CHAPITRE 3

Valeurs propres et vecteurs propres

Une idée qui ne peut servir qu'une seule fois est une astuce. Sinon, elle devient une méthode.

GEORGE PÓLYA
Mathématicien américain d'origine hongroise et suisse (1887-1985).

Ce chapitre est un préliminaire à la réduction des matrices et endomorphismes de dimension finie qui est un des objectifs du programme de deuxième année. Il sera complété par le chapitre « diagonalisation ».
Le chapitre commence par des rappels de première année sur des polynômes d'endomorphismes et de matrices pour ensuite définir la notion de valeur propre et de vecteur propre.

1 Rappels : polynômes d'endomorphismes et de matrices

Rappelons que pour un endomorphisme φ de E, les applications $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$ ... sont parfaitement définies et linéaires. Les **puissances** de φ sont les applications :

$$\varphi^0 = \mathrm{id}_E \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{n \text{ compositions}}.$$

Remarque. Comme pour les matrices, il existe une version de la formule du binôme de Newton dans le cas des endomorphismes. Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{L}(E)$ qui *commutent* ($\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$). Alors pour tout entier naturel p,

$$(\varphi + \psi)^p = (\varphi + \psi) \circ (\varphi + \psi) \circ \cdots \circ (\varphi + \psi) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \varphi^i \circ \psi^{p-i}.$$

Exemple. Calculons les puissances de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 2y). \end{array} \right.$$

Remarquons que $\varphi = 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} + \psi$, où ψ est l'endomorphisme défini par $\psi(x, y) = (y, 0)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Or, ψ^2 est l'application nulle. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\psi^2\big((x, y)\big) = \psi\big(\psi(x, y)\big) = \psi\big((y, 0)\big) = (0, 0).$$

Puis, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $$\psi^k = \psi^2 \circ \psi^{k-2} = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Comme les endomorphismes $2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ et ψ commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \varphi^n &= (2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} + \psi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^{n-k} \circ \psi^k = \sum_{k=0}^{\mathbf{2}} \binom{n}{k} (2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^{n-k} \circ \psi^k \\ &= \binom{n}{0} 2^n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \circ \psi^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \circ \psi^1 = 2^n\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} + n 2^{n-1} \psi. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^n\big((x, y)\big) = 2^{n-1}(2x + ny, 2y).$$

DÉFINITIONS **polynôme de matrice, d'endomorphisme**

Soient $P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

- *Le* ***polynôme de matrice*** $P(A)$ *est défini par* $\quad P(A) = \sum_{i=0}^{p} a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Un polynôme P *est* ***annulateur*** *de* A *si* $P(A) = 0_n$.

- *Le* ***polynôme d'endomorphisme*** $P(\varphi)$ *est défini par* $\quad P(\varphi) = \sum_{i=0}^{p} a_i \varphi^i \in \mathcal{L}(E)$.

Un polynôme P *est* ***annulateur*** *de* φ *si* $P(\varphi) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Règles de calculs

On démontre que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$,

$$\big(\lambda P\big)(A) = \lambda P(A) \quad \text{et} \quad \big(P + Q\big)(A) = P(A) + Q(A).$$

Retenons également la propriété de commutativité :

$$\big(PQ\big)(A) = P(A)Q(A) = Q(A)P(A) = \big(QP\big)(A).$$

On a de même avec des endomorphismes

$$\big(\lambda P\big)(\varphi) = \lambda P(\varphi), \qquad \big(P + Q\big)(\varphi) = P(\varphi) + Q(\varphi) \quad \text{et} \quad \big(PQ\big)(\varphi) = P(\varphi) \circ Q(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi) = \big(QP\big)(\varphi).$$

Exemple. Reprenons l'exemple de $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $\varphi\big((x, y)\big) = (2x + y, x)$.
Vérifions que le polynôme P défini par $P(t) = t^2 - 2t - 1$ est annulateur de φ. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcl}
\varphi^2\big((x, y)\big) & = & \varphi\Big(\varphi\big((x, y)\big)\Big) = \varphi\big((2x + y, x)\big) \\
 & = & \big(2(2x + y) + x, 2x + y\big) = (5x + 2y, 2x + y); \\
-2\varphi\big((x, y)\big) & = & (-4x - 2y, -2x); \\
-\,\mathrm{id}_E(x, y) & = & (-x, -y). \\
\hline
\varphi^2\big((x, y)\big) - 2\varphi\big((x, y)\big) - \mathrm{id}_E(x, y) & = & (0, 0).
\end{array}$$

Comme ceci est valable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on écrit simplement $\varphi^2 - 2\varphi - \mathrm{id}_E = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Exercice 1

✦ ✎ **Existence d'un polynôme annulateur**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En étudiant la famille $(I_n, A, \dots, A^p)$ pour un entier p bien choisi, montrer que A admet un polynôme annulateur. p. 23

VP1

Exercice 2

✦✦ **Exemples** *Les questions sont indépendantes.*

1. Donner un polynôme annulateur à l'endomorphisme $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P' \in \mathbb{R}_n[x]$. p. 24
2. Même question avec $\psi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto P(x + 7) \in \mathbb{R}_n[x]$.
   On pourra remarquer que $\psi(P) - P \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

VP2

Exemples. *Polynômes d'une matrice diagonale, triangulaire.*

Posons :
$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{T} = \begin{bmatrix} t_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & t_n \end{bmatrix}.$$

Alors
$$\mathrm{P(D)} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{P}(d_n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{P(T)} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}(t_1) & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{P}(t_n) \end{bmatrix}.$$

Remarque. Noter que si tous les coefficients diagonaux d_i sont racines du polynôme P, alors P est un polynôme annulateur de D.

Exercice 3 ✦✦ ✎ *Les questions sont indépendantes.*

1. Soient A, B, deux matrices carrées semblables.
   Montrer que tout polynôme annulateur de A est annulateur de B.
2. Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ annulateur de A.
   Montrer que si $\mathrm{P}(0) \neq 0$ alors A est inversible.

p. 24

VP3

PROPOSITION **polynôme d'endomorphisme, de matrice**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie dont* $\mathcal{B}$ *est une base et* φ *un endomorphisme de* E.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k).$$
Plus généralement, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$,
$$\mathrm{P}\Big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\Big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\big(\mathrm{P}(\varphi)\big).$$

Preuve. • Le premier point s'obtient par un raisonnement par récurrence sur k à partir de la formule
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^{k+1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^k) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

• Le second point découle du premier et de la linéarité de l'application $\varphi \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$. ■

2 Valeurs propres, vecteurs propres, cas matriciel

2.1 Premières définitions

DÉFINITIONS **valeurs propre, vecteur propre**

Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On dit que λ *est une* ***valeur propre*** *de* A *et que* X *est un* ***vecteur propre*** *pour* A *associé à la valeur propre* λ *si*
$$\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \quad \textit{et} \quad \mathrm{X} \neq 0_{n,1}.$$

Exemple. Posons
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Z} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de sorte que $$AX = 0 \cdot X, \quad AY = Y \quad \text{et} \quad AZ = -2Z.$$

Comme X, Y et Z sont des matrices colonnes non nuls, 0, 1 et -2 sont valeurs propres de A.

