DS 1 - sujet A

THÈMES : RÉVISIONS ALGÈBRE, ANALYSE ECG1
ET VALEURS/VECTEURS PROPRES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème A
Étude d'une suite de polynômes

Désignant par n un entier naturel, on se propose d'étudier l'ensemble des polynômes à coefficients réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{P}(x) + \mathrm{P}(x+1) = \frac{x^n}{n!} \qquad (\star)_n$$

Pour cela, on considère l'application Φ qui, à tout élément Q de $\mathbb{R}[x]$, associe le polynôme $\Phi(\mathrm{Q})$ défini par :

$$\Phi(\mathrm{Q})(x) = \mathrm{Q}(x) + \mathrm{Q}(x+1).$$

- *Étude de l'endomorphisme* Φ

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.

2. **a)** Soit $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker}\Phi$. Pour tout entier m, que dire du signe de $\mathrm{P}(m)\mathrm{P}(m+1)$? En déduire que P est le polynôme nul.
b) Qu'en déduire sur l'injectivité de Φ ?

3. Notant p un entier naturel, on désigne par Φ_p la restriction de Φ à $\mathbb{R}_p[x]$.
a) Montrer que Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$.
b) En déduire que Φ_p, puis Φ sont des isomorphismes respectivement de $\mathbb{R}_p[x]$ et $\mathbb{R}[x]$.

4. On note $\mathscr{B}_p = \left(1, x, x^2, \dots, x^p\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_p[x]$.
a) Vérifier que la matrice de Φ_p dans $\mathscr{B}_p$ est une matrice triangulaire supérieure dont on précisera les termes diagonaux.
b) En déduire le spectre de Φ_p, puis celui de Φ.

- *Étude de la famille de polynômes* $(\mathrm{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un polynôme unique de $\mathbb{R}[x]$ vérifiant la relation $(\star)_n$.
On le notera E_n. Justifier que E_n est de degré n.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que le polynôme E'_{n+1} vérifie la relation $(\star)_n$. En déduire que ${\mathrm{E}_{n+1}}' = \mathrm{E}_n$.

7. **a)** Vérifier que ${\mathrm{E}_n}'(0) = \mathrm{E}_{n-1}(0)$, puis ${\mathrm{E}_n}''(0) = \mathrm{E}_{n-2}(0)$. Généraliser.
b) Justifier que

$$\mathrm{E}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}_{n-k}(0)\,\frac{x^k}{k!}.$$

8. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2\,|\mathrm{E}_n(0)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\mathrm{E}_{n-k}(0)|}{k!} \quad \text{puis} \quad |\mathrm{E}_n(0)| \leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2}.$$

- *Calcul des polynômes* E_n

9. Montrer que

$$\mathrm{E}_n(x) = (-1)^n \mathrm{E}_n(1-x)$$

10. En déduire, que pour n pair strictement positif, la valeur de $\mathrm{E}_n(0)$ et $\mathrm{E}_n(1)$, ainsi que, pour n impair, la valeur de $\mathrm{E}_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

11. Déterminer E_0, E_1 et E_2.

12. Plus généralement, expliquer comment calculer de proche en proche les polynômes E_n.

Problème B

Étude d'une série de terme général sous forme intégrale

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(nx)(\cos x)^n \,\mathrm{d}x$.

Le but du problème est l'étude de la nature de la série de terme général u_n et le calcul de sa somme.

Partie A

13. **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

b) En déduire la valeur de u_1.

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \begin{cases} \frac{1-(1-t)^n}{t} & \text{si} \quad t \in \mathbb{R}^* \\ n & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\quad \mathrm{I}_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{I}_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

16. **a)** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \mathrm{I}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

17. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2px)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p}$$

18. En admettant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(2px) = 2^n \sin(nx)(\cos x)^n$$

conclure que $\qquad u_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} \mathrm{I}_n$.

Partie B

19. Soit $x \in [0;1[$. Soit φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \qquad \varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t}.$$

a) Justifier que pour tous $x \in [0;1[$, $t \in [0;x]$, $\qquad 0 \leqslant \varphi_x(t) \leqslant x$.

b) Trouver un réel a tel que pour tous $x \in [0;1[$, $t \in [0;x]$, on a $\dfrac{\varphi_x(t)}{1-t} = \dfrac{x-1}{(1-t)^2} + \dfrac{a}{1-t}$.

20. Soit h la fonction définie sur $[0;1[$ par : $\qquad h(x) = -\ln(1-x)$.

a) Expliciter les dérivées successives de h.

b) Démontrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;1[$,

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \mathrm{R}_n(x) \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}_n(x) = \int_0^x \frac{\left(\varphi_x(t)\right)^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

21. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0;1[$, $\quad 0 \leqslant \mathrm{R}_n(x) \leqslant -x^n \ln(1-x)$.

22. Montrer que pour tout $x \in [0;1[$, la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ converge.

23. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall x \in [0;1[, \qquad (1-x)\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k x^k = h(x) - \mathrm{R}_n(x) - \mathrm{I}_n x^{n+1}.$$

b) En déduire que, pour tout $x \in [0;1[$, la série de terme général $\mathrm{I}_k x^k$ converge et que

$$\forall x \in [0;1[, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{I}_k x^k = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

24. Conclure sur la convergence de la série de terme général u_k et calculer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Problème C

Valeurs propres d'une matrice en croix

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 3.

Partie A - étude d'une exemple

On suppose dans cette partie que $n = 3$ et on s'intéresse à la matrice M_3 suivante :

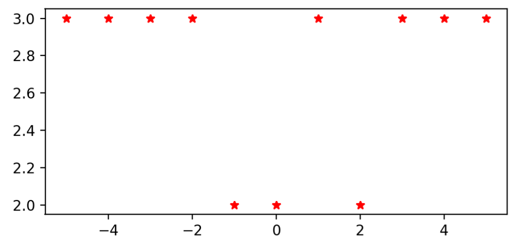
$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

25. À l'aide du code suivant, donner le spectre de M_3.

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

M=np.array([[0,1,0],[1,1,1],[0,1,0]])
R=np.zeros(11)
L=np.arange(-5,6)
for i in range(11):
    R[i]=al.matrix_rank(M-L[i]*np.eye(3))
plt.plot(L,R,'r*')
plt.show()
```



26. Pour chacune des valeurs propres, donner une base du sous-espace propre associé.

Partie B - Généralisation

On revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 3 et on considère M_n la matrice suivante :

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Plus formellement, $M_n = \left[m_{i,j}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec : $\quad m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=2 \text{ ou si } j=2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

De plus, on note $\mathscr{C} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

27. Préciser le rang de M_n. En déduire une première valeur propre de M_n.

28. On pose $\varepsilon_1 = {}^t[1,1,\ldots,1] = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Montrer que (ε_1, e_2) forme une base de l'image de M_n.

29. Montrer qu'un vecteur propre de M_n associé à une valeur propre non nulle est nécessairement dans l'image de M_n.

30. Soient α et λ deux réels.
Montrer que le vecteur $\varepsilon_1 + \alpha e_2$ est vecteur propre de M_n associé à la valeur propre λ si et seulement si :

$$\lambda = \alpha + 1 \quad \text{et} \quad \lambda^2 - \lambda - n + 1 = 0.$$

31. **a)** Discuter, suivant les valeurs de t réel, le nombre de solutions de l'équation suivante d'inconnue réelle λ :

$$\lambda^2 - \lambda - t + 1 = 0$$

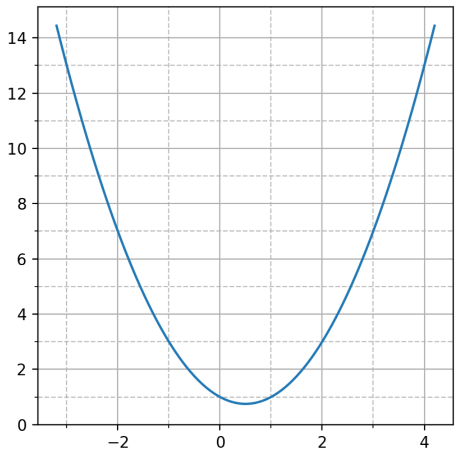
b) En déduire que les deux autres valeurs propres de M_n sont de la forme $(1 \pm \sqrt{4n-3})/2$.

32. Montrer que toutes les valeurs propres de M_n sont dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs si et seulement si n est de la forme $n = 1 + r(r-1)$ où r est un entier relatif.

33. Quelles sont les trois premières valeurs de $n \geqslant 3$ pour lesquelles M_n ne possède que des valeurs propres appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$?
On pourra s'aider du graphe ci-contre obtenu avec

Editeur

