

DM 3 - sujet A

THÈME : ALGÈBRE LINÉAIRE, DIAGONALISATION

Problème 1. ♦♦

DAp2

Norme et convergence de matrices

- *Preliminaires*
- Pour toute matrice B , on note $[B]_{i,j}$, le coefficient en position (i, j) .
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, la suite des coefficients $([A_n]_{i,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle notée $\ell_{i,j}$.
On pose alors $L = [\ell_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq p}$, on dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L .
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} |[A]_{i,j}|$.
- 1. Vérifier que l'application $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. C'est-à-dire :
 - i) $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0_p$;
 - ii) Pour tout λ réel, pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$: $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$;
 - iii) Pour tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
- 2. Montrer que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- 3. a) Établir que pour tout couple (A, B) de $(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2$, on a $\|AB\| \leq p \|A\| \cdot \|B\|$.
b) Montrer que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers A et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers B , alors $(A_n B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers AB .
- *Exemples de convergence*
- 4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1/p$.
 - a) Étudier la limite de la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - b) i) En raisonnant par l'absurde, montrer que $1 \notin \text{Sp}(A)$.
ii) Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier $(I_p - A) \sum_{k=0}^n A^k$. En déduire la limite de $\left(\sum_{k=0}^n A^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition de l'exponentielle de matrice dans deux cas particuliers

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.Si la suite de terme général $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$ est convergente, on pose

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k.$$

- *Exemple avec une matrice nilpotente d'indice maximal*
- 5. a) Justifier que si A est une matrice nilpotente (il existe un indice $i \in \mathbb{N}$ tel que $A^i = 0_p$), alors $\exp(A)$ est bien défini.
b) Préciser $\exp(A)$ dans le cas où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Le cas diagonalisable*

6. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Expliciter $\exp(D)$ à l'aide des coefficients diagonaux de D .
7. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter $\exp(A)$ à l'aide de P et $\exp(D)$.

Une deuxième définition et une relation fonctionnelle

- *Une deuxième définition dans le cas diagonalisable*
8. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable.
 - a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
 - b) Montrer que la suite de matrices $\left(\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n\right)_n$ converge. Vérifier que $\exp(A)$ est sa limite.
 - c) Montrer que pour tout réel x , $\exp(xI_p + A) = e^x \exp(A)$.
 - *Une relation fonctionnelle*
 - Dans la suite, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisables et qui commutent ($AB = BA$). On suppose de plus que A a n valeurs propres distinctes. Soient u et v , les endomorphismes de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associés à A et B respectivement.
 9.
 - a) Que dire de la dimension des sous-espaces propres de u ?
 - b) Justifier que tout vecteur propre de u est vecteur propre de v .
 - c) En déduire que u et v admettent une base commune de vecteurs propres.
 10. Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$.
 11. *Application*
Justifier que $\exp(A)$ est inversible et donner son inverse.

– FIN –

DM 3 - sujet *

THÈME : ALGÈBRE LINÉAIRE, DIAGONALISATION

Problème 2. ♦♦♦

DAp1

Norme et convergence de matrices

- *Preliminaires*
- Pour toute matrice B , on note $[B]_{i,j}$, le coefficient en position (i, j) .
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
On dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si pour tout couple $(i, j) \in [[1, p]]^2$, la suite des coefficients $([A_n]_{i,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle notée $\ell_{i,j}$.
On pose alors $L = [\ell_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq p}$, on dit que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers L .
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max_{(i,j) \in [[1,p]]^2} |[A]_{i,j}|$.
- 1. Vérifier que l'application $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. C'est-à-dire :
 - i) $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0_p$;
 - ii) Pour tout λ réel, pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$: $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$;
 - iii) Pour tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
- 2. Montrer que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers A si et seulement si $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- 3. a) Établir que pour tout couple (A, B) de $(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}))^2$, on a $\|AB\| \leq p \|A\| \cdot \|B\|$.
b) Montrer que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers A et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers B , alors $(A_n B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers AB .
- *Exemples de convergence*
- 4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| < 1/p$.
 - a) Étudier la limite de la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - b) i) Montrer que $1 \notin \text{Sp}(A)$.
ii) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n A^k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et exprimer sa limite à l'aide de la matrice $I_p - A$.

