DS 3 - sujet A

THÈME : VARIABLES À DENSITÉ

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1
Loi Log-normale et intervalle de confiance

Toutes les variables aléatoires intervenant dans cet exercice sont supposées être définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
On dit que la variable aléatoire $\mathrm{Z} = \exp(\mathrm{Y})$ suit la loi log-normale de paramètres m et σ^2, notée Log-$\mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
Ainsi, Z suit la loi Log-$\mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$ si Z est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et si la variable aléatoire $\ln \mathrm{Z}$ suit la loi $\mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
Dans tout l'exercice, on note X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathscr{N}(0,1)$ et Z une variable aléatoire qui suit la loi Log-$\mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$.

1. **a)** Vérifier, pour tous réels s, t, la relation suivante :

$$\exp\left(-\frac{t^2}{2} + st\right) = \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) \times \exp\left(-\frac{1}{2}(t-s)^2\right).$$

b) Établir pour tout réel s, l'existence de $\mathbf{E}(\exp(s\mathrm{X}))$ et montrer que l'on a :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{E}\big(\exp(s\mathrm{X})\big) = \exp\left(\frac{s^2}{2}\right).$$

2. **a)** Déterminer deux réels a, b de sorte que Y et $a\mathrm{X} + b$ aient même loi.

b) En déduire l'espérance $\mathbf{E}(\mathrm{Z})$ et l'égalité $\mathbf{V}(\mathrm{Z}) = \mathrm{e}^{m+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2} - 1\right)$.

3. On note Φ la fonction de répartition de X et $\mathrm{F_Z}$ la fonction de répartition de Z.

a) Exprimer pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{F_Z}(x)$ à l'aide de la fonction Φ.

b) Montrer que la variable aléatoire Z est à densité et qu'une densité f_Z de Z est donnée sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\mathrm{Z}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\ln t - m)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. On pose : $\mathrm{R} = 1/\mathrm{Z}$. Montrer que la variable aléatoire R suit la loi Log-$\mathscr{N}\left(-m, \sigma^2\right)$.

5. Soit U une variable aléatoire suivant la loi Log-$\mathscr{N}(0,1)$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $\mathrm{W}_n = \mathrm{U}^n$. Montrer que la variable aléatoire W_n suit une loi Log-normale dont on précisera les paramètres.

6. Soit $\left(\mathrm{Z}_k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi Log-$\mathscr{N}\left(m, \sigma^2\right)$, avec $0 < \sigma \leqslant 2$. Soit a un réel tel que $0 < a < 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$\overline{\mathrm{T}}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\mathrm{Z}_k\right), \quad \mathrm{I}_n = \overline{\mathrm{T}}_n - \frac{2}{\sqrt{na}} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \overline{\mathrm{T}}_n + \frac{2}{\sqrt{na}}.$$

a) Préciser l'espérance et la variance de $\overline{\mathrm{T}}_n$.

b) Conclure en montrant que $\mathbf{P}(m \in [\mathrm{I}_n, \mathrm{J}_n]) \geqslant 1 - a$.
On rappelle ici l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mathbf{E}(\mathrm{X})$ et variance σ^2 alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}\big(|\mathrm{X} - \mathbf{E}(\mathrm{X})| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

Exercice 2

Moments de la Loi de Fisher-Snedecor

- On dit qu'une variable aléatoire à densité X suit une loi de Fisher-Snedecor de paramètre $(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}$, notée $X\hookrightarrow\mathscr{F}(n,m)$ si une densité de X est donnée par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad f_{n,m}(t)=\begin{cases} c_{n,m}\dfrac{t^{n/2-1}}{(nt+m)^{(m+n)/2}} & \text{si } t>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\qquad \text{où } c_{n,m} \text{ est une constante.}$$

- On admet les résultats suivants :
  - → Soient Y_1 et Y_2, deux variables indépendantes.
    Si Y_1 et Y_2 admettent une espérance alors Y_1Y_2 aussi avec $\mathbf{E}(Y_1Y_2)=\mathbf{E}(Y_1)\mathbf{E}(Y_2)$.
  - → Soient $n,\ m\in\mathbb{N}^*$. Si $X_1\hookrightarrow\gamma(n/2)$ et $X_2\hookrightarrow\gamma(m/2)$, alors $\dfrac{mX_1}{nX_2}\hookrightarrow\mathscr{F}(n,m)$.
- De plus, on rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est bien convergente pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$. Dans ce cas, on pose $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,dt$.
- On suppose importé la bibliothèque `numpy.random` avec l'alias `rd`.
  On rappelle qu'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre a peut être simulée par `rd.exponential(1/a)` et une variable X de loi γ(`nu`) par `rd.gamma(nu)`.

- **La fonction** Γ

7. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
8. Soit a un réel supérieur ou égal à 1.
   Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que X^{a-1} admet une espérance et l'exprimer à l'aide la fonction Γ. Est-ce que X^{a-1} admet une variance ?
9. a) En déduire un programme `approx_gamma` qui prend en argument $a\geqslant 1$ et renvoie une estimation/approximation de $\Gamma(a)$.
   b) À l'aide de la relation fonctionnelle, adapter le programme précédent pour avoir une approximation de $\Gamma(a)$ pour $a\in]0;1[$?
10. Donner un programme qui prend en arguments deux réels x_1, x_2 tels que $0<x_1<x_2$ et donne le graphe (approximatif) de la fonction Γ sur $[x_1;x_2]$.

- **Cas particulier** $n=m=1$

11. À l'aide du changement de variable $t=x^2$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$.
12. En déduire la valeur de $c_{1,1}$.

- **Simulation**

13. Écrire un programme python `simu_f` qui prend en arguments trois entiers n, m et p supérieurs à 1 et renvoie une matrice ligne contenant p simulations d'une variable suivant une loi $\mathscr{F}(n,m)$.

- **Espérance**

14. Justifier que $X\hookrightarrow\mathscr{F}(n,m)$ admet une espérance si et seulement si $m>2$.
15. Dans la suite, on considère $m>2$.
    Vérifier que si $X_2\hookrightarrow\gamma(m/2)$, alors $\qquad\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X_2}\right)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=\dfrac{2}{m-2}$.
16. Rappeler l'espérance et la variance d'une variable suivant une loi $\gamma(\nu)$.
17. Soit $X\hookrightarrow\mathscr{F}(n,m)$. Déduire de la question 15 que X admet une espérance et $\mathbf{E}(X)=\dfrac{m}{m-2}$.

- **Variance**

18. Justifier que si $X_1\hookrightarrow\gamma(n/2)$ alors ${X_1}^2$ admet une espérance avec $\quad\mathbf{E}\left({X_1}^2\right)=\dfrac{n(n+2)}{4}$.
19. Justifier que si $n\in\mathbb{N}$ avec $m\geqslant 5$ et $X_2\hookrightarrow\gamma(m/2)$ alors $1/{X_2}^2$ admet une espérance avec

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{{X_2}^2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=\frac{4}{(m-2)(m-4)}.$$

20. a) En déduire que si $X\hookrightarrow\mathscr{F}(n,m)$ avec $m\geqslant 5$ alors X admet une variance avec

$$\mathbf{V}(X)=\left(\frac{m}{m-2}\right)^2\left(\frac{2n+2m-4}{n(m-4)}\right).$$

    b) Que vaut $\mathbf{V}\left(\frac{1}{X}\right)$?

Exercice 3
Loi de l'arcsinus

Partie I : Définition et propriétés de la fonction arcsinus

21. **a)** Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,1]$.
La fonction réciproque de cette restriction de la fonction sinus est la fonction arcsinus, on note Arcsin.
b) Préciser $\mathrm{Arcsin}(0)$ et $\mathrm{Arcsin}(1/2)$.

22. Écrire un script Python qui trace les graphes des fonctions sinus et arcsinus.
On pourra commencer par rappeler le lien entre les deux graphes.

23. **a)** Soit x appartenant à $[-1,1]$. Montrer que $\cos\big(\mathrm{Arcsin}(x)\big)=\sqrt{1-x^2}$.
b) Montrer que la fonction arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.

24. **a)** Donner le développement limité à en 0 l'ordre 1 de la fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+t}}$.
b) Montrer que la fonction arcsinus admet un développement limité en 0 à l'ordre 3 donné par $\mathrm{Arcsin}(x)=x+x^3/6+o(x^3)$.

Partie II : Étude d'une première variable aléatoire

On considère une variable aléatoire Θ suivant une loi uniforme sur $[0,1]$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $X=\sin\left(\frac{\pi}{2}\Theta\right)$.

25. **a)** Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
b) En déduire que X est une variable aléatoire à densité dont une densité est : $f_X : t\in\mathbb{R}\mapsto\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}} & \text{si } t\in]0,1[\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

26. **a)** Montrer que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur.
b) Montrer que la variable aléatoire X^2 possède une espérance et donner sa valeur.

- **Cas des événements rares**

On s'intéresse, dans cette question, à des événements « rares » associés à la variable aléatoire X.

27. À l'aide de la partie I, justifier l'équivalent
$$\mathbf{P}\left(X\leqslant\frac{1}{n}\right)-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3\pi}\cdot\frac{1}{n^3}.$$

28. Pour tout entier n non nul, on pose $p_n=\mathbf{P}\big(X\geqslant 1-\frac{1}{n}\big)$. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

29. Prouver que, pour tout entier n non nul, on a $\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-p_n)\right)=1-\frac{1}{n}$.

30. **a)** Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction cosinus.
b) En déduire une constante c telle que $p_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

Partie III : Iniquité d'un jeu de Pile ou Face

On se propose dans cette partie de faire la lien entre la variable $Y=X^2=\sin\left(\frac{\pi}{2}\Theta\right)^2$ et une marche aléatoire. On dit alors que Y suit la loi arcsinus standard.

- **Densité de** Y

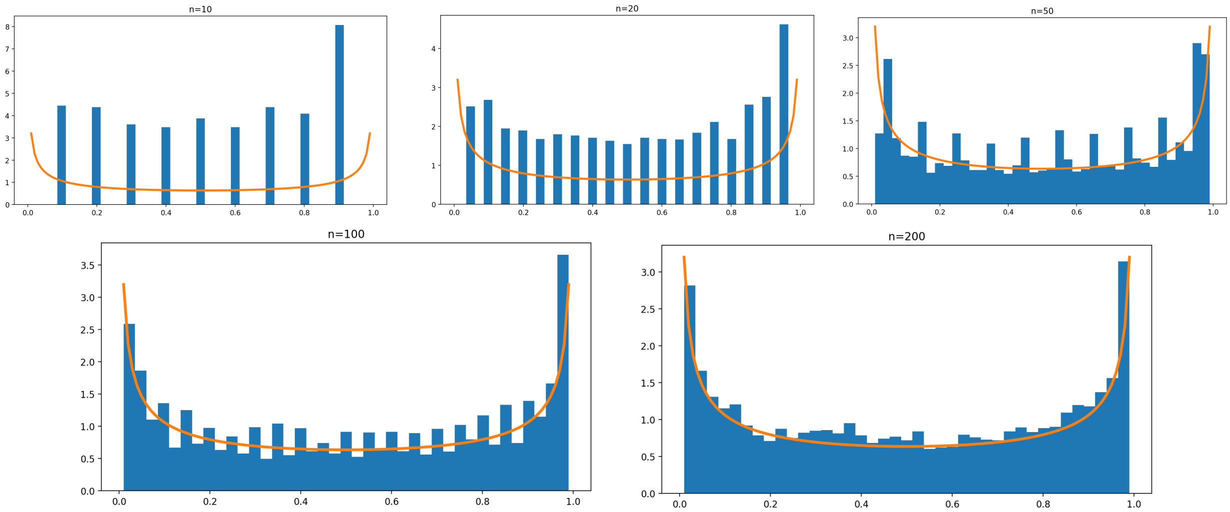
31. **a)** Donner le lien entre la fonction de répartition de Y et celle de X.
b) En déduire qu'une densité g de Y est donnée sur $]0;1[$ par $g(t)=\frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}$.
c) En remarquant que $g(1-t)=g(t)$ pour tout $t\in]0;1[$, calculer $\mathbf{E}(Y)$.

Considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de loi $\mathscr{B}(1/2)$, et notons $Y_n=2X_n-1$, de telle sorte que les Y_n sont des variables indépendantes dont la loi est donnée par
$$\mathbf{P}(Y_n=+1)=\mathbf{P}(Y_n=-1)=\frac{1}{2}.$$

Les variables Y_n modélisent le gain d'un joueur lors d'une partie de pile ou face : gain de 1 euro si la pièce tombe sur pile, gain de -1 euro si elle tombe sur face. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ le gain total à l'issue de n parties. Enfin, on note K_n le nombre de sommes $S_1,\ldots,S_n$ positives ou nulles : K_n est donc la durée, dans l'intervalle $[\![1;n]\!]$ où le joueur est satisfait d'être globalement gagnant.

32. **a)** Comment simuler la variable Y_n ?
b) En déduire un programme qui simule la variable K_n/n.

33. La suite contient quelques tests avec n de plus en plus grand. Que peut-on conjecturer sur la loi de K_n/n ? Commenter.



Exercice 4

Loi de Pareto et caractérisation

Soit X, une variable aléatoire admettant une densité continue f sur l'intervalle $]x_1, +\infty[$, nulle en dehors de $]x_1, +\infty[$, où x_1 est un réel strictement positif. On suppose de plus que X admet une espérance.