```
x=np.linspace(-3,4,100)
plt.plot(x,x*(x-1)+1)
plt.grid()
plt.show()
```



34. On suppose que $n = 1 + r(r-1)$ avec r entier supérieur ou égal à 2.
Déterminer les valeurs propres de M_n et donner une base de chaque sous-espace propre de M_n.

Partie C - Vérification avec python

On admet le résultat suivant :

THÉORÈME

Soit A *une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *de terme général* (a_{ij}). *Pour chaque indice* $i \in [\![1;n]\!]$, *on pose*

$$\mathrm{I}_i = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \left|a_{ii} - x\right| \leqslant \sum_{j \neq i} \left|a_{ij}\right| \right\}.$$

Si λ *est une valeur propre de* A,
alors λ *appartient à au moins un des intervalles* I_i.

35. À l'aide du résultat admis, justifier que si λ est valeur propre de M_n alors $|\lambda| \leqslant n$.

36. **a)** Écrire un programme qui prend en argument n et construit la matrice M_n.
b) Adapter le code de la question 25 pour construire un programme python d'en-tête `test1(n)`, qui renvoie 1 si toutes les valeurs propres de M_n sont entières et 0 sinon.

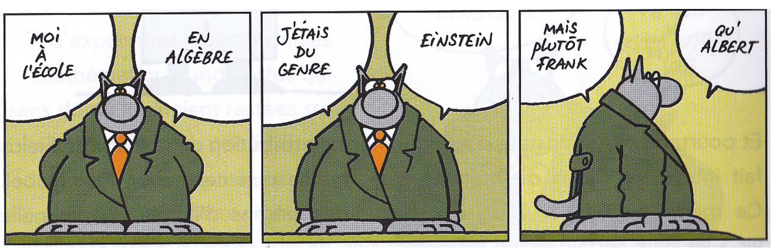
37. **a)** Écrire un programme python `test2` qui prend en argument n et teste si n s'écrit sous la forme $1 + r(r-1)$ où r est un entier.
b) Commenter le test ci-contre.

Editeur

