

Espérance et espérance conditionnelle

If there is a 50-50 chance that something can go wrong, then nine times out of 10 it will.

PAUL HARVEY

Animateur radio américain (1918-2009).

1 Rappels : espérance et variance (cas discret)

1.1 Espérance et la formule de transfert

DÉFINITION (RAPPEL)

espérance

Soit X une variable aléatoire discrète infinie. On note $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. On dit que X admet une **espérance** si la série de terme général $x_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est absolument convergente. Alors on définit l'espérance de X par

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(X = x_k).$$

 **Attention.** Il ne faut pas oublier de vérifier la convergence absolue. Elle est nécessaire pour justifier que l'espérance est bien définie et ne dépend pas du choix de l'indexation $X(\Omega)$.

Exercice 1



♦ On effectue une infinité de tirages successifs, mutuellement indépendants, dans une urne contenant initialement une boule rouge et une boule bleue. À chaque tirage, on note la couleur de la boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule bleue. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule bleue (respectivement rouge). Pour que ces deux variables aléatoires soient bien définies, on admet que presque sûrement une boule bleue ou rouge finit par apparaître.

p. 15

1. a) Donner la loi de X .
b) X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.
2. Reprendre la question 1 avec la variable aléatoire Y .

PROPOSITION

existence par domination

Soient X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé.

Si $\left| \begin{array}{l} \rightarrow 0 \leq |X| \leq Y. \\ \rightarrow Y \text{ admet une espérance.} \end{array} \right.$

Alors X admet une espérance et $|\mathbf{E}(X)| \leq \mathbf{E}(Y)$.

 **Attention.** Il ne faut pas confondre l'énoncé précédent avec la propriété de croissance de l'espérance dont on rappelle l'énoncé :

Si $\left| \begin{array}{l} \rightarrow X \text{ et } Y \text{ admettent une espérance,} \\ \rightarrow X \leq Y, \end{array} \right.$ **alors** $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$.

THÉORÈME

formule de transfert

Soient X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et g une application définie sur $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{I}\}$. Les énoncés suivants sont équivalents.

- i) La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance.
- ii) La série de terme général $g(x_k) \mathbf{P}([X = x_k])$ est absolument convergente.

Dans ce cas
$$\mathbf{E}(g(X)) = \sum_{k \in \mathbb{I}} g(x_k) \mathbf{P}([X = x_k]).$$

Exemple. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ telle que $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \lambda k.$$

Précisons que la condition $\sum_{k=1}^n \mathbf{P}([X = k]) = 1$, impose $\lambda = 2/(n(n+1))$.

Comme X ne peut pas prendre la valeur 0, on peut définir $Z = X + \frac{1}{X}$. Avec le théorème de transfert,

$$\mathbf{E}\left(X + \frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{k}\right) \mathbf{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([X = k]) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbf{P}([X = k]).$$

On montre que $\sum_{k=1}^n k \mathbf{P}([X = k]) = \mathbf{E}(X) = \frac{2n+1}{3}$. Par ailleurs

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \mathbf{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \lambda k = \sum_{k=1}^n \lambda = \lambda n = \frac{2}{n+1}$$

Finalement,

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{2n+1}{3} + \frac{2}{n+1} = \frac{2n^2 + 3n + 7}{3(n+1)}.$$

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

Source oraux HEC-E 2009

1. Établir l'existence de $\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.
2. Montrer que $\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) \leq \min\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$.

p. 15

Remarque. La formule de transfert permet de prouver une version faible de la linéarité de l'espérance. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et X , une variable aléatoire admettant une espérance $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$.

Preuve. Si φ est une fonction affine, $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto at + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{E}(aX + b) = \sum_{i=1}^m (ax_i + b) \mathbf{P}([X = x_i]) = a \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{P}([X = x_i]) + \sum_{i=1}^m \mathbf{P}([X = x_i]) = a\mathbf{E}(X) + b$$

Exercice 3



- ✧ Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et X et $1 - X$ ont même loi. Que dire de l'espérance de X ?

p. 16

1.2 Moments et variance

Pour tout entier naturel s , le moment d'ordre s d'une variable aléatoire X est le nombre $m_s(X)$ défini par :

$$m_s(X) = \mathbf{E}(X^s).$$

En particulier pour $s = 1$, on retrouve l'espérance $m_1(X) = \mathbf{E}(X)$.

