DM 1 - sujet A

THÈME : RÉVISIONS ANALYSE - CALCUL DE $\zeta(2)$

Partie A : Lemme de Riemann-Lebesgue

On considère une fonction f continue sur $[0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

$$b_n = \int_0^1 f(t)\sin(\pi n t)\,\mathrm{d}t.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Montrer que

$$b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

L'objectif de la suite est de montrer que ce résultat reste vrai lorsque f est seulement continue sur $[0,\pi]$. Pour cela, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{B}_n = 2\int_0^1 \left(f(t) - \sum_{k=1}^n b_k \sin(\pi k t)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

2. Calculer, pour tous $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi k t)\sin(\pi \ell t)\,\mathrm{d}t.$

3. En déduire :

$$\mathrm{B}_n = 2\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t - 3\sum_{k=1}^n {b_k}^2.$$

4. **a)** Justifier la convergence de la série $\sum {b_k}^2$.

b) Conclure.

Partie B : Application au calcul de $\zeta(2)$

5. On considère la fonction f définie sur $]0;1[$ par

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\cot(\pi x) \quad \text{où} \quad \cot(\pi x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

a) Comparer les réels $f(x)$ et $f(1-x)$. Comment interpréter graphiquement le résultat sur la courbe représentative de f ?

b) Vérifier que f se prolonge par continuité en 0 et en 1.
On note encore f, ce prolongement sur $[0;1]$.

6. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale :

$$\mathrm{I}_k = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right)\cos(2\pi k x)\,\mathrm{d}x.$$

7. **a)** Vérifier que pour tout $x \in]0;1[$:

$$2\sum_{k=1}^n \cos(2\pi k x) = \cot(\pi x)\sin(2\pi n x) + \cos(2\pi n x) - 1.$$

Indication. On pourra commencer par multiplier chacun des deux membres par $\sin(\pi x)$.

b) À l'aide des résultats précédents, établir que :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

8. En déduire l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- **Python**

9. Vérifier que les suites de termes généraux

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

sont adjacentes. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mathrm{S}_n - \pi^2/6| \leqslant 1/n$.

10. Écrire un programme python qui prend en argument n et renvoie une approximation de π^2 à 10^{-5}-près.

Formulaire. Pour tous réels a, b, on a

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) - \sin(a-b)\big).$$

Pour une variante, on pourra comparer avec le sujet ECRICOME 2025.

– FIN –

DM 1 - sujet *

THÈME : RÉVISIONS ANALYSE - INTÉGRALES DE WALLIX ET DE GAUSS

Dans tout le problème, on désigne par W la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$W(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x \, dt.$$

L'objectif est d'étudier cette fonction W et d'en déduire deux applications dont le calcul de l'intégrale de Gauss.

- **Préliminaire**

1. **a)** Montrer que, pour tout nombre réel t appartenant à $[0, \pi/2]$:

$$\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}.$$

b) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$L = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) \, dt.$$

Bonus Calculer cette intégrale.

- **Étude de** W

2. Donner le sens de variation de la fonction W sur $[0, +\infty[$.

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

a) Montrer que, pour tout nombre réel positif a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \left| e^{-ax} - e^{-ax_0} \right| \leqslant a \, |x - x_0| .$$

b) En déduire l'existence d'une constante C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad |W(x) - W(x_0)| \leqslant C \, |x - x_0| .$$

c) Établir la continuité de W sur $[0, +\infty[$.

4. Pour tout nombre réel positif x, exprimer $W(x+2)$ en fonction de $W(x)$.

5. On se propose d'étudier le comportement asymptotique de W à l'aide de la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g(x) = (x+1)W(x+1)W(x).$$

a) Établir que, pour tout nombre réel positif ou nul x, $g(x+1) = g(x)$.
En déduire la valeur de $g(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

b) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0;1]$ et tout nombre entier naturel n :

$$\frac{g(n+1)}{n+2} \leqslant \frac{g(x+n)}{x+n+1} \leqslant \frac{g(n)}{n+1}.$$

En déduire en fonction de n un encadrement de $g(x)$. En conclure que g est constante sur $[0; +\infty[$ (on explicitera son unique valeur).