Pour tout réel $x > x_1$, on appelle moyenne de X sur l'intervalle $[x, +\infty[$, le quotient : $\mu_X(x) = \dfrac{\int_x^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$.

34. Que vaut la limite de $\mu_X(x)$ lorsque $x \to {x_1}^+$?

- **Exemple avec la loi de Pareto**
  Soient α, x_m, deux réels strictement positifs. On suppose dans les deux prochaines questions que X suit une loi de Pareto de paramètre (α, x_m), c'est-à-dire qu'une densité de X est donnée sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha {x_m}^{\alpha}}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \geqslant x_m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

35. À quelle condition sur les paramètres, la variable X vérifie les conditions du début de l'exercice ? À savoir, une densité continue f sur l'intervalle $]x_1, +\infty[$, nulle en dehors de $]x_1, +\infty[$, où x_1 est un réel strictement positif et X admet une espérance.

36. Justifier qu'il existe $\lambda \in]1; +\infty[$ tel que : $\quad \forall x > x_1, \quad \mu_X(x) = \lambda x$.

- **Vers une réciproque**
  On suppose dans les 4 prochaines questions que X est une variable aléatoire à densité qui vérifie :
  - Les conditions du début de l'exercice.
  - Il existe $\lambda > 1$ tel que : $\forall x > x_1$, $\mu_X(x) = \lambda x$.

  On pose pour tout $x \in]x_1; +\infty[$,

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x) = \int_x^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

37. Montrer que F et G sont dérivables sur l'intervalle $]x_1, +\infty[$, et, en utilisant les relations entre F et G, que

$$\forall\, x \in]x_1, +\infty[, \qquad x \cdot (1-\lambda) \cdot F'(x) = \lambda \cdot F(x).$$

38. **a)** Pour tout réel $x > x_1$, on pose $H(x) = F(x) \cdot x^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}$. Calculer $H'(x)$.
b) En déduire l'expression de F en fonction de λ et x_1. *On pourra remarquer* $\lim\limits_{x \to x_1} F(x) = F(x_1) = 1$.

39. Quelle est la loi suivie par X ?

- **Généralisation**

40. On suppose maintenant qu'il existe deux réels λ et μ, $\lambda > 1$, tels que : $\quad \forall x > x_1, \quad \mu_X(x) = \lambda x + \mu$.
a) Soit $c \in \mathbb{R}$. On pose $Y = X + c$. Justifier que Y est à densité et donner une densité à l'aide de f.
b) Montrer que, pour $x > x_1 + c$, on a : $\mu_{X+c}(x) = \mu_X(x - c) + c$.
c) Choisir c pour que la variable aléatoire $Y = X + c$ vérifie les conditions des questions 36 à 39.
d) Conclure sur la loi de Y, puis sur celle de X.

– FIN –

DS 3 - sujet *

THÈME : VARIABLES À DENSITÉ

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème 1

Discrétisée de la loi normale

Dans tout le problème, on note pour tout réel x : $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ et $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie I - préliminaires

- **Quelques majorations**

1. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}$, les inégalités :

$$\Phi(k+1) - \Phi(k) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{k} \quad \text{et} \quad \Phi(k+x) - \Phi(k-x) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{k-1}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$0 \leqslant \varphi(k+x) + \varphi(k-x) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{k-1}.$$

On pourra commencer par préciser les variations de φ sur $\mathbb{R}^+$.

- **Étude d'une fonction définie par une série**

On pose pour tout $x \in [0;1]$, $\quad h(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\varphi(k+x) + \varphi(k-x)\big)$ et $\mathrm{H}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \big(\Phi(k+x) - \Phi(k-x)\big)$.

3. **a)** Vérifier que h et H sont bien définies.
b) Préciser $\mathrm{H}(1)$ à l'aide de $\Phi(1)$.

L'objectif de la fin de cette partie est de justifier la dérivabilité de H avec $\mathrm{H}' = h$.

4. **a)** Justifier qu'il existe un réel K tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|\varphi'(t)| \leqslant \mathrm{K}/(1+t)^2$.
b) En déduire l'existence d'un réel $\tilde{\mathrm{K}}$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x,\ y \in [-1;1], \qquad \big|\Phi(k+x) - \Phi(k+y) + (x-y)\varphi(k+x)\big| \leqslant \frac{\tilde{\mathrm{K}}(x-y)^2}{k^2}.$$

5. En déduire qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x, y \in [0;1]$, $\quad \big|\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(y) - (x-y)h(x)\big| \leqslant \mathrm{C}(x-y)^2$.

6. Conclure.

- *En reprenant le schéma précédent, on peut montrer que φ est continue (et H de classe $\mathscr{C}^1$), ce que l'on admettra dans la suite.*

- *Graphe de H à l'aide de Python*

7. À l'aide de la question 1, déterminer un entier N tel que pour tout $x \in [0;1]$, $\quad \big|\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}_{\mathrm{N}}(x)\big| \leqslant 10^{-3}$
où $\quad \mathrm{H}_{\mathrm{N}}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \big(\Phi(k+x) - \Phi(k-x)\big)$.
Pour l'application numérique, on donne $\ln(10) \simeq 2{,}3$.

8. Écrire un programme python qui prend en argument x, N et renvoie $H_N(x)$.
Pour obtenir $\Phi(t)$ on peut utiliser la commande `norm.cdf(t,0,1)` *où on a importé la bibliothèque* `scipy.stats`.
9. En déduire un programme python qui trace approximativement le graphe de H sur $[0;1]$.

Partie II - discrétisée d'une variable aléatoire à densité

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires intervenant dans cette partie.

Soit A une variable aléatoire réelle à densité admettant comme densité la fonction f.
On lui associe la variable aléatoire partie entière de A : $B = \lfloor A \rfloor$, qui à tout $\omega \in \Omega$ associe $B(\omega) = \lfloor A(\omega) \rfloor$ dans $\mathbb{Z}$.

10. Expliciter pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}(B = k)$ au moyen d'une intégrale portant sur f.
11. On suppose que A ne prend que des valeurs positives, et que $f(x) = 0$ si $x < 0$.
Montrer que A admet une espérance $\mathbf{E}(A)$ si et seulement si B en admet une, et que, dans ce cas,

$$\mathbf{E}(B) \leqslant \mathbf{E}(A) \leqslant \mathbf{E}(B) + 1.$$

12. Quel encadrement obtient-on ainsi dans le cas particulier où A suit la loi exponentielle de paramètre λ ?

- **Le cas de la loi normale centrée réduite**
Soit T une variable aléatoire réelle, de loi normale centrée réduite. On lui associe les variables aléatoires suivantes :

$$X = |T|, \qquad Y = \lfloor T \rfloor \quad \text{et} \quad Z = \lfloor X \rfloor.$$

- *Quelques simulations python*
On admet[1] que si $(X_i)_{i \in [\![1;12]\!]}$ sont 12 variables aléatoires uniforme sur $[0;1]$ alors la simulation de la variable $\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right) - 6$ permet d'avoir une relative bonne simulation d'une variable de loi normale centrée réduite.

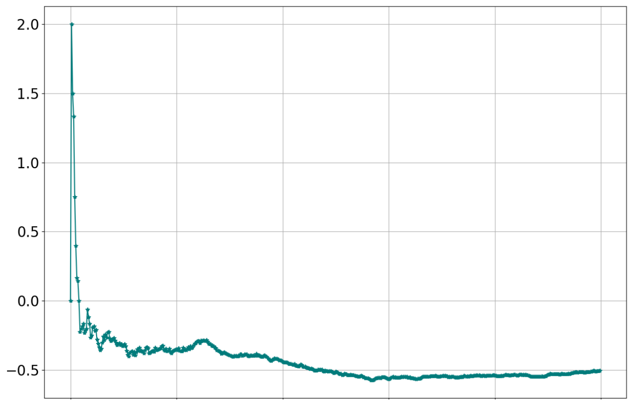
13. En déduire une fonction python d'entête `simu_y` qui permet de simuler Y. Faire de même avec Z.
14. **a)** Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, une suite de réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)/n$. Exprimer s_{n+1} à l'aide de n, s_n et x_{n+1}.
b) Que permet de conjecturer le programme suivant ?

Editeur

```
N=500
x=np.zeros(N)
for i in range(1,N):
    x[i]=simu_y()

s=np.zeros(N)
s[0]=x[0]
for i in range(N-1):
    s[i+1]=i*s[i]/(i+1)+x[i+1]/(i+1)

plt.plot(np.arange(N),s,'*-')
plt.show()
```



- *Étude théorique*

15. justifier que X est une variable à densité et préciser une densité, son espérance et sa variance.
16. **a)** Exprimer à l'aide de Φ, $\mathbf{P}(Z = k)$ où $k \in \mathbb{N}$.
b) faire de même avec $\mathbf{P}(Y = k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Dès que les séries $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_{-k}$ sont absolument convergentes, on pose $\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=1}^{+\infty} u_{-k}$.

Ainsi, sous réserve de convergence absolue : $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbf{P}(Y = k) - \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}(Y = -k)$.

17. Montrer l'existence de $\mathbf{E}(Y)$ et que $\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(\mathbf{P}(Y = k) - \mathbf{P}(Y = -k))$. En déduire la valeur exacte de $\mathbf{E}(Y)$.
18. Montrer que Z admet une espérance.

- **Étude d'une différence**
Soit $U = T - Y$. On note F_U, sa fonction de répartition.

1. Le chapitre « Convergence des variables aléatoires » expliquera cette approximation des douze uniformes par le théorème central limite.

19. Préciser $U(\Omega)$ et montrer que pour tout $u \in U(\Omega)$, on a

$$F_U(u) = \Phi(u) - \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\Phi(k+u) - \Phi(k-u)\big).$$

20. En déduire que $F_U(1/2) = 1/2$.

21. À l'aide de la partie I, justifier que U est à densité et que la fonction θ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\theta(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(\varphi(k+x) + \varphi(k-x)\big) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de U.

22. **a)** Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Phi(k+1/2) - \Phi(k) > \big(\Phi(k+1) - \Phi(k)\big)/2$, en déduire $\mathbf{P}\big([U < 1/2] \cap [T \geqslant 0]\big) > 1/4$.

b) Est-ce que les variables T et U sont indépendantes ?

→ *L'espérance*

23. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, on pose : $\qquad \theta_n(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{n} (\varphi(k+x) + \varphi(k-x)).$

Montrer que : $\qquad |\theta(x) - \theta_n(x)| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}.$

24. Donner l'espérance de U et montrer, en utilisant l'inégalité ci-dessus, que $\mathbf{E}(U) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t\theta_n(t)\,\mathrm{d}t$

25. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_k = \int_k^{k+1} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad b_k = \int_k^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $0 \leqslant kb_k \leqslant a_k$, et prouver :

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} kb_k = \lim_{k\to+\infty} b_k = 0.$$

26. Exprimer, pour tout $\in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t\theta_n(t)\,\mathrm{d}t$ au moyen de a_n, b_n et $\Phi(n)$, et retrouver $\mathbf{E}(U)$.

Problème

Taux de panne d'une variable aléatoire positive

Partie A : définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité, sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, qui possèdent une densité nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

27. Soit X un élément de $\mathscr{S}$. Montrer que X possède une unique densité nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

28. Soit X un élément de $\mathscr{S}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathbf{P}(X > x) > 0 \qquad (\star)$$

On note F sa fonction de répartition et f la densité de X nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$.

a) Justifier, pour tout x dans $\mathbb{R}_*^+$, l'existence de $\varphi(x) = \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{1}{h}\mathbf{P}_{[X>x]}(X \leqslant x+h)\right]$ et vérifier que

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

Si X est une variable aléatoire qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système, la fonction φ est alors le *taux de panne* du système. Dans la suite, on introduit aussi la *fiabilité* de X comme la fonction G_X définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad G_X(t) = 1 - F(t).$$

b) En remarquant que, pour tout réel strictement positif x, $\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $-\ln\big(G_X(x)\big)$, exprimer F à l'aide de φ.

29. Soit X un élément de $\mathscr{S}$. La fonction f est la densité de X nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$. Montrer que si f est strictement positive sur $]0, +\infty[$ alors X vérifie $(\star)$.

Partie B : exemples

Exemple 1 : caractérisation de la loi exponentielle

30. Soit Z une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que Z appartient à $\mathscr{S}$, vérifie $(\star)$ et calculer son taux de panne φ.

31. Soit X un élément de $\mathscr{S}$. La fonction f est la densité de X nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$. On suppose que son taux de panne est constant. Montrer que X suit une loi exponentielle.

32. Exemple 2 : Loi de Weibull

Soit $\psi_{\eta,\beta}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi_{\beta,\eta}(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\eta}\left(\dfrac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{où } \beta \geqslant 1,\ \eta > 0.$$

a) Vérifier que $\psi_{\beta,\eta}$ est une densité de probabilité.

b) On suppose que X a pour densité la fonction $\psi_{\beta,\eta}$. Déterminer $\varphi(t)$, le taux de panne à la date t.

c) Étudier $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t)$ en fonction de la valeur de β.

Exemple 3 : Estimation du taux de panne de la loi gamma

On rappelle que dans la bibliothèque `numpy.random`, on peut simuler une loi gamma de paramètre `nu` à l'aide de la commande `rd.gamma(nu)`.

33. Compléter le programme suivant qui donne une approximation de $\mathbf{P}_{[X>x]}(X \leqslant x+h)$ où X suit une loi gamma de paramètre `nu`.