```
for n in range(3,15):
    print('n=',n,' résultats', test1(n),test2(n))
```

```
n=  3   résultats 1 1
n=  4   résultats 0 0
n=  5   résultats 0 0
n=  6   résultats 0 0
n=  7   résultats 1 1
n=  8   résultats 0 0
n=  9   résultats 0 0
n= 10   résultats 0 0
n= 11   résultats 0 0
n= 12   résultats 0 0
n= 13   résultats 1 1
n= 14   résultats 0 0
```

Bonus Prouver le théorème admis en montrant que le noyau de $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$ est réduit à $\{0_{n,1}\}$ lorsque λ n'appartient à aucun intervalle I_i.



Le Chat, Geluck

– FIN –

DS 1 - sujet *

THÈMES : RÉVISIONS ALGÈBRE, ANALYSE ECG1
ET VALEURS/VECTEURS PROPRES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

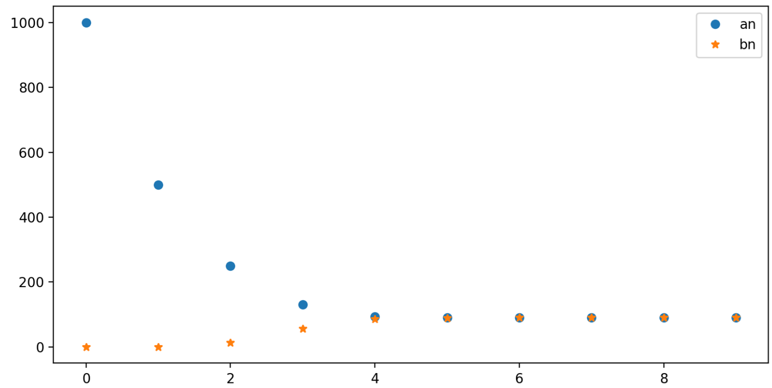
Problème A
Moyenne arithmético-géométrique et intégrales elliptiques

Partie A : la moyenne $\mathrm{M}_{a,b}$

Étant donnés deux réels a et b strictement positifs, on définit deux suites réelles $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}. \end{cases}$$

1. Écrire un programme python qui prend en arguments n, a, b et renvoie les termes a_n, b_n.
Ci-dessous , les premiers termes avec $a = 1000$ *et* $b = 0.0001$



2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n \geqslant b_n$, $a_{n+1} \leqslant a_n$ et $b_{n+1} \geqslant b_n$.

3. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune.
Cette limite commune s'appelle *la moyenne arithmético-géométrique* des réels a, b et sera notée $\mathrm{M}_{a,b}$.

- *Estimation de l'erreur*

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $e_n = a_n - b_n$.
   a) En considérant l'expression $a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2$, vérifier que $\quad e_{n+1} = {e_n}^2/(8a_{n+2})$.
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\quad e_{n+1} \leqslant {e_n}^2/(8b_1)$.

5. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$u_1 = \ln(e_1) \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1} = 2u_n - \ln(8b_1).$$

   a) Donner une expression explicite de u_n en fonction de n, e_1 et b_1.
   b) En justifiant par récurrence que la suite de terme général $u_n - \ln(e_n)$ est positive, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad e_n \leqslant c e^{-\gamma 2^n}$
   où γ et c sont deux réels positifs que l'on exprimera en fonction de e_1 et b_1.

6. Déduire de toute cette étude un programme python qui prend en arguments a, b et renvoie une approximation de $\mathrm{M}_{a,b}$ à 10^{-8}-près.

Partie B

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, on pose

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(a^2+u^2\right)\left(b^2+u^2\right)}}.$$

7. **a)** Justifier que l'intégrale $\mathrm{I}(a,b)$ est bien définie.

b) Calculer cette intégrale dans le cas particulier où $a = b$.

8. **a)** Justifier que le changement de variable $u = \frac{1}{2}\left(v - \frac{ab}{v}\right)$ sur l'intégrale $\mathrm{I}(a_1, b_1)$ est bien licite.

b) En déduire que $\mathrm{I}(a_1, b_1) = \mathrm{I}(a,b)$, où a_1 et b_1 sont définis à la partie A.
Indication : on pourra établir que

$$u^2 + {a_1}^2 = \frac{1}{4v^2}(v^2+a^2)(v^2+b^2) \quad \text{et} \quad u^2 + {b_1}^2 = \frac{v^2}{4}\left(1+\frac{ab}{v^2}\right)^2.$$

9. Pour tous $t \in \mathbb{R}_+^*$, $u \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $f_u(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+u^2}}$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ fixé.
Justifier que pour tous t_1, t_2, s_1, $s_2 \in [\alpha; +\infty[$, tout $u \in \mathbb{R}_*^+$

$$\left|f_u(t_1)\right| \leqslant f_u(\alpha),$$

puis
$$\left|f_u(t_1) - f_u(t_2)\right| \leqslant \frac{\left|{t_1}^2 - {t_2}^2\right|}{2} f_u(\alpha)^3$$

et ensuite
$$\left|f_u(t_1)f_u(s_1) - f_u(t_2)f_u(s_2)\right| \leqslant \frac{f_u(\alpha)^4}{2}\left(\left|{t_1}^2 - {t_2}^2\right| + \left|{s_1}^2 - {s_2}^2\right|\right).$$

10. Justifier que pour tous a, a', b, $b' \in [\alpha; +\infty[$, il existe un réel C, ne dépendant que de α, tel que

$$\left|\mathrm{I}(a,b) - \mathrm{I}(a',b')\right| \leqslant \mathrm{C}\cdot\left(\left|a^2 - a'^2\right| + \left|b^2 - b'^2\right|\right).$$

11. En généralisant la relation $\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}(a_1,b_1)$, montrer que pour tous a, $b > 0$, on a

$$\mathrm{I}(a,b) = \frac{\pi}{2\mathrm{M}_{a,b}}.$$

12. **a)** À l'aide du changement de variable $u = b\tan t$, justifier que

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\cos(t)^2 + b^2\sin(t)^2}}.$$

b) Proposer deux méthodes pour estimer numériquement l'intégrale précédente.

Problème B

Sommes de Césaro, matrices stochastiques et périodiques

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées à coefficients réels et I_p la matrice identité.

- Pour tout élément M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, on note $[\mathrm{M}]_{i,j}$ le coefficient de M situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne.
- Une matrice M appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique si elle satisfait au deux conditions suivantes :
  - **i)** Pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, $[\mathrm{M}]_{i,j} \geqslant 0$;
  - **ii)** Pour tout entier i compris entre 1 et p, $\sum\limits_{j=1}^{p} [\mathrm{M}]_{i,j} = 1$.
- On dit qu'une suite indexée par n, $(\mathrm{M}_n) = (\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n, \ldots)$ de matrices appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers un élément M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si, pour tout couple (i,j), la suite des coefficients $\left([\mathrm{M}_n]_{i,j}\right)$ converge vers $[\mathrm{M}]_{i,j}$; on dit alors que M est la limite de la suite (M_n).
- Étant donné une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, pour tout entier $n \geqslant 0$, on note C_n la matrice définie par la relation :

$$\mathrm{C}_n = \frac{1}{n+1}\left(\mathrm{I}_p + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \ldots + \mathrm{A}^n\right).$$

- On dit enfin qu'une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est r-périodique, où r est un entier strictement positif, si $\mathrm{A}^r = \mathrm{I}_p$.

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des matrices stochastiques et notamment, la convergence de la suite de matrices (C_n) lorsque A est stochastique et r-périodique.

Partie I : Étude d'un exemple

13. Soit α un nombre réel. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}\left[1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n\right].$$

- **a)** Simplifier l'expression de γ_n, en distinguant deux cas : $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$.
- **b)** Étudier en fonction de α, la convergence de la suite (γ_n) et, en cas de convergence, préciser sa limite.

14. On prend $p = 2$ et

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Soit w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

- **a)** Déterminer les valeurs propres de w et une base (f_1, f_2) de vecteurs propres de w.
- **b)** *Nous verrons que si l'on considère* P *la matrice de la famille* (f_1, f_2) *dans la base canonique alors*

$$A = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}P^{-1}.$$

En déduire une expression de A^k, pour tout entier $k \geqslant 0$ à l'aide de P et P^{-1}.

15. Déterminer deux matrices U et V appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = U + \left(-\frac{1}{6}\right)^k V$$

On pourra se contenter d'exprimer U *et* V *à l'aide de* P *et* P^{-1}.

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer C_n en fonction de n, U et V et déterminer la limite C de la suite de matrice $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

17. Prouver que l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à C est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image.

Partie II : Etude de C_n lorsque A est r-périodique

On désigne par r un entier strictement positif.
Soit (α_k) une suite r-périodique de nombres réels, c'est-à-dire telle que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On pose :

$$\gamma = \frac{1}{r}(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}(\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \qquad (\star)$$

18. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\gamma = \frac{1}{r}\left(\alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+r-1}\right).$$

19. Montrer que la suite de terme général $\beta_n = (n+1)\gamma_n - (n+1)\gamma$ est r-périodique. En déduire que (β_n) est bornée.

20. Établir que (γ_n) converge et préciser sa limite.

- Soit A une matrice r-périodique appartenant à $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

21. Montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et p, la suite de réels de terme général $\alpha_k = [A^k]_{i,j}$ est r-périodique.
En déduire que la suite de matrices $(C_n)_n$ converge vers :

$$C = \frac{1}{r}\left(I_p + A + \ldots + A^{r-1}\right).$$

22. Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associés aux matrices A et C.

- **a)** Prouver que $u^r = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p}$.
- **b)** Montrer que $v \circ u = u \circ v$ et que $u \circ v = v$.

23. On note $E_1(u)$ et $E_1(v)$ les sous-espaces propres respectivement de u et v associés à la valeur propre 1. Établir les égalités

$$E_1(u) = E_1(v) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(v) = E_1(u).$$

24. Montrer que v est un projecteur. *Il projette donc sur* $G = \mathrm{Im}(v)$ *parallèlement à* $F = \mathrm{Ker}(v)$.

25. Établir enfin que $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p})$.
On pourra d'abord prouver que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^p}) \subset \mathrm{Ker}(v)$.

- Soit (α_k) une suite de nombres réels r-périodique à partir d'un certain rang positif m, c'est-à-dire telle que pour tout $k \geqslant m, \alpha_{k+r} = \alpha_k$. On définit $\left(\gamma_n\right)$ par la relation $(\star)$.

26. Prouver que γ_n admet une limite que l'on précisera.
Pour cela, on pourra considérer la suite $\alpha'_k = \alpha_{k+m}$, *observer que* $\left(\alpha'_k\right)$ *est* r*-périodique, et prouver que,* γ'_n *étant associée à* $\left(\alpha'_k\right)$ *par la relation* $(\star)$, $\gamma'_n - \gamma_n$ *tend vers 0 lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

27. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ r-périodique à partir d'un certain rang positif m, c'est-à-dire telle que pour tout $k \geqslant m$, $A^{k+r} = A^k$. Prouver que la suite (C_n) admet une limite que l'on précisera.

Partie III : Étude de matrices stochastiques

On note :

- S_p l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$;
- D_p l'ensemble des matrices déterministes, c'est-à-dire stochastiques et dont tous les coefficients sont tous égaux à 0 ou 1 ;
- Δ_p l'ensemble des matrices déterministes et inversibles;
- Enfin, on introduit U la matrice colonne ne contenant que des « 1 » :

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

- **Matrices stochastiques**

28. Vérifier que la condition **ii**) est équivalente au fait que U soit vecteur propre pour la valeur propre 1.

29. Prouver que, pour tout couple (λ, μ) de nombres réels tels que $\lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0$ et $\lambda + \mu = 1$, et pour tout couple (M, N) d'éléments de S_p, la matrice $\lambda M + \mu N$ appartient encore à S_p.