Attention. Un vecteur propre est toujours non nul.

DÉFINITION — spectre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Le ***spectre*** *de* A, *noté* $\mathrm{Sp}(A)$ *est l'ensemble des valeurs propres de* A.

Exemple. En reprenant l'exemple précédent, $\{0; 1; -2\} \subset \mathrm{Sp}(A)$.

Python. Voici le code pour obtenir une approximation des valeurs propres.

Editeur

```
import numpy.linalg as al
 # On importe la sous-bibliothèque
     linalg
A=np.array([[1,3,0],[0,-2,0],[-1,-2,0]])
 # On définit la matrice A
print(al.eigvals(A))
```

Console

```
>>> # script executed

[ 0.   1.  -2.]
```

Selon ce calcul, -2, 0 et 1 sont toutes les valeurs propres de la matrice A. On conjecture donc que $\mathrm{Sp}(A) = \{-2; 0; 1\}$.

2.2 Caractérisations des valeurs propres

THÉORÈME — caractérisation avec l'inversibilité

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Les énoncés suivants sont équivalents.*

i) *Le réel* λ *est une valeur propre de* A.

ii) *La matrice* $A - \lambda I_n$ *n'est pas inversible.*

Autrement dit, $\mathrm{Sp}(A)$ *est l'ensemble des réels* λ *pour lesquels la matrice* $A - \lambda I_n$ *n'est pas inversible.*

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}, \quad (A - \lambda I_n) X = 0_{n,1} \\ &\iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\} \\ &\iff A - \lambda I_n \ \text{ n'est pas inversible.} \end{aligned}$$

La dernière équivalence est une conséquence de la formule du rang. ■

Remarque. En particulier, 0 est valeur propre si et seulement si, la matrice A n'est pas inversible.

COROLLAIRE — matrices triangulaires

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A *est une matrice triangulaire,*

alors *les valeurs propres de* A *sont les coefficients diagonaux de* A.

Preuve. Notons $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. La matrice $A - \lambda I_n$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont les réels $a_{ii} - \lambda$ où $i \in [\![1;n]\!]$.
Il suffit ensuite de rappeler qu'une matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement si au moins l'un de ses coefficients diagonaux est nul. ∎

⚠ **Attention.** C'est grossièrement faux si la matrice n'est pas triangulaire.
On pourra par exemple, vérifier que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ n'admet aucune valeur propre réelle.

2.3 Les sous-espaces propres $E_\lambda(A)$

DÉFINITION — $E_\lambda(A)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout réel λ, on pose

$$E_\lambda(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\right\}.$$

En remarquant que $E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$, on en déduit que :

PROPOSITION — **structure de** $E_\lambda(A)$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $E_\lambda(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ *si et seulement si* λ *est une valeur propre de* A.

Remarque. La formule du rang donne alors $\dim(E_\lambda(A)) + \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) = n$.

Vocabulaire. Si $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ alors on parle de **l'espace propre associé à la valeur propre** λ. Dans ce cas,

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant n.$$

Exercice 4

✦ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si A et B sont semblables alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$ et les sous-espaces propres sont de même dimension. p. 24

VP4

Exemple. Le cas diagonal.
Si A est une matrice diagonale, alors les valeurs propres de A sont exactement les coefficients diagonaux de A et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, la dimension de $E_\lambda(A)$ est égale au nombre de fois où λ apparait sur la diagonale de A.

Exercice 5

✦✦ **Vrai ou Faux ?**
Pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ alors $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A^2)$. ✓ ×
2. Si $\lambda^2 \in \mathrm{Sp}(A^2)$ alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. ✓ ×
3. $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}({}^tA)$. ✓ ×
4. $E_\lambda(A) = E_\lambda({}^tA)$. ✓ ×
5. $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^tA))$. ✓ ×
6. Si A est inversible, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ssi $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}(A^{-1})$. ✓ ×

p. 24

VP5

Exercice 6

✦ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si la somme des coefficients de A sur chaque ligne vaut 1 alors 1 est valeur propre de A.
2. Est-ce encore vrai si la somme des coefficients de A sur chaque colonne vaut 1 ?

p. 25

VP6

3 Valeurs propres, vecteurs propres, cas des endomorphismes

3.1 Définitions et exemples

Reprenons et adaptons les définitions au cas des endomorphismes d'un espace vectoriel E.

DÉFINITIONS — valeur propre, vecteur propre, spectre

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

- *Soient* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $u \in \mathrm{E}$. *On dit que* λ *est une* ***valeur propre*** *de* φ *et que* u *est un* ***vecteur propre*** *pour* φ *associé à la valeur propre* λ *si*

$$\varphi(u) = \lambda u \quad \text{et} \quad u \neq 0_{\mathrm{E}}.$$

- *L'ensemble des valeurs propres de* φ *est le* ***spectre de*** φ, *il est noté* $\mathrm{Sp}(\varphi)$.

Exemple. Posons $u = (1,0,-2,)$, $v = (0,0,1)$, $w = (1,1,-2)$ et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y, 3y, 2x-4y+2z) \end{array} \right.$$

On a $\varphi(u) = u$, $\varphi(v) = 2v$ et $\varphi(w) = 3w$. Comme u, v et w sont non nuls, 1, 2 et 3 sont trois valeurs propres de φ. C'est-à-dire, $\{1;2;3\} \subset \mathrm{Sp}(\varphi)$.

Remarque. Le vecteur u (non nul) est un vecteur propre de φ si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u)$ est stable par φ.

Preuve. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si u est vecteur propre de φ alors pour tout $v = \mu u \in \mathrm{Vect}(u)$,

$$\varphi(v) = \varphi(\mu u) = \mu\varphi(u) = \mu\lambda u \in \mathrm{Vect}(u).$$

La sous-espace $\mathrm{Vect}(u)$ est stable par φ.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si $\mathrm{Vect}(u)$ est stable par φ alors $\varphi(u) \in \mathrm{Vect}(u)$. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(u) = \lambda u$. C'est-à-dire u (non nul) est vecteur propre de φ. ■

Exercice 7

✦ **Exemples** — *Les questions sont indépendantes.*

On pose $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \mathrm{P}' + 2\mathrm{P} \end{array} \right.$ et $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'. \end{array} \right.$

p. 25

1. Étudier les valeurs propres de l'endomorphisme φ.
2. Montrer que tout réel est valeur propre de ψ.

Remarque. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons l'endomorphisme

$$\varphi_{\mathrm{A}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & \mathrm{AX}. \end{array} \right.$$

Les valeurs propres (et vecteurs propres) de φ_{A} correspondent exactement aux valeurs propres (et vecteurs propres) de la matrice A.