6. **a)** En utilisant les variations de W, montrer que $W(x+1)$ est équivalent à $W(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Déduire de ces résultats que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$W(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

- **Application au calcul de l'intégral de Gauss**

7. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x et tout nombre réel $u > -x$:

$$\left(1+\frac{u}{x}\right)^x \leqslant \exp u.$$

8. En déduire pour $x \geqslant 1$:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \left(1-\frac{t^2}{x}\right)^x \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x} \mathrm{d}t.$$

On prouvera la convergence de l'intégrale de droite.

9. En posant respectivement $t = \sqrt{x}\cos u$ et $t = \sqrt{x}\dfrac{\cos u}{\sin u}$ dans la première et la dernière de ces intégrales, établir que, pour $x \geqslant 1$:

$$\sqrt{x}\,\mathrm{W}(2x+1) \leqslant \int_0^{\sqrt{x}} \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{x}\,\mathrm{W}(2x-2).$$

10. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{G} = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t.$$

- **Application à l'approximation de π**

On pose, pour tout nombre réel positif x :

$$h(x) = \frac{\mathrm{W}(x+1)}{\mathrm{W}(x)}.$$

11. En remarquant que $\mathrm{W}(x+2) \leqslant \mathrm{W}(x+1) \leqslant \mathrm{W}(x)$, établir que :

$$0 \leqslant 1-h(x) \leqslant \frac{1}{x+2}.$$

12. Exprimer $h(x)$ en fonction de $h(x-2)$ pour $x \geqslant 2$, et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n :

$$h(2n) = \frac{r_n}{\pi} \quad \text{avec} \quad r_n = 2\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

13. Vérifier que

$$r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi \quad \text{et} \quad |\pi - r_n| \leqslant \frac{2}{n+1}.$$

14. En déduire un programme python qui prend en argument $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$ et renvoie une approximation de π à ε-près. Commenter l'efficacité de la méthode.

– FIN –

DM 1 - Solution

Sujet A

1. Les deux fonctions à intégrer sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$, une intégration par parties donne :

$$b_n = \left[-\frac{1}{\pi n} f(t)\cos(\pi n t)\right]_0^1 + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Les fonctions f et f' sont continues et bornées sur le segment $[0,1]$ par M_0 et M_1 respectivement. Si on pose $\mathrm{M} = \max(\mathrm{M}_0;\mathrm{M}_1)$, on obtient par inégalité triangulaire

$$|b_n| \leqslant \frac{2\mathrm{M}}{\pi n} + \frac{\mathrm{M}}{\pi n}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc par encadrement

$$b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. On sait que

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b.$$

Par différence, on en déduit que

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a\sin b.$$

En particulier, on obtient ici

$$\sin(\pi k t)\sin(\pi\ell t) = \frac{1}{2}\cos\big(\pi(k-\ell)t\big) - \frac{1}{2}\cos\big(\pi(k+\ell)t\big).$$

Il vient par intégration

$$\int_0^1 \sin(\pi k t)\sin(\pi \ell t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } k\neq \ell \\ 1/2 & \text{si } k=\ell. \end{cases}$$

3. On développe l'intégrande, il vient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{B}_n\\
=&2\int_0^1 \left(\left(\sum_{k=1}^n b_k \sin(\pi k t)\right)^2 - 2\sum_{k=1}^n b_k f(t)\sin(kt) + f(t)^2\right)\\
=&2\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n b_k\sin(\pi k t)\right)^2 \mathrm{d}t - 4\sum_{k=1}^n {b_k}^2 + 2\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On développe ensuite le carré

$$\left(\sum_{k=1}^n b_k \sin(\pi k t)\right)^2 = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n b_k b_\ell \sin(\pi k t)\sin(\pi \ell t)$$

et on intègre. D'après la question précédente, on obtient 0 lorsque $k\neq\ell$ et $1/2$ sinon. Il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n &= \sum_{k=1}^n {b_k}^2 - 4\sum_{k=1}^n {b_k}^2 + 2\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\\
&= -3\sum_{k=1}^n {b_k}^2 + 2\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

4.a) Comme B_n est positif, on a directement :

$$\sum_{k=1}^n {b_k}^2 \leqslant \frac{2}{3}\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

La suite des sommes partielles $\sum {b_k}^2$ est croissante car les termes de la séries sont positifs et elle est majorée. D'après le théorème de convergence monotone, la suite des sommes partielles est convergente. C'est la définition de la convergence de la série.

