CHAPITRE 6

# Variables aléatoires à densité

*If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.*

JOHN VON NEUMANN
Mathématicien et physicien américano-hongrois (1903-1957)

## 1 Rappels : intégrales généralisées

### 1.1 Convergence et convergence absolue

**DÉFINITION** — **intégrale généralisée en $b$**

*Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.*
***L'intégrale généralisée** (ou impropre) de $f$ sur $[a;b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle est dite **convergente** si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $x$ tend vers $b$ avec $x < b$. Dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

*Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, l'intégrale est dite **divergente**.*

**Remarques.**
- La définition s'étend aux fonctions continues sur $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
- Si $f$ est une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

**L'intégrale généralisée de $f$ sur** $]a, b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Elle est dite **convergente** si pour un réel $c \in ]a, b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**THÉORÈME** — **absolue convergence**

*$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite **absolument convergente** si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.*

*De plus, **si** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, **alors** elle est convergente.*

⚠ **Attention.** La réciproque est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes sans être absolument convergente.

## 1.2 Critères de convergence

À l'aide du théorème de convergence monotone, on montre que, pour $f : [a;b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'application $x \in [a;b[ \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.

**PROPOSITION** — **critère de comparaison et de négligeabilité**

*Soient $f$, $g$ deux fonctions continues définies sur $[a,b[$.*

- ***Si***
  - → *$f$ et $g$ sont positives,*
  - → *pour tout $x \in [a,b[$, $\quad f(x) \leqslant g(x)$,*
  - → *$\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,* ***alors*** *$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.*
- ***Si***
  - → *$g$ est positive sur un voisinage de $b$ ;*
  - → *$f \underset{b^-}{=} o(g)$ ;*
  - → *$\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente,* ***alors*** *$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.*

**PROPOSITION** — **critère d'équivalence**

*Soient $f$, $g$ deux applications continues définies sur $[a,b[$.*

***Si***
- → *$f$ et $g$ sont de signe constant sur un voisinage de $b$,*
- → *$f \underset{b^-}{\sim} g$,*

***alors*** *les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.*

**Remarque.** En pratique, on compare souvent aux **intégrales de Riemann.**

- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente en 0 si et seulement si $\alpha < 1$ ;
- L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

## 1.3 Règles de calculs

Sous réserve de convergence, les propriétés de linéarité, de croissance de l'intégrale, l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles sont encore valables. Par contre, pour effectuer une intégration par parties, on se ramène à un segment.

**THÉORÈME** — **changement de variable**

*Soit $f$ continue sur un intervalle $]a;b[$.*

**Si** $\varphi : ]\alpha;\beta[ \to ]a;b[$ *est une bijection croissante de classe* $\mathscr{C}^1$,

**alors** *les intégrales généralisées* $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ *et* $\int_\alpha^\beta \varphi'(t) f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature.*

*Dans le cas de convergence,*
$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

**Remarque.** L'énoncé s'étend au cas décroissant.

Méthode

**Rédiger un changement de variable dans le cas généralisé**

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x.$$

- La fonction $x \in [0;+\infty[ \mapsto \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, I est une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus,
$$\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}^{x/2}}.$$
Comme $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x$ est convergente, par le critère d'équivalence pour des intégrandes positives, I est convergente.
- Soit $\varphi : x \in [0;+\infty[ \mapsto \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$. La fonction $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ par composition. De plus,
$$\varphi(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
$\varphi$ est une bijection croissante de $[0;+\infty[$ dans $[\sqrt{2};+\infty[$. Par le théorème de changement de variable, les intégrales
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{t}\,\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$
sont de même nature (convergentes) et égales.
- Calculons l'intégrale de droite par décomposition
$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

Après simplification
$$\mathrm{I} = 2\ln(\sqrt{2}+1).$$

**Exercice 1**

✦ Effectuer le changement de variable $u = 1/t$ dans l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire?

p. 24

# 2 Variables aléatoires à densité

## 2.1 Définition et premières propriétés

**DÉFINITION** — **variable aléatoire à densité**

*Soit $X$ une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Notons $F_X$ la fonction de répartition de $X$.*
*On dit que $X$ est une **variable aléatoire à densité** si :*

- *$F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
- *$F_X$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.*

**Exemples.**
- Si $F_X$ vérifie :

$$\forall\, x \in ]-\infty; 0[,\ F_X(x) = 0, \quad \forall\, x \in [0;1],\ F_X(x) = x, \quad \forall\, x \in ]1; +\infty[,\ F_X(x) = 1,$$

alors $X$ est une variable à densité.
On dira dans la suite que $X$ suit une loi uniforme sur $[0;1]$.
- Les variables aléatoires discrètes ne sont pas des variables à densité.

**Remarque.** Soit $X$ une variable aléatoire et $F_X$ sa fonction de répartition. Nous avons vu que pour tous réels $a$, $b$ avec $a < b$,

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbf{P}\Big(\big[a < X \leqslant b\big]\Big).$$

De plus, on montre que

$$\mathbf{P}\Big(\big[X = b\big]\Big) = F_X(b) - \lim_{\substack{a \to b \\ a < b}} F_X(a).$$

***Preuve.*** En effet, on a par exemple $[X = b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [b - 1/n < X \leqslant b]$. La suite d'événements $\big([b-1/n < X \leqslant b]\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, le théorème de la limite monotone dans sa version probabiliste s'applique. Ainsi,

$$\mathbf{P}\Big(\big[X = b\big]\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\big([b - 1/n < X \leqslant b]\big) = F_X(b) - \lim_{n\to+\infty} F_X(b - 1/n).$$

On conclut en rappelant que la fonction de répartition est croissante. ■

Si $X$ est une variable aléatoire, $F_X$ est continue. En particulier, pour $b \in \mathbb{R}$ : $\boxed{\mathbf{P}\Big(\big[X = b\big]\Big) = 0.}$
Plus généralement, pour tous $a$, $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\Big(\big[X \in ]a; b[\big]\Big) = \mathbf{P}\Big(\big[X \in [a; b[\big]\Big) = \mathbf{P}\Big(\big[X \in ]a; b]\big]\Big) = \mathbf{P}\Big(\big[X \in [a; b]\big]\Big).$$

**DÉFINITION** — **densité de probabilité**

*On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** si elle vérifie :*

- *$f$ est positive sur $\mathbb{R}$.*
- *$f$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.*
- *L'intégrale suivante est convergente et* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

**Exemple.** Justifions que la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$ définit une densité de probabilité.
- $f$ est clairement une fonction positive.
- $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Pour $A \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^A \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)} = \left[\frac{\arctan(t)}{\pi}\right]_0^A = \frac{\arctan(A) - \arctan(0)}{\pi} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi/2}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

De même, pour $B \in \mathbb{R}^-$, par parité de $f$, $\displaystyle\int_B^0 f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[B\to-\infty]{} \frac{1}{2}$. On a bien la convergence et l'égalité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
En conclusion, $f$ est une densité de probabilité.

**Exercice 2**

**Exemples** *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. ✦ Montrer que l'application $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

p. 24

est une densité de probabilité.

2. ✦✦ On considère l'application $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{\lambda}{\mathrm{e}^t+1}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(t)$.
   a) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que : $\forall x > 0$, $\frac{1}{x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
   b) En déduire la valeur de la constante $\lambda$ pour que $f$ soit une densité de probabilité.

## Proposition — densité de probabilité d'une variable à densité

*Soit* X *une variable aléatoire à densité.*
*Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs positives qui coïncide avec ${F_X}'$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points est une densité de probabilité. On dit que $f$ est une densité de probabilité de la variable aléatoire* X.

***Preuve.*** Vérifions les deux premiers points de la définition :
→ Par hypothèse, $f$ est une fonction positive. Notons toutefois que la fonction de répartition étant croissante, la dérivée $F'_X$ est positive sur son ensemble de définition. On s'assure donc seulement que $f$ est positive aussi en les points où $f$ et ${F_X}'$ ne coïncident pas.
→ Comme X est une variable à densité, sa fonction de répartition est $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points. Sa dérivée est donc continue sauf un nombre fini de points.
→ Le dernier point sera repris dans la démonstration de la proposition suivante. ■

## Proposition — densité et fonction de répartition

*Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $F_X$, $f_X$ respectivement la fonction de répartition et une densité de* X.

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et* $\quad F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.
- *Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tels que $a < b$,* $\quad \mathbf{P}\Big([X \in [a;b]]\Big) = \displaystyle\int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

***Preuve.*** Notons $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, l'ensemble des points de discontinuité de $f_X$ avec pour $t \notin E$, $f_X(t) = F'_X(t)$. On impose l'ordre $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$.

- Prouvons le premier point. Soit $i \in [\![1; m-1]\!]$. Étudions l'intégrale $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme l'intégrande $f_X$ est continue sur $]x_i; x_{i+1}[$, on est dans le cas d'une intégrale généralisée en $x_i$ et $x_{i+1}$. Soient $x, y \in\, ]x_i; x_{i+1}[$, l'intégrande est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x; y]$, ainsi

$$F_X(y) - F_X(x) = \int_x^y {F_X}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, la continuité de $F_X$ sur $\mathbb{R}$ (en particulier, en $x_i$ et $x_{i+1}$) donne :

$$F_X(y) \underset{y \to x_{i+1}}{\longrightarrow} F_X(x_{i+1}) \quad \text{et} \quad F_X(x) \underset{x \to x_i}{\longrightarrow} F_X(x_i).$$

On en déduit la convergence de l'intégrale généralisée avec :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(x_{i+1}) - F_X(x_i).$$

→ De même, pour tout $x < x_1$, on a $F_X(x_1) - F_X(x) = \displaystyle\int_x^{x_1} f_X(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $F_X(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\int_{-\infty}^{x_1} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F(x_1).$$

→ Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $j \in [\![1; m]\!]$, le plus grand indice $i$ tel que $x_i < x$. Par télescopage

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_1) = \big(\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_j)\big) + \big(\mathrm{F}(x_j) - \mathrm{F}(x_{j-1})\big) + \big(\mathrm{F}(x_{j-1}) - \mathrm{F}(x_{j-2})\big) + \cdots + \big(\mathrm{F}(x_2) - \mathrm{F}(x_1)\big).$$

D'après les deux points précédents et la relation de Chasles :

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_1) = \int_{x_j}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{x_1}^{x_2} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_1}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, $$\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x) = \int_{x_1}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{F}(x_1) = \int_{x_1}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{x_1} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons vu que :

$$\mathbf{P}\Big([\mathrm{X} \in [a; b]]\Big) = \mathbf{P}\Big([\mathrm{X} \in ]a; b]]\Big) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(b) - \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(a).$$

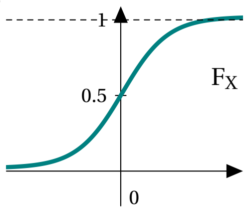
De nouveau, la relation de Chasles donne :

$$\mathbf{P}\Big([\mathrm{X} \in [a; b]]\Big) = \int_{-\infty}^{b} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{a} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

**Remarque.** En particulier, on a $\mathbf{P}\big([\mathrm{X} \geqslant x]\big) = \mathbf{P}\big([\mathrm{X} > x]\big) = 1 - \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$

**Exemple.** Reprenons la densité $f$ de la méthode précédente et calculons la fonction de répartition F. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,




$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\pi(1+t^2)} = \left[\frac{\arctan(t)}{\pi}\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{\arctan(x) - \lim\limits_{t\to-\infty} \arctan(t)}{\pi} = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**Exercice 3**

✧ Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} < 0)$ lorsque X est une variable aléatoire qui a pour densité la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

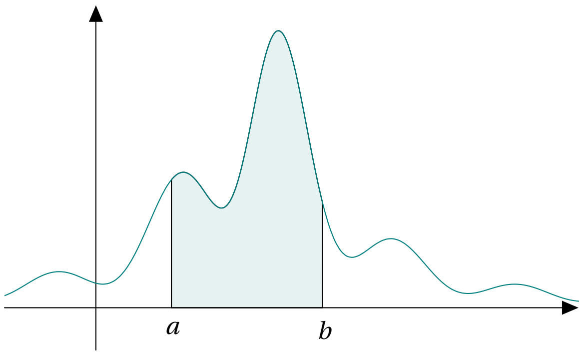
p. 24

⚠ **Attention.** Il ne faut pas confondre fonction de répartition et densité.
Rappelons qu'une fonction de répartition est une fonction croissante de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Le lien est, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf un nombre fini,

$$\boxed{f_{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}{}'(t).}$$

La densité d'une variable X n'est pas unique alors que la fonction de répartion l'est.

**Interprétation graphique**




Traçons la courbe représentative d'une densité.
L'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ correspond exactement à la probabilité que la variable aléatoire prenne les valeurs comprises entre $a$ et $b$.

$$\boxed{\text{Aire} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}\Big(\big[a \leqslant X \leqslant b\big]\Big).}$$

Lorsque $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$, on retrouve bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 = \mathbf{P}(\Omega).$$

De nouveau, on constate que pour une variable aléatoire continue, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}\Big(\big[X = a\big]\Big) = 0$.

**PROPOSITION** **la densité caractérise la loi**

*Soient X et Y deux variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.*
*Si $f$ est à la fois une densité de X et Y, alors X et Y ont même loi.*

***Preuve.*** On rappelle que deux variables aléatoires ont même loi lorsqu'elles ont même fonction de répartition. Or, pour $x \in \mathbb{R}$, et d'après la proposition précédente

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F_Y(x).$$

Deux variables aléatoires à densité, ayant la même densité de probabilité, ont même loi. ∎

**Remarque.** En pratique, donner la loi d'une variable aléatoire à densité est équivalent à donner

$$\mathbf{P}\Big(\big[X \in [a, b]\,\big]\Big) \text{ pour tous } a,\, b \in \mathbb{R},$$

C'est aussi équivalent à donner la fonction de répartition ou une densité de probabilité.

**PROPOSITION** **conditions pour une variable à densité**

*Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

***Si***
- *La fonction $f$ est positive.*
- *La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un ensemble fini de points.*
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

*Alors* *il existe une variable aléatoire X dont $f$ est une densité de probabilité.*

*Résultat admis.*

**Exemple.** *Loi de Gumbel*
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \mathrm{e}^{-x-\mathrm{e}^{-x}}$$

est densité de probabilité. En effet, il est clair que la fonction est positive et continue sur $\mathbb{R}$ (par composition). Or pour tous A, B $\in \mathbb{R}$ avec A < B,

$$\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^B \mathrm{e}^{-x-\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_A^B \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}}\Big]_A^B \underset{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}}{\longrightarrow} 1.$$

Ce qui justifie la convergence et l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

## 2.2 Cas des variables du type $Y = \varphi(X)$

Méthode

**Comment montrer qu'une variable aléatoire est à densité et obtenir une densité ?**

Soit X, une première variable aléatoire à densité et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application. On pose $Y = \varphi(X)$. Pour justifier que Y est une nouvelle variable aléatoire, on peut procéder comme suit :

- On précise $Y(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par Y.
- On exprime la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En particulier, on cherche pour tout $t \in Y(\Omega)$, la probabilité $\mathbf{P}\big([Y \leqslant t]\big)$.
- Ensuite, on s'assure que $F_Y$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points (noté dans la suite D).
- On calcule la dérivée $F_Y{}'$ sur $\mathbb{R} \setminus D$ afin d'avoir une densité de Y.

⚠ **Attention.** Dans le cas général d'une application $\varphi$, rien ne garantit que $Y = \varphi(X)$ reste une variable aléatoire à densité, ni même une variable aléatoire (voir par exemple l'exercice **??**, **??**).

**Exercice 4**

✧ **Un exemple avec la loi de Laplace**
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable à densité et que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $t$ par $f(t) = \lambda \exp(-|t|)$ est une densité de X.

1. Quelle est la valeur de $\lambda$ ? Préciser le graphe de $f$.
2. Déterminer la fonction de répartition de X. *Indication. On distinguera $x \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$.* p. 24
3. On pose $Y = 3X - 2$.
   a) Établir une relation entre $F_X$ et $F_Y$, les fonctions de répartition de X et Y.
   b) Vérifier que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité.

Généralisons l'exercice précédent.