30. Prouver que le produit MN de deux éléments M et N de S_p appartient à S_p.

31. Soit A un élément de S_p. Prouver que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, C_n appartient à S_p.
Que peut-on en déduire pour la limite C de (C_n), lorsqu'elle existe?

- **Matrices déterministes**

32. Montrer qu'une matrice M est déterministe si et seulement si tous ses coefficients sont égaux à 0 ou 1 et si chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1.

33. En déduire que D_p est un ensemble fini et préciser le nombre de ses éléments.

34. Montrer que le produit MN de deux éléments M et N de D_p appartient à D_p.

35. Soit A une matrice déterministe. Prouver qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ et un entier $m \geqslant 0$ tels que $A^{m+r} = A^m$. En déduire que, dans ces conditions, A est r-périodique à partir de ce rang m et que, si de plus A est inversible, A est r-périodique.

36. Soit A une matrice déterministe inversible. Prouver que A^{-1} l'est aussi.

- **Étude de la suite** (C_n) **associée à une matrice** A **déterministe**

37. En utilisant les résultats de la partie II, établir le résultat suivant :
Soit A une matrice déterministe inversible, alors (C_n) converge vers une matrice stochastique C telle que $C^2 = C$.

38. Étendre ce résultat au cas où A est déterministe non inversible.

- **Matrices stochastiques inversibles**

Soient X et Y des éléments de S_p tels que $XY = I_p$. On se propose de montrer que X et Y sont déterministes inversibles.

39. On pose $X = \left(\alpha_{i,j}\right), Y = \left(\beta_{i,j}\right)$ et, pour tout j compris entre 1 et p,

$$\mu_j = \max\left\{\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \ldots, \beta_{p,j}\right\}.$$

a) Prouver que $\mu_j = 1$. Pour cela, on pourra calculer le coefficient $[XY]_{jj}$.

b) Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \beta_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j$. En déduire que tous les coefficients de Y sont égaux à 0 ou 1.

c) Prouver que Y et X appartiennent à Δ_p.

40. *Généralisation.* Soient U et V deux matrices de S_p telles que le produit UV appartienne à Δ_p. Prouver que U et V appartiennent à Δ_p. *On pourra utiliser le résultat de la question 36.*

– FIN –

DS 1 A - solution

Problème A

1. Notons que si $P \in \mathbb{R}[x]$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}[x]$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[x]$:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P+\mu Q)(x) &= (\lambda P+\mu Q)(x)+(\lambda P+\mu Q)(x+1)\\ &= \lambda P(x)+\mu Q(x)+\lambda P(x+1)+\mu Q(x+1)\\ &= \lambda(P(x)+P(x+1))+\mu(Q(x)+Q(x+1))\\ \Phi(\lambda P+\mu Q)(x) &= \lambda\Phi(P)(x)+\mu\Phi(Q)(x).\end{aligned}$$

Ces deux propriétés font de Φ un endomorphisme.

2.a) Par définition du noyau :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P(t)+P(t+1)=0.$$

On en déduit que

$$P(m)P(m+1) = -P(m)^2 \leqslant 0.$$

De plus, P est polynomiale donc continue sur $[m; m+1]$. Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et P s'annule au moins une fois sur $[m; m+1]$. Cela étant valable pour tout $m \in \mathbb{Z}$, P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

2.b) On a

$$\ker \Phi = \left\{0_{\mathbb{R}[x]}\right\}$$

On sait alors que Φ est injective.

3.a) C'est une conséquence directe du fait que $\mathbb{R}_p[x]$ est stable par Φ

$$\forall P \in \mathbb{R}_p[x], \qquad \Phi(P) \in \mathbb{R}_p[x].$$

3.b) L'injectivité de Φ induit l'injectivité de Φ_p. Or Φ_p est un endomorphisme de dimension finie, c'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[x]$. Justifions que Φ est un isomorphisme, on a déjà l'injectivité, il reste à prouver la surjectivité.
Soit $Q \in \mathbb{R}[x]$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{R}_p[x]$. Or Φ_p est un isomorphisme, en particulier, il est surjectif et

$$\exists P \in \mathbb{R}_p[x], \qquad \Phi_p(P) = Q.$$

Ensuite, par définition de la restriction

$$\exists P \in \mathbb{R}[x], \qquad \Phi(P) = Q.$$

La surjectivité est établie, ce qui conclut.

4.a) Soit $i \in [\![0; p]\!]$.

$$\begin{aligned}\varphi\left(x^i\right) &= x^i + (1+x)^i \qquad \text{(Formule du binôme)}\\ &= 2x^i + \underbrace{\sum_{j=0}^{i-1}\binom{i}{j}x^j}_{\in\mathbb{R}_{i-1}[x]}\end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de Φ_p est triangulaire supérieure avec uniquement des "2" sur la diagonale.

4.b) On sait que

$$\mathrm{Sp}\left(\Phi_p\right) = \mathrm{Sp}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_p}\left(\Phi_p\right)\right) = \{2\}$$

car le spectre se lit sur la diagonale pour une matrice triangulaire.
Précisons maintenant le spectre de Φ.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\Phi_p\right)$, il existe $P \in \mathbb{R}_p[x] \setminus \left\{0_{\mathbb{R}[x]}\right\}$ tel que $\Phi_p(P) = \lambda P$. D'où $\Phi(P) = \lambda P$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. On a donc les inclusions :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Sp}\left(\Phi_p\right) \subset \mathrm{Sp}(\varphi)$$

puis
$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{Sp}\left(\Phi_p\right) \subset \mathrm{Sp}(\Phi) \qquad (\star)$$

Réciproquement, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Phi)$, il existe $P \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ tel que $\Phi(P) = \lambda P$. si $p = \deg P$, on a aussi

$$P \in \mathbb{R}_p[x] \setminus \{0\} \quad \Phi_p(P) = \lambda P.$$

D'où $\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\Phi_p\right)$. Cela prouve l'inclusion inverse dans $(\star)$ et donc l'égalité

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{Sp}\left(\Phi_p\right) = \{2\}.$$

5. La relation $(\star)_n$ s'écrit

$$\Phi(P) = \frac{x^n}{n!}$$

Comme Φ est un isomorphisme,

$$P = \Phi^{-1}\left(\frac{x^n}{n!}\right).$$

Il y a bien une unique solution à $(\star)_n$. Soit d le degré de E_n.
On peut donc écrire $E_n = a_d x^d + Q(x)$ où $Q(x) \in \mathbb{R}_{d-1}[x]$.
En revenant à la condition $(\star)_n$, on a alors

$$\underbrace{a_d\left(x^d+(x+1)^d\right)}_{\text{de degré } d} + \underbrace{Q(x)+Q(x+1)}_{\in\mathbb{R}_{d-1}[x]} = \frac{x^n}{n!}.$$

En identifiant les degrés $d = \deg E_n = n$.

6. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad E_{n+1}(x) + E_{n+1}(x+1) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En dérivant, on obtient par somme et composition

$$\mathrm{E}'_{n+1}(x)+\mathrm{E}_{n+1}(x+1)=\frac{n+1}{(n+1)!}x^n=\frac{x^n}{n!}.$$

Ainsi E_{n+1} vérifie $(*)_n$. Par unicité de la solution

$$\mathrm{E}'_{n+1}=\mathrm{E}_n.$$

7.a) Comme $\mathrm{E}'_n=\mathrm{E}_{n-1}$, on a en particulier

$$\mathrm{E}'_n(0)=\mathrm{E}_{n-1}(0).$$

Puis $\mathrm{E}''_n=\mathrm{E}'_{n-1}=\mathrm{E}_{n-2}$, d'où

$$\mathrm{E}''_n(0)=\mathrm{E}_{n-2}(0).$$

Par récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant n$

$$\mathrm{E}_n^{(k)}(0)=\mathrm{E}_{n-k}(0).$$

7.b) D'après la formule de Taylor sur les polynômes avec $\deg \mathrm{E}_n=n$.

$$\mathrm{E}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{E}_n^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{E}_{n-k}(0)\frac{x^k}{k!}.$$

8. On a $\mathrm{E}_n(1)+\mathrm{E}_n(0)=\frac{0^n}{n!}=0$ (pour $n\in\mathbb{N}^*$) et $\mathrm{E}_0(0)=\frac{1}{2}$ (car E_0 est constant). D'où

$$\begin{aligned}|2\mathrm{E}_n(0)|&=|\mathrm{E}_n(1)-\mathrm{E}_n(0)|\\&=\left|\sum_{k=0}^{n}\mathrm{E}_{n-k}(0)\frac{1^k}{k!}-\mathrm{E}_n(0)\right|\\&=\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{E}_{n-k}(0)}{k!}\right|\\2\,|\mathrm{E}_n(0)|&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{|\mathrm{E}_{n-k}(0)|}{k!}.\end{aligned}$$

Justifions par récurrence forte que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$|\mathrm{E}_n(0)|\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}\leqslant 1.$$

→ *Initialisation.* $\mathrm{E}_0(0)=1/2$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(1)$, …, $\mathscr{P}(n-1)$ vraies. D'après l'inégalité précédente

$$|\mathrm{E}_n(0)|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\leqslant\frac{\mathrm{e}-1}{2}\leqslant 1.$$

car $\mathrm{e}\simeq 2,7.\leqslant 3$. Ainsi $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

→ *Conclusion.* Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

9. Posons $\mathrm{P}_n(x)=(-1)^n\mathrm{E}_n(1-x)$. On a alors

$$\mathrm{P}_n(x)+\mathrm{P}_n(x+1)=(-1)^n\left(\mathrm{E}_n(1-x)+\mathrm{E}_n(-x)\right)$$

et en reprenant $(\star)_n$ en changent de variable $x\leftarrow -x$

$$\mathrm{P}_n(x)+\mathrm{P}_n(x+1)=(-1)^n\left(\frac{(-x)^n}{n!}\right)=\frac{x^n}{n!}.$$

On en déduit que P_n vérifie $(\star)_n$. Par unicité de la solution

$$\mathrm{P}_n=\mathrm{E}_n.$$

10. On a en évaluant en 0

$$\mathrm{E}_n(0)=(-1)^n\mathrm{E}_n(1)$$

or $\mathrm{E}_n(0)+\mathrm{E}_n(1)=\frac{0^n}{n!}=0\quad(\text{car } n=0)$. D'où

$$\mathrm{E}_n(0)=(-1)^{n+1}\mathrm{E}_n(0).$$

En particulier si n est pair (non nul)

$$\mathrm{E}_n(0)=-\mathrm{E}_n(0)\quad\text{puis}\quad\mathrm{E}_n(0)=0=\mathrm{E}_n(1)$$

→ En évaluant en $1/2$, on a aussi

$$\mathrm{E}_n\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\mathrm{E}_n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Pour n impair,

$$\mathrm{E}_n\left(\frac{1}{2}\right)=-\mathrm{E}_n\left(\frac{1}{2}\right)\quad\text{puis}\quad\mathrm{E}_n\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

11. On a vu que

$$\mathrm{E}_0=\frac{1}{2}\quad(\text{polynôme constant})$$

• Déterminons E_1 sachant que ce dernier s'annule en $1/2$. Par le théorème fondamental :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_1(x)&=\mathrm{E}_1(x)-\mathrm{E}_1\left(\frac{1}{2}\right)\\&=\int_{1/2}^{x}\mathrm{E}'_1(t)\,\mathrm{d}t=\int_{1/2}^{x}\mathrm{E}_0(1)\,\mathrm{d}t\quad(\text{q. }6)\\\mathrm{E}_1(x)&=\int_{1/2}^{x}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

• Ensuite, on détermine E_2 sachant que ce polynôme s'annule en 0 :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_2(x)&=\mathrm{E}_2(x)-\mathrm{E}_2(0)\\&=\int_0^x\mathrm{E}'_2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\mathrm{E}_1(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^x\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left(x^2-x\right)\end{aligned}$$

12. On peut donc calculer de proche en proche E_n avec la relation de récurrence :

$$\mathrm{E}_0=1/2$$

$$\mathrm{E}_{n+1}(x)=\begin{cases}\int_{1/2}^{x}\mathrm{E}_n(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } n \text{ est pair}\\ \int_0^x\mathrm{E}_n(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}$$

Problème B

13.a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

13.b) Intégrons par parties sachant que les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$.

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^{\pi/2} x\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{x}{2}\sin(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x}{2}\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{8}\cos(\pi) + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\left[\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ u_1 &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

14. Par quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}^*$. Puis pour $t \neq 0$

$$f_n(t) = \frac{1-(1-t)^n}{t} \sim \frac{nt}{t} = n$$

D'où $$f_n(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} n = f_n(0).$$