Editeur

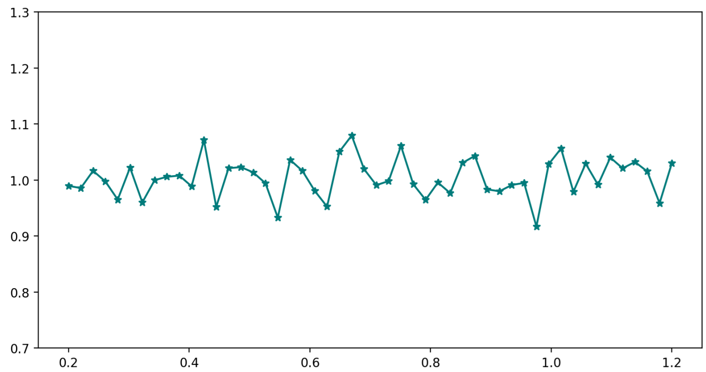
```
def proba_cond(x,h,nu):
    m=200000
    s=0
    c=0
    for i in range(m):
        X=rd.gamma(nu)
        if X> .. (1) .. :
            c+=1
            if X< .. (2) .. :
                s+=1
    return .. (3) ..
```

34. En quoi la commande `proba_cond(x,10**(-3),nu)*10**(3)` permet d'obtenir une approximation du taux de panne $\varphi(x)$ de $X \hookrightarrow \gamma(\text{nu})$? La courbe obtenu par le code suivant est approximativement constante. Est-ce cohérent ?

Editeur

```
def taux_panne(x,nu):
    h=10**(-3)
    return proba_cond(x,h,nu)*h**(-1)

x=np.linspace(0.2,1.2,50)
M=np.zeros(50)
for i in range(50):
    M[i]=taux_panne(x[i],1)
plt.plot(x,M,'*-')
plt.show()
```



Partie C : Lien avec l'espérance

Soit Z une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On suppose que Z appartient à $\mathscr{S}$, vérifie $(\star)$ et admet une espérance.

35. Justifier que $\mathbf{E}(Z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_Z(t)\,dt$ où G_Z est la fiabilité de Z.

36. On suppose désormais que X admet une espérance. Soit t un réel positif fixé ; le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date t, on appelle durée de survie la variable aléatoire X_t représentant le temps s'écoulant entre la date t et la première panne. On a donc, pour tout réel x positif

$$G_{X_t}(x) = \mathbf{P}(X_t > x) = \mathbf{P}_{[X>t]}(X - t > x).$$

Montrer que
$$\mathbf{E}(X_t) = \frac{1}{G_X(t)} \int_t^{+\infty} G_X(u)\,\mathrm{d}u.$$

Partie D

Dans cette partie X est un élément de $\mathscr{S}$ qui vérifie $(\star)$.
On rappelle que F est sa fonction de répartition, f est sa densité nulle sur $]-\infty, 0]$ et continue sur $]0, +\infty[$, φ est son taux de panne et G_X sa fiabilité. On note Φ, la primitive de φ qui s'annule en 0 sur $\mathbb{R}^+$.

37. Étudier les variations de Φ et préciser la limite de $\Phi(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

38. **a)** Montrer que si φ est croissante sur $\mathbb{R}_*^+$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \qquad G_X(x+y) \leqslant G_X(x) G_X(y)$$

b) Que dire si φ est décroissante ?

39. À l'aide de la question précédente, retrouver le résultat de la question 31.

40. On suppose ici que f est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = \Phi(X)$.

Partie E : Système Poissonien

facultatif

On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0, t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.
On notera en particulier que pour $s \leqslant t$, on a $N_s \leqslant N_t$. On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes :

- $N_0 = 0$ et $0 < \mathbf{P}(N_t = 0) < 1$ pour tout $t > 0$.
- Pour tous réels $t_0, t_1, \ldots, t_n$ tels que $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ les variables $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants).
- Pour tous réels s et t tels que $0 < s < t$, $N_t - N_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires).
- $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{\mathbf{P}(N_h > 1)}{h} = 0$.

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geqslant 0$ et pour tout $s \in [0, 1]$, $G_u(s) = \mathbf{E}\left[s^{N_u}\right]$, avec la convention $0^0 = 1$.

41. **a)** Justifier que pour tout $u \geqslant 0$, $G_u(s)$ existe pour tout $s \in [0, 1]$ et qu'on a, pour tout $s \in [0, 1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N_u = k)\, s^k$$

b) Montrer par ailleurs que, pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$, on a

$$G_{u+v}(s) = G_u(s) G_v(s).$$

42. On fixe s tel que $0 \leqslant s \leqslant 1$.

a) Montrer que $G_1(s) > 0$.

b) On pose $\theta(s) = -\ln G_1(s)$ et, pour $u \geqslant 0$, $\psi(u) = G_u(s)$.
Montrer que $\psi(k) = \mathrm{e}^{-k\theta(s)}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit q un entier naturel non nul. En considérant $G_{\frac{1}{q}}(s)$, montrer $\psi\left(\frac{1}{q}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$.

d) Montrer que si p est un entier naturel et q un entier naturel non nul, on a $\psi(r) = \mathrm{e}^{-r\theta(s)}$ où on a posé $r = \frac{p}{q}$.

e) Montrer que pour tout réel positif u, $G_u(s) = \mathrm{e}^{-u\theta(s)}$.

f) En déduire que pour tout $s \in [0, 1]$, $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \dfrac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)$.

43. Montrer par ailleurs que pour tout $s \in [0, 1]$,

$$G_h(s) - 1 = \mathbf{P}\left(N_h = 1\right)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right)\left(s^k - 1\right).$$

44. Montrer que pour tout $s \in [0, 1]$,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(N_h = k\right)\left(s^k - 1\right)}{h} = 0.$$

45. **a)** En déduire qu'il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $\alpha = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{\mathbf{P}\left(N_h = 1\right)}{h}$ et que pour tout $s \in [0,1]$, $\theta(s) = \alpha(1-s)$.

b) En considérant $G_u(0)$, montrer que $\alpha > 0$.

46. **a)** On fixe un temps $u > 0$. Montrer que pour tout $s \in [0,1]$,

$$G_u(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N_u = k)\, s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[e^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right] s^k.$$

b) Déduire que pour tout $u > 0$, la variable aléatoire N_u suit la loi de Poisson de paramètre αu.

Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson et la constante α s'appelle le paramètre du processus de Poisson.

47. Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$. Comparer les événements $(T > t)$ et $(N_t = 0)$. En déduire que T suit la loi exponentielle de paramètre α.

48. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.

a) Montrer que $\tilde{N}_h$ est une variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle $[t, t+h]$.

b) Montrer que la famille $\left(\tilde{N}_h\right)_{h\geqslant 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

c) En déduire que la première panne survenant après la date t se produit suivant une loi exponentielle de paramètre α.

d) En déduire que le processus de Poissons a la propriété que, pour chaque t donné, le taux de panne du système après t est constant.

– FIN –

DS 3 A - solution

Exercice 1

1.a) Soient s, $t \in \mathbb{R}$.

$$\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}(t-s)^2 = \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}t^2 + st - \frac{s^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + st.$$

L'égalité s'en déduit d'après la relation fonctionnelle sur l'exponentielle.

1.b) Notons g la densité continue de X, soit

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} \cdot g(t)\,dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{s^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-s)^2}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{s^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du \qquad (u = s-t) \\ &= e^{s^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,du.\end{aligned}$$

On en déduit la convergence absolue (l'intégrande est positive) car g est une densité. D'après le théorème de transfert, $\mathbf{E}\big(\exp(sX)\big)$ existe et vaut

$$\mathbf{E}\left(e^{sX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} g(t)\,dt = e^{s/2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\,du = e^{s^2/2}.$$

2.a) D'après le cours sur les transformations affines $\sigma X + m$ et Y ont même loi.

$$a = \sigma \quad \text{et} \quad b = m.$$

2.b) Soit $s \in \mathbb{R}$. Par continuité de la fonction exponentielle

> Nous reviendrons sur cet argument de continuité dans le cours sur les vecteurs aléatoires

$$Z = e^{Y} \quad \text{et} \quad e^{\sigma X + m} = e^{m} \cdot e^{\sigma X}$$

ont même loi donc même espérance. Or, d'après 1.b) $e^{\sigma X}$ admet une espérance et par linéarité $e^{\sigma X + m}$ aussi avec

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}\left(e^{m} \cdot e^{\sigma X}\right) &= e^{m}\mathbf{E}\left(e^{\sigma X}\right) \\ &= e^{m} \cdot e^{\sigma^2/2} = e^{m+\sigma^2/2}.\end{aligned}$$

On a aussi l'égalité en loi entre les variables

$$Z^2 = e^{2Y} \quad \text{et} \quad e^{2(\sigma X + m)} = e^{2m} \cdot e^{2\sigma X}.$$

On en déduit que Z admet un moment d'ordre 2 (et donc une variance) avec

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(Z^2\right) = e^{2m}\mathbf{E}\left(e^{2\sigma X}\right) &= e^{2m} \cdot e^{(2\sigma)^2/2} \\ &= e^{2(m+\sigma^2)}.\end{aligned}$$

On conclut par la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Z) &= \mathbf{E}\left(Z^2\right) - \mathbf{E}(Z)^2 \\ &= e^{2m+2\sigma^2} - e^{2m+\sigma^2} = e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).\end{aligned}$$

3.a) La variable Z est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Ainsi :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, $F_Z(x) \leqslant 0$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\begin{aligned}F_Z(x) = \mathbf{P}(Z \leqslant x) &= \mathbf{P}\left(e^{Y} \leqslant x\right) \\ &= \mathbf{P}(Y \leqslant \ln(x)) \quad \text{(ln strict. croiss.)} \\ &= \mathbf{P}(\sigma X + m \leqslant \ln(x)) \quad \text{(égalité en loi)} \\ &= \mathbf{P}\left(X \leqslant \frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right) \quad (\sigma > 0) \\ F_Z(x) &= \Phi\left(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

3.b) La Fonction F_Z est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ (par composition) et sur $\mathbb{R}_*^-$ (car constante). En particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- *Étude en 0.*

En tant que fonction de répartition, F_Z est continue à droite. C'est-à-dire

$$\lim_{x\to 0^+} F_Z(x) = F_Z(0) = 0.$$

De plus $\qquad \displaystyle\lim_{x\to 0^-} F_Z(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0.$

D'où la continuité en 0.
En résumé, F_Z est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, continue sur $\mathbb{R}$, la variable Z est à densité.

- on précise maintenant une densité.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$F_Z'(x) = 0 \quad \text{si } x < 0$$

et si $x > 0$

$$F_Z'(x) = \frac{\ln'(x)}{\sigma}\Phi'\left(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{x\sigma} g\left(\frac{\ln(x)-m}{\sigma}\right) \quad .$$

On retrouve bien la densité de l'énoncé.

4. On a par les règles de transformation affine

$$R = e^{-Y} \quad \text{avec} \quad -Y \hookrightarrow \mathscr{N}\left(-m, \sigma^2\right).$$

D'où $\qquad R \hookrightarrow \text{Log-}\mathscr{N}\left(-m, \sigma^2\right).$

5. La variable U peut s'écrire sous la forme $\mathrm{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{V}}$ où $\mathrm{V} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$. Ainsi

$$\mathrm{W}_n = \mathrm{e}^{n\mathrm{V}} \quad \text{avec} \quad n\mathrm{V} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(n \times 0, (n \times 1)^2\right).$$

D'où $$\mathrm{W}_n \hookrightarrow \text{Log-}\mathcal{N}\left(0, n^2\right).$$

6.a) Par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}\left(\overline{\mathrm{T}}_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(\ln \mathrm{Z}_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m = m.$$

Puis par indépendance des variables

$$\mathbf{V}\left(\overline{\mathrm{T}}_n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(\ln \mathrm{Z}_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

6.b) On cherche à minorer

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{I}_n \leqslant m \leqslant \mathrm{J}_n) &= \mathbf{P}\left(-\frac{2}{\sqrt{na}} \leqslant m - \overline{\mathrm{T}}_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\right)\\ &= \mathbf{P}\left(\left|m - \overline{\mathrm{T}}_n\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\right).\end{aligned}$$

Or par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\left|\overline{\mathrm{T}}_n - \mathbf{E}\left(\overline{\mathrm{T}}_n\right)\right| \geqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\right) &\leqslant \frac{\mathbf{V}\left(\overline{\mathrm{T}}_n\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{na}}\right)^2}\\ &\leqslant \frac{\sigma^2 na}{n4} \leqslant \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 a.\end{aligned}$$

Or $\sigma \in]0;2]$, d'où

$$\mathbf{P}\left(\left|\overline{\mathrm{T}}_n - \mathbf{E}\left(\overline{\mathrm{T}}_n\right)\right| \geqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\right) \leqslant a.$$

On conclut par passage à l'événement contraire.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\mathrm{I}_n \leqslant m \leqslant \mathrm{J}_n) &= \mathbf{P}\left(\left|m - \overline{\mathrm{T}}_n\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\right)\\ &\geqslant \mathbf{P}\left(\left|m - \overline{\mathrm{T}}_n\right| < \frac{2}{\sqrt{na}}\right)\\ &\geqslant 1 - \mathbf{P}\left(\left|m - \overline{\mathrm{T}}_n\right| \geqslant \frac{2}{\sqrt{na}}\right)\\ \mathbf{P}(\mathrm{I}_n \leqslant m \leqslant \mathrm{J}_n) &\geqslant 1 - a.\end{aligned}$$

Exercice 2

7. Voir exercice du cours. Comme l'intégrale est généralisée en $+\infty$ et 0 (si $x \in]0;1[$), il convient d'intégrer par partie sur $[\varepsilon, \mathrm{A}]$ puis de faire $\varepsilon \to 0$ et $\mathrm{A} \to +\infty$.