**Exemple. Calcul de la loi de $Y = aX + b$ en fonction de la loi de X**
Soient X une variable aléatoire à densité et $a, b \in \mathbb{R}$.
Pour donner la loi de $Y = aX + b$, nous avons vu qu'il suffit de donner la fonction de répartition ou une densité de Y.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Pour $a > 0$.

$$[Y \leqslant t] = \left[X \leqslant \frac{t-b}{a}\right] \quad \Rightarrow \quad F_Y(t) = \mathbf{P}\big([Y \leqslant t]\big) = \mathbf{P}\left(\left[X \leqslant \frac{t-b}{a}\right]\right) = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Rappelons que $F_X$ est continue et, sauf en un nombre fini de points, $F_X$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, $F_Y$ est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini de points sur $\mathbb{R}$. Y est donc une variable aléatoire à densité. $F_Y$ est dérivable sauf en un nombre fini de points avec :

$$f_Y(t) = F_Y{}'(t) = \frac{1}{a} F_X{}'\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Relation que l'on peut étendre à tout réel $t$ pour définir une densité de Y.

- Pour $a < 0$. On a maintenant $[Y \leqslant t] = \left[X \geqslant \frac{t-b}{a}\right]$. Passons au complémentaire,

$$F_Y(t) = \mathbf{P}\big([Y \leqslant t]\big) = \mathbf{P}\left(\left[X \geqslant \frac{t-b}{a}\right]\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\left[X < \frac{t-b}{a}\right]\right) = 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Car, la variable aléatoire X est à densité, $\mathbf{P}\left(\left[X < \frac{t-b}{a}\right]\right) = \mathbf{P}\left(\left[X \leqslant \frac{t-b}{a}\right]\right)$. Par dérivation, on a, pour tout réel $t$ (sauf un nombre fini),

$$f_Y(t) = -F_Y{}'(t) = -\frac{1}{a}F_X{}'\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{-a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

De nouveau, on étend cette égalité à tout réel $t$.
En résumé, on obtient dans tous les cas

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_Y(t) = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

**Exercice 5**

✦✦ Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[-1;1]$. C'est-à-dire, une densité de X est donnée par $f = 1/2 \cdot \mathbf{1}_{[-1;1]}$.

1. Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.
2. Faire de même avec $V = X^2$.
3. *Cas général.*
   Soit Z une variable aléatoire réelle à densité $f$ continue sur $\mathbb{R}$. Justifier que $Y = Z^2$ est une variable aléatoire réelle admettant une densité nulle sur $\mathbb{R}^-$ et donnée sur $\mathbb{R}_*^+$ par
   $$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})\right).$$

p. 25

**Hasard et mécanique quantique** — **Le saviez-vous**

La mécanique quantique est une partie de la physique qui étudie l'infiniment petit des particules (niveau atomique ou subatomique). Elle se développa au début du XX$^e$ siècle. Cette théorie, d'une redoutable efficacité dans ses prédictions, fait pourtant une place importante au hasard.
Suivant le principe d'incertitude de Heisenberg, il n'est pas possible de connaître à la fois la position et la vitesse d'une particule. Ainsi, au lieu d'étudier la position exacte de la particule, on regarde la probabilité de présence dans une certaine zone.
Par exemple, l'équation de Schrödinger décrit l'évolution de l'onde de probabilité $\Psi(\mathbf{r}, t)$ d'un électron se déplaçant dans un potentiel $V(\mathbf{r}, t)$ :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(\mathbf{r}, t)\right]\Psi(\mathbf{r}, t).$$

La quantité $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ donne la densité de probabilité de trouver l'électron en un point $\mathbf{r}$.
Albert Einstein s'opposa à cette nouvelle approche de la physique. Il refusait que les lois de la nature puissent faire appel directement au hasard.

*Gott würfelt nicht* *(Dieu ne joue pas au dés).* EINSTEIN.

## 3 Espérance d'une variable à densité

### 3.1 Définition

**DÉFINITION** **espérance dans le cas à densité**

*Soit* X *une variable aléatoire à densité* $f_X$ *sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
*On définit* ***l'espérance de*** X*, sous réserve de convergence absolue, comme le réel*

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

⚠ **Attention.** Comme pour les variables aléatoires discrètes, il ne faut pas oublier la convergence absolue.

**Exemples.**

- Considérons X une variable à densité dont une densité est précisée par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction $f$ est continue par morceaux, nulle en dehors d'un segment. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc absolument et X admet une espérance avec

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\, f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

- Reprenons l'exemple d'une variable aléatoire Y de densité $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$.

Par les croissances comparées et le critère de négligeabilité, il est clair que $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. L'espérance existe. La densité $f$ est une fonction paire, donc $t \in \mathbb{R} \mapsto t\, f(t)$ est impaire. Il vient

$$\int_{-\infty}^{0} t\, f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} t\, f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{puis,} \quad \mathbf{E}(Y) = 0.$$

⚠ **Attention.** La condition de parité de la densité n'est pas suffisant, il faut aussi que l'espérance existe comme le montre l'exemple suivant.

- On dit que Z suit une *loi de Cauchy*, lorsque Z admet pour densité :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_Z(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

On a l'équivalent $t\, f_Z(t) \underset{+\infty}{\sim} 1/(\pi t)$. Or, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente. Les fonctions sont positives sur $[1;+\infty[$, *le critère d'équivalence* s'applique, $\int_1^{+\infty} t\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

L'espérance de Z n'est pas définie puisque l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f_Z(t)\,\mathrm{d}t$ ne converge pas (absolument).

**Exercice 6**

✧ **Loi de Pareto**

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et X une variable aléatoire de densité $f$ définie par :

$$f(t) = \frac{1}{\alpha} t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}} \quad \text{si} \quad t \in [1;+\infty[ \quad \text{et } f(t) = 0 \text{ sinon.}$$

p. 25

1. Vérifier que $f$ est bien une densité de probabilité.
2. Calculer $\mathbf{P}\big([0 \leqslant X \leqslant 1+\alpha]\big)$ en fonction de $\alpha$.
3. Pour quelles valeurs de $\alpha$, X admet-elle une espérance ? La calculer quand elle existe.

## 3.2 Règles de calculs sur l'espérance

Les résultats suivants sont identiques au cas des v.a discrètes dénombrables.

**PROPOSITION** — **linéarité de l'espérance**

*Soient* $X$ *et* $Y$ *des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *la variable aléatoire* $\lambda X + \mu Y$ *admet une espérance et on a :*

$$\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y).$$

**Vocabulaire.** Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On dit que $X$ est **centrée** si $X$ admet une espérance et $\mathbf{E}(X) = 0$.
D'après la proposition précédente, la variable aléatoire $X - \mathbf{E}(X)$ est toujours une variable aléatoire centrée.

**PROPOSITION** — **existence par domination**

*Soient* $X$ *et* $Y$ *sont deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé.*

***Si***
- $|X| \leqslant Y$.
- $Y$ *admet une espérance.*

***Alors,*** $X$ *admet une espérance et* $|\mathbf{E}(X)| \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

**Exemple.** Si $X$ est une variable aléatoire bornée, alors $X$ admet une espérance.

**PROPOSITION** — **positivité et croissance de l'espérance**

*Soient* $X$, $Y$ *des variables aléatoires à densité admettant une espérance.*

- *Positivité de l'espérance : si* $X \geqslant 0$ *presque sûrement, alors* $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$.
- *Croissance de l'espérance : si* $X \leqslant Y$ *presque sûrement, alors* $\mathbf{E}(X) \leqslant \mathbf{E}(Y)$.

## 3.3 Formule de transfert

**THÉORÈME** — **de transfert**

*Soient* $X$ *une variable aléatoire admettant une densité* $f_X$ *nulle en dehors de* $]a, b[$ *avec* $(a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ *et* $\varphi : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. On a l'équivalence entre*

- **i)** *La variable* $\varphi(X)$ *admet une espérance.*
- **ii)** *L'intégrale* $\displaystyle\int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument.*

*Et en cas de convergence absolue,* $$\mathbf{E}\big(\varphi(X)\big) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

***Preuve.*** **Dans le cas bijectif et** $\mathscr{C}^1$**.**

Supposons que la fonction $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) > 0$. On suppose de plus que $F_X$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f_X$ est une densité de $X$ continue sur $\mathbb{R}$.

• **La variable Y est à densité, puis calcul d'une densité.**
Dans un premier temps, vérifions que $Y = \varphi(X)$ est une variable à densité et précisons une densité.

→ *L'ensemble* $Y(\Omega)$.
Par le théorème de la bijection, $\varphi$ est strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle ouvert $\varphi(\mathbb{R}) = ]\alpha,\beta[$ (avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) et la réciproque $\varphi^{-1}$ est continue, strictement croissante de $]\alpha,\beta[$ dans $\mathbb{R}$. En particulier

$$Y(\Omega) \subset \varphi(\mathbb{R}) = ]\alpha,\beta[.$$

→ *Lien entre* $F_Y$ *et* $F_X$.
Soit $t \in ]\alpha,\beta[$. Comme $\varphi$ est bijective et strictement croissante

$$F_Y(t) = \mathbf{P}\big([Y \leqslant t]\big) = \mathbf{P}(\varphi(X) \leqslant t) = \mathbf{P}\left(X \leqslant \varphi^{-1}(t)\right) = F_X\left(\varphi^{-1}(t)\right) \qquad (\star)$$

De plus, pour $t \geqslant \beta$, $F_Y(t) = 1$ et pour $t \leqslant \alpha$, $F_Y(t) = 0$.

→ *Continuité et dérivabilité de* $F_Y$.
Par composition, $F_Y$ est continue sur $]\alpha,\beta[$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $F_Y$ est aussi continue sur $]-\infty;\alpha[$. De plus, par composition des limites

$$\left|\begin{array}{l} \to\ \varphi^{-1}(t) \underset{t\to\alpha^+}{\longrightarrow} -\infty \\ \to\ F_Y(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad F_X\left(\varphi^{-1}(t)\right) \underset{t\to\alpha^+}{\longrightarrow} 0 = F_Y(\alpha).$$

Ce qui prouve la continuité en $\alpha$. De même si $\beta \in \mathbb{R}$. Finalement, $F_Y$ est bien continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, par le théorème de dérivation des applications réciproques, on justifie la dérivabilité de $\varphi^{-1}$ sur $]\alpha,\beta[$ avec

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \left(\varphi^{-1}\right)'(t) = \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)}$$

À partir de la relation $(\star)$, on justifie par composition que $F_Y$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha,\beta[$ et Y est une variable à densité.

→ *Expression d'une densité.*
Une densité est donnée par dérivation d'une fonction composée

$$\forall\, t \in ]\alpha;\beta[, \qquad f_Y(t) = F_Y{}'(t) = \left(\varphi^{-1}\right)'(t)\cdot F_X{}'\left(\varphi^{-1}(t)\right) = \frac{f_X\left(\varphi^{-1}(t)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)}.$$

De plus pour $t \notin ]\alpha,\beta[$, $f_Y(t) = 0$. En particulier pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$f_Y\big(\varphi(x)\big) = \frac{f_X\big(\varphi^{-1}(\varphi(x))\big)}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(\varphi(x))\big)} = \frac{1}{\varphi'(x)} f_X(x) \qquad (\bullet)$$

• **Existence et calcul de l'espérance.**
La variable Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta t f_Y(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Effectuons le changement de variable $t = \varphi(x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant. I est absolument convergente si et seulement si l'intégrale suivante l'est aussi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_Y\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{car} \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x).$$

Or, en utilisant $(\bullet)$, cette dernière se simplifie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ce qui justifie bien l'équivalence entre **i**)et **ii**). On conclut en rappelant qu'en cas de convergence, les intégrales sont égales :

$$\mathbf{E}(Y) = \int_\alpha^\beta t f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

**Exercice 7**

✧ **Applications**

1. Soit X, une variable à densité admettant une espérance et $a, b \in \mathbb{R}$. À l'aide de la formule de transfert, montrer que $aX + b$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b.$$

2. Soit X une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par $f = \mathbf{1}_{]0;1[}$. Justifier l'existence de l'espérance $\mathbf{E}\big(\ln(X)\big)$ et la calculer.

p. 26

# 4 Moments et variance d'une variable à densité

## 4.1 Moments

Pour tout entier naturel $s$, le moment d'ordre $s$ d'une variable aléatoire X est le nombre $m_s(X)$ défini par :

$$m_s(X) = \mathbf{E}(X^s).$$

En particulier pour $s = 1$, on retrouve l'espérance $m_1(X) = \mathbf{E}(X)$.
Dans le cas d'une variable aléatoire à densité, et sous réserve d'absolue convergence, la formule de transfert donne :

$$m_s(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exercice 8**

✦ On définit la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x) & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité $f$.
Montrer que X admet des moments à tout ordre et les calculer.

p. 26

**Remarque.** On montre que si X a un moment d'ordre $r$ alors, X admet un moment d'ordre $s$ pour tout entier $s \leqslant r$.

**Exercice 9**

✦✦

1. Prouver la remarque précédente.
2. Soit $r \in \mathbb{N}^*$, construire une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre $r$ mais pas de moment d'ordre $r + 1$.

p. 27

## 4.2 Variance

De nouveau, les résultats qui suivent sont calqués sur le cas des variables discrètes.

**DÉFINITION** — variance et écart-type

*Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

- *On appelle **variance** d'une variable aléatoire X, la quantité* $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\Big(\big(X - \mathbf{E}(X)\big)^2\Big)$.
- *On appelle **écart-type** de X, la quantité* $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

**Remarque.** La quantité $\sigma(X)$ est bien définie car $\big(X - \mathbf{E}(X)\big)^2 \geqslant 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbf{V}(X) \geqslant 0$.

L'écart-type permet de quantifier les écarts par rapport à la moyenne. Un écart-type fort traduit un « grand éloignement » des valeurs de X par rapport à sa moyenne.
En reprenant les preuves dans le cas discret, on prouve les deux énoncés suivants.

**PROPOSITION** — **propriétés de la variance**

*Soit* X *une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

- $\mathbf{V}(X) = 0$ *si et seulement si* X *est une application presque sûrement constante.*
- *Pour tous réels* $a, b$,

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2\,\mathbf{V}(X) \qquad ; \qquad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

**Vocabulaire.** Soit X une variable aléatoire. Nous avons vue qu'une variable aléatoire X est dite **centrée** si $\mathbf{E}(X) = 0$. Elle est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$. La variable aléatoire $Y = \frac{X-\mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée, réduite.

En pratique, on calcule la variance avec :

**THÉORÈME** — **formule de KOENIG-HUYGENS**

*Soit* X *une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2.$$

**Exercice 10**

✦ Prouver cet énoncé. p. ??

## 5 Simulation avec Python

### 5.1 Rappels : les histogrammes

Un histogramme donne une idée graphique de la répartition des valeurs d'un **échantillon** $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pour cela, on découpe l'ensemble des valeurs possibles en un certain nombre d'intervalles. Notons $p \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'intervalles choisis. Ces intervalles doivent être deux à deux disjoints, et leur réunion est égale à (ou contient) l'ensemble des valeurs possibles. Plus précisément, en notant $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1} \in \mathbb{R}$, les bornes de tous ces intervalles avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_{p+1}$, on a

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{p} [a_i ; a_{i+1}[.$$

L'intervalle $[a_i ; a_{i+1}[$ est une **classe**. On peut ainsi définir l'**effectif** $m_i$ d'une classe comme le nombre d'éléments de E appartenant à la classe puis sa fréquence $f_i$ comme le rapport de l'effectif sur le nombre total d'éléments de E.

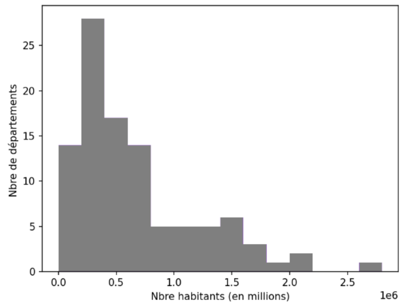
Ensuite, le graphique est obtenu en traçant, pour chaque $i \in [\![1, p]\!]$, le rectangle de base $[a_i, a_{i+1}]$ sur l'axe des abscisses, et

- d'aire égale à $m_i$ (on parle d'histogramme en effectif) ;
- d'aire égale à $f_i$ (on parle d'histogramme en fréquence).
  Dans ce cas, la somme des aires des rectangles est égale à 1.