Première définition de l'exponentielle de matrice et exemples

5. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
- a) Justifier que pour tout $(i, j) \in [[1, p]]^2$, tout $k \in \mathbb{N}$: $0 \leq |[A^k]_{i,j}| \leq (p \|A\|)^k$.
 - b) En déduire la convergence de la série de terme général $[A^k / k!]_{i,j}$ puis de la suite de matrice $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k\right)_n$.
- On note alors $\exp(A)$, la matrice limite de sorte que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = \exp(A)$.
- *Exemple avec les matrices de rotation*
 - 6. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ antisymétrique.
 - a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $A_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!} A^k$.
 - b) En déduire qu'il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(A) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.
On pourra s'aider de la formule de Taylor-Lagrange.

- *Le cas diagonalisable*

7. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Expliciter $\exp(D)$ à l'aide des coefficients diagonaux de D .
8. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, D une matrice diagonale et P une matrice inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter $\exp(A)$ à l'aide de P et $\exp(D)$.

Une deuxième définition et relation fonctionnelle

- *Une deuxième définition dans le cas diagonalisable*

9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisable.
 - a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
 - b) Montrer que la suite de matrices $\left(\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n\right)_n$ converge. Vérifier que $\exp(A)$ est sa limite.
 - c) Montrer que pour tout réel x , $\exp(xI_p + A) = e^x \exp(A)$.

- *Une relation fonctionnelle*

Dans la suite, A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonalisables et qui commutent ($AB = BA$). On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et B . On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ les valeurs propres de u et $(\mu_1, \dots, \mu_q)$ les valeurs propres de v .

10. On note $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre de u associé à une valeur propre λ . Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par v .
Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note alors v_i l'endomorphisme de $E_{\lambda_i}(u)$ induit par la restriction de v à $E_{\lambda_i}(u)$. L'objet de la question suivante est de montrer que v_i est diagonalisable.
11. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une base de E constituée de vecteurs propres de v . On suppose que chaque vecteur x_j est écrit sous la forme

$$x_j = x_{1,j} + x_{2,j} + \dots + x_{r,j}, \quad \text{avec} \quad x_{k,j} \in E_{\lambda_k}(u) \text{ pour tout } k \text{ de } \llbracket 1, r \rrbracket.$$

- a) Montrer que les vecteurs non nuls de la famille $(x_{k,1}, \dots, x_{k,p})$ sont des vecteurs propres de v et des vecteurs propres de u .
 - b) Montrer que cette famille est une famille génératrice de $E_{\lambda_k}(u)$.
 - c) En déduire que u et v admettent une base commune de vecteurs propres.
12. Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$.
 13. *Application*
Justifier que $\exp(A)$ est inversible et donner son inverse.

– FIN –

DM 3 - éléments de solution

Problème 1

Pour une étude plus poussée et plus précise avec un autre choix de norme, on pourra chercher les sujets HEC 2007 ou ESSEC 2009.

1.a)i) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 &\iff \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |[A]_{ij}| = 0 \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2, [A]_{ij} = 0 \\ &\iff A = 0_p. \end{aligned}$$

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|\lambda| \|A\| = |\lambda| \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |[A]_{ij}| = \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |[\lambda A]_{ij}| = \|\lambda A\|.$$

iii) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |[A+B]_{ij}| \\ &= \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |[A]_{ij} + [B]_{ij}| \\ &\leq \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} (|[A]_{ij}| + |[B]_{ij}|) \\ &\quad \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |[A]_{ij}| + \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |[B]_{ij}| \\ \|A+B\| &\leq \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

2. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \|A_n - A\| \leq \sum_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |[A_n]_{ij} - [A]_{ij}|$$

de sorte que si $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ alors

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2, [A_n]_{ij} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [A]_{ij}$$

et par somme

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |[A_n]_{ij} - [A]_{ij}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par encadrement $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

• Réciproquement, si $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ alors pour tout $(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2$

$$0 \leq |[A_n]_{ij} - [A]_{ij}| \leq \|A_n - A\|$$

et par encadrement

$$[A_n]_{ij} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [A]_{ij}.$$

Ceci étant valable pour tous les couples d'indices (i,j)

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A.$$

L'équivalence est établie.

3.a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Par définition du produit matriciel, pour $(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2$

$$\begin{aligned} |[AB]_{ij}| &= \left| \sum_{k=1}^p [A]_{ik} [B]_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^p |[A]_{ik}| \cdot |[B]_{kj}| \quad \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{k=1}^p \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}$$

$$|[AB]_{ij}| \leq p \|A\| \cdot \|B\|$$

D'où $\|AB\| \leq p \|A\| \cdot \|B\|$.

3.b) Rédaction 1

Soit $(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2$

$$\begin{aligned} [AB_n]_{ij} &= \sum_{k=1}^n \underbrace{[A_n]_{ik}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} [A]_{ik}} \underbrace{[B_n]_{kj}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} [B]_{kj}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [B]_{kj} = [AB]_{ij}. \end{aligned}$$

Ainsi $A_n B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB$.

• Rédaction 2.

$$\begin{aligned} \|A_n B_n - AB\| &= \|A_n (B_n - B) + (A_n - A) B\| \\ &\leq \|A_n (B_n - B)\| + \|(A_n - A) B\| \\ &\leq p \|A_n\| \cdot \|B_n - B\| + \|B\| \cdot \|A_n - A\| \end{aligned}$$

On vérifie que $(\|A_n\|)_n$ est bornée et par hypothèse

$$\|B_n - B\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par encadrement $\|A_n - B_n - AB\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ce qui conclut d'après la question 2.

4.a) Par récurrence, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\| \leq p^{k-1} \|A\| \leq (p \|A\|)^k.$$

Comme $p\|A\| \in]-1; 1[$, les résultats sur les suites géométriques donne $(p\|A\|)^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ puis $\|A^k\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. La question 2 permet de conclure

$$A^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0_p.$$

4.b)i) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$AX = X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{p,1}.$$

Notons ${}^tX = [x_1, \dots, x_p]$. Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$

$$\begin{aligned} |x_i| &= \left| \sum_{k=1}^p [A]_{ik} x_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^p |[A]_{ik}| \cdot |x_k| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^p |x_k| \right) \cdot \|A\| \\ |x_i| &\leq p\|A\| \max_{k \in \llbracket 1; p \rrbracket} |x_k|. \end{aligned}$$

On évitera les notations du type $\|X\|$ car l'application $\|\cdot\|$ n'est définie que sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et non sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Si on choisit un indice i tel que le maximum soit atteint, on a

$$x_i \neq 0 \quad \text{et} \quad |x_i| \leq |x_i| p\|A\|.$$

D'où $1 \leq p\|A\|$.

Absurde par hypothèse sur A . Finalement

$$1 \notin \text{Sp}(A).$$

La matrice $I_p - A$ est inversible.

En adaptant un peu, on a même l'inclusion $\text{Sp}(A) \subset]-1; 1[$.