4.b) La série converge, donc son terme général tend vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{k\to+\infty} {b_k}^2 = 0.$$

Puis
$$\lim_{k\to+\infty} b_k = 0.$$

5.a) On a d'une part

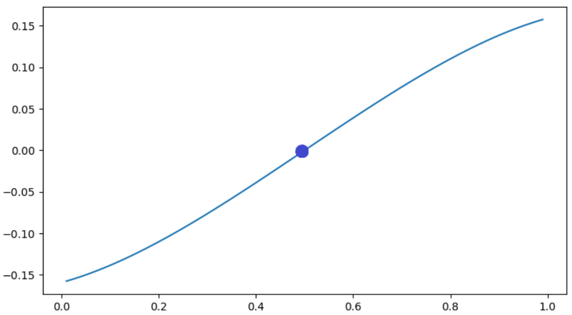
$$f(x) = \frac{x(x-1)}{2}\cot(\pi x).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
f(1-x) &= \frac{(1-x)}{2}(-x)\cot\big(\pi(1-x)\big)\\
&= \frac{x(1-x)}{2}\,\frac{\cos(-\pi x+\pi)}{\sin(-\pi x+\pi)}\\
&= x(1-x)\frac{-\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}\\
f(1-x) &= -f(x).
\end{aligned}$$