• **Exemple 1. Répartitions du nombre d'habitants**
Le site de L'I.N.S.E.E (Institut national de la statistique et des études économiques) contient de très nombreuses statistiques en libre accès. On y trouve par exemple la liste du nombre d'habitants par département.

Editeur

```
# L désigne dans la suite la liste
# du nombre d'habitant par département
# Création d'un tableau avec les intervalles de
    longueurs 200 000 (habitants)
inter =np.linspace(0,2.8*10**6,15)
plt.hist(L, bins=inter)
plt.xlabel('Nbre habitants (en millions)')
plt.ylabel('Nbre de départements ')
plt.show()
```



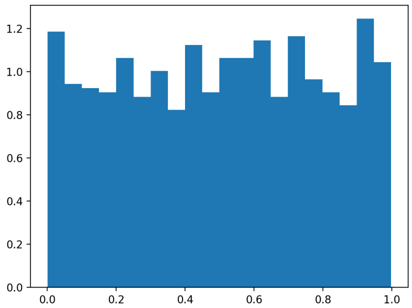

Donnons un second exemple lié aux probabilités. Dans la suite, on construit l'échantillon à partir de plusieurs simulations d'une même variable aléatoire.

- **Exemple 1. Simulation d'une loi uniforme**

La fonction Python ci-dessous prend en argument un entier naturel $m$ non nul et tire $m$ réels uniformément dans $[0;1]$, puis affiche l'histogramme.

Editeur

```
L= np.random.rand(1000)


plt.hist(L, bins=20, density=True)
 # Création de l'histogramme
 # avec 20 classes
plt.show()
```



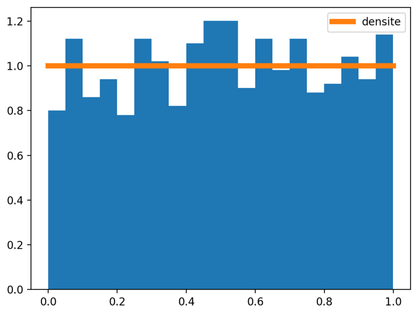
Expliquons les commandes :

- `density=True` : Trace l'histogramme en fréquence.
- `bins=...` : Si on met une valeur entière en argument, on définit le nombre de classes. Sinon, c'est une liste (ou un tableau) qui définit les différents intervalles des classes.
- `rwidth=...` : Largeur relative de la barre par rapport à l'intervalle (facultatif).

Dans ce dernier exemple, il est utile de rajouter la courbe représentative d'une densité. Plus l'échantillon est important, plus on a de chance que l'histogramme « se rapproche » de la courbe.

Editeur

```
plt.clf()
L= np.random.rand(1000)
classes =np.linspace(0,1,10)

plt.hist(L, bins=20, density=True)  # Création de
     l'histogramme


x=[0,1]
y=[1,1]
plt.plot(x,y,linewidth=5,label="densite")
plt.legend()
plt.show()
```




## 5.2 La méthode d'inversion : illustration avec la loi de Cauchy

L'idée repose sur l'énoncé suivant :

**Si**
- U suit la loi uniforme sur $]0;1[$.
- X est une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est une bijection de $]a;b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ sur $]0;1[$.

**Alors** La variable $Y = F^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

**Exercice 11**

✦ ✎ Prouver l'énoncé précédent. p. 27

**Exemple.** On dit qu'une variable aléatoire X à densité suit une loi de Cauchy si une densité est donnée par

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}.$$

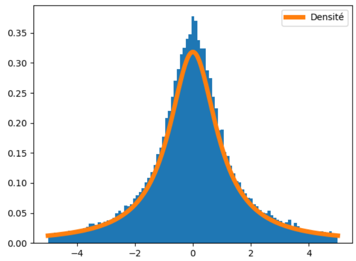
On a vu que la fonction de répartition est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \dfrac{\arctan(x)}{\pi} + \dfrac{1}{2}$. La fonction F est strictement croissante, continue de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$. Le théorème de la bijection s'applique

$$\forall\, t \in ]0;1[, \qquad F^{-1}(t) = \tan\big(\pi(t-1/2)\big).$$

Ci-dessous, un histogramme d'un échantillon obtenu par simulation d'une loi de Cauchy par la méthode d'inversion.

Editeur

```
plt.clf()
U= np.random.rand(50000)
L=np.tan(np.pi*(U-1/2))
inter=np.linspace(-5,5,100)
plt.hist(L, bins=inter, density=True)  # Création
     de l'histogramme
x=np.linspace(-5,5,200)
y=1/(np.pi*(1+x**2))
plt.plot(x,y,linewidth=5,label="Densité")
plt.legend()
plt.show()
```

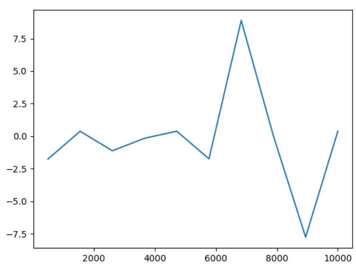



**Exercice 12**

✦✦ ✎ Expliquer l'intérêt du code suivant ? Qu'illustre-t on sur la loi de Cauchy ? p. 27

Editeur

```
Liste=100*np.linspace(5,100,10)
E=[]
for m in Liste :

    U= np.random.rand(int(m))
    L=np.tan(np.pi*(U-1/2))
    e=sum(L)/m
    E.append(e)
plt.plot(Liste,E)
plt.show()
```



## 5.3 La méthode par rejet

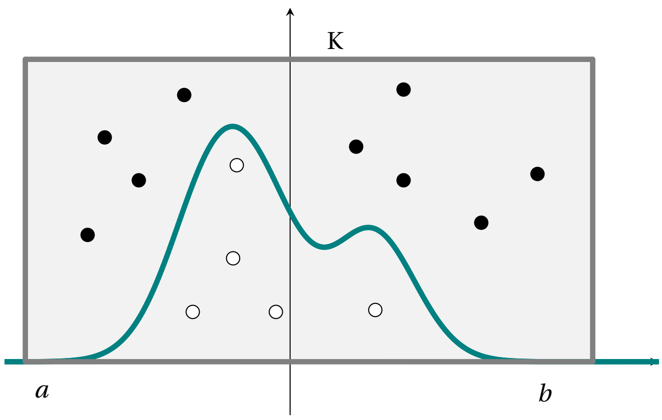
Soit X, une variable à densité et $f$, une densité. On suppose que $f$ est bornée et à support borné. C'est-à-dire, qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$, $a$, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant K \quad \text{et} \quad f(x) = 0 \text{ si } x \notin [a;b].$$

Rappelons que l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ correspond exactement à la probabilité que la variable aléatoire prenne les valeurs comprises entre $a$ et $b$.

$$\text{Aire} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{P}\Big(\big[a \leqslant X \leqslant b\big]\Big).$$

Ainsi, pour simuler la variable X, on peut tirer un point au hasard sous la courbe représentative de $f$ de manière uniforme. On prend alors pour réalisation l'abscisse de ce point.
Précisons que pour tirer un point sous la courbe, on tire un point au hasard dans le rectangle $[a;b] \times [0;K]$ à l'aide de deux lois uniformes. Si ce dernier est sous la courbe, on le garde. Sinon, on recommence.




**Exercice 13**

✦ Quelle est la loi du nombre d'essais avant de tirer un point qui est bien situé sous la courbe de $f$ ?

p. 27

**Exercice 14**

✦ **Exemple : Simulation par la méthode de rejet**
Soit X une variable aléatoire dont une densité $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**1.** Tracer le graphe de $f$. Quelles valeurs choisir pour $a$, $b$ et K ?

**2.** **a)** Comment tirer un point au hasard dans le rectangle $[a;b] \times [0;K]$ à l'aide de la commande **random** ?

**b)** En déduire un programme Python qui simule la variable X.

p. 27

**Exemples.** Voir aussi l'exercice **??**, page **??** pour une généralisation de l'exemple précédent à toute loi Beta. Pour un exemple où le support de la densité n'est pas à support borné, on pourra voir l'exercice **??**, p.**??** avec une simulation des lois normales.

# Exercices

## Révisions : intégrales sur un segment

**Exercice 15.** ✦ **Sommes de Riemann**

Justifier que pour $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

≫ Solution p. 28

**Exercice 16.** ✦ ✎ **Lemme de Riemann-Lebesgue**

Soit $f : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Justifier que

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

≫ Solution p. 28

**Exercice 17.** ✦ **Variante des intégrales de Wallis avec la fonction tangente**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer $u_0$ et $u_1$.
2. Vérifier que $\tan' = 1 + \tan^2$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire une fonction Python qui prend en argument $n$ et renvoie $u_n$.
4. Étudier les variations de la suite $(u_n)$. En déduire la convergence de la suite $(u_n)$ et calculer la limite.
5. Effectuer le changement de variable $x = \tan t$ dans l'intégrale définissant $u_n$, puis en déduire $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

≫ Solution p. 28

## Révisions : intégrales généralisées

**Exercice 18.** ✦✦ *Intégrale à paramètre : voir ECRICOME 2009, exercice 2.*

**Exercice 19.** ✦ Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n}$.
Étudier la nature de la série de terme général $u_n$.

≫ Solution p. 29

**Exercice 20.** ✦ On pose $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)t^x}\,\mathrm{d}t$. *D'après oral ENSAE 2025*

1. Trouver le domaine de définition de $f$.
2. Exprimer $f(x) + f(x+1)$ en fonction de $x$.
3. En déduire un équivalent de $f$ en $+\infty$.

≫ Solution p. 29

**Exercice 21.** ✦ On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que $\mathrm{J}_n$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre $\mathrm{J}_n$ et $\mathrm{J}_{n+1}$.
3. En déduire $\mathrm{J}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

≫ Solution p. 29

**Exercice 22.** ✦ Soit $f$ une fonction continue bornée sur $[0,+\infty[$.

1. Démontrer que les intégrales I et J sont convergentes où

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

2. Vérifier que $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.
3. *Application*. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$.

≫ Solution p. 30

**Exercice 23.** ✦✦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Donner un exemple où $f(t) \underset{t\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. *Un graphe suffit...*
2. Vérifier que la conclusion $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ devient vraie si l'on suppose en plus que $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ convergente.

≫ Solution p. 30

**Exercice 24.** ✦✦✦ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

1. a) Effectuer le changement de variable $u = -1/t$ sur

$$\int_0^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{0} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t.$$

   b) En déduire

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{t^2}\right) f\left(t-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

   c) À l'aide d'un nouveau changement de variable, établir l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

2. *Application*. Sachant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-1/t^2}\,\mathrm{d}t$.

≫ Solution p. 31

**Exercice 25.** ✦✦✦ Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[x]$ non constant. Justifier que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \cos\big(\mathrm{P}(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

est convergente si et seulement si $\deg \mathrm{P} \geqslant 2$.

≫ Solution p. 31

### Variable aléatoire à densité

**Exercice 26.** ✧ **Vrai ou faux ?**
Toute variance de variable aléatoire réelle à densité est strictement positive.

≫ Solution p. 32

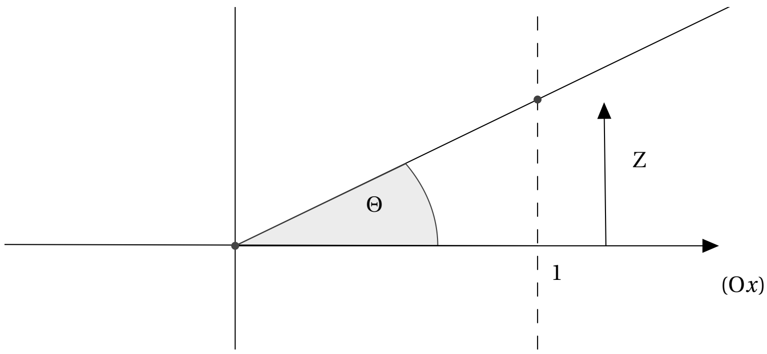
**Exercice 27.** ✦ **Autour de la loi de Cauchy**

Une variable aléatoire à densité suit une loi de Cauchy si une densité est $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1. *Préliminaires.*
   a) Simplifier $\arctan(t) + \arctan(1/t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}^*$.
   b) Donner la fonction de répartition d'une loi de Cauchy.
2. Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi de Cauchy. On pose $\mathrm{Y} = 1/\mathrm{X}$.
   a) Calculer $\mathbf{P}\big([\mathrm{Y} < 0]\big)$, puis, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\mathbf{P}\big([0 < \mathrm{Y} \leqslant x]\big)$.
   b) Montrer que Y suit encore une loi de Cauchy.

3. Un tireur envoie sa balle sur un demi-plan droit. On suppose que l'angle $\Theta$ entre le trajectoire et l'axe $(Ox)$ est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
Justifier que la position Z de la balle sur la cible (d'axe $x=1$) suit une loi de Cauchy.

≫ Solution p. 32




**Exercice 28.** ✧ Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = a\mathrm{e}^{x-a\mathrm{e}^x}.$$

1. À quelle(s) condition(s) $f$ est-elle une densité de probabilité ?
2. Si X est une variable aléatoire réelle admettant $f$ pour densité, quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$ ?

≫ Solution p. ??

**Exercice 29.** ✦ Soit U une variable aléatoire loi uniforme sur $]0;1]$. On lance une pièce équilibrée. Soit X définie par $X = U^2$ si la pièce donne pile et $X = 1-U^2$ sinon. Justifier que X est à densité et donner une densité.

≫ Solution p. ??

**Exercice 30.** ✦ **Loi de Weibull, taux de panne**
Soient $c \in [1;+\infty[$ et X une variable à densité dont une densité $f_c$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_c(t) = \begin{cases} \alpha_c\, t^{c-1}\mathrm{e}^{-t^c} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}.$$

1. Préciser la valeur de $\alpha_c$.
2. a) Vérifier que pour tous $s, t \in \mathbb{R}_*^+$

$$\mathbf{P}(X \geqslant s) \geqslant \mathbf{P}_{[X\geqslant t]}(X \geqslant s+t)$$

*On pourra admettre que pour $x \in \mathbb{R}^+$ $(1+x)^c \geqslant 1+x^c$.*

b) Que dire pour $c = 1$ ?

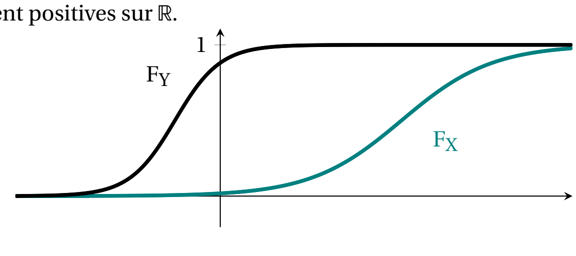
≫ Solution p. ??

**Exercice 31.** ✦ Soit X une variable aléatoire à densité avec une densité de probabilité $f$ paire.

1. Préciser $\mathbf{P}\big([X \geqslant 0]\big)$.
2. On note F la fonction de répartition de X. Justifier que $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) - \frac{1}{2}$ est impaire.
3. On suppose que $\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Démontrer que X admet une espérance et la calculer.

≫ Solution p. 33

**Exercice 32.** ✦✦ Soient X et Y deux variables à densité. On suppose que X et Y admettent une espérance et des densités strictement positives sur $\mathbb{R}$.




1. ✎ Soit $F_X$ la fonction de répartition de X.
Quelle est la loi de $F_X^{-1}(U)$ où $U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$ ?
2. La figure ci-contre est la représentation graphique des fonctions de répartition de X et Y. Quelle est la variable dont l'espérance est la plus grande ? Justifier.