C'est la continuité de f_n en 0. Ce qui conclut sur la continuité sur $\mathbb{R}$.

15. On a par la formule du binôme

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n &= \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-t)^k}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t \quad \text{(linéarité intégrale)} \\ \mathrm{I}_n &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

16.a) On effectue le changement affine $u = 1-t$

$$\int_0^1 (1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 u^{k-1}(-\mathrm{d}u) = \int_0^1 u^{k-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{k}.$$

16.b) Pour $t \in \,]0;1]$, on a aussi la somme géométrique

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(1-t)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(1-t)^k &= \frac{1-(1-t)^n}{1-(1-t)} \\ &= \frac{1-(1+t)^n}{t}. \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit par intégration.

17. Procéder par intégration par parties.

18.

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} \times \frac{\sin(2px)}{2^n}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}\int_0^{\pi/2} x\sin(2px)\,\mathrm{d}x \quad (\text{somme à } p=1) \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{p=1}^{n}\binom{n}{p}\frac{\pi(-1)^{p+1}}{4p} \\ &= \frac{\pi}{2^{n+2}}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\cdot(-1)^2 \\ u_n &= \frac{\pi}{2^{n+2}}\mathrm{I}_n. \end{aligned}$$

19.a) Soient $x \in [0;1[$, $t \in [0;x]$

$$\begin{cases} x-t \geqslant 0 \\ 1-t \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \varphi_x(t) = \frac{x-t}{1-t} \geqslant 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} x - \varphi_x(t) = x + \frac{t-x}{1-t} &= \frac{x(1-t)+t-x}{1-t} \\ &= \frac{t(1-x)}{1-t} \geqslant 0 \text{ (par quotient)}. \end{aligned}$$

Ainsi $$\varphi_x(t) \leqslant x.$$

Ce qui conclut.

19.b) Soient $x \in [0;1[$, $t \in [0;x]$,

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{(1-t)^2} + \frac{a}{1-t} &= \frac{x-1+a(1-t)}{(1-t)^2} \\ &= \frac{x-at-1+a}{(1-t)^2} \end{aligned}$$

On constate que $a = 1$ convient.

20.a) Par composition entre une fonction affine et le logarithme, h est $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}h^{(k)}(1-x)$$

Or on montre par récurrence que

$$\forall t \in \mathbb{R}_x^+, \qquad \ln^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{t^k}$$

D'où $$h^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(1-x)^k}.$$

En particulier, on a $h^{(k)}(0) = (k-1)!$.

20.b) Pour n fixé, h est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et la formule de Taylor avec reste intégral s'applique ($h(0) = 0$)

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{h^{(n+1)}(t)}{(n-t)!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)!}{k!}x^k + \int_0^x \frac{n!}{n!}\frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ h(x) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} + \int_0^x \frac{\varphi_x(t)^n}{1-t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

21. On reprend les inégalités de la question 19.a), la fonction $s \mapsto s^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$

$$0 \leqslant \varphi_x(t)^n \leqslant x^n \quad \text{puis} \quad 0 \leqslant \frac{\varphi_x(t)^n}{1-t} \leqslant \frac{x^n}{1-t}.$$

Par croissance de l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens)

$$0 = \int_0^x 0 \, dt \leqslant \int_0^x \frac{\varphi_x(t)^n}{1-t} \, dt \leqslant \int_0^x \frac{x^n}{1-t} \, dt = -x^n \ln(1-x).$$

22. Soit x fixé dans $[0;1[$. On a

$$-x^n \ln(1-x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par encadrement

$$\mathrm{R}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit avec la relation de la question 20

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(x).$$

C'est la définition de la convergence de la série avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

23.a) Soit $x \in [0;1[$. On pose $\mathrm{I}_0 = 0$

$$\begin{aligned}
(1-x)\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k x^k &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k x^k - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k x^k - \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{I}_{k-1} x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{I}_k - \mathrm{I}_{k-1}\right) x^k - \mathrm{I}_n x^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^k - \mathrm{I}_n x^{n+1} \\
(1-x)\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k x^k &= h(x) - \mathrm{R}_n(x) - \mathrm{I}_n x^{n+1}
\end{aligned}$$

avec l'égalité de la question 20.

23.b) Soit $x \in [0;1[$ fixé. On a $\mathrm{R}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n x^{n+1} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) x^{n+1} \leqslant n x^{n+1}.$$

Par les croissances comparées $n x^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et par encadrement $\mathrm{I}_n x^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Par passage à la limite dans l'égalité de la question 23.a)

$$(1-x)\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k x^k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(x).$$

Le résultat s'en déduit en divisant $1-x$.

24. D'après ce qui précède avec $x = 1/2 \in [0;1[$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_k}{2^k} = \frac{-\ln(1-1/2)}{1-1/2} = 2\ln(2)$$

En reprenant la question 18, on a la convergence de la série avec

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_k}{2^k} = \frac{\pi \ln(2)}{2}.$$

Problème C

25. Le programme affiche sur un graphe les valeurs

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3) \quad \text{pour} \quad \lambda \in [\![-5;5]\!].$$

On détecte une valeur propre dès que rang n'est pas 3. Comme la matrice est de taille $(3,3)$, il y a au plus 3 valeurs propres. Au final, on lit

$$\mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}_3) = \{-1;0;2\}.$$

26. Un calcul donne

$$\mathrm{E}_2\,(\mathrm{M}_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \quad \mathrm{E}_0\,(\mathrm{M}_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{et} \quad \mathrm{E}_{-1}(\mathrm{M}_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

27. On constate que $\mathrm{rg}\,(\mathrm{M}_n) = 2$. Comme $n \geqslant 3$, la matrice M_n n'est pas inversible,

$$0 \in \mathrm{Sp}\,(\mathrm{M}_n).$$

28. Par définition

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{M}_n = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n)$$

où C_i désigne la i-ème colonne de M_n. Comme $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_4 = \cdots = \mathrm{C}_n$

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{M}_n = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$$

et la famille $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ est génératrice de l'image. De plus, C_2 est linéairement indépendantes de C_1, la famille $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ est libre.
D'où $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ est une base de l'image de M_n.

29. Soit X un vecteur propre de M_n associé à $\lambda \neq 0$. Par définition

$$\mathrm{MX} = \lambda \mathrm{X} \quad \text{puis} \quad \mathrm{M}\left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{X}\right) = \mathrm{X}.$$

D'où $\qquad \mathrm{X} \in \mathrm{Im}\,\mathrm{M}_n$.

30. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{M}_n\,(\varepsilon_1 + \alpha e_2) = \lambda\,(\varepsilon_1 + \alpha e_2) \quad (\bullet)$$

or

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_n \varepsilon_1 &= \mathrm{M}_n\,(e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n) \\
&= \mathrm{M}_n e_1 + \mathrm{M}_n e_2 + \mathrm{M}_n e_3 + \cdots + \mathrm{M}_n e_n \\
&= e_2 + \varepsilon_1 + e_2 + \cdots + e_2 \\
\mathrm{M}_n \varepsilon_1 &= (n-1) e_2 + \varepsilon_1.
\end{aligned}$$

et $\mathrm{M}_n\,(\alpha e_2) = \alpha \mathrm{M}_n e_2 = \alpha \varepsilon_1$. Ainsi l'égalité $(\bullet)$ est équivalente à

$$(1+\alpha)\varepsilon_1 + (n-1) e_2 = \lambda \varepsilon_1 + \lambda \alpha e_2$$

$$\iff \begin{cases} 1+\alpha=\lambda \\ (n-1)=\lambda\alpha \end{cases}$$

Car la famille (ε_1, e_2) est libre. Le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} 1+\alpha=\lambda \\ n-1=\lambda(\lambda-1). \end{cases}$$

D'où le résultat.

31.a) Le discriminant est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(-t+1) = 4t-3.$$

Ainsi :

- $t \geqslant 3/4$ si et seulement si il y a deux racines réelles
- $t = 3/4$ si et seulement si il y a une unique racine.
- $t < 3/4$ si et seulement si il y a aucune racine.

31.b) Précisons que par un compte des dimensions (le noyau est de dimension $n-2$), il n'y a pas de plus de 3 valeurs propres. Il y a déjà 0. Notons de plus que tout vecteur propre s'écrit sous la forme

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1(\varepsilon_1 + \underbrace{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}_{=\alpha} e_2)$$

Dès lors les valeurs propres sont bien données par les égalités de la question 30.
Il y a donc deux autres valeurs propres si et seulement si $n > 3/4$. Ce qui est toujours le cas. Les deux autres valeurs propres sont alors :

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{4n-3}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$$

32. Inversion la seconde relation :

$$\begin{aligned} & 2\lambda_2 = 1+\sqrt{4n-3} \\ \iff & (2\lambda_2-1) = \sqrt{4n-3} \iff (2\lambda_2-1)^2 = 4n-3 \\ \iff & \lambda_2^2 - \lambda_2 + 1 = n \iff \lambda_2(\lambda_2-1)+1 = n. \end{aligned}$$

De plus

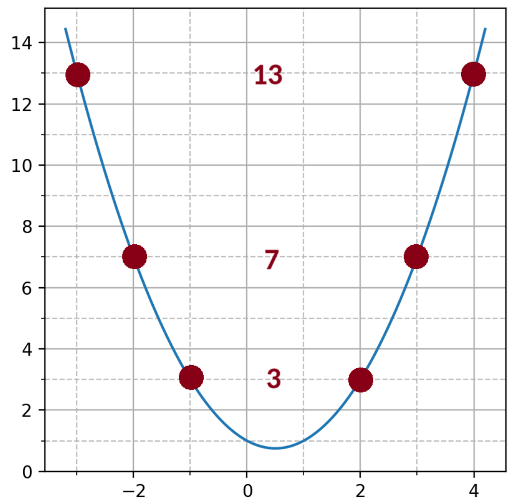
$$\lambda_1+\lambda_2 = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = 1-\lambda_2.$$

Cette dernière relation permet de justifier que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ si et seulement si $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$. En posant $\lambda_2 = r$, on a l'équivalence demandée.

33. Il faut repérer les coordonnées entières de

$$\big(r, r(r-1)+1\big).$$

On trouve $n \in \{3; 7; 13\}$.



34. On sait que M_n est de rang 2, donc l'espace propre pour la valeur propre 0 est de dimension $n-2$ On constate (avec l'aide de l'exemple pour $n=3$) que la famille suivante est une base de $E_0(M_n)$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(on décale vers le bas le "-1"). En effet, elle est libre, avec $n-2$ vecteurs. Par un compte des dimensions, les autres sous-espaces propres sont de dimension 1. Pour la valeur propre r, on sait d'après la question 30 que $\varepsilon_1 + (r-1)e_2$ est vecteur propre. Donc

$$E_r(M_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 + (r-1)e_2)$$

De même avec $1-r$, l'autre valeur propre

$$E_{1-r}(M_n) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 - re_2).$$

35. Dans notre exemple, pour $i \in [[1;n]] \setminus \{2\}$

$$a_{ii} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i\neq j} a_{ij} = 1$$

Dans ce cas $I_i = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 1\}$.
si $i = 2$,

$$a_{22} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j\neq 2} a_{ij} = n-1.$$

Dans ce cas $I_2 = \{x \in \mathbb{R}, |x-1| \leqslant n-1\}$. Par inégalité triangulaire, on a pour tout $x \in I_2$

$$|x| \leqslant |x-1+1| \leqslant |x-1|+1 \leqslant n$$

D'après le théorème admis, λ appartient à l'un des intervalles I_i, en particulier

$$|\lambda| \leqslant n.$$

36.a) En prenant garde au décalage d'indice en python, on a

