

DS 2 - sujet A

THÈME : PROBABILITÉS DISCRÈTES ET INTRODUCTION AUX VARIABLES À DENSITÉ

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice

$Y = \varphi(X)$ où X est à densité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

1. Justifier que f est une densité de probabilité.

Soit X , une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que f soit une densité de X . On note F sa fonction de répartition.

2. Préciser $F(0)$.
3. Est-ce que X admet une espérance?
- On considère la variable aléatoire $Y = \ln(1 + |X|)$ et on note G sa fonction de répartition.
4. Préciser $Y(\Omega)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, vérifier que $G(x) = F(e^x - 1) - F(1 - e^x)$.
On ne cherchera pas à calculer F .
5. En déduire que Y est une variable à densité et préciser une densité sur $\mathbb{R}$.

Problème A

Une nouvelle histoire d'urnes et de boules

Soit n un entier naturel. On dispose de $n + 1$ urnes $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$.

Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, l'urne $\mathcal{U}_j$ contient $j + 1$ boules numérotées de 0 à j . On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- Au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_n$.
- À l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro j (où $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$), le second tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_j$.
- On continue alors les tirages selon la même règle : pour tout entier naturel k non nul, on tire une boule avec remise au k -ième tirage et on note le numéro j de la boule tirée. Le $(k + 1)$ -ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_j$.

Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k -ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne $\mathcal{U}_n$, on pose $X_0 = n$.

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour tout entier naturel k , on considère la matrice W_k de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{bmatrix} \mathbf{P}([X_k = 0]) \\ \mathbf{P}([X_k = 1]) \\ \vdots \\ \mathbf{P}([X_k = n]) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{bmatrix}.$$

• Simulation avec Python

6. a) Écrire un programme qui prend en argument n et simule la variable X_1 en partant de $n + 1$ urnes. Faire de même avec X_2 .
b) Généraliser et écrire une fonction d'entête `SimuX(n, k)` qui permet de simuler X_k avec $n + 1$ urnes.
7. En déduire un programme qui prend en arguments n et k et renvoie une estimation de l'espérance de X_k .
8. Adapter le programme précédent pour obtenir une estimation de la variance de X_k .

• **Formule matricielle de récurrence**

9. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, exprimer $\mathbf{P}([X_{k+1} = j])$ en fonction de certains des nombres $\mathbf{P}([X_k = i])$, où $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
10. En déduire la relation : $W_{k+1} = AW_k$ pour tout entier naturel k .
11. a) Écrire un programme qui prend en argument n et renvoie la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
b) En déduire un programme qui prend en arguments n et k et renvoie la matrice W_k .

• **Calcul de l'espérance de X_k**

12. Déterminer la matrice ligne $B \in \mathcal{M}_{1, n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $BW_k = \mathbf{E}(X_k)$.
On identifie ici matrice de taille 1×1 et réel.
13. Calculer le produit BA en fonction de B .
14. a) Exprimer pour tout entier naturel k , $\mathbf{E}(X_{k+1})$ en fonction de $\mathbf{E}(X_k)$.
b) En déduire l'expression de $\mathbf{E}(X_k)$ en fonction de k et n .

• **Calcul de la variance de X_k**

15. On pose $C = \begin{bmatrix} 0 & 1^2 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 & n^2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1, n+1}(\mathbb{R})$. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $CW_k = \mathbf{E}(X_k^2)$.
16. Vérifier que $CA = (1/6)B + (1/3)C$.
17. Pour tout entier naturel k , exprimer $\mathbf{E}(X_{k+1}^2)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_k^2)$ et $\mathbf{E}(X_k)$.
18. Pour tout entier naturel k , on pose $u_k = \mathbf{E}(X_k^2) - \frac{n}{2^k}$.
a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/3$.
b) En déduire l'expression de $\mathbf{E}(X_k^2)$ en fonction de k et n .
19. Conclure en donnant en exprimant la variance $\mathbf{V}(X_k)$ en fonction de k et n .

• **Calcul de la loi de X_k**

On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et on rappelle que la base canonique de cet espace est $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ où, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme e_j a pour expression $e_j(x) = x^j$.
On définit de plus la famille de polynômes $\mathcal{C} = (q_0, q_1, \dots, q_n)$ par

$$\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad q_j = (x-1)^j.$$

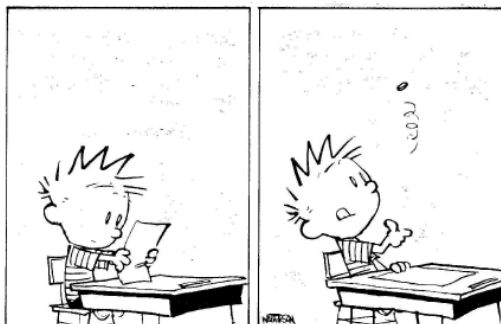
Soit f l'application qui, à un polynôme S de $\mathbb{R}_n[x]$, associe le polynôme $Q = f(S)$ donné par :

$$Q(x) = f(S)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} \int_1^x S(t) dt & \text{si } x \neq 1 \\ S(1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

20. a) Calculer pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $f(e_j)$. À l'aide d'une somme géométrique, vérifier que $f(e_j) \in \mathbb{R}_n[x]$.
b) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ et écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de A .
21. Vérifier que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ constituée de vecteurs propres de f . Préciser le spectre de f .
22. a) Écrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{C}$ ainsi que la matrice de passage T de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
b) Justifier que $D = T^{-1}AT$.
23. Déterminer la matrice T^{-1} , inverse de T . On pourra développer $((x-1)+1)^j$.
24. Écrire pour tout entier naturel k , la dernière colonne de la matrice A^k .
25. a) Montrer que pour tout entier naturel k , la loi de X_k est donnée par :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}([X_k = j]) = \binom{n}{j} \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i \binom{n-j}{i} \frac{1}{(j+i+1)^k}.$$

- b) Pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}([X_k = j])$. Interpréter l'issue asymptotique des tirages.



Calvin et Hobbes

Problème B
Autour de l'espérance conditionnelle et la formule de l'espérance totale

Partie A

• **Préliminaire 1 sur les suites arithmético-géométriques**

Soient r et s deux nombres réels tels que $r \neq 1$. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = r u_n + s, \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

26. a) Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = r\ell + s$.
b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{s(1-r^{n-1})}{1-r} + r^{n-1}u_1.$$

27. À quelle condition nécessaire et suffisante sur r, s et u_1 la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle? Quelle est alors sa limite?

• **Préliminaire 2 sur les fonctions génératrices**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[[0; N]]$. On définit le polynôme G_X par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X=k) t^k.$$

28. a) Montrer que $\mathbf{P}(X=0) = G_X(0)$ et $\mathbf{P}(X=1) = G'_X(0)$.
b) Plus généralement, on note $G_X^{(m)}$ la dérivée m -ième de G_X . Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbf{P}(X=k) = \frac{1}{k!} G_X^{(k)}(0).$$

On pourra s'appuyer sur la formule de Taylor sur les polynômes.

29. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $[[0; N]]$. Justifier que X_1 et X_2 ont même loi si et seulement si $G_{X_1} = G_{X_2}$.
30. En déduire l'équivalence entre :
i) La variable X suit une loi binomiale
si et seulement si
ii) Il existe $m \in \mathbb{N}^*, \alpha \in]0; 1[$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = (1 - \alpha + \alpha t)^m$.

Partie B

Le but de la suite de ce problème est d'étudier les variations du nombre d'exemplaires disponibles d'un livre (disons, votre manuel favori de maths) dans une bibliothèque. Le règlement de cette bibliothèque est le suivant : un livre emprunté au cours de la semaine numéro n doit impérativement être rendu à la fin de la semaine $n+1$, de sorte qu'il pourra être remis dans les rayons au début de la semaine $n+2$. On appelle N le nombre total d'exemplaires que possède la bibliothèque.

On suppose que chaque semaine, un exemplaire disponible a (indépendamment de tout le reste) une probabilité $p \in]0, 1[$ d'être emprunté. On suppose par ailleurs que tous les exemplaires empruntés à la semaine n sont rendus juste à temps : ils pourront tous être réempruntés à partir du début de la semaine $n+2$.

On note X_n le nombre de livres disponibles au début de la semaine n , et Z_n le nombre de livres empruntés au cours de la semaine n . On suppose qu'au début de l'année (pour $n=1$) ils sont tous disponibles.

• **Étude de l'espérance**

31. Expliquer avec des mots les relations

$$\begin{cases} X_1 &= N \\ X_{n+1} &= N - Z_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $k, i \in [[0; N]]$, préciser $\mathbf{P}_{[X_n=k]}(Z_n = i)$. En déduire $\mathbf{E}(Z_n | X_n = k)$ puis l'égalité $\mathbf{E}(X_{n+1} | X_n = k) = N - kp$.

33. a) Donner l'énoncé de la formule de l'espérance totale.

b) Justifier que $\mathbf{E}(X_{n+1}) = N - p\mathbf{E}(X_n)$.

34. Donner l'expression de $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de N, p et n . Quel est le comportement de la suite $(\mathbf{E}(X_n))_n$ quand n tend vers l'infini?

• **Loi de X_n à l'aide des fonctions génératrices**

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n pour G_{X_n} . On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) t^k.$$

35. Préciser G_1 .

36. a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t ,

$$\mathbf{E}(t^{Z_n} | X_n = k) = (1 - p + pt)^k.$$

b) Puis, à l'aide de la question 31, que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \neq 0$,

$$\mathbf{E}(t^{X_{n+1}} | X_n = k) = t^N \left(1 - p + \frac{p}{t}\right)^k$$

c) En déduire à l'aide de la formule de l'espérance totale que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \neq 0$,

$$G_{n+1}(t) = t^N G_n \left(1 - p + \frac{p}{t}\right).$$

37. a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfaisant la relation de récurrence $\alpha_{n+1} = 1 - p\alpha_n$ et telle que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t ,

$$G_n(t) = (1 - \alpha_n + \alpha_n t)^N.$$

Donner l'expression de α_n en fonction de p et de n .

b) En déduire que X_n suit une loi binomiale de paramètres N et α_n .

38. En comparant $\mathbf{E}(X_n)$ et $G'_n(1)$, retrouver le résultat de la question 34.

• **Retour sur le cas $N = 2$ via de l'algèbre linéaire**

Dans cette partie, on étudie plus précisément le cas particulier où $N = 2$. On définit la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$\forall i, j \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, \quad a_{i,j} = \mathbf{P}_{[X_n=j]}(X_{n+1} = i).$$

Attention : pour les besoins du problème, on numérote ici les lignes et les colonnes de 0 à 2 (et pas de 1 à 3).

