# DM 2 - sujet A

THÈME : RÉVISIONS PROBABILITÉ

## Exercice A
Développement en série entière de $1/(1-x)^p$

L'objectif de la suite est d'établir l'égalité suivante

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in ]-1;1[, \qquad \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \qquad (\star).$$

**1.** À l'aide du cours, justifier cette formule pour $k \in \{0;1;2\}$.

**Preuve 1 du cas général**

Pour $x \in ]-1,1[$, $n$ et $k$ des entiers avec $0 \leqslant k \leqslant n$. On pose : $u_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^{n-k}$.

De plus, pour N entier avec $N \geqslant k$, on pose $S_{N,k}(x) = \sum_{n=k}^{N} u_{n,k}(x)$.

**2.** Montrer, pour tous $k$ et N entiers avec $N \geqslant k \geqslant 1$, que :

$$(1-x)S_{N,k}(x) = S_{N-1,k-1}(x) - \binom{N}{k} x^{N+1-k}$$

**3.** En déduire que la série $\sum_{n \geqslant k} u_{n,k}(x)$ converge pour $k \in \mathbb{N}$ et l'égalité $(\star)$.

- **Preuve via la loi binomiale négative**
  Soit $p \in ]0;1[$.
  On effectue des lancers d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p$ et donnant "face" avec la probabilité $q = 1-p$, les différents lancers étant supposés indépendants.
  Pour tout entier naturel $k$ non nul, on note $P_k$ (resp. $F_k$) l'événement : "la pièce donne "pile" (resp. "face") au $k$-ième lancer", on note également $S_k$, la variable aléatoire donnant le rang du $k$-ième pile.

**4.** Reconnaître la loi de $S_1$. Préciser son espérance.

**5.** Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $k$, on note $X_{n-1}$ la variable aléatoire égale au nombre de « piles » obtenus lors des $n-1$ premiers lancers.

  **a)** Donner la loi de $X_{n-1}$.

  **b)** Préciser $S_k(\Omega)$ puis écrire l'événement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable $X_{n-1}$.

  **c)** En déduire que la loi de $S_k$ est donnée par :

$$\forall\, n \geqslant k, \qquad \mathbf{P}(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

**6.** En déduire la relation $(\star)$ pour tout $x \in [0;1[$.

## Exercice B
Application des fonctions génératrices

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne l€. Pour tout $n \geqslant 2$, on définit la variable aléatoire $X_n$ égale au gain total à l'issue des $n$ premiers lancers.

- **Simulation Python**

**7.** Écrire un programme python qui prend en argument $n$ et simule $X_n$.

**8.** En déduire un programme qui prend en argument $n$ et donne une approximation de l'espérance de $X_n$.
*On rappelle que la loi des grands nombres justifie l'on peut approximer l'espérance en prenant la moyenne arithmétique d'un grand nombre de simulations de la variable aléatoire.*

- **Approche théorique**

**9.** Déterminer les lois de $X_2$ et de $X_3$, puis calculer leurs espérances.

**10.** Soit $n \geqslant 2$. Justifier que $X_n$ prend ses valeurs dans $[\![0; n-1]\!]$. Calculer $\mathbf{P}(X_n = 0)$ et $\mathbf{P}(X_n = n-1)$.

**11.** Pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in [\![0; n]\!]$, montrer :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = k) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = k-1).$$

**12.** Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit la fonction $G_n$ par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad G_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X_n = k)\, s^k.$$

Préciser $G_n(1)$ et rappeler le lien entre $G'_n(1)$ et $\mathbf{E}(X_n)$, puis entre $\mathbf{V}(X_n)$ et $G_n$.

**13.** Montrer, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $s \in \mathbb{R}$ :

$$G_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} G_n(s).$$

**14.** En déduire une expression de $G_n(s)$ en fonction de $n$ et de $s$.

**15.** Conclure en donnant l'espérance et la variance de $X_n$.

– FIN –

# DM 2 - sujet *

THÈME : RÉVISIONS PROBABILITÉ

## Problème

Matrices aléatoires constituées de 0 et 1

Le sujet est composé de deux parties indépendantes.
On dit qu'une suite de matrice $(A_k)_k$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice L si pour tout couple d'indices $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, la suite des coefficients d'indice $(i, j)$, notée $([A_k]_{i,j})_k$ converge vers $[L]_{i,j}$.

