TD

THÈME : RÉVISIONS ALGÈBRE - EXEMPLES D'APPLICATIONS LINÉAIRES SUR $\mathbb{R}_n[x]$ ET $\mathbb{R}[x]$

Partie A

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit a un réel fixé. On considère, pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'application f_k définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par

$$f_k(\mathrm{P}) = \mathrm{P}^{(k)}(a)$$

où $\mathrm{P}^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P.

1. Justifier que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, f_k est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

2. On pose, pour $j \in [\![0;n]\!]$, on définit le polynôme Q_j par $\mathrm{Q}_j(x) = (x-a)^j$. Pour tout k et pour tout j dans $[\![0;n]\!]$, calculer $f_k\left(\mathrm{Q}_j\right)$.

3. En déduire que $\left(f_0, f_1, \ldots, f_n\right)$ est une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[x]$, noté $\mathscr{L}\left(\mathbb{R}_n[x], \mathbb{R}\right)$.

4. Soit b un réel différent de a et m un entier tel que $0 \leqslant m \leqslant n$. On définit l'application g de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$g(\mathrm{P}) = \mathrm{P}^{(m)}(b).$$

Montrer que g est linéaire et donner les coordonnées de g dans la base $\left(f_0, \ldots, f_n\right)$.
Quelle formule retrouve-t-on ?

Partie B

On note $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. À tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$, on associe la fonction :

$$\varphi(\mathrm{P}) : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{P}(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ qui à toute fonction polynôme P associe sa fonction polynôme dérivée P'.

6. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on explicitera, telle que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$, on a :

$$\varphi(\mathrm{P}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{D}^n(\mathrm{P})$$

où D^n désigne l'itéré $n^{\text{ème}}$ de D, i.e. $\mathrm{D}^0 = \mathrm{id}$, $\mathrm{D}^2 = \mathrm{D} \circ \mathrm{D}, \ldots$.
On pourra utiliser la formule de la question 4.
Déterminer la valeur des (a_n) en fonction de n et de $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

7. *Pour les cubes.* Quels sont les vecteurs propres de φ ?

Partie C

On définit l'application linéaire

$$\varphi : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x] \mapsto \Big(\mathrm{P}(-1); \mathrm{P}(0); \mathrm{P}(1)\Big) \in \mathbb{R}^3.$$

8. Démontrer que φ est un isomorphisme et donner $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi)$ où $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, désignent respectivement la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[x]$.

9. **a)** Pourquoi A est inversible ?
b) À l'aide du calcul Python suivant, préciser les polynômes

$$\mathrm{L}_1 = \varphi^{-1}\Big((1,0,0)\Big), \quad \mathrm{L}_2 = \varphi^{-1}\Big((0,1,0)\Big), \quad \mathrm{L}_3 = \varphi^{-1}\Big((0,0,1)\Big).$$

Editeur

```
import numpy as np

A=np.array( .... )
A_inv = np.linalg.inv(A)
print(A_inv)
[[ 0.    1.    0. ]
 [-0.5   0.    0.5]
 [ 0.5  -1.    0.5]]
```

10. On définit de plus

$$\Phi_1 : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathrm{P}(-1) \in \mathbb{R}, \qquad \Phi_2 : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathrm{P}(0) \in \mathbb{R}, \qquad \Phi_3 : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \mathrm{P}(1) \in \mathbb{R}.$$

On admet que les applications Φ_1, Φ_2 et Φ_3 sont des applications linéaires.
Justifier que la famille $\Big(\Phi_1;\Phi_2;\Phi_3\Big)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x],\mathbb{R})$.

11. On pose la forme linéaire

$$\psi : \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x] \longmapsto \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

Justifier l'existence de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = \alpha_1 \mathrm{P}(-1) + \alpha_2 \mathrm{P}(0) + \alpha_3 \mathrm{P}(1). \qquad (\bullet)$$

12. À l'aide du changement de variable $t \longmapsto -t$, justifier que $\alpha_1 = \alpha_3$.
13. En déduire que la formule $(\bullet)$ est valable pour x^3 puis pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[x]$.
14. Préciser les valeurs α_1, α_2 et α_3.
15. Soient a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. En déduire que pour $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_3[x]$,

$$\int_a^b \mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t = \frac{b-a}{6}\left(\mathrm{Q}(a) + 4\mathrm{Q}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \mathrm{Q}(b)\right).$$

On pourra s'aider d'une bijection affine de $[a;b]$ dans $[-1;1]$.

16. Pour une fonction $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, on peut approximer l'intégrale par

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \simeq \Delta(f) := \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Écrire un programme Python qui prend en argument f, a et b et renvoie $\Delta(f)$.

17. Améliorer le programme en suivant l'exemple des sommes de Riemann.

Solution

Partie A

1. Soit $k \in [\![0;n]\!]$. Soient P, Q $\in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_k(\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q}) &= (\mathrm{P}+\lambda\mathrm{Q})^{(k)}(a) \\ &= \mathrm{P}^{(n)}(a)+\lambda\mathrm{Q}^{(k)}(a) \\ &= f_k(\mathrm{P})+\lambda f_k(\mathrm{Q}) \end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation. Comme l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$, f_k est bien une forme linéaire.

