalent de I_n obtenu dans la partie I pour justifier l'équivalent :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(\ln(k+1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln n}.$$

≫ Solution p. 13

Exercice 6. ✦✦ *d'après Ecricome* # RA6

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ ainsi que la suite réelle $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suivante :

$$\mathrm{I}_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x)]^n \,\mathrm{d}x.$$

A - Étude de la bijection réciproque de f

1. Montrer que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on précisera. On note f^{-1} la bijection réciproque.

2. Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.

3. Justifier que :

$$\forall x \in \mathrm{J}, \qquad \cos\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.$$

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathrm{J}\backslash\{1\}$ et :

$$\forall x \in \mathrm{J}\setminus\{1\}, \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

5. En déduire le développement limité en $\sqrt{2}$ de f^{-1} à l'ordre 1.

B - Étude de la suite d'intégrales

1. Justifier que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie. Calculer I_2.

2. Déterminer les réels a et b, tels que : $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\quad \dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{a}{1-t} + \dfrac{b}{1+t}$.

3. En posant $t = \sin x$, déterminer I_1.

4. Déterminer le sens de variation de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5. **a)** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}, \qquad \mathrm{I}_n \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)^n}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)^n}.$$

b) En déduire le comportement de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{I}_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1}\mathrm{I}_n.$$

≫ Solution p. 13

Exercice 7. ✦✦✦ *d'après EDHEC* # RA7

Dans la suite, α désigne un nombre réel fixé supérieur ou égal à 1, et on pose :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} t^n \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I est absolument convergente.
2. a) Calculer I_0.
   b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si I_{n-1} est convergente, il en est de même de I_n, et trouver une relation entre I_n et I_{n-1}.
   c) En déduire la convergence de I_n et la valeur de I_n en fonction de n et α.
3. a) *Rappeler les formules de Taylor-Young et Taylor avec reste intégral. Préciser bien les hypothèses.*
   En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur l'intervalle $[0, x]$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

   b) En déduire que :

$$\left|I - \left(I_0 - \frac{I_2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{I_{2n}}{(2n+1)!}\right)\right| \leqslant K I_{2n+1},$$

   K étant un nombre réel que l'on précisera en fonction de n.
   c) En déduire : $I = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\alpha^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\alpha^{2n+1}}\right).$
4. a) Rappeler la définition de la fonction arctangente, préciser son graphe ainsi que l'équation de la tangente en 0. Enfin, vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

   b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,1], \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

   c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0,1], \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \mathrm{Arctan}(x)\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}.$$

   d) En déduire une expression très simple de I en fonction de α utilisant la fonction Arctan.

≫ Solution p. 15

Exercice 8. ✦✦ **Exemple d'intégrales à paramètres : lien entre les fonctions Beta et Gamma** # RA8

A - Préliminaires

Soit Φ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Phi(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

Pour tout réel $x > 0$ fixé, on note $\varphi_x : t \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \ln(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}$.

1. Justifier que Φ est bien définie.
2. Vérifier que la fonction Φ est croissante.
3. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad t \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant t\mathrm{e}^t.$$

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Comparer $\Phi(x/2), \Phi(x+h)$ et $\Phi(2x)$ pour tout $h \in [-x/2, x]$.
   b) En déduire $\lim\limits_{h \to 0} h\Phi(x+h)$.

Dans la suite, on admet que la fonction Φ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

B - La fonction Gamma

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

1. En utilisant l'intégrale de Gauss $\left(\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\right)$, donner la valeur de $\Gamma(1/2)$.

2. Justifier que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

3. *Dérivabilité*

a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Montrer que :

$$\forall h \in]-x, +\infty[, \qquad h\Phi(x) \leqslant \Gamma(x+h) - \Gamma(x) \leqslant h\Phi(x+h).$$

b) En déduire la dérivabilité de Γ sur $\mathbb{R}_*^+$ et préciser $\Gamma'(x)$.

4. **a)** Comparer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$, en déduire qu'il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

b) En utilisant la question 2, donner un équivalent simple de $\Gamma(x)$ en 0^+.

c) Préciser la convexité de Γ.

d) À l'aide des dernières questions, donner l'allure du graphe de Γ sur $]0; 2[$.