```python
def matrice(n):
    M=np.zeros([n,n])
    for i in range(n):
        M[1,i]=1
        M[i,1]=1
    return M
```

Un petit test :

```python
>>> matrice(4)
array([[0., 1., 0., 0.],
       [1., 1., 1., 1.],
       [0., 1., 0., 0.],
       [0., 1., 0., 0.]])
```

36.b)

```python
def test1(n):
    d=0
    M=matrice(n)
    for i in range(-n,n+1):
        d+=(n-al.matrix_rank(M-i*np.eye(n)
            ))
    if d==n:
        return 1
    return 0
```

37.a)

```python
def test2(n):
    for r in range(n):
        if r*(r-1)+1==n:
            return 1
    return 0
```

37.b) Le test est concluant car on retrouve les valeurs obtenues à la question 33. On a bien des valeurs propres entières si et seulement si n s'écrit sous la forme $r(r-1)+1$.

DS 1* - solution

1.

```
import numpy as np

def suite(n,a,b):
    for i in range(n):
        c=a
        # pour sauvegarder la valeur de an
        a=(a+b)/2
        # calcul de a_(n+1)
        b=np.sqrt(c*a)
        # calcul de b_(n+1)
    return a,b
```

Si on demande la liste des n premiers termes de la suite pour faire l'affichage, on peut écrire :

```
def suite2(n,a,b):
    A=np.zeros(n)
    B=np.zeros(n)
    A[0]=a
    B[0]=b
    for i in range(n-1):
        A[i+1]=(A[i]+B[i])/2
        B[i+1]=np.sqrt(A[i]*B[i])
    return A,B

A,B=suite2(10,1000,0.0001)
indice=np.arange(0,10,1)
plt.plot(indice,A,'o')
plt.plot(indice,B,'*')
plt.legend(['an','bn'])
plt.show()
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n}\right). \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Avec le décalage d'indice, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (car $n+1 \in \mathbb{N}$), on a

$$a_n \geqslant b_n.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leqslant 0$$

D'où $\qquad a_{n+1} \leqslant a_n.$

et

$$b_n - b_{n+1} = b_n - \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) \leqslant 0.$$

Finalement $\qquad b_{n+1} \geqslant b_n.$

3. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_1 \geqslant a_n \geqslant b_n \geqslant b_1.$$

La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ (on commence à 1) est décroissante et minorée, elle converge.
La suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée, elle converge.
Justifions la convergence vers une limite commune. Pour cela, on pose $\ell_a, \ell_b \in \mathbb{R}$ tels que

$$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_a \quad \text{et} \quad b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_b.$$

Les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

donnent par passage à la limite

$$\ell_a = \frac{\ell_a + \ell_b}{2} \quad \text{puis} \quad \ell_a = \ell_b.$$

Ce qui conclut.