8. Si on note f une densité de X, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{a-1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{a-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \Gamma(a).$$

En particulier, il y a convergence et même convergence absolue puisque l'intégrande est positive. D'après le théorème de transfert X^{a-1} admet une espérance et

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^{a-1}\right) = \Gamma(a).$$

Pour la variance, on reprend le même schéma et on obtient la convergence pour $a > 1/2$ avec

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^{2(a-1)}\right) = \Gamma(2a-1).$$

9.a) D'après la loi faible des grands nombres (qui s'applique car X^{a-1} admet un moment d'ordre 2), on peut approximer l'espérance $\mathbf{E}\left(\mathrm{X}^{a-1}\right)$ (et donc $\Gamma(a)$) par une moyenne empirique d'un échantillon de taille « suffisamment » grande.

> La condition de l'existence du moment d'ordre 2 peut être enlevée et la distinction $a \geqslant 1$ simplifiée par $a > 0$ mais cela simplifie trop le programme python :).
> Noter que ce passage se retrouve dans le sujet Ecricome 2025.

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def approx_gamma(a):
    s=0
    for i in range(5000):
        s+=rd.exponential(1)**(a-1)
    return s/5000
```

9.b) Si $a \in]0;1[$, on a aussi

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \qquad \text{où } a+1 \geqslant 1.$$

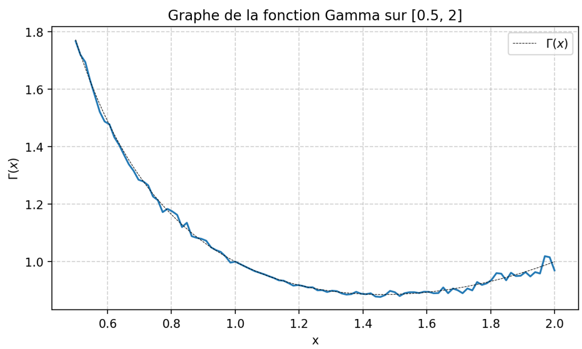
et on peut utiliser le programme précédent pour avoir une approximation de $\Gamma(a+1)$.

```python
def approx_gamma2(a):
    if a<1:
        return approx_gamma(a+1)/a
    return approx_gamma(a)
```

10.

```python
def courbe_gamma(x1,x2):
    x=np.linspace(x1,x2,100)
    y=np.zeros(100)
    for i in range(100):
        y[i]=approx_gamma2(x[i])
    plt.plot(x,y)
    #plt.show()

# Test
courbe_gamma(0.5,2)
```



11. On effectue le changement de variable $t = x^2$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et strictement monotone. Alors $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ et $\sqrt{t} = x$. L'intégrale devient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = \int_0^{+\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x\left(1+x^2\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Or on sait que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

12. La constante $c_{1,1}$ est telle que

$$c_{1,1}\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2-1}}{(t+1)^{(1+1)/2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1,1}(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Soit $$c_{1,1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)} = 1 \quad \text{puis} \quad c_{1,1} = \frac{1}{\pi}.$$

On peut montrer que pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$c_{n,m} = \frac{\Gamma((n+m)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} n^{n/2} m^{m/2}.$$

13.

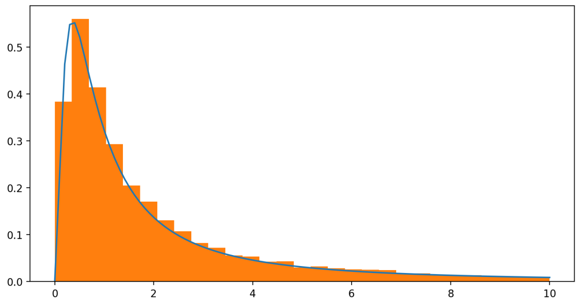
```
def simu_f(n,m):
    x1=rd.gamma(n/2)
    x2=rd.gamma(m/2)
    return (m*x1)/(n*x2)
```

On peut tester ce code en réalisant un histogramme d'un échantillon et en le comparant avec la densité $f_{n,m}$.

```
plt.clf()
# test
n=7
m=2
from scipy.special import gamma

cnm=gamma((n+m)/2)/(gamma(n/2)*gamma(m/2))
    *n**(n/2)*m**(m/2)
t=np.linspace(0,10,100)
y=cnm*t**(n/2-1)/(n*t+m)**((n+m)/2)
plt.plot(t,y)

ech=np.zeros(20000)
for i in range(20000):
    ech[i]=simu_f(n,m)
plt.hist(ech,bins=np.linspace(0,10,30),
    density=True)
plt.show()
```



14. La fonction $t \mapsto t f_{n,m}(t)$ est continue sur $[0;+\infty[$. Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{n,m}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t f_{n,m}(t)\,\mathrm{d}t$$

est une intégrale généralisée en $+\infty$. Or

$$t f_{n,m}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} c_{n,m} \frac{t^{n/2}}{(nt)^{(m+n)/2}} = \text{Cste} \cdot \frac{1}{t^{m/2}}.$$

Par les critères de Riemann et d'équivalence pour des fonctions positives, on sait qu'il y a convergence si et seulement si

$$\frac{m}{2} > 1 \quad \text{soit} \quad m > 2.$$

Comme l'intégrande est positive, on a aussi la convergence absolue et l'espérance de $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathscr{F}(n,m)$ existe si et seulement si $m > 2$.

15. Appliquons le théorème de transfert où g est une densité de X_2

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\Gamma(m/2)} t^{m/2-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma(m/2)} \int_0^{+\infty} t^{(m/2-1)-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\Gamma(m/2-1)}{\Gamma(m/2)}.\end{aligned}$$

D'après le rappel, on a la convergence de $\Gamma(m/2-1)$ pour $m > 2$ et donc la convergence (absolue) de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'après le théorème de transfert, $1/\mathrm{X}_2$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}_2}\right) = \frac{\Gamma(m/2-1)}{\Gamma(m/2)}.$$

De plus, la question 7 donne :

$$\Gamma(m/2) = \Gamma\left(\left(\frac{m}{2}-1\right)+1\right) = \left(\frac{m}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)$$

D'où $$\frac{\Gamma(m/2-1)}{\Gamma(m/2)} = \frac{1}{\frac{m}{2}-1} = \frac{2}{m-2}.$$

16. Si $\mathrm{Y} \hookrightarrow \gamma(\nu)$ alors

$$\mathbf{E}(\mathrm{Y}) = \nu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathrm{Y}) = \nu.$$

17. Par égalité en loi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathrm{X}) &= \mathbf{E}\left(\frac{m}{n}\frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{X}_2}\right) && \text{où } \mathrm{X}_1 \hookrightarrow \gamma(n/2),\ \mathrm{X}_2 \hookrightarrow \gamma(m/2) \\ &= \frac{m}{n}\mathbf{E}\left(\frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{X}_2}\right) && \text{(linéarité)} \\ &= \frac{m}{n}\mathbf{E}(\mathrm{X}_1)\,\mathbf{E}\left(\frac{1}{\mathrm{X}_2}\right) && \text{(indépendance)} \\ &= \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{2}{m-2} \\ \mathbf{E}(\mathrm{X}) &= \frac{m}{m-2}.\end{aligned}$$

Noter que le résultat est indépendant de n.

18. Comme X_1 admet une variance, le moment d'ordre 2 $\mathbf{E}(X_1{}^2)$ existe et par la formule de Koenig-Huygens, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(X_1{}^2\right) &= \mathbf{V}(X_1)+\mathbf{E}(X_1)^2\\ &= \frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}\right)^2=\frac{n(n+2)}{4}.\end{aligned}$$

19. Notons de nouveau, g une densité de $X_2 \hookrightarrow \gamma(m/2)$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\Gamma(m/2)}\int_0^{+\infty}t^{\left(\frac{m}{2}-2\right)-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)}{\Gamma(m/2)}.\end{aligned}$$

On en déduit la convergence (absolue) et par le théorème de transfert

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{X_2{}^2}\right)=\int_0^{+\infty}t^2 g(t)\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(m/2-2)}{\Gamma(m/2)}.$$

Et par la relation fonctionnelle de la question 7

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(m/2-2)}{\Gamma(m/2)} &= \frac{\Gamma(m/2-2)}{\Gamma(m/2-1)}\,\frac{\Gamma(m/2-1)}{\Gamma(m/2)}\\ &= \frac{1}{(m/2-2)}\cdot\frac{1}{(m/2-1)}\\ &= \frac{4}{(m-4)(m-2)}.\end{aligned}$$

20.a) De nouveau, par hypothèse d'indépendance et égalité en loi

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(X^2\right)=\frac{m^2}{n^2}\mathbf{E}\left(\frac{X_1{}^2}{X_2{}^2}\right) &= \frac{m^2}{n^2}\mathbf{E}\left(X_1{}^2\right)\cdot\mathbf{E}\left(\frac{1}{X_2{}^2}\right)\\ &= \frac{m^2 n(n+2)}{n^2(m-2)(m-4)}=\frac{m^2(n+2)}{n(m-2)(m-4)}.\end{aligned}$$

Par la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}\left(X^2\right)-\mathbf{E}(X)^2\\ &= \frac{m^2}{(m-2)}\cdot\frac{n+2}{n(m-4)}-\left(\frac{m}{m-2}\right)^2\\ &= \left(\frac{m}{m-2}\right)^2\cdot\left(\frac{(n+2)(m-2)}{n(m-4)}-1\right)\\ &= \left(\frac{m}{m-2}\right)^2\left(\frac{(n+2)(m-2)-n(m-4)}{n(m-4}\right)\\ &= \left(\frac{m}{m-2}\right)^2\left(\frac{nm-2n+2m-4-nm+4n}{n(m-4)}\right)\\ \mathbf{V}(X) &= \left(\frac{m}{m-2}\right)^2\left(\frac{2n+2m-4}{n(m-4)}\right).\end{aligned}$$

20.b) La variable $1/X$ a la même loi que

$$\frac{nX_2}{mX_1}\quad\text{avec}\quad\begin{cases}X_1\hookrightarrow\gamma(n/2)\\ X_2\hookrightarrow\gamma(m/2).\end{cases}$$

Ainsi $1/X \hookrightarrow \mathscr{F}(m,n)$. Dès lors $\mathbf{V}(1/X)$ a un sens si $n \geqslant 5$ et en échangeant les rôles de n et m dans la formule précédente

$$\mathbf{V}\left(\frac{1}{X}\right)=\left(\frac{n}{n-2}\right)^2\left(\frac{2m+2n-4}{m(n-4)}\right).$$

Dans le même esprit, on peut montrer que si r est un entier tel que $r < n$ alors X admet un moment d'ordre r avec

$$\mathbf{E}\left(X^r\right)=\left(\frac{m}{n}\right)^r\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\times\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Exercice 3

21.a) 1. La fonction sinus est dérivable sur l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$. Sa dérivée, la fonction cosinus, est strictement positive sur $]-\pi/2,\pi/2[$ et s'annule en $-\pi/2$ et $\pi/2$. Ceci assure que la fonction sinus est strictement croissante sur $[-\pi/2,\pi/2]$. Y étant aussi continue, le théorème de la bijection assure que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2,\pi/2]$ dans $\sin([-\pi/2,\pi/2])=[\sin(-\pi/2),\sin(\pi/2)]=[-1,1]$. Ce qui conclut.

21.b) Par définition de la bijection réciproque, pour tout $y\in[-1,1]$, Arcsinus(y) est l'unique antécédent de y dans l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$ par la fonction sinus. Or, on sait que $\sin(\pi/6)=1/2$ et $\sin(0)=0$. Comme les valeurs $\pi/6$ et 0 appartiennent toutes les deux à l'intervalle $[-\pi/2,\pi/2]$, on en déduit que :

$$\mathrm{Arcsinus}(1/2)=\pi/6\quad\text{et}\quad\mathrm{Arcsinus}(0)=0.$$

22. On obtient le graphe de la fonction Arcsinus par symétrie du graphe de la fonction sinus par rapport à la droite d'équation $y=x$. En particulier, les tangentes horizontales pour le graphe de sinus aux points de coordonnées $(-\pi/2,-1)$ et $(\pi/2,1)$ deviennent des tangentes verticales pour le graphe de Arcsinus aux points de coordonnées $(-1,-\pi/2)$ et $(1,\pi/2)$.

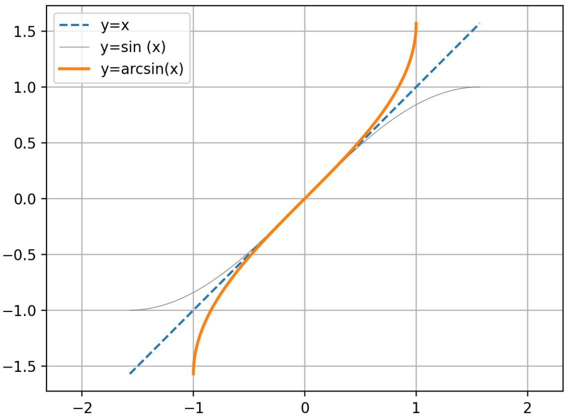
→ Version courte du code :