≫ Solution p. 34

**Exercice 33.** ✦ **Nouvelle expression de l'espérance**
Soit X une v.a à densité. On note $f$ une densité de X, et F sa fonction de répartition. On suppose que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f = 0$ sur $\mathbb{R}^-$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,
$$\int_0^x \big(1 - \mathrm{F}(t)\big)\,\mathrm{d}t = x\big(1 - \mathrm{F}(x)\big) + \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (\bullet)$$
2. On suppose dans cette question que X possède une espérance.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant x \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) En déduire que $x\big(1 - \mathrm{F}(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   c) À l'aide de la relation $(\bullet)$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - \mathrm{F}(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge, et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(1 - \mathrm{F}(t)\big)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}(\mathrm{X})$.
3. On étudie la réciproque.
   On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(1 - \mathrm{F}(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge.
   a) Montrer que l'application $\varphi : x \to \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Montrer en utilisant $(\bullet)$ que $\varphi$ est majorée.
   c) En déduire que $\mathbf{E}(\mathrm{X})$ existe et que
$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \int_0^{+\infty}\big(1 - \mathrm{F}(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$
4. Adapter le raisonnement pour montrer que si X admet un moment d'ordre 2, alors
$$\mathbf{E}(\mathrm{X}^2) = 2\int_0^{+\infty} t\big(1 - \mathrm{F}(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

≫ Solution p. 34

**Exercice 34.** ✦✦✦ Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X. # LD29

1. Montrer que la fonction $g$ définie par :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \mathrm{F}(x+1) - \mathrm{F}(x)$$
   est une densité de probabilité.
2. Soit Y une variable aléatoire admettant pour densité de probabilité $g$.
   Montrer que si X admet une espérance alors Y en admet également une et dans ce cas $\mathbf{E}(\mathrm{Y}) = \mathbf{E}(\mathrm{X}) - \frac{1}{2}$.

≫ Solution p. 35

**Exercice 35.** ✦ Soit X une variable aléatoire admettant une densité $f$ continue sur $\mathbb{R}$ et un moment d'ordre 2. Caractériser la valeur du réel $a$ qui minimise l'expression
$$\varphi(a) = \mathbf{E}\Big((\mathrm{X} - a)^2\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

≫ Solution p. 35

**Exercice 36.** ✦✦✦ *d'après HEC 2016*
≫ Solution p. 36

1. a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.
   b) Soit V une variable aléatoire telle que $\mathrm{V}(\Omega) = [0, \pi/2[$ suivant la loi uniforme sur $[0,\pi/2[$ (une densité est donnée par $\frac{2}{\pi}\mathbf{1}_{[0,\pi/2[}$). On pose : $\mathrm{X} = \tan^2(\mathrm{V})$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité.
   c) En déduire que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.
2. a) Compléter le code python de la fonction `simulX` suivante de sorte que son application à l'entier N ($\mathrm{N} \geqslant 2$) fournisse une matrice ligne contenant N simulations indépendantes de la variable aléatoire X.

Editeur

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np
def simulX( ... ):
    u=rd.rand(N)
    x=np.ones(N)
    for i  ...
        x[i]= ...
    return  ...
```

**b)** Après avoir affecté une valeur entière supérieure ou égale à 2 à la variable N, on exécute les commandes suivantes. Trouver la loi d'une variable aléatoire dont la valeur de `c` est, en fin de boucle, une simulation.

Editeur

```python
N=100
c=0
x=simulX(N)
for i in range(N):
    if x[i]>1 :
       c=c+1
```

**Exercice 37.** ✦✦ Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

**1.** Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ dont $f$ est une densité de probabilité.

**2.** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence du moment d'ordre $m$ de la variable X. Donner la valeur de l'espérance de X.

**3.** Pour tout entier $n$ non nul et tout réel $x$, on pose :

$$\mathrm{H}_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\left(1 + t e^{-n|t|}\right) \mathrm{d}t.$$

Montrer que $\mathrm{H}_n$ est une fonction de répartition.

**4.** Soit $\mathrm{X}_n$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, dont $\mathrm{H}_n$ est la fonction de répartition. Vérifier que pour tout réel $x$

$$\mathrm{H}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{F}(x)$$

où F est la fonction de répartition de X.

≫ Solution p. 36

**Exercice 38.** ✦✦ Soient $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0;1]\big)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Y}_n \hookrightarrow \mathscr{U}\big([\![1;n]\!]\big)$. Comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{Y}_n}{n}\right)\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\big(\arctan(\mathrm{Z})\big).$$

≫ Solution p. 37

**Exercice 39.** ✦ **Un exemple détaillé**

**1.** On pose pour tout $t \in ]-1;1[$, $g(t) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.

**a)** Justifier que $g$ est une bijection de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.

**b)** Donner une expression simple de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $g^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner $g^{-1\prime}$.

**c)** Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1;1])$. On définit la variable $T = g(X)$.

i) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = F_X\big(g^{-1}(x)\big)$.

ii) En déduire que T est une variable aléatoire à densité. *On précisera une densité.*

**2.** **a)** Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.

**b)** Faire de même avec $V = X^2$.

≫ Solution p. 37

**Exercice 40.** ✦✦ On considère l'application $f$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2}.$$

**1.** Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

**2.** Soit X une variable aléatoire réelle qui admet $f$ comme densité. Déterminer F, la fonction de répartition de X.

**3.** Soit $\varphi$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $Y = \varphi(X)$.

**a)** Montrer que $\varphi$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

**b)** Déterminer la loi de Y.

≫ Solution p. 38

**Exercice 41.** ✦✦✦ **Médiane(s) d'une variable aléatoire.**
Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et admettant une espérance.

**1.** Justifier qu'il existe un réel $m$ tel que $\quad \mathbf{P}\big([X \leqslant m]\big) = \dfrac{1}{2}$.
*Un tel réel est une médiane de* X. *Notons dans la suite,* $\mathscr{M}(X)$*, l'ensemble des médianes de la variable* X.

**2.** Déterminer la ou les médianes d'une variable aléatoire X de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Est-ce que l'espérance de X est une médiane ?

**3.** Dans la suite, on souhaite déterminer les réels $a$ qui minimisent la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(a) = \mathbf{E}\Big(\big|X - a\big|\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-a| f(t)\,dt.$$

**a)** Justifier que $\varphi$ est une fonction convexe.

**b)** On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} t f(t)\,dt$. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

**c)** En déduire que $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'$ à l'aide de la fonction de répartition F de X.

**d)** Conclure sur les réels qui minimisent $\varphi$.

**4.** Démontrer que l'ensemble des médianes d'une variable à densité X est un segment.
*Une partie* I *de* $\mathbb{R}$ *est un intervalle si pour tous* $x$, $y \in I$, *le segment* $[x; y] \subset I$.

≫ Solution p. 39

**Exercice 42.** ✦✦ On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions $f$ et $g$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \sin\big(2\pi \ln(x)\big) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\ln(x)^2/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**1.** 🔍 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = \ln(t) - n$, justifier la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) g(t)\,dt = 0.$$

**2.** Soit $Y \hookrightarrow \mathscr{N}(0;1)$. Vérifier que $X = e^Y$ est une variable aléatoire à densité dont $g$ est une densité.

**3.** Pour tout réel $\lambda \in ]-1;1[$, on définit la fonction $h_\lambda = (1 + \lambda f) \cdot g$. Vérifier que $h_\lambda$ est une densité de probabilité.

**4.** **a)** Justifier que X admet des moments à tout ordre.

**b)** Soit $Y_\lambda$ une variable aléatoire dont une densité est donnée par $h_\lambda$. Démontrer que $Y_\lambda$ admet des moments à tout ordre et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{E}\big({Y_\lambda}^n\big) = \mathbf{E}\big(X^n\big).$$

≫ Solution p. 40

# Indications et solutions

### Exercice 1 p. 3

Chap9EXO1

Le changement de variable $u = 1/t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$ et strictement décroissant. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right)$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1/u)}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Dès lors
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 0.$$

*Remarque.* $f : t \mapsto \ln(t)/\left(1+t^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ avec

$$f(t) \sim_{0^+} \ln(t) \quad \text{et} \quad f(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).$$

*Donc par le critère d'équivalence et de négligeabilité, l'intégrale est bien convergente.*

### Exercice 2 p. 5

Chap9EXO1b

**1.** → La fonction $f$ est clairement positive.
→ Comme $f$ est nulle sur $\mathbb{R}_*^-$, elle y est continue. De plus, par composition, $f$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$. Ainsi $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
*Remarque. On peut montrer que $f$ est continue en 0 car*

$$\lim_{t\to 0^-} f(t) = f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t).$$

*Mais cette vérification est superflue pour une densité.*
→ Soit $A \in \mathbb{R}_*^+$

$$\int_{-\infty}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0'}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{A} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_0^A = 1 - \mathrm{e}^{-A^2/2}$$
$$\underset{A\to+\infty}{\ } 1.$$

On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien convergente et vaut 1.
Finalement $f$ est bien une densité de probabilité.

**2.**

### Exercice 3 p. 6

Chap9EXO1c

On a

$$\mathbf{P}\left(X^2 - X < 0\right) = \mathbf{P}(X(X-1) < 0)$$
$$= \mathbf{P}(X \in ]0;1[).$$
$$= \mathbf{P}(X \in ]0;1]) \quad \text{(car X est à densité)}$$
$$\mathbf{P}\left(X^2 - X < 0\right) = F_X(1) - F_X(0).$$

Or la fonction de répartition a été explicité à l'exemple précédent. Il vient

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad F_X(t) = \frac{\arctan(t)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

D'où
$$\mathbf{P}\left(X^2 - X < 0\right) = \frac{1}{\pi}(\arctan(1) - \arctan(0))$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{1}{4}.$$

### Exercice 4 p. 8

Chap9EXO2

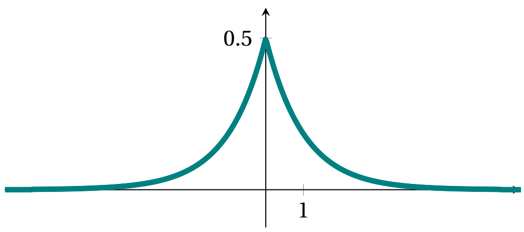
**1.** Soit $A \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^A \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^A \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \lambda\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^A = \lambda\left(1 - \mathrm{e}^{-A}\right).$$

Ainsi
$$\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda.$$

Par parité de $f$, on a aussi $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda$. La condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ impose donc

$$\boxed{\lambda = 1/2.}$$




**2.** Soit $F_X$ la fonction de répartition de X. On a pour $x \leqslant 0$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-|t|}}{2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^{t}}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{x}}{2}.$$

Pour $x \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{e^{-t}}{2}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x}\right). \end{aligned}$$

**3.(a)** Soit $x \in \mathbb{R}$, on a par définition

$$F_Y(x) = \mathbf{P}\big([Y \leqslant x]\big) = \mathbf{P}\big([3X - 2 \leqslant x]\big)$$
$$= \mathbf{P}\left(X \leqslant \frac{x+2}{3}\right).$$

Finalement $$\boxed{F_Y(x) = F_X\left(\frac{x+2}{3}\right).}$$

**3.(b)** Précisons que $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par composition, $F_Y$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Par définition, Y est une variable aléatoire à densité.
Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

$$f_Y(t) = F_Y{}'(t) = \frac{2}{3} F_X{}'\left(\frac{t+2}{3}\right) = \frac{2}{3} f_X\left(\frac{t+2}{3}\right).$$

On étend cette égalité à $t = -2$. Une densité de Y est donnée par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{f_Y(t) = \frac{1}{3} \exp\left(-\left|\frac{t+2}{3}\right|\right).}$$

## Exercice 5 p. 9

Chap9EXO3

**1.** On a

$$U(\Omega) = [0;1].$$

Notons que pour tout réel $x \leqslant 0$,

$$F_U(x) = \mathbf{P}\big([U \leqslant x]\big) = \mathbf{P}\big([|X| \leqslant x]\big) = 0.$$

Puis pour tout $x \geqslant 1$,

$$F_U(x) = \mathbf{P}\big([U \leqslant x]\big) = \mathbf{P}\big([|X| \leqslant x]\big) = 1.$$

Soit $x \in ]0;1[$. On a

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \mathbf{P}\big(|X| \leqslant x\big) = \mathbf{P}\big([-x \leqslant X \leqslant x]\big) \\ &= F_X(x) - F_X(-x). \end{aligned}$$

On vérifie que $F_U$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. La variable U est donc une variable aléatoire à densité. Si $f_U$ désigne une densité de $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned} f_U(t) &= F_U{}'(t) = F_X{}'(t) + F_X{}'(-t) \\ &= f_X(t) + f_X(-t) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Résumons $$f_U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate que $f_U$ s'identifie à une densité de la loi uniforme $\mathscr{U}_{[0;1]}$. Comme la densité caractérise la loi :

$$\boxed{U \hookrightarrow \mathscr{U}_{[0;1]}.}$$

**2.** De nouveau, donnons la relation entre les fonctions de répartition de V et de X. V est une variable aléatoire positive, donc $F_V$ est nulle sur $\mathbb{R}^-$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbf{P}\big([X^2 \leqslant x]\big) \\ &= \mathbf{P}\big([|X| \leqslant \sqrt{x}]\big) \quad (\sqrt{\cdot}\ \text{croiss.} \\ &= \mathbf{P}\big([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]\big) \\ &= \mathbf{P}\big([-\sqrt{x} < X \leqslant \sqrt{x}]\big) \quad \text{X à densité} \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Notons que si $x \geqslant 1$ alors $F_V(x) = 1$. Si $x \in ]0;1[$, $\pm\sqrt{x} \in ]-1;1[$ et :

$$\begin{aligned} F_V(x) &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \\ &= (\sqrt{x}+1)/2 - (-\sqrt{x}+1)/2 \\ &= \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Résumons :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in ]0;1[ \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$F_V$ est continue, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. V est une variable aléatoire à densité. Une densité est donnée par :

$$\boxed{f_V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in ]0;1[ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

**3.** On a $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$. En particulier, pour $t \in \mathbb{R}^-$,

$$F_Z(t) = \mathbf{P}\big([Z \leqslant t]\big) = 0.$$

Soit $t \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbf{P}\big([Z \leqslant t]\big) \\ &= \mathbf{P}\Big(\big[X^2 \leqslant t\big]\Big) \\ &= \mathbf{P}\big(-\sqrt{t} \leqslant X \leqslant \sqrt{t}\big). \end{aligned}$$

Comme X est une variable à densité

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbf{P}\big(-\sqrt{t} < X \leqslant \sqrt{t}\big) \\ &= F_X\big(\sqrt{t}\big) - F_X\big(-\sqrt{t}\big). \end{aligned}$$

La fonction $F_Z$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ (par composition) et sur $\mathbb{R}_*^-$ (constante). De plus, par continuité de $F_X$ en 0

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} F_Z(t) &= \ln F_X(0) - F_X(0) \\ &= 0 \\ &= F_Z(0) = \lim_{t \to 0^-} F_Z(t). \end{aligned}$$

$F_z$ est donc continue en 0. De plus, par composition avec la fonction racine carrée, $F_Z$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ avec

$$\begin{aligned} F_Z'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}} F_X'\big(\sqrt{t}\big) + \left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) F_X'\big(-\sqrt{t}\big) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}}\big(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})\big). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

## Exercice 6 p. 10

Chap9EXO4

**1.** La fonction $f_X$ est bien continue, positive sur $\mathbb{R}$. Justifions la convergence et le calcul de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\alpha} \int_1^{+\infty} t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\,dt.$$

Soit $A > 1$. Comme $\frac{1+\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha} \neq 1$, on a

$$\int_1^A t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\,dt = \left[\frac{t^{-1/\alpha}}{-1/\alpha}\right]_1^A = \frac{1}{1/\alpha} - \frac{A^{1/\alpha}}{1/\alpha} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

Il vient : $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

$$\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

**2.** Calculons

$$\mathbf{P}\big([0 < X \leqslant 1+\alpha]\big) = \int_0^{1+\alpha} f(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_1^2 t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\,dt$$
$$= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{t^{-1/\alpha}}{-1/\alpha}\right]_1^{1+\alpha} = \boxed{1-(1+\alpha)^{-1/\alpha}.}$$

**3.** Étudions la convergence absolue de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty} t\cdot t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\,dt.$$

Comme la fonction est positive sur $[1;+\infty[$, la convergence absolue équivaut à la convergence.
On est dans le cas d'une fonction continue sur $[1,+\infty[$ avec $tf(t) = \frac{1}{\alpha}t^{-\frac{1}{\alpha}}$. On reconnaît une intégrale de Riemann de paramètre $1/\alpha$. Il y a convergence de l'intégrale généralisée en $+\infty$ si, et seulement, si $1/\alpha > 1$, c'est-à-dire $\boxed{\alpha < 1.}$
Dans ce cas, on a pour $A > 1$

$$\int_1^A t\cdot t^{-\frac{1+\alpha}{\alpha}}\,dt = \int_1^A t^{-\frac{1}{\alpha}}\,dt$$
$$= \left[\frac{t^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}}\right]_1^A \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

En conclusion : $$\boxed{\mathbf{E}(X) = \frac{1}{1-\alpha}.}$$

## Exercice 7

p. 13

Chap9EXO5

**1.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\big|(at+b)f_X(t)\big| \leqslant |a|\cdot\big|tf_X(t)\big| + |b|f_X(t).$$

Or, par définition d'une densité de probabilité, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$$

converge (et vaut 1) et, X ayant une espérance, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f_X(t)\,dt$$

est aussi convergente. Par linéarité, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |a|\cdot\big|tf_X(t)\big| + |b|f_X(t)\,dt$$

est convergente. Par le critère de majoration

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big|(at+b)f_X(t)\big|\,dt$$

est donc convergente. D'après le théorème de transfert, $aX+b$ admet une espérance. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(aX+b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (at+b)f_X(t)\,dt\\ &= a\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)\,dt + b\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt\\ &= a\mathbf{E}(X)+b.\end{aligned}$$

**2.** L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ est convergente avec

$$\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1.$$

(Voir exercice suivant si besoin). L'intégrande étant de signe constant, l'intégrale est aussi absolument convergente. D'après le théorème de transfert, $\ln(X)$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}\big(\ln(X)\big) = \int_{-1}^{+1} \ln(t)\cdot f(t)\,dt = \int_0^1 \ln(t)\,dt = -1.$$

## Exercice 8

p. 13

Chap9EXO6

**1.** Dans un premier temps, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 f(t)\,dt &= \int_\varepsilon^1 -\ln(t)\,dt\\ &= \big[-t\ln(t)+t\big]_\varepsilon^1\\ &\underset{\varepsilon\to0^+}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

à l'aide croissances comparées. Ensuite

- La fonction $f$ est positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$.
- D'après le calcul préliminaire, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt$ est donc bien convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

On a donc bien une densité.

**2.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. À l'aide d'une intégration par parties avec des fonctions $\mathscr{C}^1$

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 t^n\ln(t)\,dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt\\ &= \frac{1}{n+1}\left[t^{n+1}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^1 t^n\,dt\end{aligned}$$

Après passage à la limite (croissances comparées), il y a convergence et

$$\int_0^1 t^n\ln(t)dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Comme l'intégrande est de signe constant, la convergence absolue équivaut à la convergence. Le théorème de transfert s'applique, X admet un moment d'ordre $n$ et

$$\mathbf{E}\big(X^n\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\,dt = \int_0^1 t^n\ln(t)\,dt = -\frac{1}{(n+1)^2}.$$

### Exercice 9 — p. 13

Chap9EXO7

**1.** • *Rédaction 1.*
Soient $s$, $r \in \mathbb{N}$ avec $s \leqslant r$. Pour tout réel $x$, en distinguant $|x| \leqslant 1$ et $|x| \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant |x|^s \leqslant 1 + |x|^r$$

Or les intégrales de fonctions positives

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x)\,\mathrm{d}x$$

sont convergentes, donc par linéarité, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + |x|^r\right) f(x)\,\mathrm{d}x$$

est convergente. Par application du critère de comparaison, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^s f(x)\,\mathrm{d}x$$

est convergente. La variable X admet bien un moment d'ordre $s$.

• *Rédaction 2.*
En distinguant les cas $|X| \geqslant 1$ et $|X| \leqslant 1$, on montre que

$$|X|^s \leqslant 1 + |X|^r.$$

Or $|X|^r$ admet une espérance car on se place dans le cas où X admet un moment d'ordre $r$. 1 admet aussi une espérance. Par conséquent $1 + |X|^r$ admet une espérance par linéarité. Par le théorème de domination, $|X|^s$ admet une espérance. C'est-à-dire X admet un moment d'ordre $s$.

**2.** Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On peut considérer la variable à densité X admettant pour une densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{a_r}{x^{r+2}} \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases} \qquad \text{avec} \quad a_r = \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{r+2}}\,\mathrm{d}t\right)^{-1}.$$

On vérifie à l'aide des intégrales de Riemann que X admet un moment d'ordre $r$ mais pas d'ordre $r+1$.

### Exercice 11 — p. 16

Chap9EXO8

On a

$$Y(\Omega) \subset ]a;b[.$$

- Pour $t \leqslant a$, $F(t) = 0$.
- Pour $t \geqslant b$, $F(t) = 1$.
- Soit $t \in ]a;b[$.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbf{P}(Y \leqslant t) \\ &= \mathbf{P}\left(F^{-1}(U) \leqslant t\right) \\ &= \mathbf{P}\left(U \leqslant F(t)\right) \qquad \text{F croissante} \\ &= F_U\left(F(t)\right). \end{aligned}$$

Or, on rappelle que pour une loi uniforme sur $[0;1]$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Ici, $F(t) \in [0;1]$ et on a simplement

$$F_Y(t) = F(t).$$

Les variables X et Y ont même fonction de répartition, comme la fonction de répartition caractérise la loi, X et Y ont même loi.

### Exercice 12 — p. 16

Chap9EXO9

Ce code illustre le fait que la loi de Cauchy n'a pas d'espérance. En effet, le calcul des moyennes empiriques sur des échantillons de taille de plus en plus importante ne semble pas montrer une quelconque convergence.

### Exercice 13 — p. 17

Chap9EXO10

La probabilité de tirer un point dans la bonne zone est

$$p = \frac{\text{Aire sous la courbe}}{\text{Aire totale}} = \frac{1}{K(b-a)}.$$

Le nombre d'essais correspond au rang du premier succès dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. On sait alors que X suit une loi géométrique de paramètre $p$ :

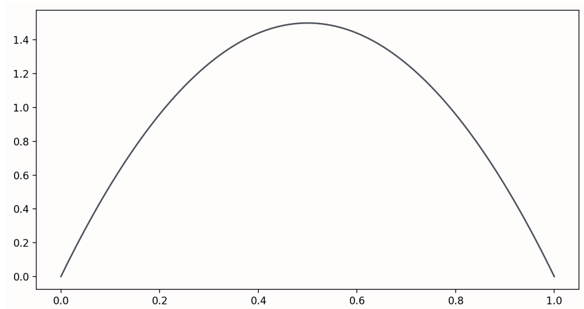
$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{K(b-a)}\right).}$$

### Exercice 14 — p. 17

Chap9EXO11

**1.**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x=np.linspace(0,1,200)
y=6*x*(1-x)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```




**2.a)** Pour tirer un point au hasard $(x, y)$ dans le rectangle, on peut écrire :