4.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} {a_{n+1}}^2 - {b_{n+1}}^2 &= \frac{1}{4}(a_n + b_n)^2 - a_n b_n \\ &= \frac{1}{4}(a_n - b_n)^2 = \frac{1}{4}{e_n}^2. \end{aligned}$$

De plus, l'identité remarquable

$$\begin{aligned} {a_{n+1}}^2 - {b_{n+1}}^2 &= (a_{n+1} - b_{n+1})(a_{n+1} + b_{n+1}) \\ &= e_{n+1} \cdot 2a_{n+2} \end{aligned}$$

donne finalement

$$e_{n+1} \cdot 2a_{n+2} = \frac{1}{4}{e_n}^2 \quad \text{puis} \quad e_{n+1} = \frac{{e_n}^2}{8a_{n+2}}$$

car $a_{n+2} \neq 0$.

4.b) Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par b_1, on a directement

$$e_{n+1} \leqslant \frac{{e_n}^2}{8b_1}.$$

5.a) On reconnait une suite arithmético-géométrique.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ell = 2\ell - \ln(8b_1) \quad \text{soit} \quad \ell = \ln(8b_1).$$

La suite de terme général $v_n = u_n - \ell$ est géométrique car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} \ell = 2\ell - \ln(8b_1) & \mathrm{L}_1 \\ u_{n+1} = 2u_n - \ln(8b_1) & \mathrm{L}_2 \end{cases}$$

La différence $\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$ donne

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = 2(u_n - \ell) = 2v_n.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = 2^{n-1} v_1$$

où $\qquad v_1 = u_1 - \ell = \ln\left(e_1^2/(8b_1)\right).$

On conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = v_n + \ell = 2^{n-1} \cdot \ln\left(\frac{e_1^2}{8b_1}\right) + \ln(8b_1).$$

5.b) Justifions par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(n): \quad u_n - \ln(e_n) \geqslant 0$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

→ *Initialisation.* C'est direct car $u_1 = \ln(e_1)$. $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \ln(e_{n+1}) &\geqslant 2u_n + \ln(8b_1) - (2\ln(e_n) - \ln(8b_1)). \\ &\geqslant 2\left(u_n - \ln(e_n)\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la récurrence.

Dès lors

$$\ln(e_n) \leqslant u_n$$

Puis

$$e_n \leqslant \mathrm{e}^{u_n} = c\mathrm{e}^{-\gamma 2^n}$$

où on a posé :

$$c = 8b_1 \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e_1^2}{8b_1}\right) = \ln\left(\frac{e_1}{(2\sqrt{2})ab}\right).$$

6. On utilise la relation

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{8a_{n+2}} \leqslant \frac{e_n^2}{8b_n}$$

pour obtenir le programme :

```
def approx(a,b):
  a=(a+b)/2
  b=np.sqrt(a*b)
  erreur =a-b
  while erreur>10**(-8):
      c=a
      # pour sauvegarder la valeur de an
      a=(a+b)/2
      # calcul de a_(n+1)
      b=np.sqrt(c*a)
      # calcul de b_(n+1)
      erreur=erreur**2/(8*b)
  return a
```

7.a) L'intégrande est continue sur $[0;+\infty[$, on a donc une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}\sqrt{b^2+u^2}} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}.$$

Par le critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives et le critère de Riemann (avec $2 > 1$), on a bien la convergence de $\mathrm{I}(a,b)$.

7.b) On effectue le changement de variable affine $v = u/a$

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(a,a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\cdot\int_0^{+\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}u}{a}}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = \frac{1}{a}\left[\arctan(v)\right]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

Finalement, $\qquad \mathrm{I}(a,a) = \dfrac{\pi}{2a}.$

8.a) La fonction

$$\varphi v \in]0;+\infty[\mapsto \frac{1}{2}\left(v - \frac{ab}{v}\right)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$\forall v \in]0;+\infty[, \qquad \varphi'(v) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{v^2}\right) > 0.$$

La fonction φ est donc strictement monotone et $\mathscr{C}^1$. Le changement de variable est donc licite.
Précisons de plus que

$$\varphi(v) \underset{v\to0^+}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad \varphi(v) \underset{v\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

8.b) Suivons l'indication :

$$\begin{aligned} u^2 + {a_1}^2 &= \frac{1}{4}\left(\left(v - \frac{ab}{v}\right)^2 + (a+b)^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(v^2 + \frac{a^2b^2}{v^2} - 2ab + a^2 + b^2 + 2ab\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(v^2 + \frac{a^2b^2}{v^2} + a^2 + b^2\right) \\ &= \frac{1}{4v^2}\left(v^4 + a^2b^2 + v^2\left(a^2+b^2\right)\right) \\ u + {a_1}^2 &= \frac{1}{4v^2}\left(v^2+a^2\right)\left(v^2+b^2\right). \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} u^2 + {b_1}^2 &= \frac{1}{4}\left(\left(v - \frac{ab}{v}\right)^2 + 4ab\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(v^2 + \frac{a^2b^2}{v^2} + 2ab\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(v + \frac{ab}{v}\right)^2 \\ u + {b_1}^2 &= \frac{v^2}{4}\left(1 + \frac{ab}{v^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Par produit, on a donc

$$\begin{aligned} &\left(u^2 + {a_1}^2\right)\left(u^2 + {b_1}^2\right) \\ &= \frac{1}{4^2}\left(v^2+a^2\right)\left(v^2+b^2\right)\left(1 + \frac{ab}{v^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Effectuons maintenant le changement de variable indiqué

$$\varphi(v) = u, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \varphi'(v) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{ab}{v^2}\right).$$

Lorsque v varie de 0^+ à $+\infty$, u varie de $-\infty$ à $+\infty$.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(a_1,b_1) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(u^2+a_1^2\right)\left(u^2+b_1^2\right)}} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(u^2+a_1^2\right)\left(u^2+b_1^2\right)}} \quad \text{parité} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(1+ab/v^2\right)\mathrm{d}v}{\frac{1}{4}\sqrt{\left(v^2+a^2\right)\left(v^2+b^2\right)\left(1+\frac{ab}{v^2}\right)^2}} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\left(v^2+a^2\right)\left(v^2+b^2\right)}} \end{aligned}$$

$$\mathrm{I}(a_1,b_1) = \mathrm{I}(a,b).$$

9. La fonction f_u est décroissante et positive sur $[\alpha;+\infty[$, donc $t_1 \geqslant \alpha$ impose $|f(t_1)| \leqslant f(\alpha)$. Ensuite

$$\begin{aligned}
f_u(t_1) - f_u(t_2) &= \frac{1}{\sqrt{t_1^2+u^2}} - \frac{1}{\sqrt{t_2^2+u^2}} \\
&= \frac{\sqrt{t_2^2+u^2} - \sqrt{t_1^2+u^2}}{\sqrt{t_1^2+u^2}\cdot\sqrt{t_2^2+u^2}} \\
f_u(t_1) - f_u(t_2) &= \left(\sqrt{t_2^2+u^2} - \sqrt{t_1^2+u^2}\right) f_u(t_1)\, f_u(t_2).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
&\sqrt{t_2^2+u^2} - \sqrt{t_1^2+u^2} \\
&= \frac{\left(\sqrt{t_2^2+u^2} - \sqrt{t_1^2+u^2}\right)\left(\sqrt{t_2^2+u^2} + \sqrt{t_1^2+u^2}\right)}{\sqrt{t_2^2+u^2} + \sqrt{t_1^2+u^2}} \\
&= \frac{(t_2^2+u^2) - (t_1^2+u^2)}{\sqrt{t_2^2+u^2} + \sqrt{t_1^2+u^2}} = \frac{t_2^2 - t_1^2}{\sqrt{t_2^2+u^2} + \sqrt{t_1^2+u^2}}.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\left|f_u(t_1) - f_u(t_2)\right| \leqslant \frac{|t_2^2 - t_1^2|}{2\sqrt{\alpha^2+u^2}} f_u(t_1)\, f_u(t_2) \leqslant \frac{(t_2^2 - t_1^2)}{2} f_u(\alpha)^3.$$