39. a) Donner l'expression de la matrice A en fonction de p .

b) On pose

$$u_1 = \begin{bmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -p \\ p-1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer Au_i pour tout $i \in \{1; 2; 3\}$. En déduire le spectre de A et le fait que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

40. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$w_n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{bmatrix}.$$

a) Que vaut w_1 ? Montrer que $w_{n+1} = Aw_n$.

b) Comment en déduire w_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Bonus Parmi les formules suivantes, une est fausse, laquelle ?

$$\text{A) } \pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}} \right)^{-1} \quad \text{B) } \pi = \left(12 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}} \right)^{-1}$$

$$\text{C) } \pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \dots}}}}} \quad \text{D) } \pi = 3 - \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \frac{9^2}{6 + \dots}}}}} \quad \text{E) } \pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}.$$

– FIN –

DS 2 - sujet *

THÈME : PROBABILITÉS DISCRÈTES ET INTRODUCTION AUX VARIABLES À DENSITÉ

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice

$Y = \varphi(X)$ où X est à densité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

1. Justifier que f est une densité de probabilité.

Soit X , une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que f soit une densité de X . On note F sa fonction de répartition. On considère la variable aléatoire $Y = \ln(1 + |X|)$ et on note G sa fonction de répartition.

2. Est-ce que X admet une espérance?
3. Justifier que Y est une variable à densité et préciser une densité sur $\mathbb{R}$.

Problème 1

Introduction aux séries entières et applications

Les parties B et C sont indépendantes mais toutes les deux, dépendantes de la partie A.

Partie A : résultats préliminaires sur les séries entières

On considère pour tout $R \in \mathbb{R}_*^+$, l'ensemble $\mathcal{B}(R)$ constitué des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la suite $(a_n R^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Dit autrement la suite $a \in \mathcal{B}(R)$ si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n R^n| \leq K.$$

- **Définition de S_a**

4. Soit $R \in \mathbb{R}_*^+$. Justifier que si $a \in \mathcal{B}(R)$ alors pour tout $x \in]-R; R[$, la série $\sum a_n x^n$ converge.
On pourra commencer par écrire $a_n r^n = a_n R^n (r/R)^n$.

On définit alors la fonction S_a définie sur $] -R; R[$ par : $\forall x \in] -R; R[, \quad S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- **Unicité du développement**

5. Justifier que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_a(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n + o_0(x^N)$.
6. Soient $a, b \in \mathcal{B}(R)$. En déduire que si les fonctions S_a et S_b sont égales alors $a = b$.

- **Régularité de S_a**

Soit a une suite appartenant à $\mathcal{B}(R)$.

7. **Continuité**

- a) Soit un r un réel de $]0; R[$, x dans $[-r; r]$ et h un réel tel que : $x + h \in [-r; r]$. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$|(x+h)^n - x^n| \leq n r^{n-1} |h|.$$

- b) Justifier alors que $|S_a(x+h) - S_a(x)| \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n \right) |h|$.

- c) Montrer alors que S_a est continue sur $[-r; r]$ puis sur $] -R; R[$.

8. Caractère $\mathcal{C}^1$

On considère ici un réel r de $]0; R[$ et x dans $[-r; r]$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

et, sous réserve d'existence :

$$g_a : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

a) Soit p dans $]r; R[$. Justifier que la suite $(n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{B}(p)$, en déduire que g_a est définie et continue sur $] - R; R[$.

b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $s_n(x) = a_0 + \int_0^x s'_n(t) dt$.

c) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^x (g_a(t) - s'_n(t)) dt \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k.$$

d) En déduire que : $S_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t) dt$.

e) Montrer alors que S_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - R; R[$ et que : $S'_a = g_a$.

9. Caractère $\mathcal{C}^\infty$

Soient $r \in]0, R[$, a une suite de $\mathcal{B}(R)$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $b_n = k! \binom{n+k}{k} a_{n+k}$.

a) Justifier que $b_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, puis que la suite b appartient à $\mathcal{B}(r)$.

b) Montrer par récurrence que S_a est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - R; R[$ et que pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout $x \in] - R; R[$, $S_a^{(k)}(x) = k! \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \right)$.

On pourra comparer $S_a^{(k)}$ et S_b .

10. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de $S_a^{(n)}(0)$.

• Application : une première égalité

11. Déterminer une suite a telle que : $\forall x \in] - 1; 1[, S_a(x) = \frac{1}{1-x}$.

12. En déduire que pour tout $x \in] - 1; 1[,$ on a

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

Partie B : applications aux fonctions génératrices

Dans cette partie, les variables aléatoires seront définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour une telle variable aléatoire X , on pourra utiliser, sans les rappeler, les notations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \mathbf{P}(X = n), \quad a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad G_X : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \text{ autrement dit : } G_X = S_a.$$

13. Vérifier que G_X est définie sur $[-1; 1]$ et que pour tout $t \in [0; 1]$, $G_X(t) = \mathbf{E}(t^X)$.

On suppose dans les questions 14 et 15 que $a \in \mathcal{B}(R)$ avec $R > 1$.

14. a) En s'appuyant sur la question 8, justifier que X admet une espérance et que $G'_X(1) = \mathbf{E}(X)$.

b) Justifier que X admet un moment d'ordre 2 et exprimer $\mathbf{V}(X)$ à l'aide de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

15. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X admet un moment d'ordre k et établir $\mathbf{E}\left(\binom{X}{k}\right) = \frac{G_X^{(k)}(1)}{k!}$.

16. Exemple de la loi géométrique

On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

a) Exprimer à l'aide de p , le plus grand réel R tel que $a \in \mathcal{B}(R)$.

b) Donner une expression simple (sans somme) de $G_X(t)$ pour $t \in] - R; R[$. En appliquant la question 14, retrouver la valeur de l'espérance de X .

• Généralisation avec la loi de Pascal

On considère une suite infinie de tirages à pile ou face à l'aide d'une pièce non équilibrée, qui a la probabilité p de donner pile à chaque lancer. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note T_k le numéro du tirage où on obtient pile pour la k -ième fois. On pose par convention $T_0 = 0$ et $q = 1 - p$.

Simulation python

17. a) En utilisant uniquement la commande `rd.random()`, écrire un programme d'entête `geo(p)` qui simule une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p .
b) En déduire un programme python qui prend en arguments k et p puis simule la variable T_k .
18. En déduire un programme qui renvoie une approximation de $E(T_k)$.
19. Faire de même avec la variance de T_k .

Étude théorique

20. Reconnaître la loi de $T_{k+1} - T_k$ où $k \in \mathbb{N}^*$.
21. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la probabilité $P_{[T_k=m]}(T_{k+1} - T_k = n)$.
En remarquant que le résultat ne dépend pas de m , en déduire que les variables aléatoires $T_{k+1} - T_k$ et T_k sont indépendantes.

On admet le résultat suivant :

Si $(X_i)_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket}$ désigne m variables aléatoires mutuellement indépendantes alors : $G_{X_1+X_2+\dots+X_m} = \prod_{i=1}^m G_{X_i}$.

22. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que si G_{T_k} désigne la fonction génératrice de la variable T_k alors

$$\forall t \in]-1/q; 1/q[, \quad G_{T_k}(t) = \left(\frac{pt}{1-qt} \right)^k.$$

23. À l'aide de la question 12, déterminer la loi de T_k , c'est-à-dire donner $T_k(\Omega)$ et $P(T_k = m)$ pour tout $m \in T_k(\Omega)$.

Partie C : application à un modèle de survie, probabilité de renforcement

L'objet de cette partie est de proposer des méthodes d'étude, dans des cas particuliers, de modèles mathématiques visant à rendre compte de l'évolution d'un micro-organisme soumis à des radiations. On ne se préoccupera pas de la pertinence effective des modèles et des cas particuliers choisis, le but étant de mettre en évidence des traitements mathématiques de certains systèmes d'équations.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on supposera que chaque micro-organisme peut prendre $n+1$ états $(E_\ell)_{\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

- L'état E_0 correspondant à l'organisme sain,
- et l'état E_n représentant la mort de l'organisme.

On définit la variable aléatoire X_k prenant la valeur ℓ lorsque l'organisme est dans l'état E_ℓ à l'instant k .

On observe le micro-organisme à des instants successifs numérotés par des entiers naturels, l'instant dit "initial" étant numéroté 0. Entre deux instants successifs k et $k+1$ (k étant un entier naturel) les règles d'évolution du micro-organisme sont les suivantes :

- 1) Si l'organisme est à l'instant k en l'état E_i avec $1 \leq i \leq n-1$, il sera, à l'instant $k+1$ en l'état E_{i+1} avec la probabilité $\frac{i}{n}$ et en l'état E_{i-1} avec la probabilité $\frac{n-i}{n}$.
- 2) Si l'organisme est à l'instant k en l'état E_0 ou en l'état E_n , il y reste à l'instant $k+1$ avec une probabilité égale à 1.

On désigne, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, par P_i la probabilité pour un micro-organisme d'atteindre l'état E_n sachant qu'il est au départ dans l'état E_i et ceci sans tenir compte du temps mis pour y parvenir, on a donc¹

$$P_i = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X_k = n] \mid X_0 = i\right) = P(A_n \mid X_0 = i) \quad \text{où on pose} \quad A_n = \bigcup_{k=0}^{+\infty} [X_k = n].$$

24. a) Déterminer P_0 et P_n .
b) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pourquoi a-t-on $P(A_n \mid X_1 = j) = P(A_n \mid X_0 = j)$?
25. Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
a) Justifier que

$$P(A_n \mid X_0 = i) = P(A_n \mid X_0 = i \cap [X_1 = i+1]) \cdot P([X_1 = i+1] \mid X_0 = i) \cdot P([X_0 = i]) \\ + P(A_n \mid X_0 = i \cap [X_1 = i-1]) \cdot P([X_1 = i-1] \mid X_0 = i) \cdot P([X_0 = i]).$$

Indication. On pourra utiliser le système complet d'événements $([X_1 = \ell])_{\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

- b) En déduire que $P_i = \frac{i}{n}P_{i+1} + \frac{n-i}{n}P_{i-1}$. (★)

• Python

26. Pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $u_i = P_i/P_1$.

1. Pour alléger les notations, on pourra écrire $P(A|B)$ pour $P_B(A)$.

- a) Préciser u_0 et u_1 . Puis montrer que, pour tout $i \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$,

$$u_{i+2} = \frac{n}{i+1} u_{i+1} - \frac{n-(i+1)}{i+1} u_i.$$

- b) Recopier et compléter le programme suivant qui prend en argument n et renvoie la matrice $[u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{n-1} \quad u_n]$.

