

DM 1 - sujet A

THÈME : RÉVISIONS ANALYSE - CALCUL DE $\zeta(2)$

Partie A : Lemme de Riemann-Lebesgue

On considère une fonction f continue sur $[0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

$$b_n = \int_0^1 f(t) \sin(\pi n t) dt.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. Montrer que

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

L'objectif de la suite est de montrer que ce résultat reste vrai lorsque f est seulement continue sur $[0, \pi]$. Pour cela, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$B_n = 2 \int_0^1 \left(f(t) - \sum_{k=1}^n b_k \sin(\pi k t) \right)^2 dt.$$

2. Calculer, pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^1 \sin(\pi k t) \sin(\pi \ell t) dt$.
3. En déduire :

$$B_n = 2 \int_0^1 f(t)^2 dt - 3 \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

4. a) Justifier la convergence de la série $\sum b_k(f)^2$.
b) Conclure.

Partie B : Application au calcul de $\zeta(2)$

5. On considère la fonction f définie sur $]0; 1[$ par

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) \cot(\pi x) \quad \text{où} \quad \cot(\pi x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

- a) Comparer les réels $f(x)$ et $f(1-x)$. Comment interpréter graphiquement le résultat sur la courbe représentative de f ?
- b) Vérifier que f se prolonge par continuité en 0 et en 1.
On note encore f , ce prolongement sur $[0; 1]$.
6. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale :

$$I_k = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) \cos(2\pi k x) dx.$$

7. a) Vérifier que pour tout $x \in]0; 1[$:

$$2 \sum_{k=1}^n \cos(2\pi k x) = \cot(\pi x) \sin(2\pi n x) + \cos(2\pi n x) - 1.$$

Indication. On pourra commencer par multiplier chacun des deux membres par $\sin(\pi x)$.

b) À l'aide des résultats précédents, établir que :

$$\sum_{k=1}^n I_k = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \sin(2\pi n x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) \cos(2\pi n x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) dx.$$

8. En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- **Python**

9. Vérifier que les suites de termes généraux

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

sont adjacentes. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|S_n - \pi^2/6| \leq 1/n$.

10. Écrire un programme python qui prend en argument n et renvoie une approximation de π^2 à 10^{-5} -près.

Formulaire. Pour tous réels a, b , on a

$$\begin{aligned} \sin(a) \sin(b) &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\ \sin(a) \cos(b) &= \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b)). \end{aligned}$$

Pour une variante, on pourra comparer avec le sujet ECRICOME 2025.

– FIN –

DM 1 - sujet *

THÈME : RÉVISIONS ANALYSE - INTÉGRALES DE WALLIX ET DE GAUSS

Dans tout le problème, on désigne par W la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x dt.$$

L'objectif est d'étudier cette fonction W et d'en déduire deux applications dont le calcul de l'intégrale de Gauss.

• **Préliminaire**

1. a) Montrer que, pour tout nombre réel t appartenant à $[0, \pi/2]$:

$$\sin t \geq \frac{2t}{\pi}.$$

- b) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$L = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt.$$

Bonus Calculer cette intégrale.

• **Étude de W**

2. Donner le sens de variation de la fonction W sur $[0, +\infty[$.

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

- a) Montrer que, pour tout nombre réel positif a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^{-ax} - e^{-ax_0}| \leq a|x - x_0|.$$

- b) En déduire l'existence d'une constante C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |W(x) - W(x_0)| \leq C|x - x_0|.$$

- c) Établir la continuité de W sur $[0, +\infty[$.

4. Pour tout nombre réel positif x , exprimer $W(x+2)$ en fonction de $W(x)$.

5. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de W à l'aide de la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g(x) = (x+1)W(x+1)W(x).$$

- a) Établir que, pour tout nombre réel positif ou nul x , $g(x+1) = g(x)$.

En déduire la valeur de $g(n)$ pour tout nombre entier naturel n .

- b) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0; 1]$ et tout nombre entier naturel n :

$$\frac{g(n+1)}{n+2} \leq \frac{g(x+n)}{x+n+1} \leq \frac{g(n)}{n+1}.$$

En déduire en fonction de n un encadrement de $g(x)$. En conclure que g est constante sur $[0; +\infty[$ (on explicitera son unique valeur).

6. a) En utilisant les variations de W , montrer que $W(x+1)$ est équivalent à $W(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- b) Déduire de ces résultats que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$W(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

- **Application au calcul de l'intégral de Gauss**

7. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x et tout nombre réel $u > -x$:

$$\left(1 + \frac{u}{x}\right)^x \leq \exp u.$$

8. En déduire pour $x \geq 1$:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \left(1 - \frac{t^2}{x}\right)^x dt \leq \int_0^{\sqrt{x}} \exp(-t^2) dt \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{x}\right)^{-x} dt.$$

On prouvera la convergence de l'intégrale de droite.

9. En posant respectivement $t = \sqrt{x} \cos u$ et $t = \sqrt{x} \frac{\cos u}{\sin u}$ dans la première et la dernière de ces intégrales, établir que, pour $x \geq 1$:

$$\sqrt{x} W(2x+1) \leq \int_0^{\sqrt{x}} \exp(-t^2) dt \leq \sqrt{x} W(2x-2).$$

10. En déduire la valeur de l'intégrale

$$G = \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt.$$

- **Application à l'approximation de π**

On pose, pour tout nombre réel positif x :

$$h(x) = \frac{W(x+1)}{W(x)}.$$

11. En remarquant que $W(x+2) \leq W(x+1) \leq W(x)$, établir que :

$$0 \leq 1 - h(x) \leq \frac{1}{x+2}.$$

12. Exprimer $h(x)$ en fonction de $h(x-2)$ pour $x \geq 2$, et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n :

$$h(2n) = \frac{r_n}{\pi} \quad \text{avec} \quad r_n = 2 \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1}$$

13. Vérifier que

$$r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi \quad \text{et} \quad |\pi - r_n| \leq \frac{2}{n+1}.$$

14. En déduire un programme python qui prend en argument $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$ et renvoie une approximation de π à ε -près. Commenter l'efficacité de la méthode.

– FIN –