### Partie A : Cas particuliers sur des matrices de Bernoulli

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $n$ variables aléatoires mutuellement indépendantes toutes de loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. On définit la matrice aléatoire $M = (M_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad M_{i,j} = X_i X_j.$$

1. Reconnaître les lois de rg(M) et Tr(M).
2. a) Si M est la matrice d'un projecteur, comparer Tr(M) et rg(M).
   b) Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?
3. On pose $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Exprimer $M^k$ en fonction de S et M.
4. Quelle est la probabilité pour que la suite de matrices $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente ? Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.
5. Quelle est la probabilité que M admette deux valeurs propres distinctes ?

### Partie B : Génération par remplissage aléatoire

Soient $p \in ]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On part de la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, notée $M_0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit la matrice $M_{k+1}$ à partir de la matrice $M_k$ de la manière suivante :
- on parcourt en une vague la matrice et chaque coefficient nul est changé en 1 avec la probabilité $p$ ;
- chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres et des vagues précédentes.

Les $M_k$ sont donc des variables aléatoires à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on considère qu'elles sont définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Voici un exemple de réalisation de cette évolution pour $n = 2$ :

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour $k \geqslant 1$, le nombre de modifications réalisées lors de la $k$-ième vague est noté $N_k$. Dans l'exemple ci-dessus :

$$N_1 = 2, \quad N_2 = 0, \quad N_3 = 1, \quad N_4 = 1, \quad N_5 = 0.$$

On s'intéresse au plus petit indice $k$ pour lequel la matrice $M_k$ ne comporte que des 1 ; on dit alors qu'elle est totalement remplie. Dans l'exemple précédent, ce premier indice vaut 4.

- **Simulation avec python**

6. a) Comment, en utilisant uniquement la commande `rd.random()`, simuler une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$ ?

**b)** Écrire une fonction `etape` d'arguments une matrice M constituée de 0 et 1, et un réel $p \in ]0;1[$ et renvoie une matrice M suivant le principe précédemment.

**c)** Écrire une fonction `test` qui prend en argument une matrice M et teste si elle est constituée uniquement de « 1 ».

**7.** En déduire une fonction d'entête `Simulation(n,p)` qui renvoie le plus petit entier $k$ tel que la matrice $\mathrm{M}_k$ soit totalement remplie à partir d'un remplissage aléatoire de la matrice nulle d'ordre $n$.

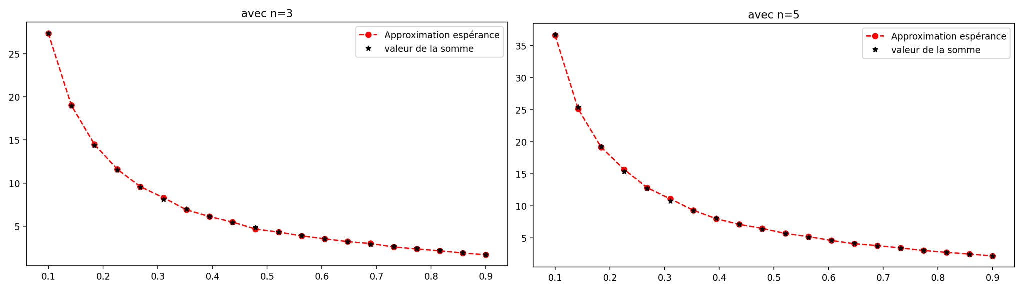
**8.** Donner un programme qui prend en argument $(n, p)$ et donne une approximation de l'espérance.
*On rappelle que la loi des grands nombres justifie l'on peut approximer l'espérance en prenant la moyenne arithmétique d'un grand nombre de simulations de la variable aléatoire.*

**9.** Écrire un programme `somme` qui prend en arguments $m$, $p$ et renvoie la somme $\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(-1)^{i+1}\frac{1}{1-q^i}$.
*On pourra utiliser la commande* `sp.binom(i,j)` *de la bibliothèque* `scipy.special` *pour le coefficient* $\binom{i}{j}$.

**10.** Que peut-on conjecturer à l'aide du code et des résultats suivants ?

**Editeur**

```
p=np.linspace(0.1,0.9,20)
E=np.zeros(20)
S=np.zeros(20)
for i in range(20):
    E[i]=approx(n,p[i])
    S[i]=somme(n**2,1-p[i])
plt.plot(p,E,'r--o',label='Approximation espérance')
plt.plot(p,S,'k*',label='valeur de la somme')
plt.legend()
plt.show()
```




*On obtient des résultats similaires pour d'autres valeurs de $n$.*

- **Approche théorique**

**11.** Donner la loi de $\mathrm{N}_1$, puis expliciter pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbf{P}_{[\mathrm{N}_1=k]}(\mathrm{N}_2 = i)$ pour $i$ dans un ensemble à préciser.