```
x=(b-a)*rd.random()+a
y=K*rd.random()
```

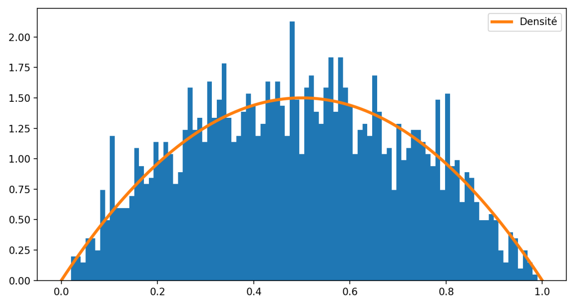
**2.b)** Adaptons la méthode avec

$$K = 3/2, \quad a = 0, \quad b = 1.$$

```
def f(t):
    return 6*t*(1-t)

def simurejet():
    K=3/2
    x=rd.random()
    y=K*rd.random()

    while y>f(x):
        x=rd.random()
        y=K*rd.random()

    return x
```

Pour tester le programme, on peut créer un échantillon et comparer la répartition avec une densité de la loi.

```
plt.clf()
m=2000 # taille échantillon
Ech=np.zeros(m)
for i in range(m):
    Ech[i]=simurejet()
inter=np.linspace(0,1,100)
plt.hist(Ech, bins=inter, density=True)
# Création de l'histogramme
x=np.linspace(0,1,200)
y=f(x)
plt.plot(x,y,linewidth=3,label="Densité")
plt.legend()
plt.show()
```




## Exercice 15 — p. 18

Chap9EXO12

Pour une fonction $f$ continue sur $[0;1]$, le théorème de convergence des sommes de Riemann donne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on considère la fonction continue $t \in [0;1] \mapsto t^\alpha$. Par suite

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{n-1} k^\alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t^\alpha\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

On en déduit l'équivalent.

## Exercice 16 — p. 18

Chap9EXO13

On a par intégration par parties avec des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

$$\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

On constate que le crochet convergence lorsque $n \to +\infty$ car la fonction cosinus est bornée. De plus, par l'inégalité triangulaire

$$\left|\int_0^\pi f'(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\pi \left|f'(t)\cos(nt)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \pi\max\left(|f'|\right).$$

D'où le résultat par le théorème d'encadrement.
*Précisons que le maximum de $|f|$ est bien défini puisque que $|f|$ est continue sur un segment.*

## Exercice 17 — p. 18

Chap9EXO14

**1.** Par définition

$$u_0 = \int_0^{\pi/4} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

$$u_1 = \int_0^{\pi/4} \tan t\,\mathrm{d}t = \left[-\ln|\cos t|\right]_0^{\pi/4} = -\ln(1/\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

**2.** La fonction tangente est dérivable $\left]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, par formule de la dérivée d'un quotient, pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2 x - \left(-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors par linéarité de l'intégrale

$$u_{n+2} + u_n = \int_0^{\pi/4} \left((\tan t)^{n+2} + (\tan t)^n\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \underbrace{\left(\tan^2 t + 1\right)}_{f'(t)}\underbrace{(\tan t)^n}_{f^n(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/4}.$$

D'où $\quad u_{n+2} + u_n = \frac{1^{n+1} - 0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$

**3.**

```
import numpy as np

def suite(n):
    U=np.zeros([1,2*n+1])
```

```
    U[0,0]=np.pi/4
    U[0,1]=np.log(2)/2
    for i in range(2*n-1):
        U[0,i+2]=1/(i+1)-U[0,i]