C - La fonction Beta

✦✦✦✦ Pour tous x et y réels strictement positifs, on pose

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t.$$

1. Prouver la convergence de l'intégrale définissant $\mathrm{B}(x, y)$.

2. **a)** Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x)$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \mathrm{B}(x+1, y) = \frac{x}{y}\mathrm{B}(x, y+1)$.

3. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathrm{B}(x, y+1) = \mathrm{B}(x, y) - \mathrm{B}(x+1, y).$$

En déduire que :

$$\mathrm{B}(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\mathrm{B}(x, y).$$

4. Soient n un entier naturel non nul et x un réel strictement positif.

a) À l'aide de l'inégalité de gauche de la question A-3, montrer que

$$\forall t \in [0; n], \qquad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

b) Montrer que pour tout $t \in [0; n]$, on a $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.

c) En déduire que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

5. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

6. **a)** Soit $y \in \mathbb{R}_*^+$. Justifier que

$$\mathrm{B}(n+1, y) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{n^y} \quad \text{puis} \quad \mathrm{B}(x, y) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y}.$$

b) Soient x, y, deux réels strictement positifs.

i) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\mathrm{B}(x+n,y)}{\mathrm{B}(x,y)} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{x+k}{x+y+k}\right) \quad \text{puis} \quad \frac{\mathrm{B}(x+n,y)n^y}{\mathrm{B}(x,y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$

ii) Conclure en montrant que

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

≫ Solution p. 16

Exercice 9. ✦✦✦ **Calcul de** $\zeta(2)$ # RA9

On pose, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{C}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x.$$

1. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\mathrm{C}_n = (2n-1)(\mathrm{C}_{n-1} - \mathrm{C}_n)$.
On pourra écrire $\cos^{2n} x = \cos x \cos^{2n-1} x$.

2. Établir, pour tout entier naturel n non nul, les égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2(\cos x)^{2n-2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{C}_n}{2n-1} = \frac{\mathrm{C}_{n-1}}{2n}.$$

3. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\mathrm{C}_n = (2n-1)n\mathrm{D}_{n-1} - 2n^2\mathrm{D}_n$.

4. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\dfrac{1}{n^2} = 2\left(\dfrac{\mathrm{D}_{n-1}}{\mathrm{C}_{n-1}} - \dfrac{\mathrm{D}_n}{\mathrm{C}_n}\right)$.

5. **a)** Justifier, pour tout réel $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la minoration : $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n, la majoration : $\mathrm{D}_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{\mathrm{C}_n}{2n+2}$.

6. Prouver l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

≫ Solution p. 20

Il n'y a pas de problème, il n'y a que des professeurs.

Jacques Prévert
Poète français (1900-1977).

Indications et solutions

Indication de l'exercice 1 p. 1

Pour la seconde série, déterminer un équivalent simple de chacun des facteurs pour appliquer le critère d'équivalence des séries à termes positifs.

Indication de l'exercice 2 p. 1

2.b) Soit ℓ, la limite. Passer à la limite dans la relation de récurrence pour obtenir une équation vérifiée par ℓ. Étudier ensuite la fonction :

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto 2x\sqrt{x} - 1 - x$$

pour trouver l'unique réel ℓ tel que $f(\ell) = 0$.

3.a) Vérifier que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = -\frac{u_n - 1}{2\sqrt{u_n}}.$$

En déduire la limite du quotient.

3.b) Déduire de la limite précédente qu'il existe un entier N_0 tel que pour tout entier $n \geqslant N_0$,

$$0 \leqslant v_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} v_n.$$

Conclure en comparant la suite $(v_n)_n$ à la suite géométrique $(1/2^n)_n$.

3.c) Considérer $\ln(P_n)$.

Indication de l'exercice 4 p. 2

2. C'est une réécriture de la formule de Taylor-Lagrange.

3.b) Établir une relation entre J_k et J_{k-1} à l'aide d'une intégration par parties.