**12.** Soient $i, j \in [\![1;n]\!]$. Le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que le coefficient ligne $i$, colonne $j$ de $\mathrm{M}_k$ vaut 1 est noté $\mathrm{T}_{i,j}$. Dans l'exemple de l'introduction : $\mathrm{T}_{1,1} = 1$ et $\mathrm{T}_{1,2} = 3$.

**a)** Donner la loi de $\mathrm{T}_{i,j}$.

**b)** Préciser pour $k \in \mathbb{N}^*$ la valeur de $\mathbf{P}\left(\mathrm{T}_{i,j} \geqslant k\right)$.

**13.** Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{S}_r = \mathrm{N}_1 + \cdots + \mathrm{N}_r$.

**a)** Que représente $\mathrm{S}_r$ ?

**b)** À l'aide de la question précédente, justifier que $\mathrm{S}_r$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n^2, 1-q^r)$.

**14.** On note N le plus petit indice $k$ pour lequel la matrice $\mathrm{M}_k$ est totalement remplie.
*On admet que* N *est une variable aléatoire à valeurs presque sûrement dans* $\mathbb{N}^*$.

**a)** Justifier que si la série $\sum \mathbf{P}(\mathrm{N} \geqslant k)$ est convergente, N admet une espérance et $\mathbf{E}(\mathrm{N}) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathrm{N} \geqslant k)$.

**b)** En déduire que

$$\mathbf{E}(\mathrm{N}) = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 - \left(1 - q^{k-1}\right)^{n^2}.$$

Que dire de la conjecture de la question 10 ?

– FIN –

# DM 2 - éléments de solution

## Sujet A

### Exercice A

**1.** D'après les résultats sur les séries géométriques dérivées, on a pour tout $x \in ]-1;1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

et
$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

on a bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \frac{1}{(1-x)^{0+1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{1} x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^{1+1}}$$

et
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \binom{n}{2} x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^{n-1}}.$$

**2.** Soient $k, \mathrm{N} \in \mathbb{N}$ avec $\mathrm{N} \geqslant k \geqslant 1$.

$$(1-x)\mathrm{S}_{\mathrm{N},k}(x)$$
$$= \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \binom{n}{k} \left(x^{n-k} - x^{n+1-k}\right)$$
$$= \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \binom{n}{k} x^{n-k} - \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \binom{n}{k} x^{n+1-k}$$

changement d'indice $p = n+1$ dans la seconde somme

$$= \sum_{n=b}^{\mathrm{N}} \binom{n}{k} x^{n-k} - \sum_{p=k+1}^{\mathrm{N}+1} \binom{p-1}{k} x^{p-k}$$

le coefficient $\binom{p-1}{p}$ est nul

$$= \sum_{n=b}^{\mathrm{N}} \binom{n}{k} x^{n-k} - \sum_{p=k}^{\mathrm{N}+1} \binom{p-1}{k} x^{p-k}$$
$$= \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}\right) x^{n-k} - \binom{\mathrm{N}}{k} x^{\mathrm{N}+1-k}$$

formule du triangle de Pascal

$$= \sum_{n=k}^{\mathrm{N}} \binom{n-1}{k-1} x^{(n-1)-(k-1)} - \binom{\mathrm{N}}{k} x^{\mathrm{N}+1-k}$$

changement d'indice $p = n-1$

$$= \mathrm{S}_{\mathrm{N}-1,k-1} - \binom{\mathrm{N}}{k} x^{\mathrm{N}+1-k}.$$

**3.** Prouvons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \left| \begin{array}{l} \text{La série } \sum u_{n,k} \text{ converge} \\ \text{et } \sum_{n=k}^{+\infty} u_{n,k} = (1-x)^{-k-1} \end{array} \right.$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

→ *Initialisation.* $\mathscr{P}(0)$ a été établie à la question 1.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(k-1)$ vraie. On sait donc que $\sum u_{n,k-1}$ est convergente et

$$\forall x \in ]-1;1[, \qquad \mathrm{S}_{\mathrm{N}-1,k-1}(x) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^k}.$$

De plus, par les croissances comparées.