DÉFINITION - PROPOSITION — $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)$

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On définit le sous-espace vectoriel* $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)$ *de* E *par*

$$\mathrm{E}_\lambda(\varphi) = \left\{ u \in \mathrm{E} \,|\, \varphi(u) = \lambda u \right\} = \mathrm{Ker}\left(\varphi - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathrm{E}}\right).$$

Remarques.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda(\varphi)$ est un espace stable par φ.
- $E_\lambda(\varphi)$ est bien un s.e.v de E puisque c'est le noyau d'une application linéaire.
- Si λ est une valeur propre, on dit que $E_\lambda(\varphi)$ est **l'espace propre associé à la valeur propre** λ.

3.2 Précision en dimension finie

THÉORÈME — **lien matrice et endomorphisme**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie,* $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, $u \in E$ *et* $\mathscr{B}$, *une base de* E.

Si on note
- → U *la matrice colonne des coordonnées de u dans la base* $\mathscr{B}$.
- → $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$, *la matrice de l'endomorphisme* φ *dans la base* $\mathscr{B}$.

Alors*, u est vecteur propre de l'endomorphisme* φ *pour la valeur propre* λ *si et seulement si* U *est vecteur propre de la matrice* A *pour la valeur propre* λ.

Preuve. Nous avons vu (théorème page **??**) que AU est la matrice colonne des coordonnées de $\varphi(u)$ dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi

$$AU = \lambda U \iff \varphi(u) = \lambda u.$$

■

Application. Soient A et B deux matrices semblables. Elle représente le même endomorphisme φ dans des bases différentes. On retrouve alors

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(B) \qquad \text{(voir exercice 4).}$$

PROPOSITION — **caractérisations en dimension finie**

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ *avec* E *de dimension finie et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a l'équivalence entre les énoncés suivants.*

i) *Le réel* λ *est valeur propre de* φ.

ii) *L'endomorphisme* $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E$ *n'est pas injectif.*

iii) *L'endomorphisme* $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E$ *n'est pas bijectif.*

iv) $\mathrm{rg}\left(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E\right) < \dim E$.

Preuve. Raisonnons par équivalences. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll}
\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi) & \iff \exists\, u \in E \setminus \{0_E\}, \quad \varphi(u) = \lambda u & \\
& \iff \exists\, u \in E \setminus \{0_E\}, \quad \left(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E\right)(u) = 0_E & \\
& \iff \mathrm{Ker}\left(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E\right) \neq \{0_E\} & \\
& \iff \varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ n'est pas injective} & \\
& \iff \varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ n'est pas bijective} & \text{car } \varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ est un endomorphisme de dimension finie} \\
& \iff \varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ n'est pas surjective} & \\
& \iff \mathrm{Im}\left(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E\right) \neq E & \\
& \iff \mathrm{rg}\left(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E\right) < \dim(E) & \text{car } \mathrm{Im}\left(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_E\right) \subset E \text{ avec égalité si et seulement si} \\
& & \text{il y a égalité des dimensions.}
\end{array}$$

■

3.3 Précisions pour des endomorphismes remarquables

Les homothéties

Pour rappel, une homothétie de E de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application

$$\lambda\,\mathrm{id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & \lambda \cdot u. \end{array} \right.$$

- Le polynôme P d'expression $P(x) = x - \lambda$ est un polynôme annulateur de l'homothétie de rapport λ.
- Tout vecteur non nul de E est vecteur propre pour la valeur propre λ.

Exercice 8

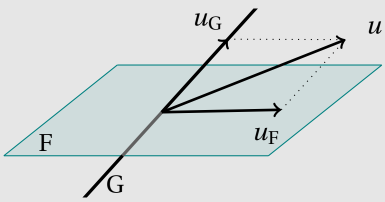
✦✦✦ ✎ **La réciproque**
Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ non nul tel que tout vecteur non nul est vecteur propre de φ. p. 25
Montrer que φ est une homothétie.

VP8

Les projecteurs

DÉFINITION (RAPPEL) — **projecteur**

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.



Ainsi, pour tout $u \in E$, il existe une unique décomposition $u = u_F + u_G$ où $(u_F, u_G) \in F \times G$. On pose

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ u & \mapsto & u_F. \end{array} \right.$$

Cette application est linéaire, elle est appelée le ***projecteur*** *sur F parallèlement à G.*

Remarque. On montre que p est un projecteur sur $F = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $G = \mathrm{Ker}(p)$. En particulier, le noyau et l'image d'un projecteur sont supplémentaires dans E.

$$\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p) = E.$$

Exercice 9

✦ ✎

1. Savez-vous prouver cette remarque? p. 25
2. Vérifier que $\mathrm{id}_E - p$ est un projecteur. Préciser ces éléments caractéristiques.

VP9

THÉORÈME — **caractérisation d'un projecteur**

Soit $p : E \to E$ une application. Les énoncés suivants sont équivalents.

i) *p est un projecteur.*

ii) *p est linéaire et $p \circ p = p$.*

Résultat admis.

Spectre d'un projecteur.
Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de sorte que p soit le projecteur sur F parallèlement sur G. Afin que F et G ne soient pas réduit à $\{0_E\}$, on suppose dans la suite que $p \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $p \neq \mathrm{id}_E$.

- Pour tout $u \in \mathrm{F}$ non nul, $p(u) = u$. Le vecteur u est donc vecteur propre pour la valeur propre 1.
  Pour tout $u \in \mathrm{G}$ non nul, $p(u) = 0_{\mathrm{E}}$. Le vecteur u est donc vecteur propre pour la valeur propre 0. On a donc

$$\{0;1\} \subset \mathrm{Sp}(p).$$

  Réciproquement, supposons que p admet une valeur propre λ associée à un vecteur propre u

$$p(u) = \lambda u \quad \text{puis} \quad p\big(p(u)\big) = \lambda^2 u.$$

  Or on a aussi $p\big(p(u)\big) = p \circ p(u) = p(u) = \lambda u$. Comme u est non nul, $\lambda^2 = \lambda$ et $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. On a donc

$$\mathrm{Sp}(p) \subset \{0;1\}.$$

  En résumé, par double-inclusion $$\mathrm{Sp}(p) = \{0;1\}.$$

- Le polynôme d'expression $x^2 - x = x(x-1)$ est un polynôme annulateur de p. Notons que les valeurs propres de p sont des racines du polynômes.
- D'après les résultats précédents sur les projecteurs,

$$\mathrm{F} = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{E}_1(p) \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{E}_0(p).$$

  D'où $$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}_1(p) \oplus \mathrm{E}_0(p).$$

  Autrement dit, E se décompose suivant les espaces propres de p.

Exercice 10

✧ Soit $a \in \mathbb{R}^+$. On définit les applications :

$$p_a : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{1+a^2}\left(x + ay, ax + a^2 y\right) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad q : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{2}(x+y, x+y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Justifier que les applications p_a et q sont des projecteurs.
2. Vérifier que $(1,a)$ est vecteur propre de $p_a \circ q$.
3. En déduire l'unique valeur a pour laquelle $p_a \circ q$ est un projecteur.

p. 26

VP10

Les symétries

Reprenons E, un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
Pour tout $u \in \mathrm{E}$, il existe un unique couple $(u_{\mathrm{F}}, u_{\mathrm{G}}) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$ tel que $u = u_{\mathrm{F}} + u_{\mathrm{G}}$. On définit alors la symétrie par rapport à F parallèlement à G comme l'application :

$$s : u \in \mathrm{E} \longmapsto u_{\mathrm{F}} - u_{\mathrm{G}} \in \mathrm{E}.$$

On montre que s est une application linéaire.