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, et sous réserve de convergence absolue, la formule de transfert donne :

$$m_s(X) = \sum_{k \in I} x_k^s \mathbf{P}(X = x_k).$$

Remarque. On montre que si X a un moment d'ordre r alors, X admet un moment d'ordre s pour tout entier $s \leq r$.

Exercice 4



1. Prouver la remarque précédente.
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, construire une variable aléatoire admettant un moment d'ordre r mais pas de moment d'ordre $r + 1$.

p. 16

DÉFINITION

variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- On appelle **variance** d'une variable aléatoire X , la quantité $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right)$.
- On appelle **écart-type** de X , la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Remarques.

- C'est l'existence d'un moment d'ordre 2 qui permet de justifier que la variance est bien définie.
- La quantité $\sigma(X)$ est bien définie car $(X - \mathbf{E}(X))^2 \geq 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbf{V}(X) \geq 0$.

L'écart-type permet de quantifier les écarts par rapport à la moyenne. Un écart-type fort traduit un « grand éloignement » des valeurs de X par rapport à sa moyenne.

PROPOSITION

propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

- $\mathbf{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une application presque sûrement constante.
- Pour tous réels a, b ,

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X) \quad ; \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Vocabulaire. Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $\mathbf{E}(X) = 0$. Elle est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$. Soit X une variable aléatoire. La variable aléatoire $Y = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée, réduite.

En pratique, on calcule la variance avec :

THÉORÈME

formule de KOENIG-HUYGENS

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Exercice 5



◆ Prouver les deux derniers énoncés.

p. 16

1.3 Cas les lois usuelles discrètes

On dit que X est une **variable aléatoire certaine**, ou **presque sûrement constante** s'il existe un réel c tel que $P(X = c) = 1$. Alors,

$$E(X) = c \quad \text{et} \quad V(X) = 0.$$

PROPOSITION

espérance et variance des lois usuelles

Soit X , une variable aléatoire. Soient $p \in]0; 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.
- Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$, alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Exercice 6



◆ Preuve via les fonctions génératrices

Soient $n \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et à valeurs dans $[0; n]$. On définit alors la fonction génératrice G_X de X par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k) t^k.$$

p. 16

1. Justifier que $E(X) = G'_X(1)$.
2. Trouver une relation entre $V(X)$, $G''_X(1)$ et $G'_X(1)$.
3. Retrouver les résultats énoncés à la proposition précédente pour la loi binomiale.

PROPOSITION

espérance et variance, cas discret dénombrable

Soit $p \in]0; 1[$. Posons $q = 1 - p$.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance avec

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance avec

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

Exercice 7



Les questions sont indépendantes.

1. Prouver les énoncés de la proposition précédente.
2. Soit X une v.a suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $E(1/X)$.
On pourra admettre que pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

p. 17

2

Espérance conditionnelle

Rappelons qu'un **système complet d'événements** d'un univers Ω est une famille finie ou dénombrable d'événements $(A_n)_{n \in I}$ telle que

$$(\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in I} A_n = \Omega.$$

DÉFINITION

espérance conditionnelle, cas discret

- Soient X , une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et A un événement de probabilité non nulle. L'**espérance de X sachant A** est défini, sous réserve d'existence, comme l'espérance de X pour la probabilité $\mathbf{P}_A$. Elle est notée $E(X|A)$.
- Dans le cas où X est une variable discrète, si la série $\sum x \mathbf{P}_A([X = x])$ converge absolument alors X admet une espérance sachant A et

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}_A([X = x]).$$

Exemple. Soit X , une variable aléatoire renvoyant la valeur d'un dé équilibré. Soit $A = \{1, 3, 5\}$.

$$\begin{aligned} E(X|A) &= \sum_{i=1}^6 i \cdot \mathbf{P}_A([X = i]) \\ &= 1 \cdot \underbrace{\mathbf{P}_A([X = 1])}_{=\frac{1}{3}} + 2 \cdot \underbrace{\mathbf{P}_A([X = 2])}_{=0} + 3 \cdot \underbrace{\mathbf{P}_A([X = 3])}_{=\frac{1}{3}} + 4 \cdot \underbrace{\mathbf{P}_A([X = 4])}_{=0} + 5 \cdot \underbrace{\mathbf{P}_A([X = 5])}_{=\frac{1}{3}} + 6 \cdot \underbrace{\mathbf{P}_A([X = 6])}_{=0} = 3. \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$E(X|\bar{A}) = 4.$$

Remarque. Comme le montre l'exemple suivant, l'espérance conditionnelle permet d'éviter certains biais statistiques.