$$\binom{\mathrm{N}}{k} x^{\mathrm{N}+1-k} = \frac{\mathrm{N}!}{k!(\mathrm{N}-k)!} x^{\mathrm{N}+1-k} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\sim} \mathrm{N}^k x^{\mathrm{N}+1-k} \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où par passage à la limite dans l'égalité de la question 2, la convergence de $\left(\mathrm{S}_{\mathrm{N},(x)}\right)_{\mathrm{N}}$ avec

$$(1-x)\mathrm{S}_{\mathrm{N},k}(x) \underset{\mathrm{N}\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^k}.$$

D'où la convergence de la série $\sum u_{n,k}$ et l'égalité

$$\sum_{n=k}^{+\infty} u_{n,k} = \lim_{\mathrm{N}+\infty} \mathrm{S}_{\mathrm{N},k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

La propriété $\mathscr{P}(k)$ est prouvée.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

**4.** La variable $\mathrm{S}_1$ renvoie le rang du 1^er^ succès (« avoir un pile ») dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. Donc $\mathrm{S}_1$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ (la probabilité d'un succès). On sait alors que

$$\mathbf{E}(\mathrm{S}_1) = \frac{1}{p}.$$

**5.a)** La variables $\mathrm{X}_{n-1}$ compte le nombre de succès (avoir un pile) dans $n-1$ répétitions d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes, on sait alors que

$$\mathrm{X}_{n-1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n-1, p).$$

**5.b)** Il faut au moins $k$ lancers pour obtenir $k$ «piles» donc

$$\mathrm{S}_k(\Omega) \subset \{n \in \mathbb{N}, \, n \geqslant k\}.$$

De plus, pour tout $n \geqslant k$, il est possible d'obtenir $n-k$ «faces» suivis de $k$ "piles" : l'événement $\left[\mathrm{S}_k = n\right]$ est possible et

$$\mathrm{S}_k(\Omega) \supset \{n \in \mathbb{N}, \, n \geqslant k\}.$$

D'où l'égalité
$$S_k(\Omega) = \{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k\}.$$
L'événement $[S_k = n]$ est réalisé si et seulement si le $n^{\text{ème}}$ lancer est un "pile" et qu'il y a eu exactement $k-1$ «piles» lors des $n-1$ premiers lancers. Donc
$$[S_k = n] = [X_{n-1} = k-1] \cap P_n.$$

**5.c)** Puisque $X_{n-1}$ ne dépend que des $n-1$ premiers lancers, les événements $[S_{n-1} = k-1]$ et $P_n$ sont indépendants. Ainsi pour tout $n \geqslant k$
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_k = n) &= \mathbf{P}(X_{n-1} = k-1)\,\mathbf{P}(P_n)\\ &= \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} p = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.\end{aligned}$$

**6.** Comme $([S_n = k])_{k\in\mathbb{N}, k\geqslant \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a *en particulier* la convergence de la série et l'égalité sur la somme
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k) = 1.$$
Obtient pour tout $x \in [0;1[$, en prenant $p = 1-x$, $q = x$
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} (1-x)^k x^{n-k} = 1.$$
La formule s'en déduit à l'aide des changement d'indice $k \leftarrow k-1$, $n \leftarrow n-1$.

### Exercice B

> Pour une version similaire et plus complète à cet exercice, on pourra consulter le sujet Ecricome ECS 2006.

**7.** Pour simuler un tirage pile/face, on peut écrire :

```
def simuTirage(p):
    if rd.random()<p:
        return 1 # pour pile
    return 0  # pour face
```

ou simplement

```
rd.random()<p:
```

si on identifie par exemple `False` avec face et `True` avec Pile.
Ensuite pour simuler $X_n$ :

```
def simulationXn(n,p):
    tirage_old=simuTirage(p)
    tirage_new=simuTirage(p)
    Compteur=0
    for i in range(2,n+1):
        if tirage_old!=tirage_new:
            Compteur+=1
        tirage_old=tirage_new
        tirage_new=simuTirage(p)
    return Compteur
```

**8.**

```
def approxEXn(n,p):
    s=0
    for i in range(2000):
        s+=simulationXn(n,p)
    return s/2000
```

**9.** Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P_k$ (resp. $F_k$) l'événement : « On obtient un pile (resp. face) au $k$-ième lancer. »

- Loi de $X_2$
  - $X_2(\Omega) = \{0;1\}$.
  - Précisions les probabilités :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2 = 0) &= \mathbf{P}((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2))\\ &= \mathbf{P}(P_1 \cap P_2) + \mathbf{P}(F_1 \cap F_2)\\ &\quad \text{événements disjoints}\\ &= \mathbf{P}(P_1)\mathbf{P}(P_2) + \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2)\\ &\quad \text{par indépendance}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Puis $\qquad \mathbf{P}(X_2 = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_2 = 0) = \dfrac{1}{2}.$