4.b)ii) Par télescope

$$\begin{aligned} (I_p - A) \sum_{k=0}^n A^k &= \sum_{k=0}^n (I_p - A) A^k \\ &= \sum_{k=0}^n A^k - A^{k+1} = I_p - A^{n+1}. \end{aligned}$$

Avec le résultat précédent

$$(I_p - A) \sum_{k=0}^n A^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I_p$$

et avec la question 3.b)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n A^k &= (I_p - A)^{-1} (I_p - A) \sum_{k=0}^n A^k \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (I_p - A)^{-1} \times I_p = (I_p - A)^{-1}. \end{aligned}$$

On pourra noter que c'est une généralisation de

$$\forall a \in]-1; 1[, \quad \sum_{k=0}^n a^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-a} = (1-a)^{-1}.$$

5.a) Dans ce cas, pour tout $n \geq i$

$$\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{A^k}{k!} + \sum_{k=i}^n \frac{1}{k!} A^i = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{A^k}{k!}.$$

La suite de matrices est constante à partir d'un certain rang, elle converge (vers cette matrice constante).

5.b) On a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'où

$$\exp(A) = I_3 + A + \frac{A^2}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. On a pour $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!} &= \text{diag} \left(\sum_{k=0}^n \frac{d_1^k}{k!}, \sum_{k=0}^n \frac{d_2^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^n \frac{d_p^k}{k!} \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{diag}(e^{d_1}, e^{d_2}, \dots, e^{d_n}) \end{aligned}$$

d'après l'expression sous forme de série de l'exponentielle. Finalement

$$\exp(D) = \begin{bmatrix} \exp(d_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \exp(d_p) \end{bmatrix}.$$

7. Par récurrence, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = P D^k P^{-1}$$

puis

$$\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P D^k P^{-1} = P \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k \right) P^{-1}$$

On sait que

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(D) \\ P \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P, \quad P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P^{-1} \end{cases}$$

En utilisant la question 3.b) (étendue au cas de 3 matrices), on a convergence et égalité

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P \exp(D) P^{-1}$$

D'où

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}.$$

8.a)

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

Comme $\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{n}.$$

Par produit

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} x.$$

Équivalent que l'on traduit par une limite

$$n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.$$

Par composition de limite (continuité de l'exponentielle)

$$\left(1 + \frac{x}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$$

👁 C'est une limite classique à connaître. Tout ce qui peut s'apparenter à une composition d'équivalents sera durement sanctionné aux concours.

8.b) Comme A est diagonalisable, il existe P inversible et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_p + \frac{1}{n}A = P \left(I_p + \frac{1}{n}D \right) P^{-1}$$

$$\text{et} \quad \left(I_p + \frac{1}{n}A \right)^n = P \left(I_p + \frac{1}{n}D \right)^n P^{-1}$$

$$\text{avec} \quad \left(I_p + \frac{1}{n}D \right)^n = \text{diag} \left(\left(1 + \frac{\lambda_1}{n} \right)^n, \dots, \left(1 + \frac{\lambda_p}{n} \right)^n \right).$$

Ainsi, en utilisant 10.a) et la question précédente, la suite $\left(\left(I_p + \frac{1}{n}A \right)^n \right)_n$ converge et sa limite vaut

$$\exp(A) = P \text{diag} \left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p} \right) P^{-1}.$$

8.c) Soit x un réel. La matrice $A_x = xI_p + A$ reste diagonalisable et l'on a

$$A_x = PD_x P^{-1}, \quad \text{où} \quad D = \text{diag}(x + \lambda_1, \dots, x + \lambda_p).$$

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre que la suite $\left(\left(I_p + \frac{1}{n}A_x \right)^n \right)_n$ converge et que sa limite vaut

$$\begin{aligned} \exp(xI_p + A) &= P \text{diag} \left(e^{x+\lambda_1}, \dots, e^{x+\lambda_p} \right) P^{-1} \\ &= e^x P \text{diag} \left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p} \right) P^{-1} = e^x \exp(A). \end{aligned}$$

9.a) Comme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ a exactement p valeurs propres, on sait que u est diagonalisable et les espaces propres sont tous de dimension 1.

9.b) Soit x , un vecteur propre de u pour la valeur propre λ . Alors $u(x) = \lambda x$. Comme u et v commutent, on obtient :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

Ainsi $v(x) \in E_\lambda(u)$. Or $x \in E_\lambda(u)$ et $E_\lambda(u)$ est de dimension 1, donc

$$E_\lambda(u) = \text{Vect}(x)$$

et il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $v(x) = \mu x$. Le vecteur $x \neq 0_E$ est aussi un vecteur propre de v .