```
import matplotlib.pyplot as plt

x=np.linspace(-np.pi/2,np.pi/2,100)
y=np.sin(x)
plt.plot(y,x) # On échange le rôle de x et
    y
plt.show()
```

→ Version longue pour soigner l'affichage (facultatif)

```
x=np.linspace(-np.pi/2,np.pi/2,100)
y=np.sin(x)
plt.plot(x,x,'--',label='y=x')
plt.plot(x,y,linewidth=0.5,color='gray',
    label='y=sin (x)')
plt.plot(y,x,linewidth=2,label='y=arcsin(x
    )')
plt.axis('equal')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```



23.a) Toujours par définition de la bijection réciproque, pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin\left(\text{Arcsinus}(x)\right) = x$. Soit $x \in [-1,1]$. On a :

$$\cos\left(\text{Arcsinus}(x)\right)^2 + \underbrace{\sin\left(\text{Arcsinus}(x)\right)^2}_{=x^2} = 1.$$

D'où $$\cos\left(\text{Arcsinus}(x)\right)^2 = 1 - x^2.$$

Enfin, comme $\text{Arcsinus}(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$\cos\left(\text{Arcsinus}(x)\right) \geqslant 0,$$

d'où : $$\cos\left(\text{Arcsinus}(x)\right) = \sqrt{1-x^2}.$$

23.b) La fonction sinus est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et sa dérivée, la fonction cosinus, ne s'annule pas sur cet intervalle. Or pour tout $x \in]-1,1[$, $\text{Arcsinus}(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$. Donc la fonction arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{Arcsinus}'(x) = \frac{1}{\sin'\left(\text{Arcsinus}(x)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\text{Arcsinus}(x)\right)}.$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{Arcsinus}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

24.a) Au voisinage de 0, on a (développement limité de référence d'une fonction du type $t \longmapsto (1+t)^{\alpha}$) :

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}t + o_0(t).$$

24.b) Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, la composition des développements limités permet d'écrire le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsinus}'(x)$:

$$\text{Arcsinus}'(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o_0\left(x^2\right).$$

Par primitivation, on en déduit que la fonction arcsinus admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$\text{Arcsinus}(x) = \underbrace{\text{Arcsinus}(0)}_{=0} + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + o_0\left(x^3\right),$$

soit : $$\text{Arcsinus}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

25.a) Comme la variable aléatoire $(\pi/2)\Theta$ est à valeurs dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ presque sûrement, la variable aléatoire $X = \sin(\Theta)$ est à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$ presque sûrement, donc $F_X(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_X(x) = 1$ si $x > 1$. Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}(X \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(\sin(\Theta) \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(\Theta \leqslant \text{Arcsinus}(x)) \quad \text{sinus strict. croiss. sur } [0,\pi/2] \end{aligned}$$

$$F_X(x) = \frac{2}{\pi}\text{Arcsinus}(x) \quad \text{car } \frac{\pi}{2}\Theta \hookrightarrow \mathscr{U}[0,\pi/2].$$

Ainsi, la fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi}\text{Arcsinus}(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

25.b) La fonction F_X est de classe $\mathscr{C}^1$, au moins sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. En effet, la fonction arcsinus est dérivable sur $]0,1[$ et sa dérivée, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, y est continue. Comme la fonction arcsinus est continue sur $[0,1]$, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \text{Arcsinus}(x) = \text{Arcsinus}(0) = 0$$

et $$\lim_{x\to 1^-} \text{Arcsinus}(x) = \text{Arcsinus}(1) = \frac{\pi}{2}.$$

D'où,

$$\lim_{x\to 0^-} F_X(x) = \lim_{x\to 0^+} F_X(x) = F_X(0) = 0$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} F_X(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1 = \lim_{x\to 1^+} F_X(x) = F_X(1)$$

Donc la fonction F_X est continue en 0 et en 1, donc F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
Ceci assure que X est une variable aléatoire à densité.
Une densité de X est alors donnée par $f_X = F_X'$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ et on peut fixer des valeurs arbitraires positives ou nulles aux points 0 et 1, par exemple $f_X(0) = f_X(1) = 0$. Ainsi, d'après l'expression de $\text{Arcsinus}'(x)$ établie précédemment, la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression ci-dessous est une densité de X :

$$f_X : x \longmapsto \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

26.a) La variable aléatoire X possède une espérance (et des moments de tous ordres) car elle est à valeurs dans le segment $[0,1]$ (c'est une variable aléatoire «bornée»). D'après le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\sin(\Theta)) = \int_0^{\pi/2} \sin(t) f_\Theta(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\cdot\frac{2}{\pi}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient

$$\mathbf{E}(X) = \frac{2}{\pi}.$$

26.b) De nouveau, le théorème de transfert s'applique et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^2) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\left[t-\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2}\\ \mathbf{E}(X^2) &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

27. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X\leqslant\frac{1}{n}\right) &= F_X\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\text{Arcsinus}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(25.a) avec } 0\leqslant\frac{1}{n}\leqslant 1\Big)\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \qquad \text{(d'après 24.b),}\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbf{P}\left(X\leqslant\frac{1}{n}\right)-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{3\pi}\cdot\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$\mathbf{P}\left(X\leqslant\frac{1}{n}\right)-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3\pi}\cdot\frac{1}{n^3}$$

donc les constantes sont

$$A=\frac{2}{\pi}\quad\text{et}\quad B=\frac{1}{3\pi}.$$

28. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X\geqslant 1-\frac{1}{n}\right) &= 1-\mathbf{P}\left(X<1-\frac{1}{n}\right)\\ &= 1-\mathbf{P}\left(X\leqslant 1-\frac{1}{n}\right) \qquad \text{(car X est à densité)}\\ &= 1-F_X\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Or F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 1. Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}\left(X\geqslant 1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}1-F_X\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1-F_X(1) = 1-1 = 0$$

En effet, $\quad F_X(1) = \frac{2}{\pi}\text{Arcsinus}(1) = 1.$

On a donc montré que

$$p_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

29. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-p_n)\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}F_X\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \text{(question précédente)}\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\text{arcsinus}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \text{(d'après la question II.1)}\\ &= \sin\left(\text{arcsinus}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= 1-\frac{1}{n} \qquad \text{car } 1-\frac{1}{n}\in[-1,1]\end{aligned}$$

Finalement

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-p_n)\right) = 1-\frac{1}{n}.$$

30.a) $\quad\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right).$

30.b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}p_n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}p_n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1-p_n)\right) = 1-\frac{1}{n}.$$

Or, on sait que $\lim_{n\to+\infty}p_n = 0$ (question 28). En utilisant le développement limité obtenu à la question précédente, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}p_n\right) = 1-\frac{\pi^2}{8}p_n^2+o\left(p_n^2\right)$$

Ainsi :

$$1-\frac{1}{n} = 1-\frac{\pi^2}{8}p_n^2+o\left(p_n^2\right)$$

On en déduit que :

$$\frac{8}{\pi^2 n} = p_n^2+o\left(p_n^2\right)$$

Donc, $p_n^2\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{8}{\pi^2 n}$ et finalement

$$p_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}}.$$

La constante $c = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ convient.

31.a) On a $y(\Omega)\subset[0;1]$. Soit $x\in\mathbb{R}$

- Si $x<0$, $F_Y(x) = 0$.
- Si $x\geqslant 1$, on a $F_Y(x) = 1$.
- Si $x\in[0;1]$

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= \mathbf{P}(Y\leqslant x) = \mathbf{P}\left(X^2\leqslant x\right)\\ &= \mathbf{P}(-\sqrt{x}\leqslant X\leqslant\sqrt{x})\\ &= \mathbf{P}(-\sqrt{x}<X\leqslant\sqrt{x}) \qquad \text{(X est à densité)}\\ F_Y(x) &= F_X(\sqrt{x})-F_X(-\sqrt{x}).\end{aligned}$$

31.b) La fonction F_Y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et $]1;+\infty[$ car constante et sur $]0;1[$ par différence et composition.
En particulier F_Y est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$.

- *Étude en 1*

La fonction F_Y est continue à droite en 1 en tant que fonction de répartition. D'où

$$\lim_{x\to1^+}F_Y(x) = F_Y(1) = 1.$$

De plus par continuité de F_X en ±1

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}F_Y(x) &= \lim_{x\to1^-}F_X(\sqrt{x})-\lim_{x\to1^-}F_X(-\sqrt{x})\\ &= \underbrace{F_x(1)}_{=1}-\underbrace{F_X(-1)}_{=0} = 1 = F_y(1).\end{aligned}$$

On en déduit la continuité en 1 de F_Y.
Il en va de même en 0.
Résumons F_Y est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ et continue sur $\mathbb{R}$, Y est une variable à densité.

Une densité s'obtient par dérivation là où cela est possible.
Or

$$\forall t\in\mathbb{R}\setminus\{0;1\},\quad F_Y'(t) = \begin{cases}0 & \text{si } t\notin[0;1]\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}F_x'(\sqrt{x})+\frac{1}{2\sqrt{x}}F_x'(-\sqrt{x}) & \text{sinon.}\end{cases}$$

En utilisant la parité de $F'_X = f_X$, on obtient une densité g de Y par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0;1] \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

31.c) la variable Y admet une espérance car elle est bornée et avec le changement de variable affine $u = 1 - t$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y) &= \int_0^1 t g(t)\,dt = \int_{u=1}^0 (1-u)g(1-u)(-du) \\ &= \int_0^1 (1-u)g(u)\,du \\ &= \int_0^1 g(u)du - \int_0^1 ug(u)\,du \\ \mathbf{E}(Y) &= 1 - \mathbf{E}(Y). \end{aligned}$$

D'où $$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{2}.$$

32.a)

```
def simu_yn():
    x=rd.random()<(1/2)
    return 2*x-1
```

32.ab)

```
def simu_kn(n):
    s=0
    for i in range(n):
        s+=simu_yn()
    return s/n
```

33. Plus n est grand, plus l'histogramme obtenu à partir de la loi de K_n/n se confond avec la densité de Y. On s'attend donc à pouvoir approximer la loi de K_n/n par la loi de Y.

Exercice 4

34. On trouve $\mathbf{E}(X)$ car

$$\int_{x_1}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \mathbf{E}(X)$$

et $$\int_{x_1}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$$

35. Ici on considère $x_1 = x_m$ et à l'aide des intégrales de Riemann, X admet une espérance si et seulement si

$$\alpha > 1.$$

36. Soit $x \in]x_m;+\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} t f(t)\,dt &= \alpha {x_m}^\alpha \int_x^{+\infty} t^{-\alpha}\,dt \\ &= \alpha {x_m}^\alpha \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_x^{+\infty} = \frac{\alpha {x_m}^\alpha}{\alpha-1}\cdot x^{1-\alpha} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} f(t)\,dt &= \alpha {x_m}^\alpha \int_x^{+\infty} t^{-(\alpha+1)}\,dt \\ &= \alpha {x_m}^\alpha \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_x^{+\infty} = {x_m}^\alpha x^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi $$\mu_X(x) = \frac{\alpha x_m^\alpha}{\alpha-1} x^{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x_m^\alpha x^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\cdot x.$$

On pose donc

$$\lambda = \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{(\alpha-1)+1}{\alpha-1} = 1 + \frac{1}{\alpha-1} > 1.$$

Ce qui conclut.

37. Soit $x_2 \in]x_1,+\infty[$ de sorte que (relation de Chasles)

$$\forall x > x_1,\quad F(x) = -\int_{x_2}^x f(t)\,dt + \underbrace{\int_{+\infty}^{x_2} f(t)\,dt}_{=\text{Cste}}$$

Or, d'après le théorème fondamentale de l'analyse, la fonction

$$x \in]x_1;+\infty[\mapsto \int_{x_2}^x f(t)\,dt$$

est la primitive de f qui s'annule en x_2. On en déduit que F est dérivable sur $]x_1,+\infty[$ avec

$$F' = -f.$$

- De même, on montre que G est dérivable sur $]x_1,+\infty[$ avec :

$$\forall x \in]x_1;+\infty[,\qquad G'(x) = -xf(x) = -xF'(x)\quad (\bullet)$$

- Par hypothèse, on a aussi

$$\forall x \in]x_1;+\infty[,\qquad \mu_X(x) = \frac{G(x)}{F(x)} = \lambda x.$$

Soit $G(x) = \lambda x F(x)$, puis par dérivation

$$G'(x) = \lambda F(x) + \lambda x F'(x)$$

et en utilisant $(\bullet)$

$$-xF'(x) = \lambda F(x) + \lambda x F'(x).$$

D'où la relation demandée.

38.a) La fonction H est dérivable sur $]x_1;+\infty[$ par produit et pour tout $x \in]x_1;+\infty[$

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(x)x^{\lambda/(\lambda-1)} + F(x)\frac{\lambda}{\lambda-1}x^{\lambda/(\lambda-1)-1} \\ &= \frac{x^{\lambda/(\lambda-1)-1}}{\lambda-1}\underbrace{\big((\lambda-1)xF'(x)+\lambda F(x)\big)}_{=0\quad (\text{q.37})} \\ H'(x) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi H est constante sur l'intervalle $]x_1;+\infty[$.