Exercice 8



- ◆ Dans la classe d'ECG, on compte qu'en moyenne les étudiants ont 1.7 frères et sœurs. Ce qui donne 2.7 enfants par femme alors que le nombre d'enfants par femme n'est que de 1.8 dans la population française. Donc les enfants de familles nombreuses font plus facilement des études. Commenter cette affirmation en vous appuyant sur la notion d'espérance conditionnelle.

p. 18

Remarque. Si X est une variable aléatoire finie, alors la convergence absolue est automatique. Ainsi, pour tout événement A possible ($\mathbf{P}(A) \neq 0$), X admet une espérance conditionnelle sachant A .

Exercice 9



- ◆ Soient X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ avec $X(\Omega) = \{x_k | k \in \mathbb{N}\}$ et A un événement de probabilité non nulle. Justifier que si $E(X)$ existe, alors $E(X|A)$ existe aussi et

$$|E(X|A)| \leq \frac{1}{\mathbf{P}(A)} E(|X|).$$

p. 18

THÉORÈME

formule de l'espérance totale

Soit X , une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- Si**
- $(A_n)_{n \in I}$ est un système complet d'événements possibles.
 - Pour tout $n \in I$, $\mathbf{E}(X | A_n)$ existe.
 - La série $\sum_n \mathbf{P}(A_n) \mathbf{E}(|X| | A_n)$ converge absolument.

Alors X admet une espérance et

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n) \mathbf{E}(X | A_n).$$

Preuve. Cas fini. On suppose que $X(\Omega)$ et I sont deux ensembles finis.

$$\begin{aligned} \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n) \mathbf{E}(X | A_n) &= \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n) \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}_{A_n}([X = x]) && \text{définition de l'espérance conditionnelle} \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{n \in I} x \mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}_{A_n}([X = x]) && \text{inversion de l'ordre de sommation} \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \left(\sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}_{A_n}([X = x]) \right) && x \text{ ne dépend pas de } n \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}([X = x]) && \text{formule des probabilités totales} \\ \sum_{n \in I} \mathbf{P}(A_n) \mathbf{E}(X | A_n) &= \mathbf{E}(X) && \text{définition de l'espérance de } X. \end{aligned}$$

Dans le cas général, la convergence absolue de la série $\sum_n \mathbf{P}(A_n) \mathbf{E}(X | A_n)$ justifie les différentes convergences et l'interversion des sommes (c'est le théorème de Fubini).

Exemples.

- Reprenons l'exemple du dé. Les événements $A, \bar{A}$ forment un système complet d'événements et on a bien

$$\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{E}(X | A) + \mathbf{P}(\bar{A}) \cdot \mathbf{E}(X | \bar{A}) = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 = \frac{7}{2} = \mathbf{E}(X).$$

- Deux usines fabriquent des ampoules. La première usine, qui assure 75% de la production, fournit des ampoules dont la durée de vie est de 2000 heures. La seconde usine a des ampoules dont la durée de vie moyenne est de 3000 heures. Si X est la durée de vie d'une ampoule, la formule de l'espérance donne

$$\mathbf{E}(X) = 0,75 \times 2000 + 0,25 \times 3000 = 2250 \text{ (heures)}.$$

Remarques.

- La réciproque du théorème est vraie mais moins utile.
- On peut voir le théorème de transfert comme résultant de la formule de l'espérance totale pour le système complet d'événements formés par les événements $[\varphi(X) = y_j]$.

Exercice 10



- ◆ Lors d'une ponte, un esturgeon pond des œufs suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 500\,000$. Chaque œuf a une probabilité $p = 1/100\,000$ d'être un adulte. On suppose que les événements "l'œuf devient adulte" est indépendant des autres œufs". Combien, en moyenne, une ponte donne d'adulte esturgeon?

p. 18



Attention. Il faut bien noter les valeurs absolues dans la somme $\sum_n \mathbf{P}(A_n) \mathbf{E}(|X| | A_n)$ même s'il arrive souvent que la variable X soit positive. L'exercice 37 illustre l'importance de cette condition.