On a graphiquement une symétrie centrale autour du point $(1/2, 0)$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(0.01,0.99,100)
y=x*(x-1)/(2*np.tan(np.pi*x))
plt.plot(x,y)
plt.show()
```



En effet, pour tout $t \in]-1/2;1/2[$,

$$f\left(\frac{1}{2}-t\right) = -f\left(\frac{1}{2}+t\right).$$

5.b) À l'aide de la propriété de symétrie, il suffit de prouver que f est prolongeable par continuité en 0 pour avoir celle en 1.

$$\cot(\pi x) = \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\pi x}.$$

puis $$f(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\pi x} = -\frac{1}{2\pi}.$$

On en déduit que $$f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2\pi}.$$

On a donc bien un prolongement par continuité et on convient de poser

$$f(0) = -\frac{1}{2\pi}$$

et par symétrie $$f(1) = \frac{1}{2\pi}.$$

6. À l'aide de deux intégrations par parties, on obtient

$$\mathrm{I}_k = \frac{1}{(2\pi k)^2}.$$

7.a) Justifions par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(k): \quad 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2\pi k x) = \cot(\pi x)\sin(2\pi n x) + \cos(2\pi n x) - 1$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

→ *Initialisation.* On rappelle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(2\theta) = 2\cos(\theta)^2 - 1 \qquad (\bullet)$$
$$\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta) \qquad (\star)$$

Dès lors, pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\cot(\pi x)\sin(2\pi x) + \cos(2\pi x) - 1\\
&\overset{(\bullet)}{=} \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \cdot 2\sin(\pi x)\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - 1\\
&= 2\cos(\pi x)^2 - 1 + \cos(2\pi x)\\
&\overset{(\star)}{=} \cos(2\pi x) + \cos(2\pi x)\\
&= 2\cos(2\pi x).
\end{aligned}$$

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
&2\sin(\pi x)\sum_{k=1}^{n+1}\cos(2\pi k x)\\
&= 2\sin(\pi x)\cos(2\pi(n+1)x) + 2\sin(\pi x)\sum_{k=1}^{n}\cos(2\pi k x)\\
&= 2\sin(\pi x)\cos(2\pi(n+1)x) + \cos(\pi x)\sin(2\pi n x)\\
&\qquad + \sin(\pi x)\cos(2\pi n x) - \sin(\pi x).
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
&2\sin(\pi x)\cos(2\pi(n+1)x)\\
&= \sin(2\pi(n+1)x + \pi x) - \sin(2\pi(n+1)x - \pi x)\\
&= \sin(2\pi(n+1)x + \pi x) - \sin(2\pi n x + \pi x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\cos(\pi x)\sin(2\pi n x) + \sin(\pi x)\cos(2\pi n x)\\
&= \sin(2\pi n x + \pi x).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&2\sin(\pi x)\sum_{k=1}^{n+1}\cos(2\pi k x)\\
&= \sin(2\pi(n+1)x + \pi x) - \sin(\pi x)\\
&= \cos(\pi x)\sin(2\pi(n+1)x) + \sin(\pi x)\cos(2\pi(n+1)x) - \sin(\pi x).
\end{aligned}$$

$\mathscr{P}(n+1)$ s'en déduit en divisant par $\sin(\pi x) \neq 0$.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

7.b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\mathrm{I}_k &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \frac{1}{2}\left(x^2 - x\right)\cos(2\pi k x)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - x\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(2\pi k x)\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2 - x}{2}\right)(\cot(\pi x)\sin(2\pi n x) + \cos(2\pi x n) - 1)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x^2 - x}{2}\right)\cos(2\pi x n)\,\mathrm{d}x\\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

8. La fonction f est continue sur $[0;1]$. D'après la partie A

$$\int_0^1 f(x)\sin(2\pi n x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 - x}{2}\cos(2\pi n x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I}_n = \frac{1}{(2\pi n)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 - x}{2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = +\frac{1}{4\times 6}.$$

Par passage à la limite dans l'égalité de la question 7.b)

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{I}_k = \frac{1}{4\times 6}.$$

Avec $\mathrm{I}_k = 1/\left(4\pi^2 k\right)$, or obtient bien

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

9. On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$$

et

$$T_{n+1} - T_n = \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Or

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{-1 + \frac{n}{n+1}}{n(n+1)} < 0.$$

Ainsi les suites (S_n) et (T_n) sont respectivement croissante et décroissante. De plus

$$T_n - S_n = \frac{1}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les deux suites sont donc adjacentes. D'après ce qui précède, elles convergent vers une limite commune

$$\ell = \frac{\pi^2}{6}.$$

On sait alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \leqslant \ell \leqslant T_n.$$

Puis en retranchant par S_n

$$0 \leqslant \ell - S_n \leqslant T_n - S_n = \frac{1}{n}.$$

Ce qui conclut.

10. D'après ce qui précède $|6S_n - \pi| \leqslant \frac{6}{n}$.
Ainsi, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$ et $n \geqslant \frac{6}{\varepsilon}$, $6S_n$ est une approximation de π^2 à ε-près puisque dans ce cas $|6S_n - \pi| \leqslant \varepsilon$. On en déduit le code :

```
def approx(epsi):
    S=0
    n=int(6/epsi)+1
    # partie entière supérieure de 6/
        epsilon
    for i in range(1,n+1):
        S+=1/i**2
    return 6*S
```

Et un test :

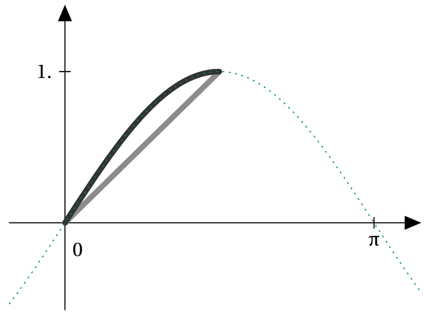
```
    >>> np.pi**2
9.869604401089358