9.c) Comme u est diagonalisable, il existe une base constituée de vecteurs propres de u . D'après la question précédente, cette base est aussi une base de vecteurs propres de v .

Si on note $\mathcal{B}$ cette base et P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ alors les matrices

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$$

sont diagonales et par la formule de changement de bases

$$A = P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P^{-1} \quad \text{et} \quad B = P \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) P^{-1}.$$

10. Comme A et B sont diagonalisables avec la même matrice de passage P (question précédente), on peut écrire

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= P \text{diag} \left(e^{\lambda_1+\mu_1}, \dots, e^{\lambda_p+\mu_p} \right) P^{-1} \\ &= P \text{diag} \left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p} \right) P^{-1} \times P \text{diag} \left(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_p} \right) P^{-1} \\ &= \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A). \end{aligned}$$

👁 On pourra regarder le sujet * pour s'assurer que la matrice $\exp(B)$ est bien définie.

11. La matrice $-A$ commute avec A . D'après la question précédente

$$\exp(-A) \exp(A) = \exp(A) \exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0_p) = I_p.$$

On en déduit que $\exp(A)$ est inverse et d'inverse

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A).$$

Problème 2

Pour une étude plus poussée et plus précise avec un autre choix de norme, on pourra chercher les sujets HEC 2007 ou ESSEC 2009.

1.a)i) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \|A\| = 0 &\iff \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |A_{ij}| = 0 \\ &\iff \forall (i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2, \quad A_{ij} = 0 \\ &\iff A = 0_p. \end{aligned}$$

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$|\lambda| \|A\| = |\lambda| \max_{(i,j)} |A_{ij}| = \max_{(i,j)} |\lambda A_{ij}| = \|\lambda A\|.$$

iii) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |A+B|_{ij}| \\ &= \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |A|_{ij} + |B|_{ij}| \\ &\leq \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} (|A|_{ij}| + |B|_{ij}|) \\ &\quad \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |A|_{ij}| + \max_{(i,j) \in \llbracket 1;p \rrbracket^2} |B|_{ij}| \\ \|A+B\| &\leq \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

2. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \|A_n - A\| \leq \sum_{(i,j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2} |[A_n]_{ij} - [A]_{ij}|$$

de sorte que si $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$ alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, \quad [A_n]_{ij} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [A]_{ij}$$

et par somme

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2} |[A_n]_{ij} - [A]_{ij}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par encadrement $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

• Réciproquement, si $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ alors pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$

$$0 \leq |[A_n]_{ij} - [A]_{ij}| \leq \|A_n - A\|$$

et par encadrement

$$[A_n]_{ij} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [A]_{ij}.$$

Ceci étant valable pour tous les couples d'indices (i, j)

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A.$$

L'équivalence est établie.

3.a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Par définition du produit matriciel, pour $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$

$$\begin{aligned} |[AB]_{ij}| &= \left| \sum_{k=1}^p [A]_{ik} [B]_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^p |[A]_{ik}| \cdot |[B]_{kj}| \quad \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{k=1}^p \|A\| \cdot \|B\| \end{aligned}$$

$$|[AB]_{ij}| \leq p \|A\| \cdot \|B\|$$

D'où $\|AB\| \leq p \|A\| \cdot \|B\|$.

3.b) Rédaction 1

Soit $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$

$$\begin{aligned} [AB_n]_{ij} &= \sum_{k=1}^n \underbrace{[A_n]_{ik}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} [A]_{ik}} \underbrace{[B_n]_{kj}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} [B]_{kj}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [A]_{ik} [B]_{kj} = [AB]_{ij}. \end{aligned}$$

Ainsi $A_n B_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB$.