Editeur

```
import numpy as np

def suite(n):
    U=np.zeros(n+1)
    U[0]= ...
    U[1]= ...
    for i in range( ... ):
        U[i+2]= ...
    return U
```

27. Connaissant P_n , comment obtenir la valeur de P_1 à l'aide du code précédent?
28. Conclure en donnant un programme qui prend en argument n et renvoie la matrice ligne $[P_0 \quad P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_{n-1} \quad P_n]$.
29. On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$, $P_k = 1$.
- a) Montrer qu'alors la relation $(\star)$ est vraie pour tout entier i strictement positif.
- b) On considère alors la suite $p = (P_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Justifier que $p \in \mathcal{B}(1)$.

D'après la partie A, on peut donc considérer la fonction S_p de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1; 1[$ avec

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_k x^k \quad \text{et} \quad S'_p(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P_k x^{k-1}.$$

30. En utilisant la relation $(\star)$, justifier, pour tout x élément de $] -1, 1[$:

$$x(1-x^2)S'_p(x) = (nx+1-(n-1)x^2)S_p(x).$$

31. Montrer l'existence de réels α, β, γ , tels que pour tout x élément de $]0, 1[$, on ait :

$$\frac{nx+1-(n-1)x^2}{x(1-x^2)} = \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{1-x}$$

32. En étudiant la dérivée de $\ln(|S_p|)$, justifier l'existence de $K \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in]0; 1[$, $S_p(x) = K \frac{x(1+x)^{n-1}}{1-x}$.
33. En utilisant un résultat d'unicité, donner une expression de P_i pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, en fonction de n .

Problème 2

Autour de l'espérance conditionnelle et la formule de l'espérance totale

• Préliminaire

Soient r et s deux nombres réels tels que $r \neq 1$. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = r u_n + s, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

34. a) Déterminer le réel ℓ tel que $\ell = r\ell + s$.
- b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{s(1-r^{n-1})}{1-r} + r^{n-1} u_1.$$

- Le but de la suite de ce problème est d'étudier les variations du nombre d'exemplaires disponibles d'un livre (disons, votre manuel favori de maths) dans une bibliothèque. Le règlement de cette bibliothèque est le suivant : un livre emprunté au cours de la semaine numéro n doit impérativement être rendu à la fin de la semaine $n+1$, de sorte qu'il pourra être remis dans les rayons au début de la semaine $n+2$. On appelle N le nombre total d'exemplaires que possède la bibliothèque.

On suppose que chaque semaine, un exemplaire disponible a (indépendamment de tout le reste) une probabilité $p \in]0, 1[$ d'être emprunté. On suppose par ailleurs que tous les exemplaires empruntés à la semaine n sont rendus juste à temps : ils pourront tous être réempruntés à partir du début de la semaine $n + 2$.

On note X_n le nombre de livres disponibles au début de la semaine n , et Z_n le nombre de livres empruntés au cours de la semaine n . On suppose qu'au début de l'année (pour $n = 1$) ils sont tous disponibles.

• **Étude de espérance**

35. Expliquer avec des mots les relations

$$\begin{cases} X_1 &= N \\ X_{n+1} &= N - Z_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

36. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\mathbf{E}(X_{n+1} | X_n = k) = N - kp$.

b) Justifier que $\mathbf{E}(X_{n+1}) = N - p\mathbf{E}(X_n)$.

c) Donner l'expression de $\mathbf{E}(X_n)$ en fonction de N, p et n . Quel est le comportement de la suite $(\mathbf{E}(X_n))_n$ quand n tend vers l'infini?

• **Loi de X_n à l'aide des fonctions génératrices**

On rappelle que par convention $0^0 = 1$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme G_n par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \mathbf{E}\left(t^{X_n}\right) = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) t^k.$$

37. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t , $\mathbf{E}\left(t^{Z_n} | X_n = k\right) = (1 - p + pt)^k$

puis que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \neq 0$, $\mathbf{E}\left(t^{X_{n+1}} | X_n = k\right) = t^N \left(1 - p + \frac{p}{t}\right)^k$.

38. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \neq 0$,

$$G_{n+1}(t) = t^N G_n\left(1 - p + \frac{p}{t}\right).$$

39. a) Donner l'expression de G_1 .

b) Montrer par récurrence qu'il existe une suite de réels $(q_n)_{n \geq 1}$ satisfaisant la relation de récurrence $q_{n+1} = 1 - pq_n$ et telle que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t , $G_n(t) = (1 - q_n + q_n t)^N$.

c) Donner l'expression de q_n en fonction de p et de n .

40. Vérifier que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Bonus Parmi les formules suivantes, une est fausse, laquelle?

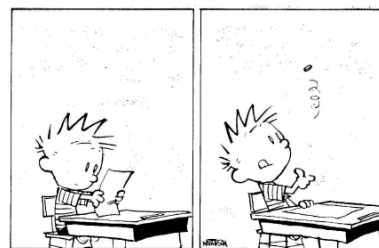
$$\text{A) } \pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}} \right)^{-1} \quad \text{B) } \pi = \left(12 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (6k)!(13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}} \right)^{-1}$$

$$\text{C) } \pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \dots}}}}}}$$

$$\text{D) } \pi = 3 - \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \frac{9^2}{6 + \dots}}}}}$$

$$\text{E) } \pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}.$$

– FIN –



Cette dernière partie ne fait pas partie du DS original

• **Retour sur le cas $N = 2$ via de l'algèbre linéaire**

Dans cette partie, on étudie plus précisément le cas particulier où $N = 2$. On définit la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$\forall i, j \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, \quad a_{i,j} = \mathbf{P}_{[X_n=j]}(X_{n+1}=i).$$

Attention : pour les besoins du problème, on numérote ici les lignes et les colonnes de 0 à 2 (et pas de 1 à 3).

41. Donner l'expression de la matrice A en fonction de p .

42. Justifier que $\mathbf{1}$ est vecteur propre pour la valeur propre tA . En déduire que 1 est valeur propre de A .

43. On pose

$$u_1 = \begin{bmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -p \\ p-1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer Au_i pour tout $i \in \{1; 2; 3\}$. En déduire le spectre de A et le fait que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

44. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$w_n = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{bmatrix}.$$

Que vaut w_1 ? Montrer que $w_{n+1} = Aw_n$.

45. Soient a_1, a_2, a_3 les coefficients de w_1 dans la base $\mathcal{B}$, i.e. $w_1 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$. Montrer que $a_1 = (1+p)^{-2}$.

46. De la même façon, on note $a_{1,n}, a_{2,n}$ et $a_{3,n}$ les coefficients de w_n dans la base $\mathcal{B}$.

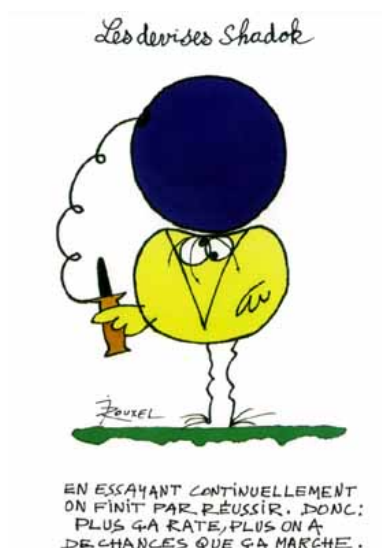
Montrer que les suites $(a_{1,n})_n, (a_{2,n})_n$ et $(a_{3,n})_n$ admettent des limites, notées respectivement a_1^*, a_2^* et a_3^* , que l'on calculera.

47. Soit $w^* = a_1^* u_1 + a_2^* u_2 + a_3^* u_3$. Montrer que $Aw^* = w^*$.

48. Montrer que w^* définit une loi de probabilité, i.e. qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0; 1; 2\}$ telle que

$$w^* = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X=0) \\ \mathbf{P}(X=1) \\ \mathbf{P}(X=2) \end{bmatrix}.$$

Donner le nom et les paramètres de cette loi.



DS 2 A - solution

Exercice

1. La fonction f est positive et continue par quotient sur $\mathbb{R}$.
Soit $A \in \mathbb{R}$

$$\int_0^A f(x) dx = \left[\frac{-1}{2(1+x)} \right]_0^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Notons que f est une fonction paire. On a aussi la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

Ce qui conclut.

2. Comme f est paire, $F(0) = 1/2$.

3. On constate que

$$xf(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Par le critère d'équivalence des intégrales de fonctions de positives et le critère de Riemann, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

ne converge pas (absolument). Il n'y a pas d'espérance.

4. La variable $1 + |X|$ est à valeurs dans $[1; +\infty[$, donc

$$Y(\Omega) = [0; +\infty[.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Procédons par disjonction des cas :

→ Si $x < 0$, on a déjà

$$G(x) = 0.$$

→ Si $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbf{P}(Y \leq x) \\ &= \mathbf{P}(1 + |X| \leq e^x) \quad \text{car exp. strict. croiss.} \\ &= \mathbf{P}(|X| \leq e^x - 1) \\ &= \mathbf{P}(1 - e^x \leq X \leq e^x - 1) \\ &= \mathbf{P}(1 - e^x < X \leq e^x - 1) \quad X \text{ à densité} \\ G(x) &= F(e^x - 1) - F(1 - e^x). \end{aligned}$$

5. Précisons que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car X admet une densité continue. La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ car constante, et sur $]0; +\infty[$ par différence et composition. En particulier, G est continue sur $\mathbb{R}^*$. Vérifions la continuité en 0. En tant que fonction de répartition, G est continue à droite. De plus pour $x < 0$,

$$G(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 = G(0).$$

Ainsi $\lim_{0^-} G = G(0) = \lim_{0^+} G$.

On en déduit que G est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. La variable Y est donc bien une variable à densité.