On reconnaît une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{1}{4}.}$$

- Loi de $X_3$
  - $X_2(\Omega) = \{0;1;S3\}$.
  - Précisions les probabilités :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_3 = 0) &= \mathbf{P}((P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3))\\ &= \mathbf{P}(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + \mathbf{P}(F_1 \cap F_2 \cap F_3)\\ &\quad \text{événements disjoints}\\ &= \mathbf{P}(P_1)\mathbf{P}(P_2)\mathbf{P}(P_3) + \mathbf{P}(F_1)\mathbf{P}(F_2)\mathbf{P}(F_3)\\ &\quad \text{par indépendance}\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

De même
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_3 = 2) &= \mathbf{P}((P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3))\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Puis $\qquad \mathbf{P}(X_2 = 1) = 1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}.$

L'espérance est donc
$$\mathbf{E}(X_3) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = \boxed{1}$$

**10.** La plus petite valeur que peut prendre $X_n$ est $0$, lorsqu'il n'y a aucun changement de côté.
La plus grande valeur que peut prendre $X_n$ est $n-1$, lorsqu'il y a un changement de côté à chaque lancer, à partir du deuxième. Enfin, $X_n$ peut prendre toutes les valeurs intermédiaires. On en déduit :
$$X_n(\Omega) = [\![0; n-1]\!].$$
Précisons les probabilités
$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X_n = 0)\\ &= \mathbf{P}((P_1 \cap \cdots \cap P_n) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n))\\ &= \mathbf{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_n) + \mathbf{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_n) \text{ par incompatibilité}\\ &= \mathbf{P}(P_1)\cdots\mathbf{P}(P_n) + \mathbf{P}(F_1)\cdots\mathbf{P}(F_n) \text{ par indépendance}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(X_n = n-1)\\ &= \mathbf{P}((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \ldots))\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

**11.** Soient $n \geqslant 2$ et $k \in [\![0; n]\!]$. Notons E l'événement : « les côtés obtenus aux lancers $n$ et $n+1$ sont les mêmes ». Alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(E) &= P((P_n \cap P_{n+1}) \cup (F_n \cap F_{n+1}))\\ &= \mathbf{P}(P_n)\mathbf{P}(P_{n+1}) + \mathbf{P}(F_n)\mathbf{P}(F_{n+1})\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

La famille d'événements $(E, \overline{E})$ est un système complet d'événements. Donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbf{P}(E)\mathbf{P}_E(X_{n+1} = k) + \mathbf{P}(\overline{E})\mathbf{P}_{\overline{E}}(X_{n+1} = k)\\ &= \mathbf{P}(E)\mathbf{P}(X_n = k) + \mathbf{P}(\overline{E})\mathbf{P}(X_n = k-1)\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = k) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\mathbf{P}(X_n = k-1)\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = k) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = k-1).\end{aligned}$$

**12.** On a vu (exercice du cours à savoir refaire)

$$G_n(1) = 1.$$

$$\mathbf{E}(X_n) = {G_n}'(1) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X_n) = {G_n}''(1) + {G_n}'(1) - {G_n}'(1)^2.$$

**13.** Soient $n \geqslant 2$ et $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}G_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X_{n-1} = k)\, s^k\\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = k) + \frac{1}{2}\mathbf{P}(X_n = k-1)\right) s^k\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X_n = k)\, s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X_n = k-1)\, s^k\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X_n = k)\, s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=-1}^{n-1} \mathbf{P}(X_n = k)\, s^{k+1}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X_n = k)\, s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X_n = k)\, s^{k+1}\\ &= \frac{1+s}{2} G_n(s).\end{aligned}$$

**14.** On en déduit, par récurrence immédiate :

$$\forall n \geqslant 2, \forall s \in \mathbb{R}, \qquad G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} G_2(s)$$

Or : $\quad G_2(s) = \mathbf{P}(X_2 = 0) + \mathbf{P}(X_2 = 1)\, s = \frac{1+s}{2}$.