Exercice 11



◆◆ Une urne contient des boules blanches (dans une proportion $p \in]0; 1[$) et des boules noires. Dans un premier temps, on tire avec remise dans l'urne jusqu'à obtenir pour la première fois une boule blanche et on note N le nombre de tirages nécessaires. Dans un second temps, si la première boule blanche est apparue à la n -ième pioche, alors on retire maintenant n fois dans l'urne avec remise et l'on note X le nombre de boules blanches obtenues lors de ces n nouveaux lancers.

p. 18

1. Donner la loi de N .
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X | [N = n])$.
3. En déduire l'existence et la valeurs de $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 12. ◆◆ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, n]$ et N une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p . On suppose que la variable N est indépendante des variables $(X_k)_{k \geq 1}$. De plus, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \prod_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad Y = \prod_{k=1}^N X_k.$$

1. Étudier l'existence de $\mathbf{E}(Y)$ et la calculer lorsqu'elle existe.
2. Simulation en prenant $p = \frac{3}{4}$ et $n = 4$ puis $n = 9$.



Exercices



Révisions et compléments

Exercice 13. ♦♦ D'après Oraux HEC

Soient $p \in]0; 1[$ et la fonction Python X ci-contre.

1. En s'aidant d'un lancer d'une pièce dont la probabilité d'obtenir "face" est p , interpréter ce que simule la fonction X?
2. Soit X la variable aléatoire simulée par la fonction ci-contre.
 - a) Quelle est la loi de X?
 - b) Quelle est l'espérance de X si elle existe?

Editeur

```
import numpy.random as rd

def X(p) :
    k=1
    y=0
    a=rd.rand()
    while a>p :
        y=y+1
        k=k+1
        a=rd.rand()
    while a<p :
        k=k+1
        a=rd.rand()
    return k-1-y
```

on p. 19

Exercice 14. ♦

On tire avec remise une boule d'une urne contenant n boules numérotées.

1. On note T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois deux boules différentes ont été tirées. Déterminer l'espérance de T.
2. Interpréter la variable aléatoire V_n dont la fonction Python suivante calcule une simulation.

Editeur

```
import numpy.random as rd
def V(n) :
    A=[]
    compteur=0
    while len(A)<n :
        u=rd.randint(1,n+1)
        if not(u in A) :
            A.append(u)
            compteur=compteur+1
    return compteur
```

>> Solution p. 19

Exercice 15. ♦ Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$. On note $Y = \frac{1}{X+1}$. Calculer l'espérance de Y.

>> Solution p. 19

Exercice 16. ♦ Soit X une variable aléatoire discrète telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad 4\mathbf{P}(X = k+2) = 9\mathbf{P}(X = k+1) - 2\mathbf{P}(X = k).$$

1. Donner la loi de X.
2. Justifier que X admet une espérance et une variance et les calculer.
On pourra remarquer que la variable $Y = X + 1$ suit une loi usuelle.

>> Solution p. 19

Exercice 17. ♦ Rang du premier Pile-Face

Considérons une infinité de lancers mutuellement indépendants d'une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui donne le rang d'apparition du premier Pile-Face (dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k). Si une telle succession ne se produit pas, on pose $X = 0$. Notons A_i l'événement : « Un pile apparaît au i -ème lancer ».

1. En utilisant le système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$, prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$,

$$\mathbf{P}(X = k+1) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(X = k) + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

2. En déduire $\mathbf{P}(X = k)$ pour tout $k \geq 2$.

3. Préciser $\mathbf{P}([X \geq 2])$ puis $\mathbf{P}([X = 0])$.
4. Justifier que X admet une espérance. La calculer.

>> Solution p. 20

Exercice 18. ♦ Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

1. Soit $Y = (-1)^X X$. Est-ce que Y possède une espérance? Si oui, la calculer.
 2. Soit Z définie par :
 - Si X prend une valeur paire, alors Z prend la valeur $\frac{X}{2}$
 - Si X prend une valeur impaire, alors Z prend la valeur 0.
- a) Quelle relation a-t-on entre X , Y et Z ?
- b) Est-ce que Z possède une espérance? Si oui, la calculer.

>> Solution p. 21

Exercice 19. ♦ Soit X , une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et admettant une espérance.