Exercice 11

✦ **Les symétries**

1. Faire un dessin similaire au cas des projecteurs pour illustrer la situation.
2. Préciser $s \circ s$. En déduire un polynôme annulateur.
3. On suppose que $s \neq \pm \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.
   Étudier les valeurs propres de s et préciser les espaces propres à l'aide de F et G.
4. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
   Vérifier que $s = 2p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Retrouver les résultats de la question 3.

p. 26

VP11

4 Polynômes et valeurs propres

THÉORÈME — **polynômes et valeurs propres**

Soient $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$ *et* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Si *u est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ,*

alors $$\mathrm{Q}(\varphi)(u) = \mathrm{Q}(\lambda) \cdot u.$$

Preuve. Par récurrence, on traite le cas des monômes $\mathrm{P}(x) = x^k$. Puis, par linéarité, on étend la relation à tous les polynômes. ■

Exercice 12

✦ Rédiger cette preuve précisément. p. 26

VP12

COROLLAIRE — **valeurs propres et racines**

Soient $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si
- → *λ est valeur propre de φ.*
- → *P est un polynôme annulateur de φ.*

Alors *λ est une racine du polynôme P.*

Preuve. Soit u, un vecteur propre associé à la valeur propre λ. D'après l'énoncé précédent

$$\mathrm{P}(\varphi)(u) = \mathrm{P}(\lambda)\, u.$$

Or, P est un polynôme annulateur de φ,

$$\mathrm{P}(\varphi)(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}(u) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Ainsi $\mathrm{P}(\lambda)\, u = 0_{\mathrm{E}}$, puis $\mathrm{P}(\lambda) = 0$ car u est non nul (c'est un vecteur propre). En conclusion, λ est une racine de P. ■

Exemple. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^p = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.
Le polynôme d'expression x^p est annulateur de φ. Il ne peut avoir d'autre valeur propre que 0. De plus, φ ne peut être injectif, 0 est bien une valeur propre de φ. Finalement

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0\}.$$

Remarques.

• On a des énoncés équivalents avec les matrices.
Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$ et X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors

$$\mathrm{Q}(\mathrm{A})\mathrm{X} = \mathrm{Q}(\lambda)\mathrm{X}.$$

De plus, si Q est annulateur de A, λ est une racine de Q.

• La réciproque du corollaire est fausse. Une racine d'un polynôme annulateur n'est pas nécessairement une valeur propre. En effet, si P est annulateur de φ et $\alpha \notin \mathrm{Sp}(\varphi)$, le polynôme d'expression $(x-\alpha)\mathrm{P}(x)$ est encore un polynôme annulateur. Pour en savoir plus, on pourra consulter l'exercice 35, p. 20.

• Notons que le nombre de valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie est fini. En effet, nous avons vu en exercice qu'il existe toujours un polynôme annulateur P non nul à l'endomorphisme, il y a alors au plus deg(P) racines, au plus deg(P) valeurs propres.

Exercice 13

✧ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et $\varphi : \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t\mathrm{M}$.

1. Donner un polynôme annulateur de φ de degré 2.
2. En déduire les valeurs propres de φ.

p. 27

VP13

5 Somme directe de sous-espaces propres

THÉORÈME **somme directe des espaces propres**

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *désignent* p *valeurs propres deux à deux distinctes de* φ,

alors *la somme* $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\varphi)$ *est directe.*

Preuve par récurrence

Preuve. Justifions par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \left| \begin{array}{l} \text{pour tout } (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in \mathrm{E}_{\lambda_1}(\varphi) \times \mathrm{E}_{\lambda_2}(\varphi) \times \ldots \times \mathrm{E}_{\lambda_k}(\varphi) \\ \qquad \sum_{j=1}^{k} u_j = 0_\mathrm{E} \quad \Rightarrow \quad u_1 = \ldots = u_k = 0_\mathrm{E}. \end{array} \right.$$

→ *Initialisation.* La propriété $\mathscr{P}(1)$ est directement vraie.

→ *Hérédité.* Soit $k \in [\![1; p-1]\!]$ et supposons $\mathscr{P}(k)$. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}) \in \mathrm{E}_{\lambda_1}(\varphi) \times \mathrm{E}_{\lambda_2}(\varphi) \times \ldots \times \mathrm{E}_{\lambda_{k+1}}(\varphi)$ tels que

$$\sum_{j=1}^{k+1} u_j = 0_\mathrm{E} \qquad (\mathrm{L}_1).$$

Par linéarité de φ, on obtient

$$\begin{aligned} 0_\mathrm{E} = \varphi\left(0_\mathrm{E}\right) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{k+1} u_j\right) &= \sum_{j=1}^{k+1} \varphi\left(u_j\right) = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j u_j \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j + \lambda_{k+1} u_{k+1} \qquad (\mathrm{L}_2) \end{aligned}$$

On effectue ensuite $\lambda_{k+1}\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2$ pour éliminer le terme en u_{k+1} et obtenir

$$\sum_{j=1}^{k} \underbrace{\left(\lambda_{k+1} - \lambda_j\right) u_j}_{\in \mathrm{E}_j(\varphi)} = 0_\mathrm{E}.$$

D'après $\mathscr{P}(k)$, on a

$$\forall j \in [\![1; k]\!], \qquad \left(\lambda_{k+1} - \lambda_j\right) u_j = 0_\mathrm{E}.$$

Par construction $\lambda_{k+1} \neq \lambda_j$, donc $u_j = 0_\mathrm{E}$ pour tout $j \in [\![1; k]\!]$. Puis en reprenant L_1, $u_{k+1} = 0_\mathrm{E}$. Dès lors, $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie si $\mathscr{P}(k)$ l'est.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. En particulier, on obtient l'énoncé avec $\mathscr{P}(p)$. ■

Preuve les polynômes de Lagrange

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts, il existe p polynômes, notés L_i, tels que

$$\forall\, i, j \in [\![1, p]\!], \quad \mathrm{L}_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \ i \neq j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Exercice 14

✦✦ ✎ **Existence des polynômes de Lagrange**

1. Prouver cet énoncé avec l'application linéaire

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{p-1}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \big(\mathrm{P}(\lambda_1), \mathrm{P}(\lambda_2), \ldots, \mathrm{P}(\lambda_p)\big). \end{array} \right.$$

2. **a)** *Exemples* p. 27

On suppose dans cette question uniquement que $p = 3$ et $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$. Préciser les trois polynômes de Lagrange.

b) Donner l'expression de L_i dans le cas général.