2. Vérifier que

$$f_k(\mathrm{Q}_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ j! & \text{si } j = k. \end{cases}$$

3. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[x],\mathbb{R})}.$$

En évaluant en Q_j la relation précédente pour un $j \in [\![1;n]\!]$ fixé,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(\mathrm{Q}_j) = 0.$$

D'après le calcul précédent, on a $j!\lambda_j = 0$ puis $\lambda_j = 0$. La famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est donc libre. De plus

$$\dim \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[x],\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}_n[x] = n+1.$$

Il y a donc autant de vecteurs dans la famille que la dimension, c'est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[x],\mathbb{R})$.

4. En reprenant la question 1, on prouve que g est linéaire. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$g = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k.$$

De nouveau, en évaluant en Q_j pour un certain entier j fixé

$$g\left(\mathrm{Q}_j\right) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k\left(\mathrm{Q}_j\right).$$

Relation qui devient pour $m \leqslant j$:

$$\frac{j!}{(j-m)!}(b-a)^{j-m} = \mathrm{Q}_j^{(m)}(b) = \lambda_j \cdot j!$$

et $0 = \lambda_j \cdot j$. si $m > j$. Finalement, l

$$g = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{(j-m)!}(b-a)^{k-m} \cdot f_k.$$

Les m premières coordonnées de g sont nuls.

Pour $m = 0$, on retrouve la formule de Taylor pour les polynômes

$$\mathrm{P}(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k.$$

Partie B

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{P}(x+t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\varphi(\mathrm{P})(x)$ est une intégrale généralisée en $\pm\infty$. De plus, à l'aide des croissances comparées

$$\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{P}(x+t) = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ de fonctions positives sont convergentes par le critère de Riemann. Par le critère de négligeabilité,

$$\varphi(\mathrm{P})(x) \text{ est convergente.}$$

Soit n le degré de P, la formule de Taylor, rappelée à la question précédente, donne pour $b = x+t$ et $a = x$

$$\mathrm{P}(x+t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(x)}{k!} t^k.$$

Par linéarité des intégrales convergentes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{P}(x+t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{P}^{(k)}(x)}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Sous cette dernière expression, on vérifie bien que

$$\varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}[x].$$

La linéarité de φ découle de la linéarité des intégrales convergentes. En conclusion,

$$\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[x].$$

6. Si on pose

$$a_k = \frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

on a

$$\varphi(\mathrm{P})(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{P}^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{P}^{(k)}(x).$$

Expression qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\varphi(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \mathrm{D}^k(\mathrm{P}).$$

Remarque. Noter que par parité, $a_k = 0$ si k est un nombre impair. Il est possible de calculer les a_k par une intégration par parties (c'est, à une constante près, les moments de la loi normale centrée réduite).

7. Partons de l'équation d'un vecteur propre

$$\varphi(\mathrm{P}) = \lambda \mathrm{P} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{D}^n(\mathrm{P}).$$

$$\iff \quad (\lambda - a_0)\,\mathrm{P} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathrm{D}^n(\mathrm{P}) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \mathrm{D}^n(\mathrm{P})$$

car $a_1 = 0, \; a_2 \neq 0$.

Pour des questions de degré $\lambda = a_0$ et $\mathrm{P}'' = 0$. Finalement les seuls vecteurs propres sont les polynômes de degré au plus 1 (non nul).

Partie C

8. Soit $\mathrm{P} \in \ker \varphi$. On en déduit que P a trois racines alors qu'il est de degré au plus 2. C'est donc le polynôme nul. φ est injective, comme la dimension de l'espace d'arrivée égale celle de départ, c'est un isomorphisme. De plus, on a

$$\varphi(1) = (1,1,1)$$
$$\varphi(x) = (-1,0,1)$$
$$\varphi\left(x^2\right) = (1,0,1).$$

D'où $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. **a)** φ est un isomorphisme, donc A est inversible.

b) À la lecture des colonnes de A^{-1}

$$\mathrm{L}_1 = 0 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} x(x-1)$$
$$\mathrm{L}_2 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + -1 x^2 = 1 - x^2$$
$$\mathrm{L}_3 = 0 \cdot x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{2} x(1+x)$$

Notons que par construction

$$\Phi_1(\mathrm{L}_1) = 1 \quad \Phi_2(\mathrm{L}_1) = 0 \quad \Phi_3(\mathrm{L}_1) = 0.$$
$$\Phi_1(\mathrm{L}_2) = 0 \quad \Phi_2(\mathrm{L}_2) = 1 \quad \Phi_3(\mathrm{L}_2) = 0.$$
$$\Phi_1(\mathrm{L}_3) = 0 \quad \Phi_2(\mathrm{L}_3) = 0 \quad \Phi_3(\mathrm{L}_3) = 1.$$

10. Comme la famille contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$.

$$\dim \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}_2[x] = 2 + 1 = 3.$$

Il suffit de montrer que la famille est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 + \lambda_3 \Phi_3 = 0$$

c'est-à-dire

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x], \quad \lambda_1 \Phi_1(\mathrm{P}) + \lambda_2 \Phi_2(\mathrm{P}) + \lambda_3 \Phi_3(\mathrm{P}) = 0$$

En évaluant en $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3$ et en utilisant la remarque précédente, on obtient directement

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille est libre, c'est une base.