1. Justifier que $1/X$ admet une espérance et exprimer $\mathbf{E}(1/X)$ en fonction des réels x_k et $p_k = \mathbf{P}([X = x_k])$.
 2. En déduire que $\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(1/X) \geq 1$.
- Indication. On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$:*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right).$$

>> Solution p. 21

Exercice 20. ♦♦ Inégalité de Jensen

Soit X une variable aléatoire finie et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Démontrer que $\varphi(\mathbf{E}(X)) \leq \mathbf{E}(\varphi(X))$.

>> Solution p. 21

Exercice 21. ♦♦♦ Un peu de dénombrement

On dispose d'une urne remplie de N boules numérotées de 1 à N . On effectue k tirages sans remise avec $k \leq N$. Soit X le plus petit numéro obtenu.

1. Donner la loi de X . En déduire l'égalité : $\sum_{j=0}^m \binom{n+j}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{N-k+1} \mathbf{P}(X \geq i)$.
3. En déduire que $\mathbf{E}(X) = \frac{N+1}{k+1}$.

>> Solution p. 21

Exercice 22. Nouvelle expression de l'espérance

♦♦♦ Première version : sans indication

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose dans cette question que X admet une espérance.
Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X > k)$ converge, et que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k) \quad (\text{E}).$$

2. Réciproquement, on suppose dans cette question que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance, et que la relation (E) est valable.
3. Adapter le raisonnement pour montrer que si X admet un moment d'ordre 2

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) \mathbf{P}(X > k).$$

♦ Seconde version détaillée

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n k \mathbf{P}(X = k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}(X > k) \right) - n \mathbf{P}(X > n)$.
2. On suppose dans cette question que X admet une espérance.
 - a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \mathbf{P}(X > n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbf{P}(X = k)$.
 - b) Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X > k)$ converge, et que $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > k)$ (E).
3. Réciproquement, on suppose dans cette question que la série $\sum_{k \geq 0} \mathbf{P}(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance, et que la relation (E) est valable.
4. Adapter le raisonnement pour montrer que si X admet un moment d'ordre 2

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1) \mathbf{P}(X > k).$$

>> Solution p. 22

Exercice 23. ♦♦ Soient X une variable aléatoire réelle et a, b deux réels. On note $m = \mathbf{E}(X)$.

1. Montrer que $\mathbf{E}((X-a)(b-X)) = (m-a)(b-m) - \mathbf{V}(X)$.
2. On suppose $a < b$ et $X(\Omega) \subset [a, b]$.
 - a) Montrer que $(m-a)(b-m) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$. En déduire $\mathbf{V}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.
 - b) Ce majorant peut-il être amélioré?

>> Solution p. 23

Exercice 24. ♦♦♦ Est-ce que les moments déterminent la loi d'une variable finie?

1. Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui prend les valeurs 0, 1 et 2 avec les probabilités p_0, p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $\mathbf{E}(Y) = 1$ et $\mathbf{E}(Y^2) = 5/3$. Calculer p_0, p_1 et p_2 .
2. Soit $x_0, x_1, \dots, x_n, (n+1)$ réels distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[x]$, associe le $(n+1)$ -uplet $(Q(x_0), Q(x_1), \dots, Q(x_n))$.
 - a) Montrer que φ est une application linéaire bijective.
 - b) Déterminer la matrice A de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
 - c) Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_n$. On suppose que l'on connaît les valeurs de $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2), \dots, \mathbf{E}(X^n)$. Peut-on en déduire la loi de X ?

>> Solution p. 24

Exercice 25. ♦♦♦

D'après oral HEC

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire réelle discrète X admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(X) = \alpha \\ \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(X^4) = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que α est nécessairement compris entre -1 et $+1$.
2. Trouver la loi de X .

>> Solution p. 24

Exercice 26. ♦♦♦ Kurtosis

On définit, sous réserve d'existence, le moment centré d'ordre n d'une variable aléatoire réelle X par $\mu_n(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^n]$. Lorsque $\mu_2(X)$ et $\mu_4(X)$ existent avec $\mu_2(X) \neq 0$, on définit de plus le kurtosis de X par

$$K(X) = \frac{\mu_4(X)}{(\mu_2(X))^2} - 3.$$

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}$. Justifier que si X possède un kurtosis, alors $\alpha X + \beta$ en possède un aussi et que $K(\alpha X + \beta) = K(X)$.
2. Montrer que toute variable aléatoire X possédant un kurtosis vérifie $K(X) \geq -2$.
3. *Calculatoire.* Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Montrer que X possède un kurtosis et le calculer.