Pour obtenir une densité, on commence par dériver là où c'est possible :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^x F'(e^x - 1) + e^x F'(1 - e^x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit une densité g de Y par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^x (f(e^x - 1) + f(1 - e^x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En remarquant que f est une fonction paire et après simplification :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{sinon.} \end{cases}$$



La variable Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Problème A

- 6.a) La variable X_1 suit une loi uniforme sur $[[0; n]]$. Donc

```
import numpy.random as rd

def simuX1(n):
    x0=n
    return rd.randint(0, x0+1)
```

- On en déduit la simulation de X_2 :

```
def simuX2(n):
    x0=n
    x1=rd.randint(0, x0+1)
    return rd.randint(0, x1+1)
```

- 6.b)

```
def simuX(n, k):
    x=n
    for i in range(k):
        X=rd.randint(0, x+1)
    return X
```

- 7.

```
def esperance(n,k):
    e=0
    for i in range(5000):
        e+= simuX(n,k)
    return e/5000
```

8. Pour ce nouveau code, on s'appuie sur la formule de Koenig-Huygens :

```
def variance(n,k):
    e1=0
    e2=0
    N=5000
    for i in range(N):
        x=simuX(n,k)
        e1+=x
        e2+=x**2
    e1=e1/N
    e2=e2/N
    return e2-e1**2
```

9. Soit $k \in \mathbb{N}$, $([X_k = i])_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales s'applique.

$$\mathbf{P}([X_{k+1} = j]) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}(X_k = i) \mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = j).$$

Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Si l'événement $[X_k = i]$ est réalisé, le tirage $k+1$ s'effectue de manière uniforme dans l'urne $\mathcal{U}_i$. On a donc

$$\mathbf{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i \\ \frac{1}{i+1} & \text{si } j \leq i \end{cases}$$

On en déduit :

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = j) = \sum_{i=j}^n \mathbf{P}(X_k = i) \frac{1}{i+1}.$$

10. Notons $[W_{k+1}]_j = \mathbf{P}(X_{k+1} = j-1)$ et j -ième coefficient de W_{k+1} et $[AW_k]_j$ celui de AW_k . Par la formule du produit :

$$[AW_k]_j = \sum_{\ell=1}^{n+1} [A]_{j\ell} [W_k]_{\ell}$$

$$\text{or } [A]_{j\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > \ell \\ \frac{1}{\ell} & \text{sinon } (\ell \geq j). \end{cases}$$

On en déduit avec la formule de la question précédente

$$\begin{aligned} [AW_k]_j &= \sum_{\ell=j}^{n+1} \frac{1}{\ell} \mathbf{P}(X_k = \ell-1) \\ &= \sum_{\ell=j-1}^n \frac{1}{\ell+1} \mathbf{P}(X_k = \ell) = \mathbf{P}(X_{k+1} = j-1) \\ [AW_k]_j &= [W_{k+1}]_j. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

11.a)

```
import numpy as np

def matrice(n):
    M=np.zeros([n+1,n+1])
    for j in range(n+1):
        for i in range(j+1):
            M[i,j]=1/(j+1)
    return M
```

11.b) Comme $X_0 = n$, on a

$$W_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}).$$

On en déduit le code :

```
def matriceW(n,k):
    W=np.zeros([n+1,1])
    W[n,0]=1
    A=matrice(n)
    for i in range(k):
        W=np.dot(A,W)
    return W,2
```

12. Si on pose

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix},$$

on a bien

$$BW_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X_k = 0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X_k = n) \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^n i \mathbf{P}(X_k = i)$$

$$BW_k = \mathbf{E}(X_k).$$

13. On a $BA =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+1) \\ 0 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+1) \\ \vdots & 0 & 1/3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1/(n+1) \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1/(n+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & \dots & n/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{On a donc } BA = \frac{1}{2}B.$$

14.a) Soit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_{k+1}) &= BW_{k+1} = BAW_k \\ &= \frac{1}{2}BW_k \\ \mathbf{E}(X_{k+1}) &= \frac{1}{2}\mathbf{E}(X_k). \end{aligned}$$

14.b) On a donc une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $\mathbf{E}(X_0) = n$. D'où

$$\mathbf{E}(X_k) = \frac{n}{2^k}.$$

👁 Pour $k = 1$, on retrouve l'espérance d'une loi uniforme sur $\llbracket 0; n \rrbracket$.

15. On a par la formule de transfert

$$CW_k = \sum_{k=0}^n i^2 \mathbf{P}(X_k = i) = \mathbf{E}(X_k^2).$$

16. Notons $[M]_{ij}$ le coefficient en position (i, j) de la matrice M . Pour $i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$

$$\begin{aligned} [CA]_{1,i} &= \sum_{k=1}^{n+1} [C]_{1k} [A]_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^i [C]_{1k} [A]_{ki} \quad [A]_{ki} = 0 \text{ si } k > i \\ &= \sum_{k=1}^i (k-1)^2 \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{i} \sum_{k'=0}^{i-1} k'^2 \quad (k' = k-1) \\ &= \frac{1}{i} \frac{(i-1)i(2(i-1)+1)}{6} \\ &= \frac{1}{3} (i-1)^2 + \frac{1}{6} (i-1) \\ [CA]_{1,i} &= \frac{1}{3} [C]_{1,i} + \frac{1}{6} [B]_{1,i}. \end{aligned}$$

Ce qui donne $CA = \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}B$.

17. On en déduit que

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}^2) &= CW_{k+1} \\ &= CAW_k \quad (\text{q 10}) \\ &= \left(\frac{1}{3}C + \frac{1}{6}B\right)W_k \quad (\text{q 16}) \\ &= \frac{1}{3}CW_k + \frac{1}{6}BW_k \\ E(X_{k+1}^2) &= \frac{1}{3}E(X_k^2) + \frac{1}{6}E(X_k). \end{aligned}$$

18.a) Soit $b \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= E(X_{k+1}^2) - \frac{n}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{3}E(X_k^2) + \frac{1}{6}E(X_k) - \frac{n}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{3}E(X_k^2) + \frac{1}{6}\frac{n}{2^k} - \frac{n}{2^{k+1}} \quad (\text{q 14.b}) \\ &= \frac{1}{3}E(X_k^2) + \left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{n}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{3}E(X_k^2) - \frac{1}{3}\frac{n}{2^k} \\ u_{k+1} &= \frac{1}{3}u_k. \end{aligned}$$

La suite $(u_k)_k$ est bien géométrique de raison $1/3$ et de premier terme

$$u_0 = E(X_0^2) - n = n^2 - n = n(n-1).$$

18.b) On en déduit pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$u_k = \frac{n(n-1)}{3^k}.$$

D'où $E(X_k^2) = \frac{n}{2^k} + \frac{n(n-1)}{3^k}.$

19. On conclut par la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned} V(X_k) &= E(X_k^2) - E(X_k)^2 \\ &= \frac{n}{2^k} + \frac{n(n-1)}{3^k} - \frac{n^2}{4^k}. \end{aligned}$$

20.a) $\rightarrow$ Si $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} f(e_j)(x) &= \frac{1}{x-1} \int_1^x t^j dt = \frac{1}{x-1} \left[\frac{t^{j+1}}{j+1} \right]_1^x \\ &= \frac{x^{j+1} - 1}{(x-1)(j+1)} = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^j x^k \end{aligned}$$

en utilisant les résultats sur les sommes géométriques.

$\rightarrow$ Si $x = 1$.

$$f(e_j)(1) = e_j(1) = 1^j = 1 = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^j 1^k = 1.$$

Notons alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(e_j)(x) = \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^j x^k.$$

En particulier $f(e_j) \in \mathbb{R}_n[x]$.

20.b) Soient $Q, R \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ Si $x \neq 1$, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} f(Q + \lambda R)(x) &= \frac{1}{x-1} \int_1^x Q(t) + \lambda R(t) dt \\ &= \frac{1}{x-1} \int_1^x Q(t) dt + \lambda \frac{1}{x-1} \int_1^x R(t) dt \\ f(Q + \lambda R)(x) &= f(Q)(x) + \lambda f(R)(x). \end{aligned}$$

Puis pour $x = 1$

$$\begin{aligned} f(Q + \lambda R)(1) &= (Q + \lambda R)(1) \\ &= Q(1) + \lambda R(1) = f(Q)(1) + \lambda f(R)(1). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(Q + \lambda R)(x) = f(Q)(x) + \lambda f(R)(x)$$

Soit $f(Q + \lambda R) = f(Q) + \lambda f(R)$.

L'application est linéaire.

Or $(e_0, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ et on a vu que

$$\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad f(e_j) \in \mathbb{R}_n[x].$$

Par linéarité,

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[x], \quad f(Q) \in \mathbb{R}_n[x].$$

L'application f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

• Enfin, pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$

$$\begin{aligned} f(e_j) &= \sum_{i=0}^j \frac{1}{j+1} e_i \\ &= \frac{1}{j+1} (e_0 + e_1 + \dots + e_j). \end{aligned}$$

On constate que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

21. Soit $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Pour $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} f(q_j)(x) &= \frac{1}{x-1} \int_1^x (t-1)^j dt \\ &= \frac{1}{x-1} \left[\frac{(t-1)^{j+1}}{j+1} \right]_1^x = \frac{1}{j+1} (x-1)^j \\ f(q_j)(x) &= \frac{1}{j+1} q_j(x). \end{aligned}$$

Or $f(q_j)(1) = q_j(1) = 0 = \frac{1}{j+1} q_j(1)$. On a bien

$$f(q_j) = \frac{1}{j+1} q_j \quad \text{et} \quad f_j \neq 0_{\mathbb{R}_n[x]}.$$

C'est donc bien un vecteur propre pour la valeur propre $1/(j+1)$. Comme il ne peut y avoir $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$ valeurs propres, on obtient

$$\text{Sp}(f) = \left\{ \frac{1}{j+1} \mid j \in \llbracket 0; n \rrbracket \right\}.$$

☞ Ce qui est cohérent avec le spectre de A (triangulaire).

Précisons enfin que les polynômes propres $(q_j)_{j \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont associés à des valeurs propres distinctes, ils forment donc une famille libre.

☞ On peut aussi noter que la famille est échelonnée en degré.

Comme il y a $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$ vecteurs dans cette famille de $\mathbb{R}_n[x]$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

22. La matrice D est diagonale avec

$$D = \text{diag} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1} \right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

De plus pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$

$$\begin{aligned} q_j &= (x-1)^j = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} x^k. \\ &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^{j-k} e_k. \end{aligned}$$

Si T est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Pour tous $k, \ell \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, le coefficient $[T]_{k\ell}$ de T désigne la $(k+1)$ -ième coordonnée de $q_{\ell+1}$ dans la famille $\mathcal{B}$.