38.b) Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]x_1;+\infty[,\qquad H(x) = c.$$

Soit $$F(x) = cx^{-\frac{\lambda}{\lambda-1}}.$$

Avec $F(x_1) = \lim_{x \to x_1^+} F(x) = 1$, on obtient par passage à la limite

$$c x_1^{-\lambda/(\lambda-1)} = 1.$$

Finalement,

$$\forall x \in]x_1 ; +\infty[, \quad F(x) = \left(\frac{x_1}{x}\right)^{\lambda/(\lambda-1)}.$$

Or

$$f(x) = -F'(x) = \frac{\lambda}{\lambda-1} x_1^{\lambda/(\lambda-1)} \cdot (x)^{-\lambda/(\lambda-1)+1}$$

39. Résumons : → Pour $x \in]-\infty ; x_1]$, on a

$$f(x) = 0.$$

→ En posant $\alpha = \lambda/(\lambda-1)$, on a pour tout $x \in]x_1 ; +\infty[$

$$f(x) = \alpha \frac{x_1{}^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}.$$

Comme la densité caractérise la loi, on obtient une loi de Pareto de paramètres

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}, x_1\right).$$

40.a) On montre qu'une densité de Y est :

$$f_Y : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t-c).$$

Notons que Y vérifie les conditions de l'exercice et pour tout $x > x_1 + c$

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} t f_Y(t)\,dt &= \int_x^{+\infty} t f(t-c)\,dt \\ &= \int_{x-c}^{+\infty} (u+c) f(u)\,du \quad (u = t-c) \\ &= \int_{x-c}^{+\infty} u f(u)\,du + c\int_{x-c}^{+\infty} f(u)\,du.\end{aligned}$$

et $\displaystyle\int_x^{+\infty} f_Y(t)\,dt = \int_x^{+\infty} f(t-c)\,dt = \int_{x-c}^{+\infty} f(u)\,du.$

D'où pour $x > x_1 + c$

$$\begin{aligned}\mu_Y(x) &= \frac{\int_x^{+\infty} t f_Y(t)\,dt}{\int_x^{+\infty} f_Y(t)\,dt} = \frac{\int_{x-c}^{+\infty} u f(u)\,du + c\int_{x-c}^{+\infty} f(u)\,du}{\int_{x-c}^{+\infty} f(u)\,du} \\ &= \frac{\int_{x-c}^{+\infty} u f(u)\,du}{\int_{x-c}^{+\infty} f(u)\,du} + c\end{aligned}$$

$$\mu_Y(x) = \mu_X(x-c) + c.$$

40.c) Avec les hypothèses

$$\mu_Y(x) = \mu + \lambda(x-c) + c = \lambda x + c(1-\lambda) + \mu.$$

On choisit

$$c = \frac{\mu}{\lambda-1}$$

pour avoir $\mu_Y(x) = \lambda x$.

40.d) D'après les questions précédentes, on sait que Y suit une loi de Pareto de paramètres

$$\left(\underbrace{\frac{\lambda}{\lambda-1}}_{:=\alpha}, x_1 + c\right) \quad \text{avec} \quad c = \frac{\mu}{\lambda-1}.$$

or on sait que

$$f_Y : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t-c).$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f_Y(x+c).$$

on en déduit que X est à densité et une densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \alpha \dfrac{(x_1+c)^{\alpha}}{(x+c)^{\alpha+1}} \text{si } x > x_1 \\ 0 \text{sinon.} \end{cases}$$

Une 4ème partie possible à l'exercice 3 :

- **Construction d'un intervalle de confiance**

On s'intéresse, dans cette question, au comportement asymptotique d'un échantillonnage de même loi que X.
Pour cela, on considère un entier naturel n non nul ainsi qu'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ formé par n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
On introduit la *moyenne empirique*

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

1. Calculer l'espérance et la variance de M_n.
2. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. En déduire, en fonction de n, de l'espérance et de la variance de X, un intervalle $[a_n, b_n]$ tel que

$$\mathbf{P}\big(M_n \in [a_n, b_n]\big) \geqslant 95\%.$$

DS 3* - solution

Exercice 1

1. À l'aide de la relation de Chasles, on a pour $k \in \mathbb{N}$

$$\Phi(k+1)-\Phi(k) = \int_{-\infty}^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{k} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{k}^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où par croissance de l'intégrale et par décroissance de φ sur $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\Phi(k+1)-\Phi(k) &\leqslant \int_{k}^{k+1} \varphi(k)\,\mathrm{d}t = \varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-k^2/2}\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{k^2}.\end{aligned}$$

La seconde inégalité découle du fait que $\sqrt{\mathrm{e}} > 1$ et

$$(\sqrt{\mathrm{e}})^{k^2} \geqslant \sqrt{\mathrm{e}}^{k} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{k^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{k}.$$

- Ensuite, on utilise la croissance de Φ pour avoir

$$\Phi(k+x) \leqslant \Phi(k+1) \quad \text{et} \quad \Phi(k-x) \geqslant \Phi(k-1),$$

Ce qui donne pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}&\Phi(k+x)-\Phi(k-x)\\ \leqslant&\Phi(k+1)-\Phi(k-1)\\ \leqslant&\big(\Phi(k+1)-\Phi(k)\big)-\big(\Phi(k)-\Phi(k-1)\big)\\ \leqslant&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{k}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{k-1}\\ \leqslant&2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{k}.\end{aligned}$$

La seconde inégalité est prouvée.

2. La fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ donc pour $x \in [0;1]$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant k-1 \leqslant k-x \leqslant k+x$$

et

$$\varphi(k+x)+\varphi(k-x) \leqslant 2\varphi(k-1) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{(k-1)^2}$$

De nouveau, la condition $\sqrt{\mathrm{e}} > 1$ donne

$$\varphi(k+x)+\varphi(k-x) \leqslant 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^{(k-1)}.$$

3.a) Posons $q = 1/\sqrt{\mathrm{e}}$ de sorte que pour tout $x \in [0;1]$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leqslant \varphi(k+x)+\varphi(k-x) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,q^{k-1}$$

Comme $q \in]-1;1[$, la série géométrique $\sum q^k$ converge. Par le critère de comparaison, la série

$$\sum \varphi(k+x)-\varphi(k-x)$$

converge.

- La justification pour H est identique.

3.b) En écrivant que

$$\Phi(k+1)-\Phi(k-1) = \big(\Phi(k+1)-\Phi(k)\big)+\big(\Phi(k)-\Phi(k-1)\big),$$

on obtient par télescopage

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \Phi(k+1)-\Phi(k-1)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \Phi(k+1)-\Phi(k)+\sum_{k=1}^{+\infty} \Phi(k)-\Phi(k-1)\\ &= \lim_{n\to+\infty} \Phi(n+1)-\Phi(1)+\lim_{n\to+\infty} \Phi(n+1)-\Phi(0).\end{aligned}$$

Sachant que Φ est une fonction de répartition, sa limite est $+\infty$ est 1. De plus, par parité de la densité φ, $\Phi(0) = 1/2$. On obtient alors

$$\mathrm{H}(1) = \frac{3}{2}-\Phi(1).$$

4.a) La fonction $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto (t+1)^2\varphi'(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (par produit et composition) et de limite nulle en $+\infty$ (par les croissances comparées). Elle est donc bornée :

$$\exists \mathrm{K} \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \left|(t+1)^2\varphi'(t)\right| \leqslant \mathrm{K}.$$

D'où le résultat.

4.b) Posons pour k fixé

$$f : t \in [-1;1] \longmapsto \Phi(k+t).$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ (car Φ l'est) avec pour $t \in [-1;1]$.

$$f'(t) = \varphi(k+t) \quad \text{et} \quad f''(t) = \varphi'(k+t).$$

Avec la question précédente

$$\left|f''(t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{K}}{(t+k+1)^2} \leqslant \frac{\mathrm{K}}{k^2}.$$

La formule de Taylor-Lagrange s'applique : on obtient pour $x, y \in [-1;1]$

$$\left|f(x)-f(y)-f'(x)(x-y)\right| \leqslant \frac{\mathrm{M}(x-y)^2}{2}$$

où $\quad \mathrm{M} = \max_{r\in[x;y]\cup[y,x]} \left|f''(r)\right| \leqslant \max_{r\in[-1;1]} \left|f''(r)\right| \leqslant \frac{\mathrm{K}}{k^2}.$

Dès lors $\widetilde{K} = K/2$ donne le résultat.

5. Notons que l'on a aussi (car $x, y \in [-1;1]$)

$$|\Phi(k-x) - \Phi(k-y) + (x-y)(-\varphi(k-x))| \leqslant \frac{tilde K(x-y)^2}{k^2}.$$

Dès lors par inégalité triangulaire (toutes les sommes considérées sont convergentes)

$$\begin{aligned}
&|H(x) - H(y) - (x-y)h(x)| \\
=&\Big|\sum_{k=1}^{+\infty} \Phi(k+x) - \Phi(k-x) - \Phi(k+y) + \Phi(k-y) + \\
&(x-y)\big(\varphi(x+k) - \varphi(x-k) - \varphi(y+k) + \varphi(y-k)\big)\Big| \\
\leqslant& \sum_{k=1}^{+\infty} \Big|\Phi(k+x) - \Phi(k+y) + (x-y)\varphi(k+x)\Big| \\
&+ \sum_{k=1}^{+\infty} \Big|\Phi(k-x) - \Phi(k-y) + (x-y)(-\varphi(k-x))\Big| \\
\leqslant& \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\widetilde{K}}{k^2}(x-y)^2.
\end{aligned}$$

Si on pose $C = 2\widetilde{K}\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^2$, on a bien

$$\Big|H(x) - H(y) - (x-y)h(x)\Big| \leqslant C(x-y)^2.$$

6. Soit $x \in [-1;1]$. Soit $y \in [-1;1]$ avec $y \neq x$. En divisant par $|x-y| > 0$, on a

$$\left|\frac{H(x) - H(y)}{x-y} - h(x)\right| \leqslant C|x-y|.$$

Par encadrement, on a alors

$$\frac{H(x) - H(y)}{x-y} \underset{y\to x}{\longrightarrow} h(x).$$

Par définition du nombre dérivé, H est dérivable en x avec $H'(x) = h(x)$. On conclut en précisant que ce résultat est valable pour tout $x \in [0;1]$.

7. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1

$$\begin{aligned}
|H(x) - H_N(x)| &\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} |\Phi(k+x) - \Phi(k-x)| \\
&\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} q^{k-1} \text{ où } q = \sqrt{e}^{-1} \\
&\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} q^{\ell+N} \quad \ell = k-(N+1) \\
&\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} q^N \cdot \sum_{\ell=0}^{+\infty} q^{\ell} \\
|H(x) - H_N(x)| &\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q^N}{1-q}.
\end{aligned}$$

On cherche un entier N tel que

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1-q} q^N \leqslant 10^{-3}.$$

Soit $$q^N \leqslant 10^{-3}(1-q)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leqslant 10^{-3}.$$

Par passage au logarithme strictement croissant

$$N \ln q \leqslant \ln\left(10^{-3}\right) \iff N \geqslant \frac{3\ln(10)}{|\ln q|} = \frac{3\ln 10}{1/2}.$$

Un entier N suffisant est alors

$$N = \lfloor 6\ln 10 \rfloor + 1$$

L'application numérique donne $N \geqslant 14$.

8.

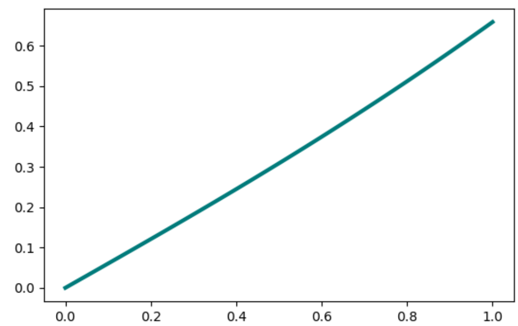
```
def uk(x,k):
    return ss.norm.cdf(x+k, 0, 1)-ss.norm.
        cdf(k-x, 0, 1)

def HN(x,N):
    s=0
    for k in range(1,N+1):
        s+=uk(x,k)
    return s
```

9.

```
N=14
x=np.linspace(0,1,100)
y=np.zeros(100)
for i in range(100):
    y[i]=  HN(x[i],N)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

On obtient le (triste) graphe suivant :



10. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(B = k) &= \mathbf{P}(\lfloor A \rfloor = k) \\
&= \mathbf{P}(k \leqslant A < k+1) \\
&= \mathbf{P}(k < A \leqslant k+1) \quad \text{(A est à densité)} \\
&= F_A(k+1) - F_A(k). \\
\mathbf{P}(B = k) &= \int_k^{k+1} f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

11. On sait par définition de la partie entière et positivité de A que :

$$0 \leqslant A \leqslant B+1 \quad (1)$$
$$0 \leqslant B \leqslant A \quad (2)$$

Si A admet une espérance, avec (2) et le théorème domination, B admet aussi une espérance et

$$\mathbf{E}(B) \leqslant \mathbf{E}(A).$$

Si B admet une espérance, (1) prouve l'existence d'une espérance pour A avec

$$\mathbf{E}(A) \leqslant \mathbf{E}(B+1) = \mathbf{E}(B)+1.$$

Ce qui conclut.

12. On montre (exercice classique) avec la relation de la question 10 que si $A \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ alors

$$B+1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1-e^{-\lambda}\right).$$

Ainsi $$\mathbf{E}(B) = \mathbf{E}(B+1)-1 = \frac{1}{1-e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}.$$

et $$\mathbf{E}(A) = \tfrac{1}{\lambda}.$$

On obtient $$\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}} \leqslant \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1}{1-e^{-\lambda}}.$$

Encadrement que l'on retrouve plus simplement en partant de l'inégalité de convexité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \geqslant 1+x.$$

13.