Ainsi : $\quad \forall n \geqslant 2, \forall s \in \mathbb{R}, \qquad G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$

**15.** La fonction $G_n$ est polynomiale donc deux fois dérivable avec

$$\begin{cases} G'_n(s) = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}\\ G''_n(s) = \frac{(n-1)(n-2)}{4}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-3}. \end{cases}$$

En particulier

$$G'_n(1) = \frac{n-1}{2} \quad \text{et} \quad G''_n(1) = \frac{(n-1)(n-2)}{4}.$$

Après simplifications, on trouve

$$\boxed{\mathbf{E}(X_n) = G'_n(1) = \frac{n-1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X_n) = \frac{n-1}{4}.}$$

---

**Sujet ***

---

**1.** • Si on note C la colonne $\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$ alors :

$$\forall j \in [\![1; n]\!], \qquad C_j = X_j C.$$

où $C_j$ désigne la $j$-ème colonne de M. Donc $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C)$.

- Si $C \neq 0_{n,1}$, alors M est de rang 1.
- Si $C = 0_{n,1}$, M est de rang 0.

Dès lors rg(M) est à valeurs dans $\{0; 1\}$ et

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\operatorname{rg}(M) = 0) &= \mathbf{P}(C = 0) = \mathbf{P}\big([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap \cdots \cap [X_n = 0]\big)\\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\big(X_i = 0\big) \quad \text{indépendance}\\ \mathbf{P}(\operatorname{rg}(M) = 0) &= (1-p)^n \qquad \text{égalité en loi}\end{aligned}$$

puis $\quad \mathbf{P}(\operatorname{rg}(M) = 1) = 1 - \mathbf{P}(\operatorname{rg}(M) = 0) = 1 - (1-p)^n$.

Le rang suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1-p)^n$.

• Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $X_i$ est à valeurs dans $\{0; 1\}$, on a ${X_i}^2 = X_i$. Ainsi

$$\operatorname{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Les variables $(X_i)_{i \in [\![1; n]\!]}$ sont indépendantes, on sait alors que Tr(M) suit une loi binomiale de paramètres $n$, $p$.

**2.** Un exercice classique permet de montrer que si M est la matrice d'un projecteur alors

$$\operatorname{Tr}(M) = \operatorname{rg}(M).$$

Comme le rang de M n'excède pas 1, dès que $\operatorname{Tr}(M) \geqslant 2$, M ne peut être la matrice d'un projecteur.

- Si $\operatorname{Tr}(M) = 1$, une seule des variables $X_i$ prend la valeur 1 et M est alors diagonale avec un unique « 1 » sur la diagonale. La matrice M est une matrice de projecteur.
- Si $\operatorname{Tr}(M) = 0$, M est la matrice nulle, c'est la matrice d'un projecteur.

Finalement la probabilité recherchée est :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big(\mathrm{Tr}(M) \leqslant 1\big) &= \mathbf{P}\big(\mathrm{Tr}(M) = 0\big) + \mathbf{P}\big(\mathrm{Tr}(M) = 1\big) \\ &= (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}.\end{aligned}$$

**3.** On garde la notation de la question 1 de sorte que

$$M = C^tC.$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned}M^2 &= \big(C^tC\big)\big(C^tC\big) \\ &= C\big({}^tCC\big)^tC.\end{aligned}$$

Or on remarque que

$${}^tCC = \sum_{i=1}^{n} X_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i = S \quad \text{car } X_i(\Omega) = \{0;1\}.$$

Ainsi

$$M^2 = C \cdot \underbrace{S}_{\in\mathbb{R}}\, {}^tC = S \cdot \big(C^tC\big) = S \cdot M.$$

Par récurrence immédiate, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad M^k = S^{k-1} \cdot M.$$

**4.** Soit $\omega \in \Omega$.

Si $M = 0_n$, alors la suite $\left(M^k\right)_k$ est trivialement convergente.

— Si $M \neq 0_n$, alors il existe $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $M_{ij} \neq 0$ et la suite de coefficients $\left[M^k\right]_{ij} = S^{k-1}[M]_{ij}$ est convergente si et seulement si la suite géométrique de raison $S(\omega)$ est convergente. Soit $S(\omega) \in ]-1;1]$. Comme S est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, il y a seulement deux cas

$$S(\omega) = 0 \quad \text{ou} \quad S(\omega) = 1.$$

Sachant que $S(\omega) = 0$ correspond à $X_1(\omega) = \ldots = X_n(\omega) = 0$, ou encore à $M = 0_n$, on peut conclure que la probabilité recherchée est

$$\mathbf{P}(S \in \{0;1\}) = p^n + np^{n-1}(1-p),$$

- Dans le cas de convergence, on constate que

$$M^2 = M.$$

La suite est constante et la limite est bien une matrice de projecteur.