Attention au décalage d'indice car les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont indicées à partir de 0.

D'où

$$[T]_{k\ell} = \begin{cases} \binom{\ell-1}{k-1} (-1)^{\ell-k} & \text{si } k \leq \ell \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

22.b) D'après la formule de changement de bases :

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = (P_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1} \text{Mat}(f) P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = T^{-1} A T.$$

23. Soit $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$. D'après la formule du binôme

$$\begin{aligned} e_j(x) &= x^j = ((x-1)+1)^j \\ &= \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (x-1)^k = \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} q_k. \end{aligned}$$

En reprenant la question 22.a) et en précisant que T^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

$$\forall k, \ell \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket, \quad [T^{-1}]_{k\ell} = \begin{cases} \binom{\ell-1}{k-1} & \text{si } k \leq \ell \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

24. On a vu que $D = T^{-1} A T$, donc $A = T D T^{-1}$. Par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = T D^k T^{-1}$$

Comme $W_0 = {}^t[0, 0, \dots, 0, 1]$, $A^k W_0$ désigne la dernière colonne de A^k . C'est-à-dire

$$A_k W_0 = T D^k T^{-1} W_0.$$

25.a) Calculs.

25.b) Si $i+j > 0$, on a $\frac{1}{(j+i+1)} \in]0; 1[$ et

$$\frac{1}{(j+i+1)^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi par passage à la limite, pour $j \neq 0$

$$P(X_k = j) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

et pour $j = 0$, il ne va « rester » que le terme pour $i = 0$:

$$P(X_k = 0) \xrightarrow{k \rightarrow 0} \binom{n}{0} (-1)^0 \binom{n-0}{0} 1 = 1.$$

Résultat cohérent, rapidement le numéro de boule va diminuer pour ne rester que la boule 1 dans l'urne 1.

Problème B

26.a) On a pour $r \neq 1$.

$$\ell = r\ell + s \iff \ell = \frac{s}{1-r}.$$

26.b) On reprend la méthode sur les suites arithmético-géométriques

$$\begin{cases} \ell = r\ell + s & L_1 \\ u_{n+1} = r u_n + s & L_2 \end{cases}$$

Avec $L_2 - L_1$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - \ell = r(u_n - \ell).$$

La suite de terme général $u_n - \ell$ est géométrique de raison r et de premier terme $u_1 - \ell$. Comme la suite est initialisée à u_1 , on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n - \ell = r^{n-1} (u_1 - \ell).$$

Le résultat s'en déduit.

27. On a vu que

$$u_n = \ell + r^{n-1} (u_1 - \ell).$$

- Si $\ell = u_1$, la suite est constante, elle converge.
- On suppose donc que $\ell \neq u_1$.
 - Si $r \in]-1; 1[$, on a $r^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et (u_n) converge vers ℓ .
 - Le cas $r = 1$ est exclu.
 - Si $r < -1$ ou $r > 1$, la suite diverge.

28.a) On a

$$G_X(0) = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) 0^k = \mathbf{P}(X_n = 0) \quad \text{car } 0 = 1.$$

La fonction G_X est dérivable car polynomiale avec pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$G'_X(x) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(X = k) x^{k-1}$$

puis $G'_X(0) = \mathbf{P}(X = 1)$ car pour $k = 1$, $0^{k-1} = 1$.

28.b) Par définition,

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X = k) x^k$$

et par la formule de Taylor pour les polynômes

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^N \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Par unicité des coefficients

$$\forall k \in \llbracket 0; N \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

Formule qui s'étend à tout $k \in \mathbb{N}$ car pour $k > N$, on se ramène à $0 = 0$ (G_X est de degré au plus N).

29. Raisonnons par double implication.

→ Si X_1 et X_2 ont même loi alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_{X_1}(t) = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_1 = k) t^k = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_2 = k) t^k = G_{X_2}(t).$$

On a bien $G_{X_1} = G_{X_2}$.

→ Réciproquement si $G_{X_1} = G_{X_2}$ alors les dérivées successives sont identiques et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}(X_1 = k) = \frac{1}{k!} G_{X_1}^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} G_{X_2}^{(k)}(0) = \mathbf{P}(X_2 = k).$$

Les variables X_1 et X_2 ont même support et avec les mêmes probabilités sur ce support, elles ont même loi.

Le recours aux dérivées est un peu superficiel, on peut utiliser l'unicité des coefficients à partir de

$$\sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_1 = k) x^k = G_{X_1}(x) = G_{X_2}(x) = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_2 = k) x^k.$$

30. Raisonnons par double implication.

Supposons i). Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha, m)$ et pour tout réel t

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{m-k} t^k \\ &= (1-\alpha + t\alpha)^m \quad (\text{formule du binôme}). \end{aligned}$$

Supposons ii). Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha, m)$. D'après le calcul précédent $G_X = G_Y$. D'après la question précédente X et Y ont même loi.

31. Il est précisé dans l'énoncé « qu'au début de l'année ($n = 1$), ils [les livres] sont tous disponibles ». Donc

$$X_1 = N.$$

La variable X_{n+1} correspond aux livres disponibles au début de semaine $n + 1$.

La variable Z_n correspond au nombre de livres empruntés à la semaine n . Il reste donc $N - Z_n$ livres à la bibliothèque à la fin de semaine et donc aussi au tout début de la semaine suivante.

$$X_{n+1} = N - Z_n.$$

32. Si $[X_n = k]$ est réalisé alors on ne peut emprunter plus de k exemplaires

$$\forall i > k, \quad \mathbf{P}_{[X_n = k]}(Z_n = i) = 0.$$

→ Si $i \leq k$, Z_n compte le nombre de succès (un exemplaire est emprunté) parmi k répétitions d'expérience de Bernoulli mutuellement indépendantes. Dès lors Z_n (conditionnée à l'événement $[X_n = k]$) suit une loi binomiale de paramètre k, p .

$$\forall i \in \llbracket 0; k \rrbracket, \quad \mathbf{P}_{[X_n = k]}(Z_n = i) = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i}.$$

On sait alors que

$$\mathbf{E}(Z_n | X_n = k) = kp.$$

Par linéarité de l'espérance (et donc de l'espérance conditionnelle)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_{n+1} | X_n = k) &= \mathbf{E}(N - Z_n | X_n = k) \\ &= N - \mathbf{E}(Z_n | X_n = k) = N - kp. \end{aligned}$$

33.a) Cours.

33.b) Les variables étant finies, il n'y a pas de questions sur la convergence.

$([X_n = k])_{k \in \llbracket 0; N \rrbracket}$ est un système complet d'événements. D'après la formule de l'espérance totale

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_{n+1}) &= \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) \mathbf{E}(X_{n+1} | X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) (N - kp) \\ &= N \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) - p \sum_{k=0}^N k \mathbf{P}(X_n = k) \\ &= \mathbf{E}(X_{n+1}) = N - p \mathbf{E}(X_n). \end{aligned}$$

34. En reprenant la question 26.b) avec

$$r = -p \neq 1, \quad s = N, \quad \text{et} \quad u_1 = \mathbf{E}(X_1) = N,$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{E}(X_n) = \frac{N(1 - (-p)^{n-1})}{1 + p} + (-p)^{n-1} N.$$

Comme $-p \in]-1, 1[$, on a

$$\mathbf{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{N}{1+p}.$$

35. Comme $X_1 = N$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_1(t) = t^N.$$

36.a) Nous avons vu que si $[X_n = k]$ est réalisé, Z_n suit une loi binomiale (k, p) . En reprenant le calcul de la question 30

$$\mathbf{E}\left(t^{Z_n} \mid X_n = k\right) = (1 - p + pt)^k.$$

36.b) Par linéarité de l'espérance pour $t \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(t^{X_{n+1}} \mid X_n = k\right) &= \mathbf{E}\left(t^{N-Z_n} \mid X_n = k\right) \\ &= t^N \mathbf{E}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{Z_n} \mid X_n = k\right) \\ \mathbf{E}\left(t^{X_{n+1}} \mid X_n = k\right) &= t^N \left(1 - p + p \cdot \frac{1}{t}\right)^k. \end{aligned}$$

36.c) Enfin, la formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{k \in \llbracket 0; N \rrbracket}$ donne

$$\begin{aligned} G_{n+1}(t) &= \mathbf{E}\left(t^{X_{n+1}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) \mathbf{E}\left(t^{X_{n+1}} \mid X_n = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) t^N \left(1 - p + \frac{p}{t}\right)^k \\ G_{n+1}(t) &= t^N G_n\left(1 - p + \frac{p}{t}\right) \end{aligned}$$

par définition de $G_n(x)$ avec $x = 1 - p + p/t$.

37.a) On pose $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{n+1} = 1 - p\alpha_n.$$

Procédons par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(n): \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = (1 - \alpha_n + \alpha_n t)^N.$$

→ *Initialisation.* $\mathcal{P}(1)$ est vraie avec le choix $\alpha_1 = 1$ et $G_1(t) = t^N$ (question 35).

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} G_{n+1}(t) &= t^N G_n\left(1 - p + \frac{p}{t}\right) \\ &= t^N \left(1 - \alpha_n + \alpha_n \left(1 - p + \frac{p}{t}\right)\right)^N \\ &= t^N \left(1 - \alpha_n p + \frac{\alpha_n p}{t}\right)^N \\ &= (\alpha_n p + (1 - \alpha_n p) t)^N \\ G_{n+1}(t) &= (1 - \alpha_{n+1} + \alpha_{n+1} t)^N. \end{aligned}$$

La relation s'étend à $t = 0$ par continuité.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

37.b) En reprenant la question 30 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, \alpha_n).$$

38. D'une part, la définition de l'espérance

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) k = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(X_n = k) \cdot k.$$

D'autre part, G_n est dérivable (car polynomiale) avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G'_n(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(X_n = k) t^{k-1} k$$

En particulier, $G'_n(1) = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}(X_n = k) \cdot k$.

D'où $G'_n(1) = \mathbf{E}(X_n)$.