>>> approx(0.001)
9.868604651029212
```

Sujet *

1.a) La fonction $x \in [0;\pi/2] \mapsto \sin(x)$ admet une dérivée seconde négative sur $[0;\pi/2]$, cette fonction est donc concave. En particulier, la courbe représentative est au dessus de la corde passant par l'origine et $(\pi/2, 1)$. L'équation de la corde est donnée par $y = 2x/\pi$ car la corde passe par les points $(0,0)$ et $(\pi/2, 1)$. On en déduit une minoration du sinus :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \qquad \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x.$$



1.b) L'intégrande $t \mapsto -\ln(\sin t)$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$. On a donc une intégrale généralisée en 0. Or, d'après la question précédente et le fait que $-\ln$ est décroissante

$$\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leqslant -\ln(\sin t) \leqslant -\ln\left(\frac{2t}{\pi}\right) = -\ln t + \ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln t \, dt$ étant convergente (par exemple, en calculant la limite de $\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} -\ln t \, dt$), l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln\left(\frac{2}{\pi}t\right) dt$ est aussi convergente lorsque $\varepsilon \to 0^+$). D'après le critère de comparaison d'intégrales de fonctions positives, L est bien convergente.

2. Précisons que $W(x)$ est bien définie car $t \mapsto (\sin t)^x$ est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$ avec $x \leqslant y$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} W(y) - W(x) &= \int_0^{\pi/2} (\sin t)^y - (\sin t)^x \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left((\sin t)^{y-x} - 1\right)}_{\leqslant 0} \underbrace{(\sin t)^x}_{\geqslant 0} \, dt \leqslant 0 \end{aligned}$$

car pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leqslant \sin t \leqslant 1$$

puis $(y - x \geqslant 0)$ $\qquad 0 \leqslant (\sin t)^{y-x} \leqslant 1.$

Ainsi $\qquad W(y) \leqslant W(x).$

La fonction W est décroissante.

3.a) Soit $a \in \mathbb{R}^+$ fixé. On pose

$$g_a : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto e^{-at}.$$

La fonction g_a est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\left|g_a(x) - g_a(x_0)\right| \leqslant \sup_{t \in I} \left|g_a'(t)\right| \cdot |x - x_0|$$

où I est l'intervalle dont les bords sont x et x_0. Or

$$\left|g_a'(t)\right| = \left|-a e^{-at}\right| \leqslant a$$

pour $t \geqslant 0$. Ce qui conclut.

3.b) On a

$$\begin{aligned}
|W(x)-W(x_0)| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x \,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{x_0}\,dt\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin(t)^x - \sin(t)^{x_0}\right) dt\right| \\
&\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin(t)^x - \sin(t)^{x_0}\right| dt \\
&\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|e^{-(-\ln(\sin t))x} - e^{-(-\ln(\sin t))x_0}\right| dt \\
&\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\ln(\sin t))\,|x-x_0|\,dt \\
&\leqslant |x-x_0| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\ln(\sin t))\,dt \\
|W(x)-W(x_0)| &\leqslant L|x-x_0|.
\end{aligned}$$

D'où le résultat avec $C = L$.

3.c) Par le théorème d'encadrement

$$C|x-x_0| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$$

donne $$W(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} W(x_0).$$

La fonction W est donc continue en x_0. Ce résultat étant valable pour tout réel positif x_0, on en déduit la continuité de W sur $\mathbb{R}^+$.

4. Intégrons par parties sachant que les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$

$$\begin{aligned}
&W(x+2) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{x+2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{x+1}\sin(t)\,dt \\
&= \left[\sin(t)^{x+1}(-\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos t \sin(t)^x(-\cos t)\,dt \\
&= \left(-\sin(\pi/2)^{x+1}\cos\frac{\pi}{2} + \sin(0)^{x+1}\cos 0\right) \\
&\qquad + (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x \cos(t)^2\,dt \\
&= 0 - 0 + (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x\left(1-\sin(t)^2\right) dt \\