*Remarque. On aurait pu écrire*

$$M^{2k} = M^k \cdot M^k$$

*et passer à la limite (on note* L *la limite) matrice limite.*

$$L = L \cdot L = L^2$$

**5.** La matrice est de rang inférieur à 1.

— Si la matrice est nulle, alors il n'y a que 0 comme valeur propre.

— Si la matrice n'est pas nulle, on a $C \neq 0_{n,1}$ et

$$MC = \big(C^tC\big)C = C(\underbrace{{}^tCC}_{\in\mathbb{R}}) = \big({}^tCC\big)C = S \cdot C.$$

On a donc $S(\omega)$ comme value propre avec $S(\omega) \neq 0$. Par un compte des dimensions, il ne peut avoir d'autre valeur propre. En résumé la probabilité recherchée est

$$\mathbf{P}(S \neq 0) = 1 - \mathbf{P}(S = 0) = 1 - q^n.$$

**6.** Dans la suite, on importe :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import scipy.special as sp
import matplotlib.pyplot as plt
```

**6.a)** Si on identifie `True` avec 1 et `False` avec 0, on peut simplement écrire :

```
rd.random()<p
```

Si on veut détailler :

```
def simuBernoulli(p):
    if rd.random()<p:
        return 1
    return 0
```

**6.b)** L'idée est de parcourir la matrice M. Dès que l'on rencontre un « 0 », on le remplace par une simulation d'une loi de Bernoulli.

```
def etape(M,p):
    [n,m]=np.shape(M)
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            if M[i,j]==0:
                M[i,j]=simuBernoulli(p)
    return M
```

**6.c)**

```
def test(M):
    [n,m]=np.shape(M)
    for i in range(n):
        for j in range(m):
            if M[i,j]!=1:
                return False
    return True
```

**7.**

```
def simulation(n,p):
    M=np.zeros([n,n])
    Compteur=0
    while test(M)==False:
        M=etape(M,p)
        Compteur+=1
    return Compteur
```

**8.**

```
def approx(n,p):
    compteur=0
    for i in range(1000):
        compteur+=simulation(n,p)
    return compteur/1000
```

**9.**