Indication de l'exercice 6 p. 4

A.3. Pour $x \in J$, que dire de $f \circ f^{-1}(x)$?
Pour la seconde relation, on rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1.$$

A.4. Rappelons le théorème de dérivation de l'application réciproque.
Soient $f : I \to J$, $a \in I$ et $b = f(a)$.
Si
→ f est bijective et
→ f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$,

alors f^{-1} est dérivable en b avec

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

A.5. Pour une fonction g dérivable dans un voisinage de a, on dispose du DL à l'ordre 1 :

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o_a(x-a).$$

B.1. Justifier que la fonction tangente est dérivable sur $[0;\pi/4]$ et

$$\tan' = \frac{1}{\cos^2}.$$

B.3. Effectuer un changement de variable

$$t = \sin(x), \quad dt = \cos(x)\,dx.$$

Ne pas oublier

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

pour pouvoir se ramener à la question précédente.

B.4. Vérifier que

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/4} f(x)^n \big(f(x) - 1\big)\,dx.$$

Puis étudier le signe de l'intégrande.

B.5.a) Poser $a_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}$ et justifier ensuite les inégalités

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx \geqslant \int_{a_n}^{\pi/4} f(x)\,dx \geqslant \int_{a_n}^{\pi/4} f(a_n)\,dx.$$

B.5.b) Justifier l'existence de $q \in]0;1[$ tel que

$$I_n \geqslant \frac{1}{n^2 q^n}.$$

En déduire la limite.

B.6. Procéder par intégration par parties. Justifier de plus que :

$$\tan(x) f'(x) f(x)^{n-1} = f(x)^{n+2} - f(x)^n.$$

Indication de l'exercice 7 p. 4

1. Pour l'étude en $+\infty$, partir de l'inégalité :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \quad |\sin(t)| \leqslant t.$$

2.b) Intégrer par parties pour obtenir

$$I_n = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}.$$

2.c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

3.a) On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin \quad \text{et} \quad \sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos.$$

4.b) Reconnaître une somme géométrique.

Indication de l'exercice 8

p. 5

A.1. C'est une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$. Pour tout $x > 0$, montrer que $\varphi_x(t)$ est :
- négligeable devant $1/t^2$ lorsque t tend vers $+\infty$,
- négligeable devant $t^{x/2-1}$ lorsque t tend vers 0^+.

A.3. Pour l'inégalité de gauche, penser à un argument de convexité. Pour celle de droite, étudier la fonction $g : t \in \mathbb{R} \mapsto t\mathrm{e}^t - (\mathrm{e}^t - 1)$.

B.1. Effectuer un changement de variable $u = \sqrt{t}$.

B.2. Faire une intégration par parties.

B.3.b) Revenir à la définition du nombre dérivé comme limite du taux d'accroissement.
On trouve $\Gamma'(x) = \Phi(x)$.

B.4.b) Justifier que $\Gamma(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1/x$ à l'aide de la question B.2.

C.1. Faire une comparaison avec des intégrales de Riemann.

C.2.a) Faire un changement de variable $u = 1 - t$.

C.2.b) Procéder par une intégration par parties.

C.4.a) Remplacer t par $-t/n$.

C.4.b) Que dire si $t \in [\sqrt{n}; n]$?
Étudier dans un second temps la fonction définie sur $[0, \sqrt{n}[$ par :

$$f : t \mapsto n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) + t - \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right).$$

C.4.c) Partir de l'encadrement

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

et de la limite

$$\int_0^n \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).$$

C.5. Justifier que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = n^x\,\mathrm{B}(n+1, x)$$

puis que

$$\mathrm{B}(n+1, y) = \frac{n}{n+y}\mathrm{B}(n, y) = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+y)}\right)\mathrm{B}(1, y) \quad (\bullet)$$

C.6.a) Pour la première équivalence, utiliser la relation précédente $(\bullet)$.
Pour la seconde équivalence, utiliser la fait que la fonction

$$u \mapsto \mathrm{B}(u, y)$$

est décroissante, pour écrire

$$\mathrm{B}(n, y) \geqslant \mathrm{B}(x, y) \geqslant \mathrm{B}(n+1, y)$$

où $n = \lfloor x \rfloor$.

C.6.b)i) Pour la première égalité, ne pas oublier la question C.3.
Pour l'équivalent, utiliser la question C.5.

C.6.b)ii) Utiliser

$$\mathrm{B}(x, y) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(y)}{x^y}$$

qui permet aussi d'avoir un équivalent simple de $\mathrm{B}(x+n, y)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Puis utiliser aussi

$$\frac{\mathrm{B}(x+n, y)n^y}{\mathrm{B}(x, y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)}.$$