```python
def simu_y():
    t=np.sum(rd.random(12))-6
    return np.floor(t)

def simu_z():
    t=np.sum(rd.random(12))-6
    return np.floor(np.abs(t))
```

14.a) On a

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}.$$

D'où $$(n+1)s_{n+1} = n s_n + x_{n+1}.$$

On en déduit en divisant par $n+1$

$$s_{n+1} = \frac{n}{n+1} s_n + \frac{x_{n+1}}{n+1}.$$

14.b) Les réels $(x_i)_{i \in [\![1;500]\!]}$ correspondent à un échantillon construit à partir de la loi de Y. Les moyennes empiriques (données par les réels s_n) semblent tendre vers $-1/2$. En accord avec la loi faible des grands nombres, on conjecture que Y admet une espérance et que cette dernière vaut $-1/2$.

15. On a $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Soit G la fonction de répartition de X.

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^-, \qquad G(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x) = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbf{P}(X \leqslant x) = \mathbf{P}(|T| \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(-x \leqslant T \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(-x < T \leqslant x) \quad \text{(T à densité)} \\ G(x) &= \Phi(x) - \Phi(-x). \end{aligned}$$

Expression que l'on peut simplifier par $2\Phi(x)-1$ car

$$\Phi(x)+\Phi(-x) = 1.$$

La fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (car constante sur $\mathbb{R}_*^-$ et par différence et composition sur $\mathbb{R}_*^+$). En particulier G est continue sur $\mathbb{R}^*$.

→ *Étude en* 0

La fonction G est continue à droite en 0^+ en tant que fonction de répartition. De plus

$$\lim_{x \to 0^-} G(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 = G(0).$$

On en déduit la continuité à gauche en 0 puis la continuité en 0.

En résumé, G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$. La variable X est à densité et une densité est obtenue par dérivation (là où cela est possible). Or

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \Phi'(x) - \left(-\Phi'(-x)\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Sachant que $\Phi' = \varphi$ est paire, une densité est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\varphi(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

- *Espérance*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} t2\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left[-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right]_0^{+\infty} \\ \mathbf{E}(X) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

- *Variance*

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbf{E}\left(X^2\right) = \mathbf{E}\left(|T|^2\right) = \mathbf{E}\left(T^2\right) - 0 = \mathbf{E}\left(T^2\right) - \mathbf{E}^2(T) = \mathbf{V}(T) = 1$$

d'où $$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

16.a) La variable Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ puisque X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = k) &= \mathbf{P}(\lfloor X \rfloor = k) \\ &= \mathbf{P}(k \leqslant X < k+1) = \int_k^{k+1} 2\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ \mathbf{P}(Z = k) &= 2\left(\Phi(k+1) - \Phi(k)\right). \end{aligned}$$

16.b) La variable $Y = \lfloor T \rfloor$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ avec pour $k \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(\lfloor T \rfloor = k) = \mathrm{P}(k \leqslant T < k+1) = \int_k^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où $$\mathbf{P}(Y = k) = \Phi(k+1) - \Phi(k).$$

17. *Rédaction 1. Preuve de l'existence*

Adaptons l'argument de la question 11 au cas non positif. On a

$$|Y| \leqslant |\lfloor T \rfloor| \leqslant |T|+1.$$

Sachant que T admet une espérance, on prouve par domination que Y admet aussi une espérance.

> On peut aussi partir du théorème de transfert et justifier la convergence de la série
>
> $$\sum k\mathbf{P}(Y=k) = \sum k\big(\Phi(k+1)-\Phi(k)\big)$$
>
> à l'aide de la question 1.

- *Rédaction 2. Existence et calcul*
- À l'aide de la remarque de l'énoncé

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\big(\mathbf{P}(Y=k)-\mathbf{P}(Y=-k)\big).$$

Revenons aux sommes partielles pour le calcul afin d'éviter d'éventuels problèmes de convergence.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} k(\mathbf{P}(Y=k)-\mathbf{P}(Y=-k))\\
&= \sum_{k=1}^{n} k(\Phi(k+1)-\Phi(k)-(\Phi(-k+1)-\Phi(-k)))\\
&= \sum_{k=1}^{n} k(\Phi(k+1)-\Phi(k)-(1-\Phi(k-1)-(1-\Phi(k))))\\
&= \sum_{k=1}^{n} k(\Phi(k+1)-\Phi(k)+\Phi(k-1)-\Phi(k))\\
&= \sum_{k=1}^{n} k(\Phi(k+1)-2\Phi(k)+\Phi(k-1))\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\Phi(k+1)-2\sum_{k=1}^{n} k\Phi(k)+\sum_{k=1}^{n} k\Phi(k-1)\\
&= \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\Phi(k)-2\sum_{k=1}^{n} k\Phi(k)+\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\Phi(k)\\
&= \sum_{k=1_1}^{n} (k-1)\Phi(k)+n\Phi(n+1)-2\sum_{k=1}^{n} k\Phi(k)\\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} (k+1)\Phi(k)+\Phi(0)-(n+1)\Phi(n)\\
&= \sum_{k=1}^{n} ((k-1)-2k+(k+1))\Phi(k)+n\Phi(n+1)+\Phi(0)-(n+1)\Phi(n)\\
&= n(\Phi(n+1)-\Phi(n))+\Phi(0)-\Phi(n).
\end{aligned}$$

Or d'après la question 1 :

$$0 \leqslant n(\Phi(n+1)-\Phi(n)) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n.$$

On en déduit par encadrement et les croissances comparées

$$n\big(\Phi(n+1)-\Phi(n)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De plus, on sait que $\Phi(0) = 1/2$ et $\Phi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. On peut donc passer à la limite et obtenir

$$\mathbf{E}(Y) = 0+\frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}.$$

Résultat qui est bien cohérent avec la simulation de la question 14.

> Notons qu'en revenant une somme partielle dans la rédaction 2, on prouve en même temps le calcul et l'existence. La rédaction 1 (bien qu'intéressante) est superflue.

18. C'est une conséquence directe de la question 11.

19. On a $U(\Omega) = [0;1[$ puisque par définition de la partie entière

$$\lfloor T \rfloor \leqslant Y < \lfloor T \rfloor + 1$$

et comme T peut prendre toutes les valeurs réelles, toutes les valeurs de $[0;1[$ sont bien atteintes.

Soit $u \in [0;1[$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y=k])_{k\in\mathbb{Z}}$, on a

$$\begin{aligned}
F_U(u) &= \mathbf{P}(U \leqslant u)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}([U \leqslant k] \cap [Y=k])\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}([T-k \leqslant u] \cap [k \leqslant T < k+1])\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}(k \leqslant T \leqslant k+u) \quad (u \in [0;1[)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi(k+u)-\Phi(k) \quad \text{T à densité}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \Phi(k+u)-\Phi(k) + \underbrace{\Phi(u)-\Phi(0)}_{k=0}\\
&\qquad + \sum_{k=1}^{+\infty} \Phi(-k+u)-\Phi(-k)\\
F_U(u) &= \Phi(u)-\frac{1}{2}\\
&\qquad + \sum_{k=1}^{+\infty} (\Phi(k+u)+\Phi(-k+u)-(\Phi(k)+\Phi(-k)).
\end{aligned}$$

Or $$\Phi(k)+\Phi(-k) = 1$$

et $$\Phi(-k+u)-1 = -\Phi(-u+k).$$

Ce qui conclut.

20. La somme se calcule par télescopage

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(U \leqslant \frac{1}{2}\right) &= \Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\Phi\left(k+\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\Phi\left((k+1)-\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+\lim_{n\to+\infty}\left(\Phi\left(n+\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2}+\lim_{n\to+\infty}\Phi\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
\mathbf{P}\left(U \leqslant \frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2}+\lim_{n\to+\infty}\Phi\left(n+\frac{1}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}+1\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

21. Avec les notations du préliminaire

$$\forall u \in [0;1[, \qquad F_U(u) = \Phi(u) - \frac{1}{2} + H(u).$$

On sait aussi que

$$F_U(u) = 0 \text{ si } u < 0 \quad \text{et} \quad F_U(u) = 1 \text{ si } u \geqslant 1.$$

La fonction F_U est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et $]1;+\infty[$ car constante et $\mathscr{C}^1$ sur $]0;1[$ car H l'est (résultat admis en fin de partie I).

→ *Étude en 1*
La fonction F_U est continue à droite en 1 en tant que fonction de répartition. D'où

$$\lim_{u\to 1^+} F_U(u) = F_U(1) = 1.$$

Par continuité de H et Φ en 1,

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 1^-} F_U(u) &= \lim_{u\to 1^-} \Phi(u) - \frac{1}{2} + H(u)\\
&= \Phi(1) - \frac{1}{2} + H(1)\\
&= \Phi(1) - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \Phi(1) \quad \text{(question 3.b)}\\
\lim_{u\to 1^-} F_U(u) &= F_U(1).
\end{aligned}$$

D'où la continuité en 1.
Il en va de même de la continuité en 0.

Résumons : F_U est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ et continue sur $\mathbb{R}$. La variable U est à densité et une densité est donnée par dérivation (là ou cela est possible). Or

$$\forall u \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}, \qquad F_U'(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \notin [0;1]\\ \Phi'(u) + H'(u) & \text{si } u \in]0;1[.\end{cases}$$

On a donc une densité par

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \theta(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \notin [0,1]\\ \varphi(u) + h(u) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ce qui conclut.

22.a) On a

$$\begin{aligned}
d &:= \Phi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \Phi(k) - \frac{\Phi(k+1)-\Phi(k)}{2}\\
&= -\frac{\Phi(k+1) - \Phi\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{\Phi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \Phi(k)}{2}.
\end{aligned}$$

D'après l'égalité des accroissements finis sur la fonction Φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\begin{aligned}
&\exists t_1 \in \left]k;k+\tfrac{1}{2}\right[\qquad \frac{\Phi\left(k+\frac{1}{2}\right)-\Phi(k)}{1-1/2} = \Phi'(t_1)\\
&\exists t_2 \in \left]k+\tfrac{1}{2};k\right[, \qquad \frac{\Phi(k+1)-\Phi\left(k+\frac{1}{2}\right)}{1-1/2} = \Phi'(t_2).
\end{aligned}$$

Or $\Phi' = \varphi$ est décroissement strictement sur $\mathbb{R}^+$

$$t_1 < t_2 \quad \text{donne} \quad \varphi'(t_1) > \varphi'(t_2)$$

puis $\qquad d = -\Phi'(t_2) + \Phi'(t_1) > 0.$

Ce qui donne la première inégalité.

- On a avec le système complet $([Y=k])_{k\in\mathbb{Z}}$ et la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\left[U<\frac{1}{2}\right]\cap[T\geqslant 0]\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}\left(\left[U<\frac{1}{2}\right]\cap[T\geqslant 0]\cap[Y=k]\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left[U<\frac{1}{2}\right]\cap[Y=k]\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\left[T\leqslant\frac{1}{2}+k\right]\cap[\lfloor T\rfloor=k]\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(k\leqslant T\leqslant k+\frac{1}{2}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi\left(k+\frac{1}{2}\right) - \Phi(k)\\
&> \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \Phi(k+1) - \Phi(k)\\
\mathbf{P}\left(\left[U<\frac{1}{2}\right]\cap[T\geqslant 0]\right) &> \frac{\Phi(0)}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtenant par télescopage.

22.b) Non car

$$\mathbf{P}\left(\left[U<\frac{1}{2}\right]\cap[T\geqslant 0]\right) > \frac{1}{4}$$

et $\qquad \mathbf{P}\left(U<\frac{1}{2}\right)\mathbf{P}(T\geqslant 0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

Il n'y a pas égalité.

23. En utilisant les résultats sur les sommes géométriques, on a

$$\begin{aligned}
|\theta(x) - \theta_n(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\varphi(k+x)+\varphi(k-x)\right)\right|\\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi(k+x)+\varphi(k-x)\\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{k-1} \qquad \text{question 2}\\
&\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{e}}}\\
|\theta(x) - \theta_n(x)| &\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n} \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}.
\end{aligned}$$

24. On a par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(T-Y) = \mathbf{E}(T) - \mathbf{E}(Y) = \frac{1}{2}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}(\mathrm{U})-\int_0^1 t\theta_n(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 t\theta(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 t\theta_n(t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &= \left|\int_0^1 t\big(\theta(t)-\theta_n(t)\big)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_0^1 t\,|\theta(t)-\theta_n(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^1 t\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}-1}\,\mathrm{d}t\\ \left|\mathbf{E}(\mathrm{U})-\int_0^1 t\theta_n(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n\frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}-1}\,\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Il vient par encadrement

$$\int_0^1 t\theta_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{E}(\mathrm{U}).$$

25. On a $kb_k \geqslant 0$ par positivité de φ.

$$a_k - kb_k = \int_k^{k+1} \underbrace{(t-k)}_{\geqslant 0}\underbrace{\varphi(t)}_{\geqslant 0}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

D'où $\qquad 0 \leqslant kb_k \leqslant a_k.$

Enfin, T admet une espérance, En particulier, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

converge. En tant que reste, on a

$$0 \leqslant a_k \leqslant \int_k^{k+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[k\to 0]{} 0.$$

Par encadrement $\qquad a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$

les autres limites s'en déduisent.

26. Vérifier que

$$\int_0^1 t\theta_n(t)\,\mathrm{d}t = a_n - b_n + \Phi(n) - \frac{1}{2}.$$

On retrouve bien $\mathbf{E}(\mathrm{U}) = 1/2$ par passage à la limite $n \to +\infty$.

27. Soient f, g deux densités de X avec les mêmes propriétés. À savoir, nulles sur $]-\infty, 0]$ et continues sur $]0;+\infty[$.
Raisonnons par l'absurde en supposant $f \neq g$. Comme f et g sont égales sur $\mathbb{R}^-$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Les deux fonctions diffèrent seulement en un nombre fini de points, donc il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tel que

$$\forall x \in]x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon[\setminus \{x_0\} \quad f(x) = g(x).$$

Par passage à la limite $x \mapsto x_0$ en utilisant la continuité de f et g, on obtient

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Absurde. En conclusion $f = g$.

28.a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Soit $h \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{[\mathrm{X}>x]}(\mathrm{X} \leqslant x+h) &= \frac{\mathbf{P}(x < \mathrm{X} \leqslant x+h)}{\mathbf{P}(\mathrm{X} > x)}\\ &= \frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{1-\mathrm{F}(x)}.\end{aligned}$$

or F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ avec $\mathrm{F}' = f$. Par définition du nombre dérivé à l'aide du taux d'accroissement

$$\frac{\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \mathrm{F}'(x) = f(x).$$

Ce qui conclut (par produit) sur l'existence de $\varphi(x)$ et l'égalité

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\mathrm{F}(x)}.$$

28.b) Soient $x \in \mathbb{R}^+$. La fonction φ est continue sur $]0;x]$, $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est donc une intégrale généralisée en 0.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^x \frac{\mathrm{F}'(t)}{1-\mathrm{F}(t)}\,\mathrm{d}t &= \big[-\ln(1-\mathrm{F}(t))\big]_\varepsilon^x\\ &\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} -\ln\big(1-\mathrm{F}(x)\big)\end{aligned}$$

car par continuité de F (à droite) :

$$\mathrm{F}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \mathrm{F}(0) = \mathbf{P}(\mathrm{X} \leqslant 0) = \mathbf{P}(\mathrm{X} < 0) = 0.$$

(X est à densité).
On en déduit en inversant la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \mathrm{F}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t}.$$

29. On a $\mathbf{P}(\mathrm{X} > x) \geqslant 0$ par définition d'une probabilité. S'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\mathbf{P}(\mathrm{X} > x) = 0.$$

On aurait $\qquad \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

avec f continue sur $[x;+\infty[$ et positive. On en déduirait que f est nulle sur $[x;+\infty[$. Absurde par hypothèse. En conclusion, X vérifie $(\star)$.

30. Si $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, on considère la densité

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0\\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{sinon.}\end{cases}$$

La densité est nulle sur $]-\infty;0]$, continue sur $]0;+\infty[$ et strictement positive sur $]0;+\infty[$. D'après la question précédente, Z vérifie $(\star)$.
Dans ce cas, pour $t \in \mathbb{R}_*^+$

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{1-\mathrm{F}(t)} = \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1-\big(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\big)} = \lambda.$$

Le taux de panne est constant, la constante vaut le paramètre de la loi exponentielle.

Résultat en accord avec une propriété du cours : la loi exponentielle est une loi sans mémoire. Il n'y pas de phénomènes d'usure, le taux de panne est constant.

31. On suppose donc qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall t\in\mathbb{R}_*^+,\qquad \lambda=\varphi(t)=\frac{f(t)}{1-\mathrm{F}(t)}.$$

- *Rédaction 1.*

D'après la question 28.b), on a directement pour tout $x\in\mathbb{R}^*$

$$\mathrm{F}(x)=1-\mathrm{e}^{-\int_0^x\lambda\,\mathrm{d}t}=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

De plus, $\mathrm{F}(x)=0$ pour $x<0$.
On constate que F est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, $\mathrm{X}\hookrightarrow\mathscr{E}(\lambda)$.

- *Rédaction 2 (sans la 28)*

Le taux constant permet de justifier que $\mathrm{G}=1-\mathrm{F}$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\qquad \mathrm{G}'(x)+\lambda\mathrm{G}(x)=0.$$

Posons $\mathrm{H}:x\in\mathbb{R}_*^+\mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{G}(x)$ de sorte que H soit dérivable par produit avec pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$

$$\mathrm{H}'(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{G}'(x)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{G}(x)=0.$$

La fonction H est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_*^+$: il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\qquad \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{G}(x)\mathrm{H}(x)=c,\quad \mathrm{G}(x)=c\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

La condition $\mathrm{G}(0)=1$, donne $c=1$ puis

$$\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\qquad \mathrm{F}(x)=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Les équations différentielles ne sont pas au programme en ECG. Toutefois, elles peuvent intervenir dans certains problèmes. On pourra retenir l'astuce de poser la fonction H.

32.a) La fonction $\psi_{\beta,\eta}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{\eta,\beta}(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}dt\\&=\int_0^{+\infty}\beta\mathrm{e}^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u^{\beta}}du\quad\text{(en posant }u=\frac{t}{\eta}\text{)}\\&=\left[-\mathrm{e}^{-u^{\beta}}\right]_0^{+\infty}.\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{\eta,\beta}(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

32.b) Pour tout $t\geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t)&=\int_t^{+\infty}\psi_{\beta,\eta}(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_{\frac{t}{\eta}}^{+\infty}\beta u^{\beta-1}\mathrm{e}^{-u^{\beta}}\,\mathrm{d}u\\ \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t)&=\left[-\mathrm{e}^{-u^{\beta}}\right]_{\frac{t}{\eta}}^{+\infty}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\qquad\forall t\geqslant 0,\qquad \mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{\eta}^{\beta}}$

et donc $\qquad\varphi(t)=\dfrac{\psi_{\beta,\eta}(t)}{\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t)}=\dfrac{\beta}{\eta}\left(\dfrac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}.$

32.c) On distingue trois cas :

- Si $\beta\geqslant 1$, on a $\beta-1\geqslant 0$ et donc

$$\varphi(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty.$$

- Si $\beta=1$, le taux est constant (on retrouve le cas d'une loi exponentielle) et

$$\varphi(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\frac{\beta}{\eta}.$$

- Si $\beta<1$, on a

$$\varphi(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

La loi de Weibull dans le cas $\beta>1$ généralise en un sens la loi exponentielle, elle peut justement être utilisée pour modéliser le temps de vie d'un système en prenant en compte le phénomène d'usure avec un taux de panne qui augmente bien avec le temps.

33. On s'appuie sur la loi faible des grands nombres :