Avec l'expression trouvée à la question précédente

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_n) &= N\alpha_n(1 - \alpha_n + \alpha_n \cdot 1)^{N-1} \\ &= N\alpha_n. \end{aligned}$$

39.a) À la lecture de l'énoncé

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p^2 \\ 0 & p & 2p(1-p) \\ 1 & 1-p & (1-p)^2 \end{bmatrix}.$$

39.b) On a u_1, u_2, u_3 non nuls et

$$\begin{aligned} Au_1 &= A \begin{bmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p^2 \\ 2p^2 + 2p(1-p) \\ p^2 + 2p(1-p) + (1-p)^2 \end{bmatrix} \\ Au_1 &= 1 \cdot \begin{bmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{bmatrix} = u_1. \end{aligned}$$

De même, on montre que

$$Au_2 = -pu_2 \quad \text{et} \quad Au_3 = p^2u_3.$$

On a $\{1, p, p^2\} \subset \text{Sp}(A)$.

Il y a même égalité car $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, le spectre ne peut avoir plus de 3 éléments.

Comme 1, p , p^2 sont distincts, on sait que les vecteurs propres u_1, u_2, u_3 forment une famille libre et même une base de $\mathbb{R}^3$ en comptant le nombre de vecteurs.

40.a) on a

$$w_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \\ \mathbf{P}(X_n = 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On obtient le résultat en reprenant la formule des probabilités totales et la démarche de la question 10.

40.b) On a par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad W_n = A^{n-1}W_1.$$

On calcule les puissances de A comme à la question 24.

Bonus A) Formule due à Ramanujan.

B) Formule due à David et Gregory Chudnovsky.

C) Développement en fraction continue.

D) Faux, on constate qu'avec le « - » devant la fraction :

$$3 - \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \frac{9^2}{6 + \dots}}}}} < 3.$$

On en déduirait que $\pi < 3$. Absurde.

E) Formule de Machin.

DS 2 * - solution

Exercice

Voir sujet A.

Problème 1

La première partie est adaptée de ESSEC 2018.

Pour bien comprendre la partie A, un rappel s'impose. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de fonctions dérivables sur un intervalle I , si la fonction somme

$$S : x \in I \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

est bien définie, rien ne garantit en général que la nouvelle fonction S est dérivable et que

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \quad (\times \times \times)$$

La partie A montre que dans le cas particulier où $f_n : x \mapsto a_n x^n$ et si la fonction S est bien définie alors S est bien dérivable et la formule précédente est bien vraie. Le résultat s'étend alors au cas $\mathcal{C}^{+\infty}$.

4. Pour $x \in]-R; R[$, on a

$$|a_n x^n| = |a_n R^n| \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^n \leq K \left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

La série géométrique $\sum (r/R)^n$ est convergente car sa raison appartient à $] -1; 1[$. Par le critère de comparaison, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument, elle converge.

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^N a_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$$

à l'aide du changement d'indice $p = n - (N + 1)$.

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p+N+1} x^{p+N+1}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n}{x^N} \right| &= |x| \cdot \left| \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p+N+1} x^p \right| \\ &\leq |x| \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p+N+1} x^p| \\ &\leq |x| \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p+N+1}| r^p \text{ où } r \in]0; R[. \end{aligned}$$

Par encadrement, le terme de gauche tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 0$. On en déduit que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n = o_0(x^N)$$

Ce qui donne le résultat.

6. On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n + o_0(x^N) = S_a = S_b = \sum_{n=0}^N b_n x^n + o_0(x^N).$$

Par unicité du développement limité

$$\forall n \in [0; N], \quad a_n = b_n.$$

Comme l'entier N est arbitrairement choisi, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n.$$

7.a) On a par l'identité de Bernoulli et l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |(x+h)^n - x^n| &= \left| (x+h-x) \sum_{k=0}^{n-1} (x+h)^{n-1-k} x^k \right| \\ &\leq |h| \sum_{k=0}^{n-1} |x+h|^{n-1-k} \cdot |x|^k \\ &\leq |h| \sum_{k=0}^{n-1} r^{n-1-k} \cdot r^k \\ |(x+h)^n - x^n| &\leq n|h|r^{n-1}. \end{aligned}$$

7.b) On a par linéarité de la somme dans le cas convergent :

$$S_a(x+h) - S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n ((x+h)^n - x^n)$$

D'où par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |S_a(x+h) - S_a(x)| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot |(x+h)^n - x^n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^{n-1} \cdot |h| \\ |S_a(x+h) - S_a(x)| &\leq \frac{|h|}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n. \end{aligned}$$

Justifions *a posteriori* la convergence de la série $\sum n |a_n| r^n$.

On a

$$n |a_n| r^n = n |a_n| R^n \left(\frac{r}{R}\right)^n \leq n \left(\frac{r}{R}\right)^n K$$

et, à l'instar de la question 4, on prouve la convergence à l'aide des séries géométriques dérivées.

7.c) Par encadrement, on montre que pour tout $x \in]-r; r[$

$$S_a(x+h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} S_a(x).$$

C'est la définition de la continuité en x et donc sur l'intervalle $] -r; r[$. Comme

$$\bigcup_{r \in]0; R[}] -r; r[=] -R; R[$$

on en déduit la continuité de S_a sur $] -R; R[$.

8.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|na_n \rho^n| = \left| n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \right| \cdot |a_n R^n|$$

Or $a \in \mathcal{B}(R)$ donc $(a_n R^n)$ est bornée. De plus par les croissances comparées

$$n \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en déduit que $na_n \rho^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

En particulier $(na_n \rho^n)$ est bornée et $(na_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\rho)$.

- D'après la question 7.c), on en déduit que $g_a = S_{(na_n)_n}$ est définie et continue sur $] -\rho; \rho[$ et par extension sur $] -R; R[$.

8.b) La fonction s_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. La relation proposée est donc une conséquence du théorème fondamentale de l'analyse.

8.c) Notons que

$$\int_0^x g_a(t) - s'_n(t) dt = \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} k a_k t^{k-1} dt.$$

La suite est une conséquence de l'inégalité triangulaire et du fait que $t \in [x, 0] \cup [0, x] \subset] -r; r[$.

8.d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \int_0^x g_a(t) - s'_n(t) dt &= \int_0^x g_a(t) dt - \int_0^x s'_n(t) dt \\ &= a_0 + \int_0^x g_a(t) dt - s_n(x) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\left| S_a(x) - \left(a_0 + \int_0^x g_a(t) dt \right) \right| \\ &= \left| S_a(x) - s_n(x) - \left(a_0 + \int_0^x g_a(t) dt - s_n(x) \right) \right| \\ &\leq |S_a(x) - s_n(x)| + \left| a_0 + \int_0^x g_a(t) dt - s_n(x) \right| \\ &\leq |S_a(x) - s_n(x)| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k. \end{aligned}$$

Or en tant que reste d'une série convergente

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} k |a_k| r^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et par définition de $S_a(x)$

$$s_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_a(x).$$

Par passage à la limite $n \rightarrow +\infty$

$$\left| S_a(x) - \left(a_0 + \int_0^x g_a(t) dt \right) \right| \leq 0$$

D'où le résultat.

8.e) La fonction

$$F : x \in] -r; r[\mapsto \int_0^x g_a(t) dt$$

est la primitive de g_a qui s'annule en 0. En particulier F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -r; r[$ avec $F' = g_a$. Comme $S_a = a_0 + F$. Ce qui implique aussi la classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -r; r[$ de S_a avec

$$S_a' = g_a.$$

Résultat qui s'étend à $] -R; R[$ car il est valable pour tout réel $r \in]0; R[$.

9.a) On a

$$\binom{n+k}{k} = \frac{(n+k)!}{k!n!} = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (n+k)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$

D'où $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k a_{n+k}$.

Or pour $r \in [0; R]$

$$\left| n^k a_{n+k} r^n \right| = \underbrace{\frac{1}{R^k} n^k \left(\frac{r}{R} \right)^n}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \cdot \underbrace{|a_{n+k} R^{n+k}|}_{\text{bornée}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en déduit que $b_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

La suite $(b_n r^n)_n$ est donc bornée et $b \in \mathcal{B}(r)$.

9.b) Justifions par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \left| \begin{array}{l} S_a \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ et} \\ \forall x \in]-R; R[, \quad S_a^{(k)}(x) = k! \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \right) \end{array} \right.$$

→ *Initialisation.* On a déjà établi la continuité de S_a . De plus, pour $x \in]-r; r[$

$$0! \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} a_n x^{n-0} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S_a(x)$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

→ *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. On a donc par changement d'indice $p = n - k$, on a

$$S_a^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} k! \binom{p+k}{k} a_{p+k} x^p = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p.$$

D'après ce qui précède, $(b_p)_p \in \mathcal{B}(r)$ pour tout $r \in]0; R[$, S_b est définie sur $] - R, R[$ et

$$S_a^{(k)} = S_b.$$

D'après la question 8.a), S_b est $\mathcal{C}^1$ sur $] - r; r[$ (et donc sur $] - R, R[$) avec

$$S_b' = g_b : x \in] - R; R[\mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} p b_p x^{p-1}.$$

Or pour $x \in] - R; R[$, on a avec le changement d'indice $n = k + p$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p k! \binom{p+k}{k} x^{p-1} = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (n-k) k! \binom{n}{k} x^{n-(k+1)}$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned} (n-k) k! \binom{n}{k} &= (n-k) k! \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(k+1)(n)!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = (k+1)! \cdot \binom{n}{k+1}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$S_a^{(k+1)}(x) = S_b'(x) = (k+1)! \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} a_n x^{n-(k+1)} \right).$$

La propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est prouvée.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_a^{(n)}(0) &= n! \left(\sum_{m=n}^{+\infty} \binom{m}{n} a_m 0^{m-n} \right) \\ &= n! \binom{n}{n} a_n \times 1 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad a_n = \frac{S_a^{(n)}(0)}{n!}.$$

11. On sait d'après les résultats sur les sommes géométriques que

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1 \cdot x^k.$$

Une suite a qui convient est donc la suite constante égale à 1.

👁 Avec la question 6, c'est même l'unique suite solution.

12. Dans ce cas $R = 1$ et la question 9.b) donne

$$\begin{aligned} S_a^{(k)}(x) &= k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot x^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \\ S_a^{(k)}(x) &= \sum_{n < n-k}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} x^n \end{aligned}$$

En parallèle, $S_a(x) = (1-x)^{-1}$ et on peut dériver k fois à partir de cette expression.

$$S_a^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-(k+1)}$$

$$\text{D'où} \quad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{k!n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

13. Pour tout $x \in [-1; 1]$

$$|a_n x^n| \leq |a_n| = \mathbf{P}(X = n)$$

Or la série $\sum \mathbf{P}(X = n)$ converge (car $(\mathbf{P}(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements). D'après le critère de comparaison $\sum a_n x^n$ converge absolument, elle converge. Ainsi G_x est définie sur $[-1; 1]$.