    return U
```

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $t \in [0;\pi/4]$, on a $0 \leqslant \tan t \leqslant 1$. Donc

$$0 \leqslant (\tan t)^{n+1} \leqslant (\tan t)^n.$$

Puis par croissance de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} 0 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/4} (\tan t)^{n+1} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \,\mathrm{d}t$$

d'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)$ étant décroissante et minorée par 0, elle converge d'après le théorème de la limite monotone (et sa limite est positive). Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Alors

$$u_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

donc
$$u_{n+2} + u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ell.$$

Comme
$$\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

on obtient par unicité de la limite $2\ell = 0$ soit $\ell = 0$. En conclusion,

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

**5.** Le changement de variable $x = \tan t$ soit $t = \mathrm{Arctan}\, x$ est possible car $[0;1] \to [0;\pi/4], x \mapsto \arctan x$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On a $\mathrm{d}x = \left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t = \left(1+x^2\right)\mathrm{d}t$ soit $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Comme $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$ pour tout $x \in [0;1]$, il vient par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

soit
$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

## Exercice 19 p. 18

Analyse9

*L'idée est la suivante : au voisinage de $+\infty$, $1+t+t^n$ est équivalent à $t^n$. De plus*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n-1},$$

*ce qui est le terme général d'une série divergente. Donc, $\sum u_n$ a des chances de diverger. Essayons donc de comparer $u_n$ à cette quantité.*

Comme $t \geqslant 1$, $t^n \geqslant 1$ et $t^n \geqslant t$, donc $1+t+t^n \leqslant 3t^n$, ce qui implique

$$\frac{1}{1+t+t^n} \geqslant \frac{1}{3t^n}.$$

De plus $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3t^n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{3(n-1)t^{n-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3(n-1)}.$$

Ainsi, $u_n \geqslant \frac{1}{3(n-1)}$, donc $\sum u_n$ diverge car la série harmonique $\sum 1/n$ diverge.

*On ne peut pas intégrer des équivalents, mais le faire au brouillon peut donner une idée du résultat possible. Ici, anticiper la divergence permet de rechercher une minoration au lieu d'une majoration de $u_n$.*

## Exercice 20 p. 18

QSPENSAE2025MaximeClemence

**1.** L'intégrande est continue sur $[1;+\infty[$, l'intégrale est généralisée en $+\infty$. Comme

$$\frac{1}{(1+t)t^x} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}},$$

en appliquant les critères de Riemann et d'équivalence de fonctions positives, on en déduit la convergence si et seulement si $x+1 > 1$. Le domaine de définition est

$$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}_*^+.$$

**2.** Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\begin{aligned}
f(x)+f(x+1) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)t^x} + \frac{1}{(1+t)t^x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)t^{x+1}}(1+t)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}\,\mathrm{d}x f(x)+f(x+1) \qquad = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

**3.** En revenant à la définition, on constate que $f$ est une fonction décroissante. Ainsi pour $x > 1$

$$f(x)+f(x-1) \geqslant 2f(x) \geqslant f(x)+f(x+1).$$

puis
$$\frac{1}{x-1} \geqslant 2f(x) \geqslant \frac{1}{x}.$$

Ou encore
$$\frac{x}{x-1} \geqslant 2xf(x) \geqslant 1.$$

On conclut par le théorème d'encadrement

$$2xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \quad \text{puis} \quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

## Exercice 21 p. 18

Chap9EXO16

**1.** La fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. L'intégrale $\mathrm{J}_n$ est généralisée en $+\infty$. On a $t^{n+2}\mathrm{e}^{-t} \xrightarrow[+\infty]{} 0$, c'est-à-dire,

$$t^n \mathrm{e}^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive sur $[1,+\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge. Donc d'après le critère de négligeabilité,

$$\boxed{\mathrm{J}_n \text{ converge.}}$$

**2.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{R}_*^+$. On effectue une intégration par parties avec

$$\left\{\begin{array}{l} u : t \mapsto -e^{-t} \\ v : t \mapsto t^{n+1} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u' : t \mapsto e^{-t} \\ v' : t \mapsto (n+1)t^n. \end{array}\right.$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,A]$.

$$\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\,dt = \left[e^{-t}t^{n+1}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\,dt$$
$$= e^{-A}A^{n+1} + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\,dt.$$

Or, par croissance comparée,

$$e^{-A}A^{n+1} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, quand A tend vers $+\infty$, l'égalité précédente donne

$$J_{n+1} = (n+1)J_n.$$

**3.** Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = n!$.

— *Initialisation.* On a

$$J_0 = \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty} -e^{-A}+1 = 1 = 0!.$$

— *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $J_n = n!$, alors

$$J_{n+1} = (n+1)J_n = (n+1)!.$$

— *Conclusion.* D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, J_n = n!$.

## Exercice 22 — p. 18

Chap9EXO17

**1.** Soit $M > 0$ tel que $|f(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $[0,+\infty[$ et elle vérifie $\left|\frac{f(x)}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{M}{1+x^2}$. Or, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

est convergente en $+\infty$. Par le critère de majoration, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx$$

converge. De même, $x \mapsto \frac{f(1/x)}{1+x^2}$ est alors continue sur $]0,+\infty$ et le critère de majoration permet une nouvelle de justifier la convergence de

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(1/x)}{1+x^2}\,dx$$

en $+\infty$ mais aussi en 0.

**2.** Effectuons le changement de variables $u = 1/x$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ strictement décroissant. On trouve

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx = -\int_0^{+\infty}\frac{f(1/u)}{1+\frac{1}{u^2}}\frac{-1}{u^2}\,du = \int_0^{+\infty}\frac{f(1/x)}{1+x^2}\,dx$$

C'est-à-dire $\qquad I = J.$

**3.** On applique le résultat des questions précédentes avec $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ (qui est bien continue et bornée sur $[0,+\infty[$). On trouve

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} = \int_0^{+\infty}\frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,dx.$$

Par somme

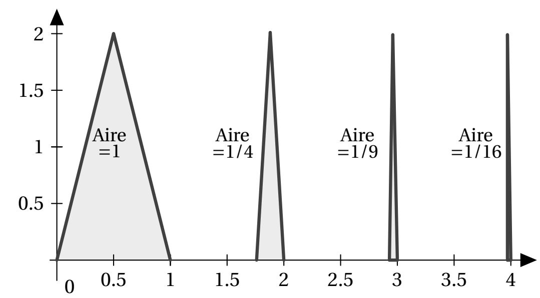
$$2I = I + J = \int_0^{+\infty}\frac{1+x^n}{(1+x^2)(1+x^n)}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

Ces deux intégrales sont donc égales à $\frac{\pi}{4}$.

## Exercice 23 — p. 19

Chap9EXO18

**1.** Contrairement au cas des séries numériques, la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ n'implique pas $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Donnons le graphe d'un contre-exemple :



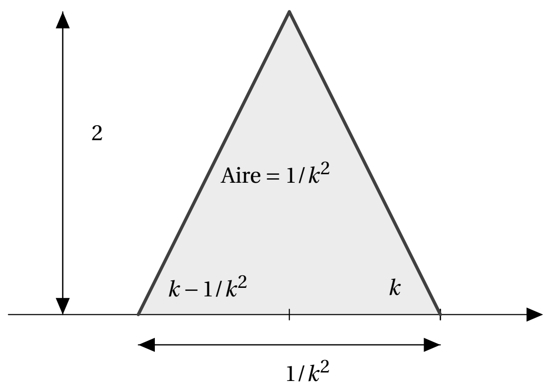

Par identification de l'intégrale avec l'aire algébrique sous la courbe,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Il y a donc bien convergence de cette intégrale, mais

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

La limite de $f$ en $+\infty$ n'est pas définie.



*Remarque. Cet exemple, montre que la notion de diverge grossière n'a pas de sens pour les intégrales généralisées.*

**2.** Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_*^+$.

$$f(\mathrm{A}) - f(0) = \int_0^{\mathrm{A}} f'(t)\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que $f$ admet une limite finie en $+\infty$. Notons $\ell$, cette limite. Montrons par l'absurde que $\ell = 0$. En effet si $\ell \neq 0$, alors

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \ell.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ell\,\mathrm{d}t$ est divergente (et l'intégrande est de signe constant). Par le critère d'équivalence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est divergente. Absurde, finalement

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

## Exercice 24 p. 19

Chap9EXO19

**1.(a)** Effectuons le changement de variable $u = -1/t$ de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone. Les intégrales sont de même nature (convergentes) et

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{0} f(-1/u+u)\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\\ &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{u^2} f(u-1/u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

De même $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} f(u-1/u)\,\mathrm{d}u.$

**1.(b)** Les intégrales sont convergentes, la relation de Chasles s'applique

$$\begin{aligned}&2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t\\ =\;& \int_{-\infty}^{0} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t\\ =\;& \int_{-\infty}^{0} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} f(u-1/u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{u^2} f(u-1/u)\,\mathrm{d}u\\ =\;& \int_{-\infty}^{0} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{u^2} f(u-1/u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} f(u-1/u)\,\mathrm{d}u\\ =\;& \int_{-\infty}^{0} \left(1+\frac{1}{u^2}\right) f(u-1/u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{1}{u^2}\right) f(u-1/u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{t^2}\right) f(t-1/t)\,\mathrm{d}t.}$$

**1.(c)** Effectuons le changement de variable $x = u - 1/u$. Précisons que le changement de variable est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, strictement monotone avec

$$u - \frac{1}{u} \underset{u\to0^+}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad u - \frac{1}{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

De plus, « $\mathrm{d}x = (1+1/u^2)\,\mathrm{d}u$ »,

$$\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{1}{u^2}\right) f(u-1/u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Effectuons maintenant le changement de variable $x = u - 1/u$ sur $\mathbb{R}_*^-$,

$$\int_{-\infty}^{0} \left(1+\frac{1}{u^2}\right) f(u-1/u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En reprenant le résultat précédent, on trouve

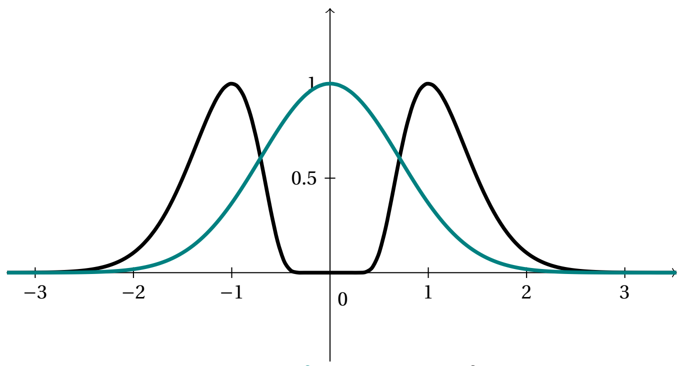
$$\begin{aligned}&2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,\mathrm{d}t\\ =\;& \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{1}{u^2}\right) f(u-1/u)\,\mathrm{d}u + \int_{-\infty}^{0} \left(1+\frac{1}{u^2}\right) f(u-1/u)\,\mathrm{d}u\\ =\;& 2\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

**2.** Précisons que par le critère de négligeabilité, les intégrales sont convergentes. D'après le résultat précédent,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(t-1/t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2+2-1/t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{e}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-1/t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Concluons $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2-1/t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-2}.}$




*Graphes de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-(t-1/t)^2}$.*

## Exercice 25 p. 19

Chap9EXO20

La fonction $t \mapsto \cos\big(\mathrm{P}(t)\big)$ est continue sur $[0;+\infty[$. On a une intégrale généralisée en $+\infty$.

Notons $d$ le degré de P.

→ Si $d = 1$.
Posons $P(t) = at + b$ avec $a \neq 0$. On a

$$\int_0^B \cos(at+b)\,dt = \left[\frac{\sin(at+b)}{a}\right]_0^B.$$

Comme la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, l'intégrale est divergente.
→ Si $d \geqslant 2$.
Comme P est non constant, il existe $A \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in [A; +\infty[, \quad P'(t) \neq 0.$$

(par exemple, il suffit de prendre A plus grand que la plus grande racine réelle de $P'$ si elle existe).
Soit $B > A$, intégrons par parties sachant que les fonctions considérées sont $\mathscr{C}^1$

$$\begin{aligned}
&\int_A^B \cos\big(P(t)\big)\,dt \\
&= \int_A^B \frac{1}{P'(t)} \cdot P'(t)\cos\big(P(t)\big)\,dt \\
&= \left[\frac{\sin(P(t))}{P'(t)}\right]_A^B + \int_A^B \frac{P''(t)}{P'(t)^2}\sin\big(P(t)\big)\,dt \quad (\bullet)
\end{aligned}$$

De plus

$$\left|\frac{P''(t)}{P'(t)^2}\sin\big(P(t)\big)\right| \leqslant \left|\frac{P''(t)}{P'(t)^2}\right|.$$

Or pour $P(t) = \sum_{k=0}^{d} a_k t^k$, on a

$$P'(t) = \sum_{k=1}^{d-1} a_k k t^{k-1}, \quad P''(t) = \sum_{k=2}^{d} a_k k(k-1) t^{k-2}$$

En particulier :

$$P'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} a_d d t^{d-1} \quad \text{et} \quad P''(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} a_d d(d-1) t^{d-2}.$$

Ainsi, il existe $c \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\frac{P''(t)}{P'(t)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{c t^{d-2}}{\left(t^{d-1}\right)^2} = \frac{c}{t^d}$$

Par le critère d'équivalence et celui de Riemann dans le cadre d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} \frac{P''(t)}{P'(t)^2}\,dt$$

est convergente. On en déduit par le critère de comparaison que l'intégrale

$$\int_A^{+\infty} \frac{P''(t)}{P'(t)^2}\sin(P(t))\,dt$$

est (absolument) convergente.
De plus, le crochet dans $(\bullet)$ est convergent car

$$\left|\frac{\sin\big(P(t)\big)}{P'(t)\,|}\right| \leqslant \frac{1}{|P'(t)|} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

En revenant à $(\bullet)$, on en déduit que

$$\int_A^{+\infty} \cos\big(P(t)\big)\,dt$$

est convergente. Puis $\int_0^{+\infty} \cos\big(P(t)\big)\,dt$ est convergente.

Finalement, l'intégrale est convergente si et seulement P est de degré supérieur ou égal à 2.

### Exercice 26 p. 19

Chap9EXO22

$\boxed{\text{Vrai.}}$
Toute variance est positive et si la variance est nulle, la variable est presque sûrement constante (donc non à densité).

### Exercice 27 p. 19

Chap9EXO23

**1.(a)**

Posons $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) + \arctan(1/x) \end{array}\right.$.

Comme la fonction arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction inverse $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$, la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par somme et composition. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1+(1/x)^2} = 0.$$

Pourtant la fonction $f$ n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$ :

$$f(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\left(\text{car } \arctan(1) = -\arctan(-1) = \frac{\pi}{4}\right).$$

Par contre, $f$ est constante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Finalement, on obtient

$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \left\{\begin{array}{ccc} \pi/2 & \text{si} & x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si} & x < 0 \end{array}\right..$$

**1.(b)** On a vu à l'exemple page 6 que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{F_X(x) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}.}$$

**2.(a)** Comme $[Y < 0] = [X < 0]$ et par parité de la densité de X,

$$\mathbf{P}\big([Y<0]\big) = \mathbf{P}\big([X<0]\big) = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\begin{array}{rcll}
\mathbf{P}\big([0 < Y \leqslant x]\big) & = & \mathbf{P}\big([0 < 1/X \leqslant x]\big) & \\
& = & \mathbf{P}\big([X \geqslant 1/x]\big) & \\
& = & 1 - \mathbf{P}\big([X < 1/x]\big) & \text{(densité)} \\
& = & 1 - \mathbf{P}\big([X \leqslant 1/x]\big) & \\
\mathbf{P}\big([0 < Y \leqslant x]\big) & = & 1 - F_X(1/x). &
\end{array}$$

À l'aide des questions préliminaires,

$$\begin{array}{rcl}
F_X(1/x) & = & \dfrac{\arctan(1/x)}{\pi} + \dfrac{1}{2} \\
& = & \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) + \dfrac{1}{2} \\
F_X(1/x) & = & 1 - \dfrac{\arctan(x)}{\pi}.
\end{array}$$

Dès lors, $\boxed{\mathbf{P}\big([0<Y\leqslant x]\big)=\dfrac{\arctan(x)}{\pi}.}$

**2.(b)** Soit $x\in\mathbb{R}_*^+$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\big([Y\leqslant x]\big) &= \mathbf{P}\big([Y\leqslant 0]\big)+\mathbf{P}\big([0<Y\leqslant x]\big)\\ &= \frac{\arctan(x)}{\pi}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Soit $x\in\mathbb{R}_*^-$. On montre que

$$\mathbf{P}\big([Y\leqslant x]\big)=\frac{\arctan(x)}{\pi}+\frac{1}{2}.$$

On constate que Y a la même fonction de répartition qu'une loi de Cauchy. Comme la fonction de répartition caractérise la loi :

$$\boxed{\text{Y suit une loi de Cauchy.}}$$

**3.** On a $Z=\tan(\Theta)$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme la fonction arctangente est croissante,

$$[Z\leqslant x]=[\tan(\Theta)\leqslant x]=[\Theta\leqslant\arctan(x)].$$

D'où

$$F_Z(x)=F_\Theta\big(\arctan(x)\big).$$

Or, la fonction de répartition de $\Theta$ est :

$$F_\Theta(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leqslant-\pi/2\\ t/\pi+1/2 & \text{si } t\in]-\pi/2;\pi/2[\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Comme la fonction arctangente est à valeurs dans $]-\pi/2;\pi/2[$,

$$F_\Theta\big(\arctan(x)\big)=\frac{\arctan(x)}{2}+\frac{1}{2}.$$

$F_Z$ est égale à la fonction de répartition de la loi de Cauchy, donc :

$$\boxed{\text{Z suit une loi de Cauchy.}}$$

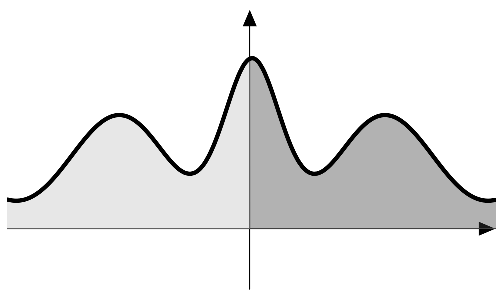
### Exercice 31 p. 20

Chap9EXO24

**1.** À l'aide du changement de variable affine (de classe $\mathscr{C}^1$), $u=-t$, « $du=-dt$ » et de la parité de $f$, on montre que

$$\int_{-\infty}^{0}f(t)\,dt=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$$

Graphiquement, l'aire sous la courbe de la partie dont les abscisses sont négatives vaut celle de la partie dont les abscisses sont positives.



De plus, on a

$$\mathbf{P}\big([X\geqslant 0]\big)=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt,$$

$$\text{et}\quad \mathbf{P}\big([X<0]\big)=\int_{-\infty}^{0}f(t)\,dt.$$

Comme $\quad\mathbf{P}\big([X\geqslant 0]\big)+\mathbf{P}\big([X<0]\big)=\mathbf{P}(\Omega)=1,$

$$\boxed{\mathbf{P}\big([X\geqslant 0]\big)=\frac{1}{2}.}$$

**2.** Précisons que le résultat précédent donne

$$F(0)=1/2.$$

Vérifions que pour tout réel $x$,

$$F(x)-\frac{1}{2}=-\Big(F(-x)-\frac{1}{2}\Big).$$

Or $\quad F(x)-\dfrac{1}{2}=F(x)-F(0)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt,$