```
def somme(m,q):
    s=0
    signe=1
    for i in range(1,m+1):
        s+=sp.binom(m,i)*signe*(1-q**i)
            **(-1)
        signe=-signe
    return s
```

**10.** Le programme calcule d'une part la somme

$$\sum_{i=1}^{n^2}\binom{n^2}{i}(-1)^{i+1}\frac{1}{1-q^i}$$

avec $q=1-p$ pour différentes valeurs dans $]0;1[$. Et d'autre part, il renvoie une approximation de l'espérance $\mathbf{E}(\mathrm{N})$. Les valeurs obtenues semblent correspondent. L'énoncé suggère donc l'égalité

$$\mathbf{E}(\mathrm{N})=\sum_{i=1}^{n^2}\binom{n^2}{i}(-1)^{i+1}\frac{1}{1-q^i}.$$

**11.** La variable $\mathrm{N}_1$ donne le nombre de succès (avoir un « 1 ») dans $n^2$ répétitions d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. On sait alors que

$$\mathrm{N}_1\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n^2,p\right).$$

Soit $k\in[\![0;n]\!]$. Si l'événement $[\mathrm{N}_1=k]$ est réalisé, il y a donc $n^2-k$ « 0 » dans la matrice $\mathrm{M}_1$ à la fin de l'étape 1. Si Y suit donne le nombre de « 0 » devenu « 1 » à l'étape 2 , on a

$$\mathrm{Y}\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n^2-k,p\right).$$

Ainsi pour tout $i\in[\![0;n^2-k]\!]$

$$\mathbf{P}_{[\mathrm{N}_1=k]}(\mathrm{N}_2=i)=\mathbf{P}(\mathrm{Y}=i)=\binom{n^2-k}{i}p^iq^{n^2-k-i}.$$

**12.a)** La variable $\mathrm{T}_{ij}$ renvoie le rang du premier succès (avoir un « 1 » en position $(i,j)$) dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. On sait alors que la variable suit une loi géométrique avec

$$\mathrm{T}_{ij}\hookrightarrow\mathscr{G}(p).$$

**12.b)** *Rédaction 1*
Si on note $\mathrm{A}_k$ l'événement : « Il reste un 0 en position $(i,j)$ à la $k$-ème étape » alors on a d'après la formules des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\mathrm{T}_{ij}\geqslant k\right)&=\mathbf{P}\left(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\ldots\cap\mathrm{A}_{k-1}\right)\\&=q^{k-1}.\end{aligned}$$

- *Rédaction 2*

On peut aussi faire le calcul :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\mathrm{T}_{i,j}\geqslant k\right)&=\sum_{\ell=k}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\mathrm{T}_{i,j}=\ell\right)\\&=\sum_{\ell=k}^{+\infty}q^{\ell-1}p\\&=q^{k-1}\sum_{i=0}^{+\infty}q^{\ell}p\\\mathbf{P}\left(\mathrm{T}_{i,j}\geqslant k\right)&=q^{k-1}\frac{p}{1-q}=q^{k-1}.\end{aligned}$$

**13.a)** La variable $\mathrm{S}_r$ représente le nombre de "1" dans la matrice à l'étape $r$.

**13.b)** Soit $r\in\mathbb{N}^*$.
Pour tout couple d'indices $(i,j)\in[\![0;n^2]\!]$, on définit la variable $\mathrm{Y}_{i,j}$ comme la variable valant 1 si il y a un « 1 » en position $(i,j)$ à la $r$-ème étape et 0 sinon. Par construction :

- $\mathrm{Y}_{i,j}\hookrightarrow\mathscr{B}(1-q^r)$. En effet, $\mathrm{Y}_{i,j}=0$ si entre les étapes 1 et $r$, le 0 en position $(i,j)$ est toujours resté un 0 après le tirage aléatoire. Comme les tirages sont indépendants et que la probabilité de resté un 0 est $q=1-p$, on a bien

$$\mathbf{P}(\mathrm{Y}_{i,j}=0)=q^r\quad\text{puis}\quad\mathbf{P}(\mathrm{Y}_{i,j}=1)=1-q^r.$$

- Les variables $\mathrm{Y}_{i,j}$ pour $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ sont mutuellement indépendantes.
- $\mathrm{S}_r=\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}\mathrm{Y}_{i,j}$.

On sait alors que

$$\mathrm{S}_r\hookrightarrow\mathscr{B}(n^2,1-q^r).$$

**14.a)** Voir exercice du cours.

**14.** Notons que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\left[\mathrm{S}_{k-1}<n^2\right]=[\mathrm{N}\geqslant k].$$

Ainsi

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\mathrm{N}\geqslant k)\mathbf{P}\left(\mathrm{S}_{k-1}<n^2\right)\\&\qquad=1-\mathbf{P}\left(\mathrm{S}_{k-1}=n^2\right)\quad\text{car }\mathrm{S}_{k-1}(\Omega)=[\![0;n^2]\!]\\&\mathbf{P}(\mathrm{N}\geqslant k)=1-\left(1-q^{k-1}\right)^m.\end{aligned}$$

Or pour $q\in]0;1[$, $q^{k-1}\longrightarrow 0$ lorsque $k\to+\infty$. On en déduit l'équivalent

$$1-\left(1-q^{k-1}\right)^m\sim mq^{k-1}.$$

La série géométrique $\sum q^{k-1}$ est convergence puisque la raison est dans $]-1;1[$. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, on prouve la convergence de la série

$$\sum 1-\left(1-q^{k-1}\right)^m=\sum\mathbf{P}(\mathrm{N}\geqslant k).$$

D'après ce qui précède, on en déduit l'existence de l'espérance de N et l'égalité

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{N})&=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(\mathrm{N}\geqslant k)\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(\mathrm{S}_{k-1}<n^2\right)\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}1-\mathbf{P}\left(\mathrm{S}_{k-1}=n^2\right)\\\mathbf{E}(\mathrm{N})&=\sum_{k=1}^{+\infty}1-\left(1-q^{k-1}\right)^m.\end{aligned}$$

On peut poursuivre le calcul à l'aide de la formule du binôme de Newton

$$\mathbf{E}(\mathrm{N})=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}(-1)^{i+1}q^{(k-1)i}.$$

Comme les séries $\sum_k\binom{m}{i}(-1)^{i+1}q^{(k-1)i}$ sont convergentes et qu'une des deux sommes est finie, on peut intervertir l'ordre de sommation pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{N}) &= \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{(k-1)i} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1-q^i} \quad \left(\begin{array}{c}\text{somme}\\ \text{géométrique}\end{array}\right).\end{aligned}$$

Ce qui prouve la conjecture de la question 10.