3. Justifier que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$, $\mathrm{P}(x) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{P}(\lambda_i)\,\mathrm{L}_i$.

VP14

Preuve. Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in \mathrm{E}_{\lambda_1}(\varphi) \times \mathrm{E}_{\lambda_2}(\varphi) \times \ldots \times \mathrm{E}_{\lambda_p}(\varphi)$ tel que

$$\sum_{j=1}^{p} u_j = 0_{\mathrm{E}} \qquad (\star)$$

Montrons que chaque u_j vaut 0_{E} pour justifier que la somme est directe.
Par définition des espaces propres, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $\varphi\big(u_i\big) = \lambda_i u_i$.
Soient L_1, L_2, ..., L_p, les polynômes de Lagrange associés à λ_1, λ_2, ..., λ_p (distincts deux à deux). Soit $i \in [\![1;p]\!]$. Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, d'après le théorème précédent

$$\mathrm{L}_i(\varphi)(u_j) = \mathrm{L}_i(\lambda_j)u_j = \delta_{i,j} \cdot u_j.$$

Puis par linéarité de l'application $\mathrm{L}_i(\varphi)$,

$$\mathrm{L}_i(\varphi)\left(\sum_{j=1}^{p} u_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \mathrm{L}_i(\varphi)(u_j) = \sum_{j=1}^{p} \delta_{i,j} \cdot u_j = u_i.$$

Or, par application de l'endomorphisme $\mathrm{L}_j(\varphi)$ sur chaque membre de l'égalité $(\star)$, on a aussi

$$\mathrm{L}_i(\varphi)\left(\sum_{j=1}^{p} u_j\right) = \mathrm{L}_i(\varphi)\big(0_{\mathrm{E}}\big) = 0_{\mathrm{E}}.$$

Il vient $u_i = 0_{\mathrm{E}}$. Finalement, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $u_i = 0_{\mathrm{E}}$. La somme $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\varphi)$ est directe. ■

Corollaire — en dimension finie

Si on suppose de plus que E *est de dimension finie, alors*

$$\sum_{i=1}^{p} \dim\big(\mathrm{E}_{\lambda_i}(\varphi)\big) \leqslant \dim(\mathrm{E}).$$

Preuve. On sait que

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\varphi) \subset \mathrm{E} \quad \text{puis} \quad \dim\left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\varphi)\right) \leqslant \dim \mathrm{E}.$$

Or la somme des sous-espaces propres est directe,

$$\sum_{i=1}^{p} \dim\big(\mathrm{E}_{\lambda_i}(\varphi)\big) = \dim\left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\varphi)\right).$$

Le résultat s'en déduit. ■

COROLLAIRE — **famille libre de vecteurs propres**

Soit φ un endomorphisme de E.

Si *les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes,*

alors *la famille $\left(u_1, \ldots, u_p\right)$ est une famille libre de E.*

Preuve. Soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_p u_p = 0_{\mathrm{E}}.$$

Pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $\mu_i u_i \in \mathrm{E}_{\lambda_i}(\varphi)$. Comme la somme $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\varphi)$ est directe, par définition,

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!], \qquad \mu_i u_i = 0_{\mathrm{E}}.$$

Or, pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, u_i est un vecteur propre. Il est donc non nul et $\mu_i = 0$. Finalement, la famille $\left(u_1, u_2, \ldots, u_p\right)$ est libre. ■

COROLLAIRE — **majoration du nombre de valeurs propres**

Soit φ un endomorphisme de E de dimension finie. Alors le nombre de valeurs propres de φ est inférieur à la dimension de l'espace :

$$\operatorname{Card}\left(\operatorname{Sp}(\varphi)\right) \leqslant \dim(\mathrm{E}).$$

Preuve. Si λ est valeur propre de φ, $\dim\left(\mathrm{E}_\lambda(\varphi)\right) \geqslant 1$. On a donc la minoration

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\varphi)} \dim\left(\mathrm{E}_\lambda(\varphi)\right) \geqslant \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(\varphi)} 1 = \operatorname{Card}\left(\operatorname{Sp}(\varphi)\right).$$

D'où le résultat d'après le corollaire précédent en dimension finie. ■

Remarque. Matriciellement, si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{Card}\left(\operatorname{Sp}(\mathrm{A})\right) \leqslant n.$$

On a vu, au début du cours, que 0, 1 et -2 sont trois valeurs propres de la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

On peut donc en déduire qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres. D'où l'égalité $\operatorname{Sp}(\mathrm{A}) = \{-2; 0; 1\}$.

6 Recherche de valeurs propres et vecteurs propres

Cette section détaille les différentes méthodes pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice. Elles sont essentiellement basées sur la méthode du pivot de Gauss.

6.1 Recherche des valeurs propres

Rappelons que :

- Le réel λ est valeur propre de A si et seulement si $\operatorname{rg}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) < n$.
- Le rang est invariant par transposition et opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Exemple. On pose $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Procédons par opérations élémentaires pour se ramener à un système triangulaire.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_1 \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -\lambda & 2 & -1 \end{bmatrix} && \begin{array}{c} L_3 \leftarrow 2L_3-\lambda L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2+3L_1 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 2-2\lambda & 3-3\lambda \\ 0 & 4-2\lambda & \lambda^2-\lambda-2 \end{bmatrix} && \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2/2 \\ \text{(et factorisation)} \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 3-3\lambda \\ 0 & 2-\lambda & (\lambda+1)(\lambda-2) \end{bmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & (\lambda+1)(\lambda-2) \\ 0 & 1-\lambda & 3(1-\lambda) \end{bmatrix} && C_2 \leftarrow 3C_2-C_3 \\
\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} -2 & * & * \\ 0 & (-2+\lambda)(\lambda+4) & * \\ 0 & 0 & 3(1-\lambda) \end{bmatrix} && \begin{array}{l} \text{Il est inutile de calculer} \\ \text{les coefficients } *. \end{array}
\end{aligned}$$

Ainsi λ est valeur propre si et seulement si $\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) < 3$. C'est équivalent à

$$(\lambda-2)(\lambda+4) = 0 \quad \text{ou} \quad 3(1-\lambda) = 0.$$

Finalement $$\operatorname{Sp}(A) = \{-4;1;2\}.$$

Remarques.
• Noter bien l'échange $L_3 \leftrightarrow L_1$ au début du pivot de Gauss. C'est particulièrement utile pour avoir un pivot qui ne dépend pas de λ.
• Si on dispose d'un polynôme annulateur de petit degré, on peut se limiter à regarder le rang sur les quelques racines du polynôme pour déterminer les valeurs propres.

6.2 Recherche des vecteurs propres

Expliquons maintenant comment calculer les vecteurs propres de la matrice A connaissant les valeurs propres.

• Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned}
X \in E_1(A) &\iff \\
AX = X &\iff \begin{cases} 2y-z = x \\ 3x-2y = y \\ -2x+2y+z = z \end{cases} \iff \begin{cases} -x+2y-z = 0 \\ 3x-3y = 0 \\ -2x+2y = 0 \end{cases} \quad L_3 = -2L_2 \\
&\iff \begin{cases} -x+2y-z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \\
&\iff X = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Finalement $$E_1(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Déterminons les autres sous-espaces propres.

- Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x+2y-z & = & 0 \\ 3x-4y & = & 0 \\ -2x+2y-z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x & = & 4y \\ z & = & 2(y-x) \end{array} \right. \iff X = \begin{bmatrix} x \\ 3x/4 \\ -x/2 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Donc
$$E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right).$$

- Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = -4X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+2y-z & = & 0 \\ 3x+2y & = & 0 \\ -2x+2y+5z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 0 \\ x & = & z. \end{array} \right.$$

On trouve
$$E_{-4} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

Exercice 15

✦ Soient $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ et $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. On admet que $P(A) = 0_3$.

1. Donner les racines de P. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres de A ?
2. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre, déterminer une base du sous-espace propre associé.

p. 27

VP15

⋙ *Pour un autre exemple de calcul, voir 30, p. 18.*

6.3 Cas particulier de la dimension 2

PROPOSITION **lien avec le déterminant**

Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a :*
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \det(A - \lambda I_2) = 0.$$

Preuve. Raisonnons par équivalence

$$\begin{array}{rcl} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) & \iff & A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ & \iff & \det(A - \lambda I_2) = 0. \end{array}$$

■

Exercice 16

✧ Donner, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, le nombre de valeurs propres réelles de
$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

p. 28

VP16

Exercices

Révisions, puissances et polynômes de matrices et d'endomorphismes

Exercice 17. ✦✦ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, \dots, d_n$, n réels deux à deux distincts. Posons # VP17

$$\mathrm{D} = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Montrer que la famille $\left(\mathrm{D}^k\right)_{k \in [\![0;n-1]\!]}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathscr{D}_n$ des matrices diagonales.

≫ Solution p. 28

Exercice 18. ✦✦ Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ dont un polynôme annulateur a pour expression $\mathrm{P}(x) = x^2 + x - 2$. # VP18

1. Justifier que φ est un isomorphisme et exprimer φ^{-1} en fonction de φ et id_E.
2. Démontrer l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n = a_n \varphi + b_n \,\mathrm{id}_\mathrm{E}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Énoncer la division euclidienne du polynôme x^n par $x^2 + x - 2$.
   Retrouver le résultat de la question précédente.

≫ Solution p. 28

Exercice 19. ✦ Posons $\varphi : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (y+z, x+z, x+y) \in \mathbb{R}^3$. # VP19

1. Écrire la matrice B de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. a) Montrer que le polynôme défini par $\mathrm{P}(x) = x^2 - x - 2$ annule B.
   b) En déduire que la matrice B est inversible et calculer B^{-1}.
3. Justifier la bijectivité de φ et expliciter l'application φ^{-1} à l'aide de B.

≫ Solution p. 29

Exercice 20. ✦✦✦ **Vecteur cyclique et polynôme annulateur** # VP20
Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et φ un endomorphisme de E.
On dit qu'un vecteur $u \in \mathrm{E}$ est cyclique pour φ s'il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $\mathscr{B}_{u,\ell} = \left(u, \varphi(u), \dots, \varphi^{\ell-1}(u)\right)$ soit génératrice de E.

1. Soit u, un vecteur cyclique pour φ. Montrer que $\mathscr{B}_{u,n}$ est une base de E.
2. Justifier qu'il existe n réels notés $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que $\varphi^n(u) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i \varphi^i(u)$.
3. Justifier que le polynôme d'expression $\mathrm{P}(x) = x^n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ est annulateur de φ.

≫ Solution p. 29

Exercice 21. ✦ Soient φ, ψ deux endomorphismes nilpotents de E. # VP21
Montrer que si φ, ψ commutent, alors la somme $\varphi + \psi$ est nilpotente.
Un endomorphisme φ est dit nilpotent s'il existe un entier p tel que $\varphi^p = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ (composée p-ième).

≫ Solution p. 30

Exercice 22. ✦✦ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, admettant un polynôme annulateur de degré m. On note # VP22

$$\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\left((f^i)_{i \in [\![0,m-1]\!]}\right).$$

1. Vérifier que pour tout entier $k \geqslant m$, $f^k \in \mathrm{G}$.
2. Soient $(g, h) \in \mathrm{G}^2$. Montrer que $g \circ h \in \mathrm{G}$. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^k \in \mathrm{G}$.
3. Montrer que g admet un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à m.

≫ Solution p. 30

Exercice 23. ✦✦ *d'après EDHEC 2016* # VP23

1. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $f\circ(f-\mathrm{id})^2=0$, où id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
   a) Déterminer $(f-\mathrm{id})^2+f\circ(2\,\mathrm{id}-f)$.
   b) En déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad x=(f-\mathrm{id})^2(x)+(f\circ(2\,\mathrm{id}-f))(x)$.
   c) Utiliser ce dernier résultat pour établir que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.
2. Dans cette question, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et P est un polynôme annulateur de f, dont le degré est égal à p (avec $p\geqslant 2$), et tel que $\mathrm{P}(0)=0$ et $\mathrm{P}'(0)\neq 0$.
   a) Montrer qu'il existe p réels $a_1,\dots,a_p$ avec $a_1\neq 0$, tels que $\mathrm{P}(x)=a_1x+\dots+a_px^p$.
   b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$, puis établir que $\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.
   c) En quoi cette question est-elle une généralisation de la première question ?

≫ Solution p. 31

Exercice 24. ✦✦✦ ✎ **Commutant d'un endomorphisme cyclique, matrice compagnon** # VP24

Soit φ un endomorphisme d'un un espace vectoriel E de dimension n. On note $\mathscr{C}(\varphi)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec φ et $\mathbb{R}(\varphi)$ l'ensemble des polynômes en φ. Dit autrement

$$\mathscr{C}(\varphi)=\left\{\psi\in\mathscr{L}(\mathrm{E})\mid\psi\circ\varphi=\varphi\circ\psi\right\}\quad\text{et}\quad\mathbb{R}(\varphi)=\left\{\mathrm{P}(\varphi)\mid\mathrm{P}\in\mathbb{R}[x]\right\}.$$

Enfin, on dit qu'un endomorphisme h de E est cyclique s'il existe un vecteur $u_0\in\mathrm{E}$ tel que la famille $\left(u_0,h(u_0),\dots,h^{n-1}(u_0)\right)$ soit une base de E.

1. Montrer que $\mathscr{C}(\varphi)$ et $\mathbb{R}(\varphi)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, puis que $\mathbb{R}(\varphi)\subset\mathscr{C}(\varphi)$.
2. Montrer que φ est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E et des réels $\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1}$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&\cdots&\alpha_0\\1&0&\cdots&\cdots&\alpha_1\\0&1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&1&\alpha_{n-1}\end{bmatrix}.$$

   Pour les questions suivantes, on suppose que l'endomorphisme φ est cyclique, et on fixe un vecteur $u_0\in\mathrm{E}$ tel que la famille $\mathscr{B}=\left(u_0,\varphi(u_0),\dots,\varphi^{n-1}(u_0)\right)$ soit une base de E.