Pour la dernière inégalité, on commence par écrire

$$\begin{aligned}
&f_u(t_1)\, f_u(s_1) - f_u(t_2)\, f_u(s_2) \\
=&f_u(t_1)\left(f_u(s_1) - f_u(s_2)\right) + f_u(s_2)\left(f_u(t_1) - f_u(t_2)\right).
\end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire et en reprenant les majorations précédentes :

$$\begin{aligned}
&\left|f_u(t_1)\, f_u(s_1) - f_u(t_2)\, f_u(s_2)\right| \\
\leqslant &\left|f_u(t_1)\right| \cdot \left|f_u(s_1) - f_u(s_2)\right| + \left|f_u(s_2)\right| \cdot \left|f_u(t_1) - f_u(t_2)\right| \\
\leqslant &\frac{\left|f_u(\alpha)\right|^4}{2}\left(\left|s_1^2 - s_2^2\right| + \left|t_1^2 - t_2^2\right|\right)
\end{aligned}$$

10. On a par linéarité des intégrales convergentes

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{I}(a,b) - \mathrm{I}(a',b')\right| &= \left|\int_0^{+\infty} f_u(a) f_u(b) - f_u(a')\, f_u(b')\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} \left|f_u(a) f_u(b) - f_u(a')\, f_u(b')\right| \mathrm{d}u \\
&\leqslant \frac{|a^2 - a'^2| + |b^2 - b'^2|}{2} \int_0^{+\infty} f_u(\alpha)^4\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit en posant

$$\mathrm{C} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f_u(\alpha)^4\,\mathrm{d}u.$$

(l'intégrale étant bien convergente).

11. En reprenant le résultat de la question 8, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{I}(a_n, b_n) = \mathrm{I}(a,b).$$

Par conséquent $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}(a_n, b_n) = \mathrm{I}(a,b).$

Or on a aussi

$$\left|\mathrm{I}\left(\mathrm{M}_{a,b}, \mathrm{M}_{a,b}\right) - \mathrm{I}(a_n, b_n)\right| \leqslant \mathrm{C}\left(\left|a_n^2 - \mathrm{M}_{a,b}^2\right| + \left|b_n^2 - \mathrm{M}_{b,b}^2\right|\right)$$

On a de plus

$$\left|a_n^2 - \mathrm{M}_{a,b}^2\right| + \left|b_n^2 - \mathrm{M}_{a,b}^2\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}(a_n, b_n) = \mathrm{I}(\mathrm{M}_a, b, \mathrm{M}_a, b).$$

On conclut arec la question 7.b)

$$\mathrm{I}(a,b) = \mathrm{I}\left(\mathrm{M}_{a,b}, \mathrm{M}_{a,b}\right) = \frac{\pi}{2\mathrm{M}_{a,b}}.$$

12.a) Le changement de variable proposé est $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ avec

$$\mathrm{d}u = \frac{b}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

De plus

$$u = b\tan t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad u = b\tan t \underset{t\to\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

Or on montre que

$$\tan^2 t = \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} - 1.$$

puis

$$\frac{\cos^2 t}{b^2} = \frac{1}{b^2\tan^2 t + b^2} = \frac{1}{u^2+b^2}.$$

Comme $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t$ est positif et on obtient la simplification de l'intégrande :

$$\frac{\cos t/b}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+u^2}}.$$

Le changement de variable donne alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b\sin^2 t}} \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t\sqrt{a^2 + b\tan^2 t}} \\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t/b}{\sqrt{a^2+b^2\tan^2 t}} \cdot \frac{b\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} \\
=&\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+u^2}}\,\mathrm{d}u \\
=&\mathrm{I}(a,b).
\end{aligned}$$

12.b) Pour calculer numériquement cette intégrale, on peut :

→ Utiliser la méthode des rectangle.

→ Utiliser le programme de la question 6 puis la relation de la question 11.

13.a) On est dans le cas d'une progression géométrique de raison α.

→ Si $\alpha \neq 1$

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

→ Si $\alpha = 1$

$$\gamma_n = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

13.b) Si $|\alpha|<1$, on sait que $\alpha^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et alors

$$\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $\alpha=-1$, on a

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

→ Si $\alpha=1$

$$\gamma_n = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

→ Si $\alpha>1$, on a par les croissances comparées

$$\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

→ Si $\alpha<1$, la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ change de signe ã chaque rang à partir d'un certain rang sans converger.

14.a) Déterminons le spectre. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_2) &= \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)-\frac{1}{3}\\ &= \lambda^2-\frac{5}{6}\lambda-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

On constate que 1 est racine évidente. Par les relation coefficients/racines, $-1/6$ est l'autre racine. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(A)=\left\{1;-\frac{1}{6}\right\}.$$

On vérifie ensuite que

$$A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \quad\text{et}\quad A\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}.$$

On conclut en posant

$$f_1=(1,1)\in\mathbb{R}^2,\quad f_2=(4,-3)\in\mathbb{R}^2$$

de sorte que $w(f_1)=f_1$, $w(f_2)=f_2$ avec f_1,f_2 non nuls. Ces deux vecteurs forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$ a 2 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

14.b) Par récurrence, on établit

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad A^k=P\begin{bmatrix}1&0\\0&(-1/6)^k\end{bmatrix}P^{-1}.$$

15. Posons

$$U=P\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}\quad\text{et}\quad V=P\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}P^{-1}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}A^k &= P\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\left(-\frac{1}{6}\right)^k\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)P^{-1}\\ &= P\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}+\left(-\frac{1}{6}\right)^k P\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}P^{-1}\\ A^k &= U+\left(-\frac{1}{6}\right)^k V.\end{aligned}$$

16. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}A^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(U+\left(-\frac{1}{6}\right)^k V\right)\\ &= U+\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1/6)^k}{n+1}V\\ C_n &= U+\gamma_n V\end{aligned}$$

où γ_n est défini à la question 13 avec $\alpha=-1/6$.
D'après 13.b) $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$$C_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U.$$

On pose donc $C=U$.

17. Comme

$$\begin{aligned}C^2 &= \left(P\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}\right)\left(P\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}\right)\\ &= P\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}^2P^{-1}\\ &= P\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}P^{-1}\\ C^2 &= C.\end{aligned}$$

On a donc $v\circ v=v$ avec v linéaire, c'est un projecteur.
Si on note $P=[F_1,F_2]$ les colonnes de P, on a

$$F_1=P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad F_2=P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

et

$$CF_1=P\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=F_1.$$

$$CF_2=P\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=0_{2,1}.$$

Ces relations se traduisent par

$$v(f_1)=f_1\quad\text{et}\quad v(f_2)=0_{\mathbb{R}^2}.$$

On en déduit (sachant que le noyau et l'image sont de dimension 1)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\, v &= \mathrm{Vect}(f_2)=\mathrm{Vect}((4,-3))\\ \mathrm{Im}\, v &= \mathrm{Vect}(f_1)=\mathrm{Vect}((1,1)).\end{aligned}$$

18. Raisonnons par récurrence sur la propriété

$$\mathscr{P}(k):\quad \gamma=\frac{1}{r}(\alpha_k+\cdots+\alpha_{k+r-1})$$

→ *Initialisation.* $\mathscr{P}(0)$ est vraie par définition de γ.

→ *Hérédité.* Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}(\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+1+r-1})\\ &= \frac{1}{r}(\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+r-1}+\alpha_{k+r})\\ &= \frac{1}{r}(\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+r-1}+\alpha_k)\quad (r\text{-périodicité})\\ &= \frac{1}{r}(\alpha_k+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+r-1})\\ &= \gamma.\end{aligned}$$

Dès lors, $\mathscr{P}(k+1)$ est vérifiée, ce qui termine la récurrence.