Le deuxième point est une conséquence de la formule de transfert.

14.a) En reprenant la démonstration de la 7.c (ou encore de la questions 9.a). On montre que $(1 < R)$

$$\sum n a_n 1^n = \sum n a_n$$

converge absolument. L'espérance de X existe. Avec les notations de la question 8 :

$$\mathbf{E}(X) = g_a(1) = S_a'(1) = G_X'(1).$$

14.b) L'application G_X est, question 9, de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec pour tout réel $x \in]-R; R[$

$$\begin{aligned} G_X'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ G_X''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Comme $1 \in]-R; R[$, il vient

$$G_X'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n.$$

$$G_X''(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n.$$

Or par la formule de transfert, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n \\ &= G_X''(1) + G_X'(1) \end{aligned}$$

On conclut avec la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2. \end{aligned}$$

15. Comme $R > 1$, on a la convergence absolue de la série donnant la somme

$$S_a^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-1} \text{ sur }]-R; R[$$

en particulier pour $x = 1 \in]-R; R[$

$$S_a^{(k)}(1) = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n = k! \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n$$

Par le théorème de transfert, $\mathbb{E}\left(\binom{X}{k}\right)$ existe, avec

$$\mathbb{E}\left(\binom{X}{k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n = \frac{S_a^{(k)}(1)}{k!} = \frac{G_X^{(k)}(1)}{k!}.$$

16.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour une variable de loi géométrique

$$R^n a_n = R^n \mathbf{P}(X = n) = \frac{p}{q} (Rq)^n.$$

D'après les résultats sur les suites géométriques

$$(Rq)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } Rq > 1 \\ 1 & \text{si } Rq = 1 \\ 0 & \text{si } Rq \in [0; 1[. \end{cases}$$

Dès lors le plus grand réel $R \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $a \in \mathcal{B}(R)$ est

$$R = \frac{1}{q} = \frac{1}{1-p}$$

$$\text{car } (a_n R^n) \text{ est } \begin{cases} \text{tend vers } +\infty & \text{si } R > 1/q, \\ \text{est bornée} & \text{si } R = 1/q, \\ \text{est bornée} & \text{si } R < 1/q. \end{cases}$$

16.b) On a pour $t \in]-1/q; 1/q[$

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=q}^{+\infty} p q^{n-1} t^n = p t \sum_{n=1}^{+\infty} (q t)^{n-1} \\ &= \frac{p t}{1 - q t} = \frac{p t}{1 - (1-p)t} \end{aligned}$$

On a $1/q > 1$, le résultat de la question 14 s'applique, X admet une espérance et

$$G_X'(1) = \frac{p(1-q) + p q}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

17.a)

```
import numpy.random as rd
```

```
def geo(p):
    n=1
    while rd.random()>p:
        n+=1
    return n
```

17.b)

```
def SimuT(k,p):
    n=0
    for i in range(k):
        n+= geo(p)
    return n
```

18.

```
def approx(k,p):
    s=0
    for i in range(5000):
        s+= SimuT(k,p)
    return s/5000
```

19. On s'appuie sur la formule de Koenig-Huygens avec un estimation de l'espérance et du moment d'ordre 2.

```
def variance(k,p):
    e1=0
    e2=0
    for i in range(5000):
        t=simuT(k,p)
        e1+=t
        e2+=t**2
    e1=e1/5000
    e2=e2/5000
    return e2-e1**2
```

20. Comme on ne prend pas en compte les T_k premières étapes, on peut voir la variable $T_{k+1} - T_k$ comme le rang du premier succès (correspond au succès $k+1$) dans une infinité d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. C'est une loi géométrique :

$$T_{k+1} - T_k \hookrightarrow \mathcal{G}(p).$$

21. Si $T_k = m$, pour avoir $T_{k+1} - T_k = n$ (i.e. $T_{k+1} = m + n$) on doit obtenir :

- face aux tirages $m+1, m+2, \dots, m+n-1$;
- puis pile au tirage $m+n$.

Ainsi $\mathbf{P}_{[T_k=m]}(T_{k+1} - T_k = n) = (1-p)^{n-1} p$. Cette probabilité étant indépendante de m , on peut alors écrire (formule des probabilités totales)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_{k+1} - T_k = n) \\ = \sum_{m \in T_k(\Omega)} (1-p)^{n-1} p \mathbf{P}(T_k = m) = (1-p)^{n-1} p. \end{aligned}$$

On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(T_{k+1} - T_k = n) = \mathbf{P}_{[T_k=m]}(T_{k+1} - T_k = n).$$

L'évènement $T_{k+1} - T_k = n$ est indépendant de $T_k = m$. Les variables $T_{k+1} - T_k$ et T_k sont indépendantes.

On en déduit en remarquant que $T_{k+1} - T_k \sim \mathcal{G}(p)$ et par indépendance (pour la variance)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T_{k+1}) &= \mathbf{E}(T_k) + \mathbf{E}(T_{k+1} - T_k) = \mathbf{E}(T_k) + \frac{1}{p} \\ \mathbf{V}(T_{k+1}) &= \mathbf{V}(T_k) + \mathbf{V}(T_{k+1} - T_k) = \mathbf{V}(T_k) + \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

Par récurrence ou à l'aide d'une somme télescopique, on obtient :

$$\mathbf{E}(T_k) = \frac{k}{p} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(T_k) = \frac{kq}{p^2}.$$

22. Soit $t \in]-1/q; 1/q[$. Notons que

$$T_k = \sum_{i=1}^{k-1} (T_{i+1} - T_i) + T_1.$$

À l'aide du résultat admis et l'indépendance

$$G_{T_k}(t) = G_{T_1}(t) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} G_{T_{i+1}-T_i}(t) = (G_{T_1}(t))^k$$

car toutes les variables $T_{i+1} - T_i$ ont la même loi que T_1 : à savoir géométrique de paramètre p . Or on a établi l'expression de G_{T_1} à la question 16.b)

$$G_{T_1}(t) = \frac{pt}{1-qt}.$$

Le résultat s'en déduit.

Le résultat admis est une conséquence directe du résultat que nous allons revoir prochainement : si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et admettant une espérance, alors $Y_1 Y_2$ admet une espérance qui est le produit des espérances de Y_1 et Y_2 .

23. À l'aide de la question 11 et avec $k \rightarrow k-1$, on a pour tout $x \in]-1; 1[$

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n.$$

On obtient

$$\begin{aligned} G_{T_k}(t) &= (pt)^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k-1} q^n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k-1} p^k q^n t^{n+k} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} t^n. \end{aligned}$$

Donc par identification (possible d'après la question 6)

$$\forall n \geq k, \quad \mathbf{P}(T_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

24.a) À la lecture de l'énoncé (condition 2), on a

$$P_0 = 0 \quad \text{et} \quad P_n = 1.$$

25.a) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1 = \ell])_{\ell \in \llbracket 0; n \rrbracket}$.

$$\mathbf{P}(A_n \cap [X_0 = i]) = \sum_{\ell=0}^n \mathbf{P}(A_n \cap [X_0 = i] \cap [X_1 = \ell]).$$

Si à l'origine le micro-organisme est à l'état E_i , il ne peut être qu'à E_{i-1} ou E_{i+1} à l'étape suivante. Donc

$$\mathbf{P}(A \cap [X_0 = i] \cap [X_1 = \ell]) = 0 \quad \text{si} \quad \ell \notin \{i-1; i+1\}.$$

Ce qui réduit la somme à 2 termes.

De plus, d'après la formule des probabilités composées (pour $\ell \in \{i-1; i+1\}$)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_n \cap [X_0 = i] \cap [X_1 = \ell]) &= \mathbf{P}_{[X_0=i] \cap [X_1=\ell]}(A_n) \cdot \mathbf{P}_{[X_0=i]}(X_1 = \ell) \cdot \mathbf{P}(X_0 = i). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat.

25.b) Notons que la condition 2 donne

$$\mathbf{P}_{[X_0=i]}(X_1 = i+1) = \frac{n-i}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{[X_0=i]}(X_1 = i-1) = \frac{i}{n}.$$

De plus, la connaissance de $[X_0 = i]$ est superflue pour A_n si $[X_1 = \ell]$ est réalisé.

$$\mathbf{P}_{[X_0=i] \cap [X_1=\ell]}(A_n) = \mathbf{P}_{[X_1=\ell]}(A_n)$$

et avec la question 24.b)

$$\mathbf{P}_{[X_1=\ell]}(A_n) = \mathbf{P}_{[X_0=\ell]}(A_n) = P_\ell.$$

Finalement en divisant par $\mathbf{P}(X_0 = i) \neq 0$ la relation précédente 25.a), on obtient bien le résultat annoncé.

26.a) On a

$$u_0 = \frac{P_0}{P_1} = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{P_1}{P_1} = 1.$$

En divisant par $P_1 > 0$ dans la relation $(\star)$ et avec un décalage d'indice $i \rightarrow i+1$, on a pour tout $i \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$

$$\frac{P_{i+1}}{P_1} = \frac{(i+1)}{n} \frac{P_{i+2}}{P_1} + \frac{n-(i+1)}{n} \frac{P_i}{P_1}$$

$$\text{Soit} \quad u_{i+1} = \frac{i+1}{n} u_{i+2} + \frac{n-(i+1)}{n} u_i.$$

D'où le résultat annoncé.

26.b)

```
def suite(n):
    U=np.zeros(n+1)
    U[0]= 0
    U[1]= 1
    for i in range(0,n-2+1):
        U[i+2]= n/(i+1)*U[i+1]-(n-i-1)/(i+1)*U[i]
    return U
```

27. On part de u_n pour exprimer P_1 :

$$u_n = \frac{P_n}{P_1} \quad \text{d'où} \quad P_1 = \frac{1}{P_n}.$$

Ce qui donne le code :

```
def p1(n):
    U=suite(n)
    return (U[n])**(-1)
```

28. Il suffit de multiplier chaque coefficient de la matrice $[u_0, \dots, u_n]$ par P_1 . Ce qui revient aussi à diviser chaque coefficient par P_n . Ce qui donne plus simplement

```
def suite(n):
    U=np.zeros(n+1)
    U[0]=0
    U[1]=1
    for i in range(0,n-2+1):
        U[i+2]= n/(i+1)*U[i+1]-(n-i-1)/(i+1)*U[i]
    return U / U[n]
```

29.a) Si $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a en tant que probabilité d'un événement

$$0 \leq P_k \leq 1.$$

Relation qui s'étend à k entier supérieur à 1.