3. Soit $\mathrm{P}(\varphi)=\varphi^n-\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\varphi^k$. Montrer que $\mathrm{P}(\varphi)=0$.
   Indication : remarquer que $\mathrm{P}(\varphi)(u_0)=0$, *puis montrer que* $\mathrm{P}(\varphi)\left(\varphi^\ell(u_0)\right)=0$ *pour tout* $\ell\in\mathbb{N}$.
4. a) Montrer que la famille $\left(\mathrm{id}_\mathrm{E},\varphi,\dots,\varphi^{n-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}(\varphi)$.
   Indication : utiliser la division euclidienne.
   b) En déduire que $\mathscr{C}(\varphi)=\mathbb{R}(\varphi)$, puis la dimension du commutant $\mathscr{C}(\varphi)$.
   Indication : si $f\in\mathscr{C}(\varphi)$, *exprimer* $f(u_0)$ *dans la base* $\mathscr{B}$, *puis calculer* $f\left(\varphi^i(u_0)\right)$ *pour* $i\in\mathbb{N}$.

≫ Solution p. 31

Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 25. ✧ Expliquez l'intérêt de la fonction Python suivante. # VP25

≫ Solution p. 33

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def bidule(A,x) : # A est une matrice carrée et x, un réel
    [n,p]=np.shape(A)
    if n!=p :
        print('Non, la matrice n est pas carrée ...')
    elif np.linalg.matrix_rank(A-x*np.eye(n))<n :
        print('Oui !')
    else :
        print('Non !')
```

Exercice 26. ✦ Vrai ou faux ? # VP26

1. S'il existe une matrice carrée J telle que $A = J^2$ alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$. ✓ ×
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}\left(A^2\right)$ alors $\sqrt{\lambda} \in \mathrm{Sp}(A)$ ou $-\sqrt{\lambda} \in \mathrm{Sp}(A)$. ✓ ×

≫ Solution p. 33

Exercice 27. ✦ ✎ **Un exemple détaillé : la matrice Attila** # VP27

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Notons $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. a) Préciser le rang de J. En déduire que 0 est valeur propre dont on précisera la dimension de l'espace propre associé. Préciser une base $\mathscr{C}$ de l'espace propre associé à la valeur propre 0.
   b) Calculer JX. Que peut-on en déduire ?
2. En déduire que J ne possède que deux valeurs propres.
3. Montrer que J est semblable à une matrice diagonale dont on précisera les coefficients diagonaux.
4. Conclure en donnant tous les polynômes annulateur de J.

≫ Solution p. 33

Exercice 28. ✦ ✎ **Transformation affine et spectre** # VP28

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$, $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, on pose

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{bmatrix}.$$

1. 🔍 Exprimer $M(a,b)$ à l'aide de I_n et J. En déduire le lien entre le spectre de J et celui de $M(a,b)$.
2. On a vu à l'exercice **??** qu'il y a exactement 105 matrices non inversibles lorsque $a, b \in [\![-50;50]\!]$ et $n = 25$. Retrouver ce résultat sachant que J admet deux valeurs propres 0 et n (voir exercice précédent).

≫ Solution p. 34

Exercice 29. ✦ Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) par # VP29

$$\begin{cases} \varphi(e_1) &= 6e_1 - 4e_2 + 4e_3 \\ \varphi(e_2) &= e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ \varphi(e_3) &= -e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{cases}$$

Déterminer le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre 4.

≫ Solution p. 34

Exercice 30. ✦ ✎ *D'après EDHEC 2019* # VP30

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2 .
   b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).
   c) En Python, la commande `linalg.matrix_rank(M)` de la bibliothèque `numpy` renvoie le rang de la matrice `M`. On a saisi

Editeur

```python
import numpy as np
A = np.array([[1, 0, 0],[-2, 3, -2],[-1,1,0]])
r1=np.linalg.matrix_rank(A-np.eye(3))
r2=np.linalg.matrix_rank(A-2*np.eye(3))
print('r1=',r1,'r2=',r2)
```

Python a répondu

Console

```
>>> # script executed
r1= 1 r2= 2
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

d) Donner une base de chacun des noyaux $\mathrm{Ker}\left(f-\lambda_1 \mathrm{id}\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(f-\lambda_2 \mathrm{id}\right)$. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

2. **a)** Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\mathrm{Ker}\left(f-\lambda_1 \mathrm{id}\right)$ et (v_2) une base de $\mathrm{Ker}\left(f-\lambda_2 \mathrm{id}\right)$.
On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

b) On note $x=(a,b,c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Exercice 31. ✦ ✎ **Matrices stochastiques** # VP31

Une matrice carrée $P=(p_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est dite stochastique si elle vérifie les deux conditions :

i) Pour tout $i \in [[1,n]]$, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$.

ii) Tous les coefficients de la matrice P sont positifs.

1. Traduire la condition **i)** en terme de vecteur propre.
On pourra poser $X={}^t(1,\ldots,1)$.

2. Montrer que l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices stochastiques est une partie convexe stable par produit.
Une partie A *est convexe si pour tous a, $b \in A$, tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda a+(1-\lambda) b \in A$.*
Une partie A *est stable par produit si pour tous a, $b \in A$, $ab \in A$.*

3. Démontrer que les valeurs propres réelles d'une matrice stochastique sont comprises entre -1 et 1.

≫ *Pour aller plus loin, on pourra consulter le sujet EM Lyon 2010 ECS, problème I.*

≫ Solution p. 35

Exercice 32. ✦ **Projecteurs et vecteurs propres** *D'après Ecricome 2018* # VP32

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose dans cette partie uniquement que $n=2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :

$$A=\frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que u et v sont des projecteurs.

2. **a)** Vérifier que les endomorphismes u, v et $u \circ v$ sont tous de rang 1 .

b) Vérifier que le vecteur $x_0=(1,a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.

c) Déterminer le spectre de $u \circ v$.

3. **a)** Montrer que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0,1]$.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de a, $u \circ v$ est-il un projecteur ?

≫ Solution p. 35

Exercice 33. ✦ ✎ **Crochet de Lie et nilpotence** # VP33

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB-BA=A$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^kB-BA^k=kA^k$.

2. On considère

$$\varphi_B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MB-BM. \end{array} \right.$$

Vérifier que φ_B est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Traduire la question 1 en terme de vecteur propre et valeur propre.

4. En déduire l'existence d'un entier k non nul tel que $A^k=0_n$.

≫ Solution p. 36

Exercice 34. ✦✦ ✎ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $\varphi(P)=(x-1)P'(x)$. # VP34

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Préciser sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

2. En déduire le spectre de φ.

3. Soit P un vecteur propre de φ associé à une valeur propre λ non nulle.

a) Justifier que 1 est une racine de P.

b) En étudiant la multiplicité de 1 en tant que racine de P, exprimer P en fonction de λ.