On pourra admettre que pour tous $p \in \mathbb{N}, x \in]0; 1[$, $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$.

» Solution p. 25

Exercice 27. ♦♦  Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$. La valeur de X s'affiche sur un écran. Mais ce dernier est défectueux, la valeur 0 ne s'affiche pas. Si X prend la valeur 0, alors l'écran affiche une valeur entière prise au hasard dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, sinon elle affiche la bonne valeur de X . Notons Y_n , la variable aléatoire égale à la valeur affichée par l'écran.

1. a) Proposer un programme Python qui prend en arguments n, p et simule la variable Y_n .
b) En déduire une approximation de $E(Y_{10})$ avec $p = 1/2$.
2. Exprimer $E(Y_n)$ en fonction de n et p .



» Solution p. 25

Exercice 28. ♦ Inégalité de Hölder

1. Soient $p, q \in \mathbb{R}_*^+$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
a) Soient $a \in \mathbb{R}_*^+$. On pose $f : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{x^q}{q} + \frac{a^p}{p} - ax$. Vérifier que f admet un minimum atteint en $a^{1/(q-1)}$. Préciser la valeur de ce minimum.
b) En déduire l'inégalité : $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires positives telles que $E(X^p)$ et $E(Y^q)$ existent.
a) Justifier que XY admet une espérance.
b) En considérant $\tilde{X} = X/E(X^p)^{1/p}$ et $\tilde{Y} = Y/E(Y^q)^{1/q}$, justifier que : $|E(XY)| \leq E(X^p)^{1/p} E(Y^q)^{1/q}$.
3.  Application
Soit Z une variable aléatoire discrète positive admettant un moment d'ordre n . Montrer que, pour tous réels r, s tels que $0 < r < s \leq n$, on a

$$E(Z^r)^{1/r} \leq E(Z^s)^{1/s}.$$

» Solution p. 26

Exercice 29. ♦♦♦ Exemple d'urne de Polya

On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires. On effectue n tirages avec remise dans cette urne en ajoutant après chaque tirage une boule de la couleur de la boule que l'on vient de tirer. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1. Simulation
a) Proposer un programme Python qui prend en argument (n, a, b) et renvoie une simulation de X_n .
b) Comment obtenir une approximation de $E(X_{20})$ pour $a = b = 5$ à l'aide de Python?

Dans la suite, pour tout x réel et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions polynomiales $x^{[0]} = 1$ et $x^{[k]} = \prod_{i=0}^{k-1} (x + i)$.

2. a) Justifier que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P([X_n = k]) = \binom{n}{k} \frac{a^{[k]} b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$,

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{[k]} b^{[n-k]}.$$

- b) Justifier que l'égalité précédente reste valable pour $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Conclure en montrant que X_n admet une espérance avec $E(X_n) = n \frac{a}{a+b}$.

» Solution p. ??

Espérance conditionnelle

Exercice 30. ♦ Vrai ou faux?

Pour tout A , un événement avec $P(A) \notin \{0; 1\}$ et X, Y , deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance.

1. $E(X|\Omega) = E(X)$.
2. $E(X) = E(X|A) + E(X|\bar{A})$.
3. $E(X) = P(A) \cdot E(X|A) + P(\bar{A}) \cdot E(X|\bar{A})$.
4. Si, pour tout $x \in X(\Omega)$, les événements $[X = x]$ sont indépendants de A , $E(X|A) = E(X)$.

5. Si $X \leq Y$ alors $E(X|A) \leq E(Y|A)$.
6. Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $x \in X(\Omega)$, $E(Y | X = x) = E(Y)$.

» Solution p. 26

Exercice 31. ♦ Alice et Bob font une partie de Tennis de Table. Alice commence et renvoie la balle avec la même probabilité p_A . Bob fait de même avec probabilité p_B . On suppose les coups mutuellement indépendants et on note X , la variable aléatoire correspondant au nombre de coups valides en fonctions de p_A et p_B .

1. Donner la loi de X . Vérifier que l'espérance existe et la calculer.
2. Préciser $E(X | X \geq 1)$.

» Solution p. 27

Exercice 32. ♦ Une urne contient initialement N boules numérotées de 1 à N . On effectue des tirages dans cette urne suivant le protocole suivant : si la boule numéro i vient d'être tirée alors on la remet dans l'urne et on enlève toutes les boules portant un numéro strictement supérieur à i .