&= (x+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{x+2}\,dt\right) \\
&= (x+1)\big(W(x)-W(x+2)\big).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$W(x+2) = \frac{x+1}{x+2}W(x).$$

5.a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}
g(x+1) &= (x+2)W(x+2)W(x+1) \\
&= (x+2)\frac{x+1}{x+2}W(x)W(x+1) \\
&= (x+1)W(x)W(x+1) \\
g(x+1) &= g(x).
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(g(n))_n$ est constante. La constante est donnée par $g(0)$. Or

$$\begin{aligned}
g(0) &= 1W(1)W(0) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt \\
&= [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{2} \\
g(0) &= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad g(n) = \frac{\pi}{2}.$$

5.b) Soit $x \in [0;1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$n+1 \geqslant n+x \geqslant n \qquad (\geqslant 0).$$

Par décroissance de W, on a aussi

$$W(n+1) \leqslant W(n+x) \leqslant W(n)$$

et $$W(n+1+1) \leqslant W(n+1+x) \leqslant W(n+1).$$

Les quantités étant positives, il vient par produit

$$W(n+1)W(n+1+1) \leqslant W(n+x)W(n+1+x) \leqslant W(n)W(n+1).$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{g(t)}{t+1} = W(t)W(t+1),$$

d'où

$$g\frac{(n+1)}{n+2} \leqslant g\frac{(n+x)}{n+x+1} \leqslant \frac{g(n)}{n+1}.$$

En utilisant maintenant le résultat de la question précédente

$$\frac{\pi}{2(n+2)} \leqslant \frac{g(n+x)}{n+x+1} \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Puis par récurrence sur la question 5.a)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad g(x+n) = g(x).$$

On obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{\pi}{2}\frac{n}{n+2} \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Par passage à la limite $n \to +\infty$,

$$g(x) = \frac{\pi}{2}.$$

6.a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Par décroissance de W

$$W(x+2) \leqslant W(x+1) \leqslant W(x)$$

puis $$\frac{x+1}{x+2}W(x) \leqslant W(x+1) \leqslant W(x) \qquad \text{(q.4)}$$

Comme $W(x) > 0$, on obtient

$$\frac{x+1}{x+2} \leqslant \frac{W(x+1)}{W(x)} \leqslant 1.$$

On en déduit par encadrement que

$$\frac{W(x+1)}{W(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ce qui suffit pour conclure.

6.b) D'après les questions 5.b), 6.a)

$$\frac{\pi}{2} = g(x) = (x+1)\mathrm{W}(x+1)\mathrm{W}(x) \underset{+\infty}{\sim} x\mathrm{W}(x)^2.$$

En élevant à la puissance $1/2$, on en déduit que

$$\mathrm{W}(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

7. On rappelle l'inégalité de concavité

$$\forall t > -1, \qquad \ln(1+t) \leqslant t.$$

Ce qui donne

$$\forall u > -x, \qquad \ln\left(1+\frac{u}{x}\right) \leqslant \frac{u}{x}.$$

On en déduit par croissance de l'exponentielle

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{u}{x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{u}{x}\right)\right)\\ &\leqslant \exp\left(x\left(\frac{u}{x}\right)\right) = \exp u.\end{aligned}$$

8. Commençons par justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x}\mathrm{d}t.$$

Comme l'intégrande est continue sur $[0;+\infty[$, on a une intégrale généralisée en $+\infty$. Or la puissance x étant fixée

$$\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x} \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} \left(\frac{t^2}{x}\right)^{-x} = x^x\frac{1}{t^{2x}}.$$

On conclut par le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives.

- Soit $x \geqslant 0$, pour tout $t \in [0, \sqrt{x}]$, on a $-t^2 > -x$ et d'après ce qui précède :

$$\left(1-\frac{t^2}{x}\right)^x \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}.$$

Par croissance de l'intégrale avec les bornes dans le bon sens

$$\int_0^{\sqrt{x}}\left(1-\frac{t^2}{x}\right)^x\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Justifions maintenant l'inégalité de droite :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad t^2 \geqslant 0 > -x,$$

donc
$$\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^x \leqslant \mathrm{e}^{t^2}.$$

La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$