4. Conclure en donnant tous les espaces propres de φ.

≫ Solution p. 37

Exercice 35. ✦✦ ✎ **Polynôme annulateur minimal** *Questions sans préparation HEC 2015* # VP35

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $\mathrm{P}(f) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.
2. Soit Q un polynôme tel que $\mathrm{Q}(f) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $\mathrm{P}(f) = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$.
   Montrer que toute racine de Q est valeur propre de f.

≫ Solution p. 37

Exercice 36. ✦✦ ✎ Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. # VP36

Montrer que λ est valeur propre de AB si et seulement si λ est valeur propre de BA.

≫ Solution p. 37

Exercice 37. ✦✦ Soient E un espace vectoriel et φ, ψ deux endomorphismes de E. # VP37

1. Montrer que
$$\mathrm{Sp}(\varphi \circ \psi) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}(\psi \circ \varphi) \cup \{0\}.$$
2. Vérifier que si E est dimension finie, on a directement l'égalité
$$\mathrm{Sp}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Sp}(\psi \circ \varphi).$$
3. En considérant $\varphi : \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x] \mapsto \mathrm{P}' \in \mathbb{R}[x]$ et $\psi : \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x] \mapsto \int_0^x \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$, tester si l'égalité précédente est encore vérifiée en dimension infinie.

≫ Solution p. 38

Exercice 38. ✦✦ **Exemple d'une matrice de rang 2** *d'après ESCP 2001* # VP38

Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$ et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

et φ l'endomorphisme associé à A sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Déterminer une base du noyau de φ et une base de l'image de φ.
2. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

≫ Solution p. 38

Exercice 39. ✦✦✦ **Matrice à diagonale dominante, localisation des valeurs propres réelles** # VP39

Une matrice carrée $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dite à diagonale dominante si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left|a_{i,i}\right| > \left|a_{i,1}\right| + \cdots + \left|a_{i,i-1}\right| + \left|a_{i,i+1}\right| + \cdots + \left|a_{i,n}\right|.$$

1. Montrer qu'une matrice à diagonale dominante est inversible.
   Indication. On pourra s'intéresser au noyau de la matrice.
2. Soit $\mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} [b_{ii} - r_i, b_{ii} + r_i] \quad \text{où} \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |b_{i,j}|.$$
3. *Exemple d'une matrice tridiagonale*
   Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et A la matrice :
$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

≫ Solution p. 38

Exercice 40. ✦✦✦ ✎ *D'après Oraux HEC 2018* # VP40

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$.

1. Démontrer que A et φ_A ont le même spectre.
2. Justifier que pour toute valeur propre λ commune, $\dim E_\lambda(\varphi_A) = n \dim E_\lambda(A)$.

≫ Solution p. 39

Exercice 41. ✦✦✦ On considère les deux matrices *Question sans préparation, HEC 2018* # VP41

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Comparer leurs spectres, leurs traces, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.
2. Sont-elles semblables?

≫ Solution p. 39

Sujet(s) de concours

Exercice 42. ✦✦ ✎ **Exemple dans un espace fonctionnel** *D'après EMLyon 2014 ECS* # VP42

On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues, E_1 le sous-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On note, pour tout élément f de E, $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt.$$

1. Établir que, pour tout élément f de E, $T(f)$ appartient à E_1 et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\big(T(f)\big)'(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+1) - f(x-1)\big).$$
On note $T : E \to E$ l'application qui, à f, associe $T(f)$.
2. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif?
3. Soit $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $s(t) = \sin(\pi t)$. Calculer $T(s)$. Est-ce que T est injectif?
4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par
$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - e^{-t}}{2t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose de plus $f_a : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax} \in \mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T(f_a) = \varphi(a) f_a$.
5. Justifier que $[1;+\infty[\subset \mathrm{Sp}(T)$. À-t-on égalité?

≫ Solution p. 40

Exercice 43. ✦✦✦ **Autour des matrices stochastiques** *D'après HEC 1993, partie III* # VP43

On se propose d'étudier l'ensemble $\mathscr{S}_n$ des matrices stochastiques d'ordre n, c'est-à-dire des éléments $M = (m_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont réels positifs ou nuls et tels que, pour tout nombre entier i appartenant à $[1, n]$:

$$m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{in} = 1.$$

(Ces matrices jouent un rôle important, notamment en calcul des probabilités.) Dans la suite, $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on note v le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes dans la base $\mathscr{B}$ sont toutes égales à 1.

Partie A : un exemple

Dans cette partie, on suppose que n est un entier supérieur à 3. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice stochastique :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau de $f - \mathrm{id}$.
2. Montrer que $(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n)$ est une famille libre d'éléments de l'image de $f - \mathrm{id}$, puis établir que c'en est une base.
3. Établir que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$.
4. Soit p le projecteur sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$. Déterminer $p(v)$, puis $p(e_1), p(e_2), \ldots, p(e_n)$. Expliciter la matrice P associée à p dans la base $\mathscr{B}$.
5. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
6. Exprimer M comme combinaison linéaire de P et Q.
7. *Soit $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices. Notons $a_{i,j}^{(k)}$ le coeffcient de A_k en position (i,j). On dit que $(\mathrm{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ si, pour tout couple d'indices (i,j), la suite de réels $\left(a_{i,j}^{(k)}\right)_k$ converge vers $a_{i,j}$.*

   Déduire, de la question précédente, l'expression de la matrice M^k, ainsi que sa limite lorsque k tend vers $+\infty$ en fonction des matrices P et Q. Exprimer de même l'inverse de M en fonction de P et Q.

Partie B : cas général

1. Soit V la matrice colonne d'ordre n dont les coefficients sont tous égaux à 1 .
   a) Montrer qu'une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients réels positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $\mathrm{MV} = \mathrm{V}$.
   b) En déduire que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathscr{S}_n$, le produit AB appartient encore à $\mathscr{S}_n$, de même que les puissances positives de A et B.
2. Soient E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E dont le noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

   Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$, que l'on complète en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Établir que $(u(e_{r+1}), u(e_{r+2}), \ldots, u(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$. Retrouver la formule du rang :

$$\dim \mathrm{Im}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u) = n.$$

Dans la suite, on désigne par f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice $\mathrm{M} = \left(m_{ij}\right)$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ est stochastique. Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on convient de noter :

$$\|x\| = \max\left\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right\}.$$

3. a) Établir que, pour tout élément x de $\mathbb{R}^n$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.
   b) En déduire que toutes les valeurs propres de f sont comprise dans $[-1;1]$. Montrer que 1 est valeur propre de f.
4. a) Soit y un élément de $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, écrit sous la forme $f(x) - x$. Pour tout nombre entier naturel non nul k, exprimer $f^k(x)$ en fonction de k, x et y. Déduire du 3. a) que $k\|y\| \leqslant 2\|x\|$, puis prouver que y est nul.
   b) Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^n$.
   c) Montrer que, pour tout élément x de $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$, $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$. Établir que tout sous-espace propre de f associé à une valeur propre autre que 1 est inclus dans $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id})$.

≫ Solution p. ??

Table des matières