11. Comme (Φ_1, Φ_2, Φ_3) est génératrice de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R})$ et que ψ est une forme linéaire, il existe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\psi = \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \alpha_3 \Phi_3.$$

D'où pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t &= \psi(\mathrm{P}) \\ &= \alpha_1 \Phi_1(\mathrm{P}) + \alpha_2 \Phi_2(\mathrm{P}) + \alpha_3 \Phi_3(\mathrm{P}) \\ &= \alpha_1 \mathrm{P}(-1) + \alpha_2 \mathrm{P}(0) + \alpha_3 \mathrm{P}(1). \end{aligned}$$

12. Le changement de variable affine $t \to -t$ donne

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(-t)\,\mathrm{d}t.$$

En appliquant la relation de la question 11 à $t \mapsto \mathrm{P}(-t)$,

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(-t)\,\mathrm{d}t = \alpha_1 \mathrm{P}(1) + \alpha_2 \mathrm{P}(0) + \alpha_3 \mathrm{P}(-1).$$

Or les coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ )$ sont uniques (car on a une base), nécessairement

$$\alpha_1 = \alpha_3.$$

13. Par imparité pour $\mathrm{P}(x) = x^3$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ et} \quad \alpha_1 \mathrm{P}(-1) + \alpha_2 \mathrm{P}(0) + \alpha_3 \mathrm{P}(1)$$
$$= -\alpha_1 + 0 + \alpha_3 = 0$$

On a donc égalité pour $\mathrm{P}(x) = x^3$.
Vérifions que cette égalité s'étend à $\mathbb{R}_3[x]$ par linéarité.
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[x]$. On peut écrire

$$\mathrm{P}(x) = a x^3 + \mathrm{Q}(x) \quad \mathrm{Q}(x) \in \mathbb{R}_2[x]$$

Puis, en utilisant la formule pour x^3 et Q :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t &= a \int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= a\left(\alpha_1(-1)^3 + \alpha_2 0^3 + 1^3\right) \\ &\quad + \alpha_1\left(\mathrm{Q}(-1) + \alpha_2 \mathrm{Q}(0) + \alpha_3 \mathrm{Q}(1)\right) \\ &= \alpha_1 \mathrm{P}(-1) + \alpha_2 \mathrm{P}(0) + \alpha_3 \mathrm{P}(1). \end{aligned}$$

14. Testons avec $\mathrm{P} = \mathrm{L}_2$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{L}_2(t)\,\mathrm{d}t = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 = \alpha_2$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \mathrm{L}_2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} 1 - x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Puis $$\alpha_2 = \frac{4}{3}.$$

De même, on a

$$\frac{1}{3} = \int_{-1}^{1} \mathrm{L}_1(t)\,\mathrm{d}t = \alpha_1 = \alpha_3.$$

15. On effectue un changement de variable affine

$$t = \frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}$$

$$\frac{2(t-(b+a)/2)}{b-a} = u \quad \frac{2\,\mathrm{d}t}{b-a} = \mathrm{d}u.$$

On obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{1} \mathrm{Q}\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{\mathrm{Q}}(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{avec } \tilde{\mathrm{Q}}(0) \in \mathbb{R}_2[x] \\ &= \frac{b-a}{2}\left(\alpha_1\tilde{\mathrm{Q}}(-1) + \alpha_2\tilde{\mathrm{Q}}(0) + \alpha_3\mathrm{Q}(1)\right) \\ &= \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{3}\mathrm{Q}(a) + \frac{4}{3}\mathrm{Q}\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}\mathrm{Q}(b)\right)\end{aligned}$$

D'où le résultat.

16.
```
def Delta(f,a,b) :
    D=(b-a)/6*(f(a)+4*f((a+b)/2)+f(b))
    return D
```

17. L'idée est de subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en n sous-segments comme pour les sommes de Riemann

```
import numpy as np
def Approx(f,a,b,n) :
    abscisse=np.linspace(a,b,n)
    S=0
    for i in range(n-1):
        ai=abscisse[i]
        bi=abscisse[i+1]
        S=S+Delta(f,ai,bi)
    return S
```

Remarque. Cette méthode est connue sous le nom de la méthode de Simpson. Précisons : C'est Thomas Simpson (pas l'autre ...), mathématicien anglais du 18ème siècle.