```
def proba_cond(x,h,nu):
    m=200000
    s=0
    c=0
    for i in range(m):
        X=rd.gamma(nu)
        if X>x:
            c+=1
            if X<x+h:
                s+=1
    return s/c
```

34. On a vu que

$$\varphi(x)=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\mathbf{P}_{[\mathrm{X}>x]}(\mathrm{X}\leqslant x+h).$$

On s'attend donc que pour h "relativement petit" (ici $h=10^{-3}$), on ait

$$\varphi(x)\simeq\frac{1}{h}\mathbf{P}_{[\mathrm{X}>x]}(\mathrm{X}\leqslant x+h).$$

Ce qui explique le code en supposant que $\mathrm{X}\hookrightarrow\gamma(\mathtt{nu})$.

- Oui, c'est cohérent car

$$\gamma(1)=\mathscr{E}(1)$$

et d'après la question 30, le taux de panne est constant dans le cas d'une loi exponentielle.

35. Soit $\mathrm{A}\in\mathbb{R}^+$. Par intégration par parties (les fonctions considérées sont $\mathscr{C}^1$)

$$\begin{aligned}\int_0^{\mathrm{A}}\mathrm{G}_{\mathrm{Z}}(t)\,\mathrm{d}t&=\int_0^{\mathrm{A}}1-\mathrm{F}_{\mathrm{Z}}(t)\,\mathrm{d}t\\&=\left[t\big(1-\mathrm{F}_{\mathrm{Z}}(t)\big)\right]_0^{\mathrm{A}}-\int_0^{\mathrm{A}}t\big(-f_{\mathrm{Z}}(t)\big)\,\mathrm{d}t\\&=\mathrm{A}\big(1-\mathrm{F}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{A})\big)+\int_0^{\mathrm{A}}tf_{\mathrm{Z}}(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Par hypothèse, Z a une espérance et

$$\int_0^{\mathrm{A}}tf_{\mathrm{Z}}(t)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{}\mathbf{E}(\mathrm{Z}).$$

De plus

$$0 \leqslant A(1-F(A)) \leqslant A\int_A^{+\infty} f_Z(t)\,dt \leqslant \int_A^{+\infty} t f_Z(t)\,dt.$$

Comme Z a une espérance, le reste existe et tend vers 0

$$\int_A^{+\infty} t f_Z(t)\,dt \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

et par encadrement $A(1-F(A)) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$.
Par passage à la limite $A \to +\infty$ dans la première relation, on a la convergence et l'égalité

$$\mathbf{E}(Z) = \int_0^{+\infty} G_Z(t)\,dt.$$

36. Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} G_{X_t}(x) &= \mathbf{P}_{[X>t]}(X > x+t) \\ &= \frac{\mathbf{P}(X > x+t)}{\mathbf{P}(X>t)} = \frac{G_X(x+t)}{G_X(t)}. \end{aligned}$$

À l'aide de la question précédente

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_t) &= \int_0^{+\infty} G_{X_t}(u)\,du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{G_X(u+t)}{G_X(t)}\,du \\ &= \frac{1}{G_X(t)}\int_0^{+\infty} G_x(u+t)\,du. \end{aligned}$$

On conclut avec le changement de variable affine $u \to u+t$.

37. Comme $\Phi' = \varphi$ est positive, φ est croissante. De plus, on a vu que (28.b)

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \qquad \Phi(x) = -\ln G_X(x).$$

D'où par composition :

$$\begin{cases} G_X(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+ \\ -\ln u \xrightarrow[u\to 0^+]{} +\infty \end{cases} \quad \text{d'où } \Phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

38.a) Notons que l'inégalité proposée est équivalente à

$$\Phi(x+y) \geqslant \Phi(x) + \Phi(y).$$

Or par la relation de Chasles puis par un changement de variable

$$\begin{aligned} &\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y) \\ &= \int_0^{x+y} \varphi(t)\,dt - \int_0^x \varphi(t)\,dt - \int_0^y \varphi(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+y} \varphi(t)\,dt - \int_0^y \varphi(t)\,dt \\ &= \int_0^y \varphi(t+x)\,dt - \int_0^y \varphi(t)\,dt \\ &= \int_0^y (\underbrace{\varphi(t+x) - \varphi(t)}_{\geqslant 0 \text{ par croissance de } \varphi})\,dt \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

38.b) On a maintenant

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \quad G_X(x+y) \geqslant G_X(x)G_X(y).$$

39. ✎ On a égalité car φ constante est à la fois croissante et décroissante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+,\ \forall y \in \mathbb{R}_*^+, \quad G_X(x+y) = G_X(x)G_X(y).$$

En dérivant par rapport à x, on a pour tout $y > 0$

$$G_X'(x+y) = G_X'(x)G_X(y).$$

Puis pour $x = 0$:

$$G_X'(y) = G_X'(0)G_X(y).$$

Comme $G_X(y) \neq 0$, on a

$$\left(\ln \circ G_X\right)'(y) = \frac{G_X'(y)}{G_X(y)} = G_x'(0) = \text{ Cste}.$$

D'où $\qquad \ln \circ G_X(y) = G_x'(0)xy + C$ où $C \in \mathbb{R}$.

Ce qui donne

$$G_X(y) = e^{G_X'(0)y + C}$$

Sachant que $G_X(0) = 1$, on a $C = 0$ puis

$$F_X(y) = 1 - G_X(y) = 1 - e^{G_x'(0)y}.$$

(on a aussi $F_X(y) = 0$ pour $y \leqslant 0$). On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle. On retrouve le fait que X suit une loi exponentielle.

La question 32 propose une autre approche pour résoudre ce type d'équation fonctionnelle. Elle est plus longue et pour cause : il n'y a pas la possibilité de dériver.

40. Si $x \in \mathbb{R}^+$. Notons que G_X réalise une bijection de $\mathbb{R}_*^+$ dans $]0;1[$ car le théorème de la bijection s'applique :

- G_X est continue sur $\mathbb{R}_*^+$
- G_X est strictement décroissante ($G_X' = -f$).
- $G_X \xrightarrow[0^+]{} 1$, $G_X \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

L'application G_X^{-1} a donc un sens et est strictement décroissante.

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}(Z \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}(\Phi(X) \leqslant x) \\ &= \mathbf{P}\left(-\ln\left(1 - G_X(X)\right) \leqslant x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(G_X(X) \leqslant 1 - e^{-x}\right) \\ &= \mathbf{P}\left(X > G_X^{-1}\left(1 - e^{-x}\right)\right) \\ &= G_X\left(G_X^{-1}\left(1 - e^{-x}\right)\right) \\ F_Z(x) &= 1 - e^{-x}. \end{aligned}$$

De plus, on sait que $F_Z(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$. D'où

$$Z \hookrightarrow \mathscr{E}(1).$$

41 ... En DM.