• Rédaction 2.

$$\begin{aligned} \|A_n B_n - AB\| &= \|A_n (B_n - B) + (A_n - A) B\| \\ &\leq \|A_n (B_n - B)\| + \|(A_n - A) B\| \\ &\leq p \|A_n\| \cdot \|B_n - B\| + \|B\| \cdot \|A_n - A\| \end{aligned}$$

On vérifie que $(\|A_n\|)_n$ est bornée et par hypothèse

$$\|B_n - B\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par encadrement $\|A_n - B_n - AB\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ce qui conclut d'après la question 2.

4.a) Par récurrence, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\| \leq p^{k-1} \|A\| \leq (p \|A\|)^k.$$

Comme $p \|A\| \in]-1; 1[$, les résultats sur les suites géométriques donne $(p \|A\|)^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$ puis $\|A^k\| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. La question 2 permet de conclure

$$A^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0_p.$$

4.b)i) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$AX = X \quad \text{et} \quad X \neq 0_{p,1}.$$

Notons ${}^tX = [x_1, \dots, x_p]$. Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$

$$\begin{aligned} |x_i| &= \left| \sum_{k=1}^p [A]_{ik} x_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^p |[A]_{ik}| \cdot |x_k| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^p |x_k| \right) \cdot \|A\| \\ |x_i| &\leq p \|A\| \max_{k \in \llbracket 1; p \rrbracket} |x_k|. \end{aligned}$$

On évitera les notations du type $\|X\|$ car l'application $\|\cdot\|$ n'est définie que sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et non sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Si on choisit un indice i tel que le maximum soit atteint, on a

$$x_i \neq 0 \quad \text{et} \quad |x_i| \leq |x_i| p \|A\|.$$

D'où $1 \leq p \|A\|$.

Absurde par hypothèse sur A . Finalement

$$1 \notin \text{Sp}(A).$$

La matrice $I_p - A$ est inversible.

En adaptant un peu, on a même l'inclusion $\text{Sp}(A) \subset]-1; 1[$.

4.b)ii) Par télescopage

$$\begin{aligned} (I_p - A) \sum_{k=0}^n A^k &= \sum_{k=0}^n (I_p - A) A^k \\ &= \sum_{k=0}^n A^k - A^{k+1} = I_p - A^{n+1}. \end{aligned}$$

Avec le résultat précédent

$$(I_p - A) \sum_{k=0}^n A^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I_p$$

et avec la question 3.b)

$$\sum_{k=0}^n A^k = (I_p - A)^{-1} (I_p - A) \sum_{k=0}^n A^k$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (I_p - A)^{-1} \times I_p = (I_p - A)^{-1}.$$

On pourra noter que c'est une généralisation de

$$\forall a \in]-1; 1[, \quad \sum_{k=0}^n a^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-a} = (1-a)^{-1}.$$

5.a) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$

$$|[A^k]_{i,j}| \leq \|A^k\| \leq (p \|A\|)^k$$

d'après la question 4.a).

5.b) Soit $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$. D'après ce qui précède

$$0 \leq \left| [A^k/k!]_{i,j} \right| \leq \frac{(p \|A\|)^k}{k!}.$$

Or la série exponentielle $\sum (p \|A\|)^k / k!$ est convergente. Par le critère de comparaison, on en déduit que la série $\sum [A^k/k!]_{i,j}$ converge absolument, elle converge. Ceci étant capable pour tout couple d'indices (i, j) , on a la convergence de la série de matrices $\sum (1/k!) A^k$.

6.a) Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} = \theta \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{:=J}.$$

Notons que $J^2 = -I_2$.