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue lors du k -ième tirage.

1. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [1, N]$, Préciser $E(X_{k+1} | X_k = i)$.
2. Donner une relation entre $E(X_{k+1})$ et $E(X_k)$.
3. En déduire $E(X_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

» Solution p. 27

Exercice 33. ♦♦ Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance et A , un événement.

1. Montrer que $E(X | A) = \frac{E(X \cdot \mathbf{1}_A)}{P(A)}$.
2. En déduire que $E(X | A) \leq \frac{E(|X|)}{P(A)}$.

» Solution p. 28

Exercice 34.

Source HEC 2014

Soient $n_1 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$: X_1 suit la loi binomiale de paramètres (n_1, p) et X_2 suit la loi binomiale de paramètres (n_2, p) .

1. Rappeler la loi de $X_1 + X_2$.
2. Soit $n \in (X_1 + X_2)(\Omega)$. Préciser $P_{[X_1 + X_2 = n]}([X_1 = k])$.
3. Exprimer à l'aide d'une somme $E(X_1 | X_1 + X_2 = n)$.

» Solution p. 28

Exercice 35. ♦♦ Un sachet contient initialement n bonbons Scoubidou. À chaque étape, on tire au hasard deux extrémités de Scoubidou dans le sachet.

- Si ces deux extrémités appartiennent à un même Scoubidou, on les noue pour fabriquer un rond que l'on sort du sachet.
 - Si ces deux extrémités appartiennent à deux Scoubidou différents, on les noue pour fabriquer un seul Scoubidou que l'on remet dans le sachet.
1. Justifier que le processus s'arrête avec un sachet vide à la fin.
 2. Soit X_n le nombre de ronds obtenus après avoir complètement vider l'assiette. Quelles sont les valeurs possibles par X_n ? Préciser $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
 3. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$. En déduire que $E(X_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln n$.

» Solution p. 28

Exercice 36. ♦♦ Formule de la variance totale

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note, pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) \neq 0$, $V(X | A)$ la variance de X relativement à la probabilité P_A .

1. Soit $(A_1, \dots, A_n)$, un système complet d'événements, montrer que

$$V(X) = \sum_{k=1}^n \left(V(X | A_k) + E(X | A_k)^2 \right) P(A_k) - E(X)^2.$$

2. Application.

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. On lance une pièce équilibrée et on tire avec remise six boules de l'urne de manière indépendante. Si la pièce tombe sur pile alors X est le nombre de boules blanches tirées, sinon X est le nombre de boules noires. Calculer l'espérance et la variance de X .

>> Solution p. 29

Exercice 37. ♦♦ Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la suite définie par $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

- Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries $\sum a_n$ et $\sum na_n$.
- Soit X , une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^*$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad \mathbf{P}([X = n]) = \alpha a_{|n|} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Déterminer α .

- Que peut-on dire de la famille d'événements (A_n) avec $A_n = [X = n] \cup [X = -n]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?
 - Vérifier que $\mathbf{E}(X | A_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser sa valeur.
 - Montrer que la série de terme général $\mathbf{E}(X | A_n) \mathbf{P}(A_n)$ est absolument convergente et calculer sa somme.
- Est-ce que la variable X admet-elle une espérance? Commenter ce résultat en comparant à la formule de l'espérance totale.

>> Solution p. 29

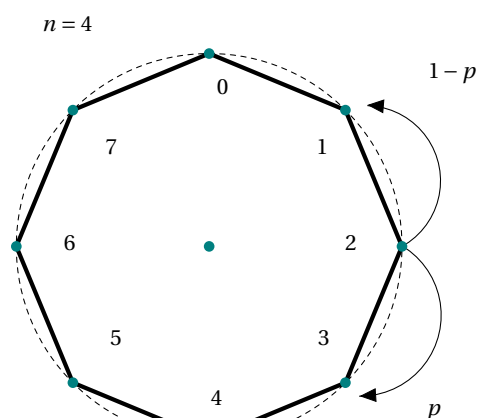
Exercice 38. ♦ Mobile sur un polygone

On place $2n$ points numérotés de 0 à $2n-1$ sur un cercle. Les points sont répartis uniformément.