et $\quad F(-x)-\dfrac{1}{2}=F(-x)-F(0)=\displaystyle\int_0^{-x} f(t)\,dt.$

En effectuant le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$, $u=-t$, « $du=-dt$ », on a par parité de $f$,

$$\int_0^x f(t)\,dt=-\int_0^{-x}f(-u)\,du=-\int_0^{-x}f(u)\,du.$$

D'où le résultat.

**3.** En effectuant le changement de variable affine $u=-t$, on montre que pour tout réel $x$ positif,

$$\int_0^x tf(t)\,dt=\int_0^{-x}tf(-u)\,du=\int_0^{-x}uf(u)\,du.$$

Si $\displaystyle\int_0^{+\infty}tf(t)\,dt$ est convergente, l'égalité précédente impose la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}tf(t)\,dt$. Comme $t\mapsto tf(t)$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$, la convergence implique ici la convergence absolue de

$$\int_0^{+\infty}tf(t)\,dt\quad\text{et}\quad\int_{-\infty}^{0}tf(t)\,dt.$$

L'espérance est bien définie. De plus, on a vu que

$$\int_0^{+\infty}tf(t)\,dt=-\int_{-\infty}^{0}tf(t)\,dt.$$

Par *la relation de Chasles*,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\,dt=\int_0^{+\infty}tf(t)\,dt+\int_{-\infty}^{0}tf(t)\,dt=0.$$

Ainsi $\quad\boxed{\mathbf{E}(X)=0.}$

## Exercice 32 p. 20

Chap9EXO25

*Préciser que le fait de supposer les densités strictement positives permet de s'assurer que la fonction de répartition est strictement monotone. De plus, elle est continue avec des limites en $-\infty$ et $+\infty$ valant respectivement 0 et 1. Donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction de répartition est une bijection de $\mathbb{R}$ dans* $]0;1[$.

**1.** Posons $Y = F^{-1}(U)$. Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbf{P}(Y \leqslant t) \\ &= \mathbf{P}\left(F^{-1}(U) \leqslant t\right) \\ &= \mathbf{P}\big(U \leqslant F(t)\big) \quad \text{F croissante} \\ &= F_U\big(F(t)\big). \end{aligned}$$

Or, on rappelle que pour une loi uniforme sur $[0;1]$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Ici, $F(t) \in [0;1]$ et on a simplement

$$F_Y(t) = F(t).$$

Les variables X et Y ont même fonction de répartition, comme la fonction de répartition caractérise la loi, on a montré que $Y = F_X{}^{-1}(U)$ et X ont même loi.

**2.** Par lecture graphique pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) \leqslant F_Y(x)$$

D'où pour un réel $t$ fixé, on obtient avec le choix $x = F_X^{-1}(t)$

$$t = F_X\left(F_X^{-1}(t)\right) \leqslant F_Y\left(F_X^{-1}(t)\right)$$

Puis, en composant par $F_Y^{-1}$ croissante

$$F_Y^{-1}(t) \leqslant F_X^{-1}(t)$$

On en déduit que

$$F_Y^{-1}(U) \leqslant F_X^{-1}(U)$$

puis par croissance de l'espérance

$$\mathbf{E}(F_Y^{-1}(U)) \leqslant \mathbf{E}(F_X^{-1}(U))$$

et par l'égalité en loi démontrée à la question 1

$$\mathbf{E}(Y) \leqslant \mathbf{E}(X).$$

*Remarque. Le résultat peut aussi se retrouver plus directement avec la formule démontrée à l'exercice 33 :*

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,dt.$$

## Exercice 33 p. 21

Chap9EXO27

**1.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On fait une intégration par parties, les applications $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto 1 - F(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, x]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^x \big(1 - F(t)\big)\,dt &= \Big[t(1 - F(t))\Big]_0^x - \int_0^x t(-f(t))\,dt \\ &= \boxed{x(1 - F(x)) + \int_0^x t f(t)\,dt.} \end{aligned}$$

**2.(a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in [x, +\infty[$, on a $0 \leqslant x f(t) \leqslant t f(t)$, car $f$ est une densité, donc positive.

On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ainsi que $\displaystyle\int_x^{+\infty} t f(t)\,dt$ car X possède une espérance. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} x f(t)\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} t f(t)\,dt,$$

et comme $\displaystyle\int_x^{+\infty} x f(t)\,dt = x \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$, on obtient le résultat voulu.

**2.(b)** Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x(1 - F(x)) = x(1 - \mathbf{P}(X \leqslant x)) = x\mathbf{P}(X > x) = x \int_x^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Le résultat du (a) devient :

$$0 \leqslant x(1 - F(x)) \leqslant \int_x^{+\infty} t f(t)\,dt.$$

Or $\displaystyle\int_x^{+\infty} t f(t)\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ car c'est un reste d'intégrale convergente. Avec le théorème d'encadrement, on conclut que :

$$\boxed{x\big(1 - F(x)\big) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.}$$

**2.(c)** Comme X admet une espérance et que $f = 0$ sur $\mathbb{R}_-$, on a $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\,dt$, donc, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathbf{E}(X)$. Ceci et le résultat de la question 2(b) montrent, avec la relation de la question 1 que

$$\int_0^x (1 - F(t))\,dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathbf{E}(X).$$

Donc l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,dt$$

converge, et

$$\int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,dt = \mathbf{E}(X).$$

**3.(a)** L'application $\varphi$ est une primitive de l'application continue $t \mapsto t f(t)$, elle est donc dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) = x f(x) \geqslant 0$. On conclut que

$$\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

**3.(b)** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après (•)

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_0^x (1-\mathrm{F}(t))\,\mathrm{d}t - \underbrace{x(1-\mathrm{F}(x))}_{\geqslant 0} \leqslant \int_0^x (1-\mathrm{F}(t))\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^x (1-\mathrm{F}(t))\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_x^{+\infty} (1-\mathrm{F}(t))\,\mathrm{d}t}_{\text{converge et est positive}} \\ &\leqslant \int_0^{+\infty} (1-\mathrm{F}(t))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est majorée}}$ par la constante

$$\int_0^{+\infty} (1-\mathrm{F}(t))\,\mathrm{d}t.$$

**3.(c)** D'après *a)* et *b)* et le théorème de convergence monotone, la fonction $\varphi$ admet une limite finie en $+\infty$. Cela signifie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et même absolument convergente puisque la fonction intégrée est déjà positive. Comme $f = 0$ sur $\mathbb{R}_-$, on en déduit que $\boxed{\mathbf{E}(\mathrm{X}) \text{ existe.}}$

L'hypothèse de la question 2 est vérifiée. D'après 2.(c) :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \big(1-\mathrm{F}(t)\big)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}(\mathrm{X}).}$$

**4.** Calculons

$$\mathbf{E}\big(\mathrm{X}^2\big) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

De nouveau, par intégration par parties, pour $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{A}} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[t^2(f(t)-1)\Big]_0^{\mathrm{A}} - \int_0^{\mathrm{A}} 2t\cdot(\mathrm{F}(t)-1)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{A}^2(\mathrm{F}(\mathrm{A})-1) + 2\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} t(1-\mathrm{F}(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Si $\mathrm{A}^2(\mathrm{F}(\mathrm{A})-1) \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors on justifie la convergence du membre de droite et l'égalité

$$\mathbf{E}\big(\mathrm{X}^2\big) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t\big(1-\mathrm{F}(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Or on a comme précédemment

$$\begin{aligned}0 \leqslant \mathrm{A}^2\big(1-\mathrm{F}(\mathrm{A})\big) &\leqslant \mathrm{A}^2 \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

•

..

## Exercice 34 — p. 21

LD29

• Comme F est croissance et continue sur $\mathbb{R}$, $g$ est positive et continue.

• Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$ avec $\mathrm{A} < \mathrm{B}$.

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{F}(t+1)-\mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{F}(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathrm{A}+1}^{\mathrm{B}+1} \mathrm{F}(u)\,\mathrm{d}u - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \quad (u = t+1) \\ &= -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}+1} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}+1} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}+1} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}+1} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \quad (\bullet)\end{aligned}$$

De plus, pour tout $t \in [\mathrm{A};\mathrm{A}+1]$, par croissance de F

$$0 \leqslant \mathrm{F}(\mathrm{A}) \leqslant \mathrm{F}(t) \leqslant \mathrm{F}(\mathrm{A}+1).$$

Puis par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}+1} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}+1} \mathrm{F}(\mathrm{A}+1)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(\mathrm{A}+1).$$

Comme $\mathrm{F}(\mathrm{A}+1)$ tend vers 0 lorsque A tend vers $-\infty$, par le théorème d'encadrement

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}+1} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{A}\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De même, à partir de l'encadrement :

$$\forall\, t \in [\mathrm{B},\mathrm{B}+1], \quad \mathrm{F}(\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{F}(t) \leqslant 1$$

et
$$\mathrm{F}(\mathrm{B}) \underset{\mathrm{B}\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

on montre que

$$\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{B}+1} \mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{B}\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

En reprenant la relation (•), avec $\mathrm{A} \to -\infty$ et $\mathrm{B} \to +\infty$, on prouve la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

En conclusion, $g$ est une densité de probabilité.

## Exercice 35 — p. 21

Chap9EXO29

Soit $a \in \mathbb{R}$. Par linéarité des intégrales convergentes

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(t^2 - 2at + a^2\big) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - 2a\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t + a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathbf{E}\big(\mathrm{X}^2\big) - 2a\mathbf{E}(\mathrm{X}) + a^2.\end{aligned}$$

La fonction $\varphi$ est donc polynomiale de degré 2 et de coefficient dominant positif. $\varphi$ admet donc un minimum. De plus,

$$\varphi'(t) = -2\mathbf{E}(\mathrm{X}) + 2a = 2\big(a - \mathbf{E}(\mathrm{X})\big).$$

Le minimum est atteint en $a = \mathbf{E}(\mathrm{X})$ et vaut

$$\boxed{\varphi\big(\mathbf{E}(\mathrm{X})\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(t - \mathbf{E}(\mathrm{X})\big) f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{V}(\mathrm{X}).}$$

## Exercice 36 p. 21

Chap9EXO32

**1.a)** La fonction

$$g : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$$

est continue sur $]0;+\infty[$, on a donc une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$.

- *Étude en $+\infty$.*

$$g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}\cdot x} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ est convergente $(3/2 > 1)$. Par le critère d'équivalence d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

- *Étude en 0.*

On a maintenant

$$g(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

En comparant maintenant à l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ $(1/2 < 1)$, on en déduit la convergence de

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Finalement $int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

**1.b)** Comme V est à valeurs dans $[0,\pi/2[$, $\tan \mathrm{V}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Puis

$$\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{R}^+.$$

Ainsi, pour $t < 0$

$$\mathrm{F_X}(t) = 0.$$

Pour $t \in \mathbb{R}^+$ fixé

$$\begin{aligned}\mathrm{F_X}(t) &= \mathbf{P}(\mathrm{X} \leqslant t) = \mathbf{P}\left(\tan(\mathrm{V})^2 \leqslant t\right)\\ &= \mathbf{P}(\tan \mathrm{V} \leqslant \sqrt{t}) \quad \text{car} \tan \mathrm{V} \geqslant 0\\ &= \mathbf{P}(\mathrm{V} \leqslant \arctan(\sqrt{t})).\end{aligned}$$

Notons que les deux dernières égalités résultent de la croissante des fonctions carrés (sur $\mathbb{R}^+$) et arctangente. Ainsi

$$\mathrm{F_X}(t) = \mathrm{F_V}(\arctan(\sqrt{t})).$$

En résumé,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{F_V}(\arctan(\sqrt{t})) & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

→ $\mathrm{F_X}$ est continue sur $\mathbb{R}_*^-$ (car constante).
→ $\mathrm{F}_x$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ par composition.
→ $\mathrm{F}_x$ est continue en 0 : on vérifie que

$$\lim_{t\to 0^+} \mathrm{F_X}(t) = 0 = \mathrm{F_X}(0) = \lim_{t\to 0^-} \mathrm{F_X}(t).$$

Donc $\mathrm{F_X}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\mathrm{F_X}$ est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Bilan : X est bien une variable aléatoire à densité.

**1.c)** Une densité $f_\mathrm{X}$ de $x$ est obtenue par dérivation.
Pour $t \in \mathbb{R}_*^-$

$$f_\mathrm{X}(t) = \left(\mathrm{F_X}\right)'(t) = 0$$

Pour $t \in \mathbb{R}_*^+$, par composition

$$\begin{aligned}f_\mathrm{X}(t) &= \left(\mathrm{F_X}\right)'(t).\\ &= \left(\mathrm{F_V}\circ g\right)'(t) = g'(t)\cdot \mathrm{F_V'}\big(g(t)\big) = g'(t) f_\mathrm{V}\big(g(t)\big)\end{aligned}$$

où $g : x \in \mathbb{R}_x^+ \mapsto \arctan(\sqrt{x})$ avec

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.\end{aligned}$$

Il vient

$$f_\mathrm{X}(t) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \times \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Dès lors en posant $f_\mathrm{X}(0) = 0$, on constate que $f = f_\mathrm{X}$ qui est donc une densité de probabilité.

**2.a)**
**2.b)** On trouve une loi binomiale de paramètre $\mathrm{N} = 100$ et

$$p = \mathbf{P}(\mathrm{X} > 1) = \frac{1}{4}.$$

## Exercice 37 p. 22

Chap9EXO34

**1.** Voir exercice 4.

**2.** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto |x|^m f^{-\infty}(x)$ est continue sur $]-\infty;+\infty[$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^m f(x)\,\mathrm{d}x$ est une intégrale généralisée $\pm\infty$.

- Étude en $+\infty$.

Pour $x > 0$

$$|x|^{m+2} f(x) = \frac{1}{2}|x|^{m+2}\mathrm{e}^{-|x|} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par les croissances comparées. D'où

$$|x|^m f(x) = 0_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or l'intégrale de Riemann

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

est convergente. Par le critère de négligeabilité pour des intégrales de fonctions positives, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} |x|^m f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge absolument.

- Il en va de même en $-\infty$.

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge absolument. Par le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre $m$.

- La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x f(x)$ est impaire et $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$. converge, donc

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

**3.** En reprenant la démarche de la question précédente, on vérifie que l'intégrale généralisée $\mathrm{H}_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

...

**Exercice 38** p. 22

chap8EXOLivre32

La variable $\mathrm{Y}_n/n$ est à valeurs dans

$$\left\{ \frac{k}{n} \,\middle|\, k \in [\![1;n]\!] \right\}$$

avec
$$\mathbf{P}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

D'après la formule de transfert

$$\mathbf{E}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathbf{P}\left(\mathrm{Y}_n = \frac{k}{n}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On reconnaît l'expression d'une somme de Riemann. Comme $f$ est continue, on sait que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Et de nouveau, par la formule de transfert mais pour les variables à densité

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}\big(f(\mathrm{Z})\big).$$

Finalement

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(\arctan\left(\frac{\mathrm{Y}_n}{n}\right)\right) = \mathbf{E}\big(\arctan(\mathrm{Z})\big).$$

**Exercice 39** p. 22

Chap10EXO10

*On étudie dans cet exercice les variables du type $\varphi(\mathrm{X})$. Le premier cas étudie le cas de $\varphi$ bijective alors que les deux suivants se concentrent sur des applications $\varphi$ non bijectives.*

**1.a)** Notons dans un premier temps que :

$$\forall\, t \in ]-1;1[,\ g(t) = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+t) - \ln(1-t)\Big).$$

Appliquons le théorème de la bijection :
- $g$ est continue par composition d'applications continues.
- On montre que $g$ est strictement croissante sur $]-1;1[$ en remarquant que $g$ est dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$ par différence de fonctions dérivables avec

$$\forall\, x \in ]-1;1[,\quad g'(t) = \frac{1}{1-t^2} > 0.$$

- Précisons les limites :

$$\frac{1+t}{1-t} \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1+t}{1-t} \underset{t\to -1^+}{\longrightarrow} 0^+.$$

Par composition avec la fonction logarithme :

$$g(t) \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad g(t) \underset{t\to -1^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

Finalement, $g$ réalise une bijection de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.

**1.b)** Soient $x \in \mathbb{R}$, $t \in ]-1;1[$.
Raisonnons par équivalence :

$$x = g(t) \iff 2x = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \iff \mathrm{e}^{2x} = \frac{1+t}{1-t}$$
$$\iff (1-t)\mathrm{e}^{2x} = 1+t \iff t = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

Finalement, pour tout réel $x$,

$$g^{-1}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

Notons que

$$g^{-1}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \frac{\mathrm{e}^{2x}+1-2}{\mathrm{e}^{2x}+1} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

Par composition et quotient de fonctions dérivables, $g^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$(g^{-1})'(x) = \frac{4\mathrm{e}^{2x}}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2}.$$

**1.c)i)** *On oublie trop souvent la seconde partie du théorème de la bijection : la réciproque est continue et a le même sens de variation que la fonction.*

D'après le théorème de la bijection, la réciproque $g^{-1}$ a le même sens de variation que $g$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{F_T}(x) &= \mathbf{P}\big([\mathrm{T} \leqslant x]\big) \\