29.b) La suite $(P_k \times 1)_k$ est bornée, $p \in \mathcal{B}(1)$.

30. Soit $x \in]-1; 1[$.

$$\begin{aligned} & x(1-x^2)S'_p(x) - (nx+1-(n-1)x^2)S_p(x) \\ &= x(1-x^2) \sum_{k=1}^{+\infty} kP_k x^{k-1} - (nx+1-(n-1)x^2) \sum_{k=0}^{+\infty} P_k x^k \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP_k x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} kP_k x^{k+2} - \sum_{k=0}^{+\infty} nP_k x^{k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} P_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} (n-1)P_k x^{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP_k x^k - \sum_{k=3}^{+\infty} (k-2)P_{k-2} x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} nP_{k-1} x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} P_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} (n-1)P_{k-2} x^k \\ &= P_1 x + 2P_2 x^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} kP_k x^k - \sum_{k=3}^{+\infty} (k-2)P_{k-2} x^k - nP_0 x - nP_1 x^2 - \sum_{k=3}^{+\infty} nP_{k-1} x^k \\ &\quad - P_0 - P_1 x - P_2 x^2 - \sum_{k=3}^{+\infty} P_k x^k + (n-1)P_0 x^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} (n-1)P_{k-2} x^k \\ &= -P_0 - nP_0 x + (P_2 - nP_1) x^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} ((k-1)P_k - nP_{k-1} + (n-k+1)P_{k-2}) x^k \\ &= -P_0 - nP_0 x + (P_2 - nP_1) x^2 + n \sum_{k=3}^{+\infty} \left(\frac{k-1}{n} P_k - P_{k-1} + \frac{n-k+1}{n} P_{k-2} \right) x^k \\ &= 0 + 0 \cdot x + n \left(\frac{1}{n} P_{1+1} + \frac{2-1}{n} P_{1-1} - P_1 \right) x^2 + n \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{k}{n} P_{k+1} + \frac{n-k}{n} P_{k-1} - P_k \right) x^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

31. Pour $x \in]0; 1[$. Une mise au même dénominateur donne

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1+x} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{1-x} &= \frac{\alpha x(1-x) + \beta(1-x)(1+x) + \gamma x(1+x)}{x(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{(-\alpha + \gamma - \beta)x^2 + (\alpha + \gamma)x + \beta}{x(1-x^2)}. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\alpha + \gamma - \beta = -n + 1 \\ \alpha + \gamma = n \\ \beta = 1. \end{cases}$$

Dont la résolution donne

$$\alpha = n-1, \quad \beta = \gamma = 1.$$

32. On a donc, pour $x \in]0; 1[$, puisque $S_p(x) \geq P_1 x > 0$,

$$\frac{S'_p(x)}{S_p(x)} = \frac{n-1}{1+x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

d'où, en intégrant, il existe une constante $k = \ln(K)$ telle que

$$\begin{aligned} \ln(S_p(x)) &= (n-1) \ln(1+x) + \ln x - \ln(1-x) + k \\ &= \ln \left(K \frac{x(1+x)^{n-1}}{1-x} \right). \end{aligned}$$

Il vient
$$S_p(x) = K \frac{x(1+x)^{n-1}}{1-x}.$$

Précisons que S_p étant une application continue en 0, la relation précédente s'étend bien à $x = 0$.

33. Vérifier que

$$\begin{aligned} S_p(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} P_k x^k + \sum_{k=n}^{+\infty} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{k-1} K \binom{n-1}{i} x^k + \sum_{k=n}^{+\infty} K 2^{n-1} x^k, \end{aligned}$$

Par unicité du développement (question 6), on peut identifier pour obtenir en particulier

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad P_k = K \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}.$$

Sachant que $P_n = 1$, on montre que $K = 1/2^{n-1}$ (formule du binôme). Au final, on trouve :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P_k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}.$$

Problème B

34.a) On a pour $r \neq 1$.

$$\ell = r\ell + s \quad \Longleftrightarrow \quad \ell = \frac{s}{1-r}.$$

34.b) On reprend la méthode sur les suites arithmético-géométriques

$$\begin{cases} \ell = r\ell + s & L_1 \\ u_{n+1} = ru_n + s & L_2 \end{cases}$$

Avec $L_2 - L_1$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - \ell = r(u_n - \ell).$$

La suite de terme général $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison r et de premier terme $u_1 - \ell$. Comme la suite est initialisée à u_1 , on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n - \ell = r^{n-1} (u_1 - \ell).$$

Le résultat s'en déduit.

- Le cas $r = 1$ est exclu.
- Si $r < -1$ ou $r > 1$, la suite diverge.

35. Il est précisé dans l'énoncé « qu'au début de l'année ($n = 1$), ils [les livres] sont tous disponibles ». Donc

$$X_1 = N.$$

La variable X_{n+1} correspond aux livres disponibles au début de semaine $n + 1$.

La variable Z_n correspond au nombre de livres empruntés à la semaine n . Il reste donc $N - Z_n$ livres à la bibliothèque à la fin de semaine et donc aussi au tout début de la semaine suivante.

$$X_{n+1} = N - Z_n.$$

36.a) Si $[X_n = k]$ est réalisé alors Z_n compte le nombre de succès (un exemplaire est emprunté) parmi k répétitions d'expérience de Bernoulli mutuellement indépendantes. Dès lors Z_n (conditionnée à l'événement $[X_n = k]$) suit une loi binomiale de paramètre k, p . On sait alors que

$$\mathbf{E}(Z_n | X_n = k) = kp.$$

Par linéarité de l'espérance (et donc de l'espérance conditionnelle)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_{n+1} | X_n = k) &= \mathbf{E}(N - Z_n | X_n = k) \\ &= N - \mathbf{E}(Z_n | X_n = k) = N - kp. \end{aligned}$$

36.b) Les variables étant finies, il n'y a pas de questions sur la convergence.

$([X_n = k])_{k \in \llbracket 0; N \rrbracket}$ est un système complet d'événements. D'après la formule de l'espérance totale

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_{n+1}) &= \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) \mathbf{E}(X_{n+1} | X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) (N - kp) \\ &= N \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) - p \sum_{k=0}^N k \mathbf{P}(X_n = k) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = N - p \mathbf{E}(X_n).$$

36.c) Les résultats sur les suites arithmético-géométriques donnent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbf{E}(X_n) = \frac{N(1 - (-p)^{n-1})}{1 + p} + (-p)^{n-1}N.$$

Comme $-p \in]-1; 1[$, on a

$$\mathbf{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{N}{1 + p}.$$

👁 | Voit sujet A pour les détails.

37. On constate que si $[X_n = k]$ est réalisé, Z_n suit une loi binomiale (k, p) . À l'aide de la formule du binôme, on montre que

$$\mathbf{E}(t^{Z_n} | X_n = k) = (1 - p + pt)^k.$$

• Par linéarité de l'espérance pour $t \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t^{X_{n+1}} | X_n = k) &= \mathbf{E}(t^{N - Z_n} | X_n = k) \\ &= t^N \mathbf{E}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{Z_n} \middle| X_n = k\right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(t^{X_{n+1}} | X_n = k) = t^N \left(1 - p + p \cdot \frac{1}{t}\right)^k.$$

38. La formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{k \in \llbracket 0; N \rrbracket}$ donne

$$\begin{aligned} G_{n+1}(t) &= \mathbf{E}(t^{X_{n+1}}) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) \mathbf{E}(t^{X_{n+1}} | X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) t^N \left(1 - p + \frac{p}{t}\right)^k \\ G_{n+1}(t) &= t^N G_n \left(1 - p + \frac{p}{t}\right) \end{aligned}$$

par définition de $G_n(x)$ avec $x = 1 - p + p/t$. Précisons que les variables étant finies, les questions de convergence ne se posent pas dans l'application de la formule.

39.a) Comme $X_1 = N$, on a directement

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_1(t) = t^N.$$

39.b) On pose $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$q_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_{n+1} = 1 - pq_n.$$

Procédons par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(n): \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = (1 - q_n + q_n t)^N.$$

→ *Initialisation.* $\mathcal{P}(1)$ est vraie avec le choix $q_1 = 1$ et $G_1(t) = t^N$.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} G_{n+1}(t) &= t^N G_n \left(1 - p + \frac{p}{t}\right) \\ &= t^N \left(1 - q_n + q_n \left(1 - p + \frac{p}{t}\right)\right)^N \\ &= t^N \left(1 - q_n p + \frac{q_n p}{t}\right)^N \\ &= (q_n p + (1 - q_n p) t)^N \\ G_{n+1}(t) &= (1 - q_{n+1} + q_{n+1} t)^N. \end{aligned}$$

La relation s'étend à $t = 0$ par un argument de continuité. D'où $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

39.c) Il suffit de reprendre la méthode sur les suites arithmético-géométriques et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$q_n = \frac{1 - (-p)^{n-1}}{1 + p} + (-p)^{n-1}.$$

40. On développe à l'aide de la formule du binôme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_n(t) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (1 - q_n)^{n-k} q_n^k \cdot t^k.$$

Or on a aussi par définition

$$G_n(t) = \sum_{k=0}^N \mathbf{P}(X_n = k) t^k.$$

La fonction G_n est polynomiale, par unicité des coefficients, on obtient pour tout $k \in \llbracket 0; N \rrbracket$

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \binom{N}{k} (1 - q_n)^{n-k} q_n^k.$$

Dit autrement

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(N, q_n).$$

Bonus A) Formule due à Ramanujan.

B) Formule due à David et Gregory Chudnovsky.

C) Développement en fraction continue.

D) Faux, on constate qu'avec le « - » devant la fraction :

$$3 - \frac{1^2}{6 + \frac{3^2}{6 + \frac{5^2}{6 + \frac{7^2}{6 + \frac{9^2}{6 + \dots}}}}} < 3.$$

On en déduirait que $\pi < 3$. Absurde.

E) Formule de Machin.



John Machin (1680-1751)