Un mobile part initialement de 0 et à chaque étape, il avance d'une unité avec une probabilité p et recule avec probabilité $1-p$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, le nombre d'étapes

On note :

- Pour tout $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$, on note X_k la position du mobile à la k -ième étape.
- T_p la variable aléatoire égale au temps de retour à l'origine. Si le mobile ne retourne pas à l'origine au bout des N étapes, on pose $T_p(\omega) = 0$.



- Écrire un programme qui prend en argument p , simule les 100 premières étapes du mobile et renvoie la position finale du mobile. La commande `X%2n` renvoie le reste de la division euclidienne par $2n$.
- Modifier le programme pour afficher le temps T_p de premier retour à l'origine 0.
- En déduire une approximation de l'espérance de T .
Pour cela, on produira $m = 2000$ réalisations de la variable T . La moyenne arithmétique de ces m évaluations donne une approximation de l'espérance. C'est la loi des grands nombres.
- Vérifier numériquement et expliquer l'égalité $\mathbf{E}(T_p) = \mathbf{E}(T_{1-p})$?



>> Solution p. 30

Exercice 39. Moments de la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$

- L'objectif est de cette question est de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme L_n tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \quad \left(Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow \mathbf{E}(Y^n) = L_n(\lambda) \right) \quad (*)$$

- Préciser L_1 et L_2 .
- On définit les polynômes $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ par :

$$Q_0 = 1 \quad \text{et pour tout } i \in \mathbb{N}^* \quad Q_i(x) = x(x-1) \cdots (x-i+1).$$

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_{0,n}, \alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{n,n}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} Q_i(x)$.

- Soient $i \in \mathbb{N}$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Préciser $\mathbf{E}(Q_i(Y))$.

- d) Vérifier que le polynôme défini par $L_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} x^i$ est solution du problème (•).

2. Relation de récurrence.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que si on pose pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $\psi(\lambda) = e^\lambda L_n(\lambda)$ alors pour $\psi(\lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} i^n \frac{\lambda^i}{i!}$.
- b) En admettant que l'on puisse dériver ψ comme une somme finie, montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+, \quad L_{n+1}(\lambda) = \lambda L_n'(\lambda) + \lambda L_n(\lambda).$$

Justifier que la relation précédente est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

- c) En déduire l'égalité : $L_{n+1}(1) = \sum_{i=0}^n i \alpha_{i,n} + L_n(1)$.

3. Moments de la loi $\mathcal{P}(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'endomorphisme : $\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] & \rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ P & \mapsto P(x+1) - P(x). \end{cases}$

- a) Expliciter $\Delta(x^n)$. Vérifier ensuite que : $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \Delta(Q_i) = i Q_{i-1}$.
- b) Justifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^i = \sum_{i=1}^n i \alpha_{i,n} Q_{i-1}(x).$$

En déduire que si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$, alors $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i) = \sum_{i=0}^n i \alpha_{i,n}$.

- c) Conclure en montrant que

$$\mathbf{E}(Y^{n+1}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{E}(Y^i).$$

- d) Proposer un programme python qui prend en argument un entier n et renvoie la matrice ligne

$$[1 \quad \mathbf{E}(Y) \quad \mathbf{E}(Y^2) \quad \dots \quad \mathbf{E}(Y^n)].$$

On pourra utiliser la commande `sp.binom(i,j)` de la bibliothèque `scipy.special` pour le coefficient $\binom{i}{j}$.

» Solution p. 30

Exercice 40. ♦♦ Variables de Bernoulli et fonctions indicatrices

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un espace probabilisé.

1. Soit A , un événements. Rappeler la loi de $\mathbf{1}_A$.
2. Montrer pour tous événements A et B les égalités :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cap B} &= \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B, & \mathbf{1}_{\bar{A}} &= 1 - \mathbf{1}_A \\ \mathbf{1}_{A \setminus B} &= \mathbf{1}_A \times (\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_B), & \mathbf{1}_{A \cup B} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B. \end{aligned}$$

3. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = 1 - \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^n (\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_{A_k})\right).$$

Exercice 41. ♦ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant des moments d'ordre 2. Montrer que $X + Y$ admet un écart type et

$$\sigma(X + Y) \leq \sigma(X) + \sigma(Y).$$

Généraliser.

Table des matières

5	Espérance et espérance conditionnelle	1
1	Rappels : espérance et variance (cas discret)	1
1.1	Espérance et la formule de transfert	1
1.2	Moments et variance	3
1.3	Cas les lois usuelles discrètes	4
2	Espérance conditionnelle	5