&= \mathbf{P}\big([g(\mathrm{X}) \leqslant x]\big) \\
&= \mathbf{P}\big([\mathrm{X} \leqslant g^{-1}(x)]\big) \quad \text{car } g^{-1} \text{ est strict. croiss.} \\
\mathrm{F_T}(x) &= \mathrm{F_X}\big(g^{-1}(x)\big).
\end{aligned}$$

Or, la fonction de répartition de $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{U}([-1;1])$ est :

$$\mathrm{F_X}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant -1 \\ (1+t)/2 & \text{si } t \in [-1;1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De plus, $g^{-1}(x) \in ]-1;1[$, il vient :

$$\mathrm{F_T}(x) = \frac{1}{2}\big(1 + g^{-1}(x)\big).$$

On trouve,
$$\mathrm{F_T}(x) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

*Prenons le réflexe de tester la cohérence du résultat. On a bien :*

- $F_T$ *est croissante;*
- $F_T(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $F_T(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

**1.c)ii)** On constate que $F_T$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $F_T$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ (sauf en un nombre fini de points). Par définition, T est une variable à densité. Précisons une densité. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_T(x) = F_T{}'(x) = \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}.$$

*Remarque. Donnons une seconde démonstration pour rappeler le théorème de dérivation de la réciproque. La fonction $g$ est bijective de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$ avec $g'$ qui ne s'annule pas. On sait alors que $g^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel $x$*

$$\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}.$$

*Par composition,* $F_T$ *est alors dérivable sur* $\mathbb{R}$ *avec*

$$F_T{}'(x) = \left(g^{-1}\right)'(x)\cdot F_X{}'\left(g^{-1}\right)(x) = \left(g^{-1}\right)'(x)\cdot f\left(g^{-1}(x)\right).$$

*où $f$ est une densité de la loi uniforme sur $]-1;1[$. Comme $g^{-1}(x) \in ]-1;1[$ et $f$ est constante égale à 1/2 sur $]-1;1[$, il vient*

$$f_T(x) = F_T{}'(x) = \frac{1}{2}\left(g^{-1}\right)'(x).$$

En reprenant la conclusion du 1.b), on retrouve bien la même densité.

**2.a)** Notons que pour tout réel $x<0$,

$$F_U(x) = \mathbf{P}\big([U \leqslant x]\big) = \mathbf{P}\big([|X| \leqslant x]\big) = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \mathbf{P}\big(|X| \leqslant x\big) = \mathbf{P}\big([-x \leqslant X \leqslant x]\big) \\ &= F_X(x) - F_X(-x). \end{aligned}$$

Si $x \in [0;1]$, on obtient :

$$F_U(x) = \frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{2} = x.$$

Si $x>1$, alors $-x<0$ et :

$$F_U(x) = F_X(x) - F_X(-x) = 1-0 = 1.$$

On constate que $F_U$ s'identifie à la fonction de répartition d'un loi uniforme $\mathscr{U}([0;1])$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi,

$$U \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1]).$$

Une densité de U est :

$$f_U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**2.b)** De nouveau, donnons la relation entre les fonctions de répartition de V et de X. V est une variable aléatoire positive, donc $F_V$ est nulle sur $\mathbb{R}^-$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbf{P}\big([X^2 \leqslant x]\big) = \mathbf{P}\big([|X| \leqslant \sqrt{x}]\big) \\ &= \mathbf{P}\big([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]\big) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}). \end{aligned}$$

Notons que si $x \geqslant 1$ alors $F_V(x) = 1$. Si $x \in ]0;1[$, $\pm\sqrt{x} \in ]-1;1[$ et :

$$\begin{aligned} F_V(x) &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \\ &= (1+\sqrt{x})/2 - (1-\sqrt{x})/2 = \sqrt{x}. \end{aligned}$$

D'où
$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in ]0;1[ \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$F_V$ est continue, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. V est une variable aléatoire à densité. Une densité est donnée par :

$$f_V(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \in ]0;1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

## Exercice 40 p. 23

Chap9EXO33

**1.** La fonction $f$ est continue et positive. De plus, pour $A, B \in \mathbb{R}$, $A \leqslant B$.

$$\begin{aligned} \int_A^B f(t)\,dt &= \int_A^B \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{e^{-t}+1}\right]_A^B. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{1}{e^{-A}+1} \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^{-B}+1} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On en déduit la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

**2.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \left[\frac{1}{e^{-t}+1}\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

**3.a)** Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in ]-1;1[$. Raisonnons par équivalence

$$\begin{aligned} \varphi(x) = y &\iff \frac{e^x-1}{e^x+1} = y \\ &\iff e^x - 1 = y\left(e^x+1\right) \\ &\iff e^x(1-y) = y+1 \\ &\iff e^x = \frac{y+1}{1-y} \qquad (y \neq 1). \end{aligned}$$

Or la condition $y \in ]-1;1[$, donne

$$\frac{y+1}{1-y} > 0$$

D'où

$$\varphi(x) = y \iff x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right).$$

Ainsi tout $x \in$ admet $y$ un unique antécédent par $\varphi$. $\varphi$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$ et

$$\forall y \in ]-1;1[, \qquad \varphi^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right).$$

**3.b)** On a $Y(\Omega) \subset ]-1;1[$. Pour $t \in ]-\infty;-1]$

$$F_Y(t) = 0.$$

Pour $t \in [1;+\infty[$, $\qquad \mathrm{F_Y}(t) = 1$.

Pour $t \in ]-1;1[$,

$$\begin{aligned}\mathrm{F_Y}(t) &= \mathbf{P}(\varphi(\mathrm{X}) \leqslant t)\\ &= \mathbf{P}\left(\mathrm{X} \leqslant \varphi^{-1}(t)\right) \quad (\varphi^{-1} \text{ croissante})\\ &= \mathrm{F_X}\left(\varphi^{-1}(t)\right).\end{aligned}$$

À l'aide de la question 2, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{F_Y}(t) &= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\varphi^{-1}(t)}} = \frac{1}{1+\exp\left(-\ln\left(\frac{t+1}{1-t}\right)\right)}\\ &= \frac{1}{1+\exp\left(\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)\right)}\\ &= \frac{1}{1+(1-t)/(1+t)}\\ &= \frac{1+t}{(1+t)+(1-t)} = \frac{1+t}{2}.\end{aligned}$$

On constate que $\mathrm{F_Y}$ est identique à la fonction de répartition d'une loi uniforme continue sur $]-1;1[$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi :

$$\mathrm{Y} \hookrightarrow \mathscr{U}(]-1;1[).$$

## Exercice 41 p. 23

Chap9EXO40

**1.** Dans le cas de variable à densité, la fonction de répartition est continue et croissante. De plus, les limites de la fonction de répartition en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, 1/2 admet au moins un antécédent par F. Si on le note $m$

$$\mathbf{P}(\mathrm{X} \leqslant m) = \mathrm{F}(m) = \frac{1}{2}.$$

**2.** La fonction de répartition F de X est :

$$\begin{cases}\forall x \in \mathbb{R}_*^-, & \mathrm{F}(x) = 0\\ \forall x \in \mathbb{R}^+, & \mathrm{F}(x) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} m \in \mathscr{M}(\mathrm{X}) &\iff \mathrm{F}(m) = \frac{1}{2}\\ &\iff 1-\mathrm{e}^{-m\lambda} = \frac{1}{2} \iff m = \frac{\ln 2}{\lambda}.\end{aligned}$$

Il vient :

$$\mathscr{M}(\mathrm{X}) = \left\{\frac{\ln 2}{\lambda}\right\}.$$

Comme $\mathbf{E}(\mathrm{X}) = 1/\lambda$, on a

$$\mathbf{E}(\mathrm{X}) \notin \mathscr{M}(\mathrm{X}).$$

**3.a)** Pour $a$, $b \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0;1]$

$$\begin{aligned}|\mathrm{X}-\lambda a-(1-\lambda)b| &= |-\lambda(a-\mathrm{X})-(1-\lambda)(b-\mathrm{X})|\\ &= |\lambda(a-\mathrm{X})+(1-\lambda)(b-\mathrm{X})|\\ &\leqslant \lambda|\mathrm{X}-a|+(1-\lambda)|\mathrm{X}-b|.\end{aligned}$$

Par croissance de l'espérance, on en déduit la convexité de $\varphi$.

$$\varphi\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right) \leqslant \lambda\varphi(a)+(1-\lambda)\varphi(b).$$

**3.b)** La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto t f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction

$$\mathrm{H} : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de $t \in \mathbb{R} \mapsto t f(t)$ (qui s'annule en 0).
De plus, X admet une espérance et l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge (absolument). On en déduit par la relation de Chasles

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{G}(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} t f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{constante}} + \mathrm{H}(x).$$

Comme H est dérivable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que G l'est aussi et pour $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{G}'(x) = \mathrm{H}'(x) = x f(x).$$

**3.c)** On a

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \int_{-\infty}^{a} |t-a| f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{+\infty} |t-a| f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_{-\infty}^{a} (t-a) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a}^{+\infty} (t-a) f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{a}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{a} t f(t)\,\mathrm{d}t\\ &\qquad + a\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t - a\int_{a}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En introduisant les fonctions G et F, il vient

$$\begin{aligned}\varphi(a) &= \left(\mathbf{E}(\mathrm{X})-\mathrm{G}(a)\right)-\mathrm{G}(a)+a\mathrm{F}(a)-a\left(1-\mathrm{F}(a)\right)\\ &= -2\mathrm{G}(a)+\mathbf{E}(\mathrm{X})+2a\mathrm{F}(a)-a.\end{aligned}$$

Par combinaison linéaire et produit, $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi'(a) &= -2\mathrm{G}'(a)+2\mathrm{F}(a)+2a\mathrm{F}'(a)-1\\ &= -2af(a)+2\mathrm{F}(a)+2af(a)-1\\ &= 2\mathrm{F}(a)-1.\end{aligned}$$

**3.d)** Rappelons maintenant un énoncé de convexité :
Soient $\varphi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $a$ appartenant à un intervalle ouvert inclus dans I.

Si
- $\to$ $\varphi$ est convexe ;
- $\to$ $\varphi$ est dérivable en $a$;
- $\to$ $a$ est un point critique $\left(\varphi'(a) = 0\right)$;

Alors, $\varphi$ admet un minimum global en $a$.
Comme les points critiques ici sont les médianes. Cet énoncé permet donc de justifier que $\varphi$ admet un minimum global atteint uniquement sur les médianes.

**4.** Montrons dans un premier temps que $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ est un intervalle. Tout d'abord, nous avons vu à la première question que $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ est non vide. Soient $x$, $y \in \mathscr{M}(\mathrm{X})$ et $t \in [0;1]$. Montrons que

$$tx+(1-t)y \in \mathscr{M}(\mathrm{X}).$$

Notons $m$, le minimum de $\varphi$. Par convexité de $\varphi$

$$\varphi(tx+(1-t)y) \leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y) \leqslant tm+(1-t)m = m.$$

Or, par définition du minimum, on a aussi

$$\varphi(tx+(1-t)y) \geqslant m.$$

D'où l'égalité $\varphi(tx+(1-t)y) = m$. Ainsi, $tx+(1-t)y$ est un point où est atteint de minimum de $\varphi$, on sait alors que $tx+(1-t)y$ appartient à $\mathscr{M}(\mathrm{X})$.
Précisons que les limites de F étant 0 et 1 en $\pm\infty$, on a nécessairement le fait que $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ est bornée.
Si on note $\alpha$ la borne supérieure de $\mathscr{M}(\mathrm{X})$, il existe une suite $(x_n) \in \mathscr{M}(\mathrm{X})$ d'éléments de $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ tels que

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha.$$

Par continuité de la fonction de répartition

$$\frac{1}{2} = \mathrm{F}(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{F}(\alpha).$$

Ainsi $\mathrm{F}(\alpha) = 1/2$ et $\alpha \in \mathscr{M}(\mathrm{X})$. Autrement dit, $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ est un intervalle fermé à droite.
Il en va de même à gauche et nous pouvons conclure que $\mathscr{M}(\mathrm{X})$ est un segment.

### Exercice 42 p. 23

Chap9EXO35

*On a démontré à l'exercice* **??**, *p.***??**, *que dans le cas des variables finies, la connaissance des moments de la variable aléatoire suffit à déterminer la loi de manière unique. Cet exercice donne un contre-exemple montrant que ce résultat ne s'étend pas aux variables à densité.*

**1.** Le changement de variable $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante $u = \ln(t) - n$ avec

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{e}^{u+n} = t$$

sur l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^n \frac{\sin(2\pi\cdot\ln(t))}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(t)^2}{2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

donne

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{n(u+n)}\sin(2\pi n + 2\pi u)\mathrm{e}^{-\frac{(u+n)^2}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

Expression que l'on simplifie avec :

$$\sin(2\pi n + 2\pi u) = \sin(2\pi u) \quad (n \in \mathbb{N})$$

et
$$n(u+n) - \frac{(u+n)^2}{2} = nu + n^2 - \frac{u^2}{2} - nu - \frac{n^2}{2}$$
$$= -\left(u^2+n^2\right)/2.$$

On a donc

$$\frac{\mathrm{e}^{-n^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Justifions la convergence de cette intégrale généralisée en $\pm\infty$. L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(2\pi u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

Or, on sait avec la loi normale centrée réduite que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

est convergente. Donc par le critère de comparaison, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$$

converge. De plus, on constate que l'intégrande

$$u \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2\pi u)\mathrm{e}^{-u^2/2}$$

est une fonction impaire. On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi u)\mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = 0.$$

*Remarque. La simple imparité est insuffisante, il fallait aussi montrer la convergence de l'intégrale.*
Enfin, par le théorème de changement de variable, on en déduit la convergence de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

puis son égalité avec 0.

**2.** Notons F et $\Phi$ respectivement la fonction de répartition de X et Y. Comme X est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$, on sait déjà que

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, \qquad \mathrm{F}(x) = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x) &= \mathbf{P}(\mathrm{X} \leqslant x) = \mathbf{P}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{Y}} \leqslant x\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\mathrm{Y} \leqslant \ln(x)\right) = \Phi\left(\ln(x)\right).\end{aligned}$$

On sait que $\Phi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par composition avec la fonction logarithme, F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$. De plus, F est nulle sur $\mathbb{R}_*^-$, donc aussi $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^-$. Enfin

$$\begin{cases}\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty\\ \Phi(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0,\end{cases}$$

donc par composition

$$\lim_{x\to 0^+}\mathrm{F}(x) = \lim_{x\to 0^+}\Phi\left(\ln(x)\right) = 0 = \mathrm{F}(0) = \lim_{x\to 0^-}\mathrm{F}(x).$$

On en déduit la continuité de F en 0.
Résumons, F est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc X est une variable à densité. Une densité est obtenue par dérivation (là où c'est possible).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{\mathrm{X}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0\\ \ln'(x)\Phi'\left(\ln(x)\right) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Sachant que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2},$$

On constate que $f_{\mathrm{X}} = g$.

**3.** On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant 1$, d'où pour $\lambda \in ]-1;1[$

$$1 + \lambda f(x) \geqslant 0.$$

Comme $g$ est positive, $h_\lambda$ est positive. Par produit de fonctions continues, $h_\lambda$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Comme $g$ est un densité, on a la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Ensuite, par la question 1, on a convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Par combinaison linéaire, on a convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Finalement, $h_\lambda$ est une densité de probabilité.

**4.a)** Justifions que X admet un moment à tout ordre.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto t^n g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et nulle sur $\mathbb{R}^-$ donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} t^n g(t)\,\mathrm{d}t$$

est généralisé en 0 et $+\infty$.

→ *Étude en 0.*

$$t^n g(t) = \frac{t^{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\ln(t)^2/2} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

L'intégrale est faussement impropre en 0.

→ *Étude en $+\infty$.*

$$\begin{aligned} t^2\cdot t^n g(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{n+1}\exp\left(-\frac{\ln(t)^2}{2}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\ln(t)^2}{2}+(n+1)\ln(t)\right).\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} -\frac{\ln(t)^2}{2}+(n+1)\ln(t) &= -\ln(t)\left(\frac{\ln(t)}{2}-(n+1)\right)\\ &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.\end{aligned}$$

On a $$t^2\cdot t^n g(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

C'est-à-dire $$t^n g(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Donc par les critères de Riemann et de négligeabilité, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente en $+\infty$.
Finalement, l'intégrale est convergente. L'intégrande étant positive, elle est même absolument convergente. Par le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre $n$.

**4.b)** À l'aide des questions 1 et 4.a), on a la convergence absolue et l'égalité

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n h_\lambda(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Par le théorème de transfert, $\mathrm{Y}_\lambda$ admet une espérance à tout ordre et

$$\mathbf{E}\left({\mathrm{Y}_\lambda}^n\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{E}\left(\mathrm{X}^n\right).$$

*Conclusion. Pour deux valeurs distinctes $\lambda_1$, $\lambda_2$ de $]0;1[$, les variables $\mathrm{Y}_{\lambda_1}$ et $\mathrm{Y}_{\lambda_2}$ ont les mêmes moments à tout ordre, pourtant les variables n'ont pas la même loi.*

# Table des matières