$$\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x}.$$

Par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x}\mathrm{d}t.$$

Comme les intégrandes sont positives, on a aussi

$$\int_0^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x}\mathrm{d}t.$$

Ce qui conclut.

9. Le changement de variable $t = \sqrt{x}\cos u$

$$\mathrm{d}t = -\sqrt{x}\sin u\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathscr{C}^1$. Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{x}}\left(1-\frac{t^2}{x}\right)^x\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(1-\cos^2 u\right)^x(-\sqrt{x}\sin u\,\mathrm{d}u)\\ &= \sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 u\right)^x\sin u\,\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2x+1}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{x}}\left(1-\frac{t^2}{x}\right)^x\mathrm{d}t = \sqrt{x}\mathrm{W}(2x+1).$$

Le changement de variable $t = \sqrt{x}\cot u$

$$\mathrm{d}t = -\sqrt{x}\frac{1}{\sin^2 u}\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x}\mathrm{d}t &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(1+\cot(u)^2\right)^x\left(-\sqrt{x}\sin^{-2}u\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2 u}\right)^{-x}\sin(u)^{-2}\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2x-2}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{x}\right)^{-x}\mathrm{d}t = \sqrt{x}\mathrm{W}\big(2(x-1)\big).$$

10. En reprenant la question 6

$$\mathrm{W}(2x+1) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2x+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4x}}$$

D'où
$$\sqrt{x}\mathrm{W}(2x+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De même
$$\sqrt{x}\mathrm{W}(2x-2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On conclut par encadrement à l'aide de la question 9

$$\mathrm{G} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

11. On a

$$\mathrm{W}(x+2) \leqslant \mathrm{W}(x+1) \leqslant \mathrm{W}(x).$$

Comme $\mathrm{W}(x) > 0$ (c'est l'intégrale d'une fonction continue positive non nulle)

$$\frac{\mathrm{W}(x+2)}{\mathrm{W}(x)} \leqslant \frac{\mathrm{W}(x+1)}{\mathrm{W}(x)} \leqslant 1.$$

En reprenant la question 4

$$\frac{x+1}{x+2} \leqslant h(x) \leqslant 1.$$

Le résultat s'en déduit.

12. On a

$$h(x) = \frac{W(x+1)}{W(x)} = \frac{\frac{x}{x+1}W(x-1)}{\frac{x-1}{x}W(x-2)} = \frac{x^2}{x^2-1}h(x-2)$$

En particulier, pour tout entier $k \geqslant 1$

$$h(2k) = \frac{4k^2}{4k^2-1}h(2(k-1)).$$

Pour la suite, on peut procéder par récurrence, ou plus simplement utiliser un produit télescopique

$$\frac{h(2n)}{h(0)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{h(2k)}{h(2(k-1))}.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} h(2n) &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}\right) h(0) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}\right) \frac{W(1)}{W(0)} \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}\right) \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \\ h(2n) &= \frac{2\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}}{\pi}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

13. On a établi que

$$W(x+1) \underset{+\infty}{\sim} W(x), \quad \text{soit} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{W(x+1)}{W(x)} = 1.$$

Ainsi $$h(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

D'où $$r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi.$$

De plus

$$\pi - r_n = \pi - \pi h(2n) = \pi\big(1 - h(2n)\big).$$

Or la question 11 donne

$$|\pi - r_n| \leqslant \frac{\pi}{2n+2} \leqslant \frac{4}{2n+2} \leqslant \frac{2}{n+1}.$$

14. On remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_0 = 1 \quad \text{et} \quad p_n = \frac{4n^2}{4n^2-1}p_{n-1}.$$

et si on choisit n tel que $\varepsilon \leqslant 1/n$ (par exemple $n = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$), on a aussi $|\pi - p_n| \leqslant \varepsilon$.

```
def approx_pi(e):
    p=1
    n=np.floor(1/e)+1
    for k in range(1,n+1):
        p=p*(4*k**2)/(4*k**2-1)
    return 2*p

>>> approx_pi(10**(-4))
3.1415141265341364
>>> np.pi
3.141592653589793
```