Par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$J^{2k} = (-1)^k I_2 \quad \text{et} \quad J^{2k+1} = (-1)^k J.$$

En distinguant termes d'indice pair et impair, on obtient

$$A_n = \begin{bmatrix} \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} & \sum_{i=0}^n (-1)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ -\sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} & \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} \end{bmatrix}.$$

6.b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction cosinus est de classe $\mathcal{C}^{2n}$, on a par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $2n$ entre 0 et x ,

$$\left| \cos(x) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{M}{(2n+1)!} |x|^{2n+1},$$

$$\text{où} \quad M = \max_{[0;x] \cup [x;0]} |\cos^{(2n+1)}(x)|.$$

Comme les dérivées k -ième du cosinus valent $\pm \sin$ ou $\pm \cos$, la dérivée $(n+1)$ ième est majorée par 1. Ainsi, $M \leq 1$. De plus, on a montré que

$$\cos^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ (-1)^p & \text{si } k = 2p. \end{cases}$$

Par exemple, on a montré par récurrence que

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right).$$

Il vient :

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$= \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \quad (k = 2p)$$

$$\text{Puis,} \quad \left| \cos(x) - \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Par les croissances comparées :

$$\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On conclut par le théorème d'encadrement :

$$\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}.$$

De la même manière, on montre que

$$\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

En conclusion

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Comme on établit la convergence de la suite $(\sum_{k=0}^n (1/k!) A^k)_n$, on sait que la limite est aussi la limite de la suite extraite $(A_n)_n$ (extraite car on ne garde que les indices impairs). Ce qui conclut :

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

7. On a pour $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_p)$.

$$\sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!} = \text{diag}\left(\sum_{k=0}^n \frac{d_1^k}{k!}, \sum_{k=0}^n \frac{d_2^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^n \frac{d_p^k}{k!}\right)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{diag}(e^{d_1}, e^{d_2}, \dots, e^{d_n})$$

d'après l'expression sous forme de série de l'exponentielle. Finalement

$$\exp(D) = \begin{bmatrix} \exp(d_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \exp(d_p) \end{bmatrix}.$$

8. Par récurrence, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = P D^k P^{-1}$$

puis

$$\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P D^k P^{-1} = P \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k \right) P^{-1}$$

On sait que

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} D^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(D) \\ P \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P, \quad P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P^{-1} \end{cases}$$

En utilisant la question 3.b) (étendue au cas de 3 matrices), on a converge et égalité

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P \exp(D) P^{-1}$$

D'où $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$.

9.a)

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

Comme $\frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{n}.$$

Par produit $n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} x$.

Équivalent que l'on traduit par une limite

$$n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.$$

Par composition de limite (continuité de l'exponentielle)

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$$



C'est une limite classique à connaître. Tout ce qui peut s'apparenter à une composition d'équivalents sera durement sanctionné aux concours.

9.b) Comme A est diagonalisable, il existe P inversible et D = diag($\lambda_1, \dots, \lambda_p$) diagonale telles que A = PDP⁻¹. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_p + \frac{1}{n}A = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)P^{-1}$$

et $\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n P^{-1}$

avec $\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n = \text{diag}\left(\left(1 + \frac{\lambda_1}{n}\right)^n, \dots, \left(1 + \frac{\lambda_p}{n}\right)^n\right)$.

Ainsi, en utilisant 10.a) et la question précédente, la suite $\left(\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n\right)_n$ converge et sa limite vaut

$$\exp(A) = P \text{diag}\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}\right) P^{-1}.$$

9.c) Soit x un réel. La matrice $A_x = xI_p + A$ reste diagonalisable et l'on a

$$A_x = P D_x P^{-1}, \quad \text{où } D = \text{diag}(x + \lambda_1, \dots, x + \lambda_p).$$

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre que la suite $\left(\left(I_p + \frac{1}{n}A_x\right)^n\right)_n$ converge et que sa limite vaut

$$\begin{aligned} \exp(xI_p + A) &= P \text{diag}\left(e^{x+\lambda_1}, \dots, e^{x+\lambda_p}\right) P^{-1} \\ &= e^x P \text{diag}\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}\right) P^{-1} = e^x \exp(A). \end{aligned}$$

10. Soit $x \in E_1(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$. Comme u et v commutent, on obtient :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

ce qui montre que $v(x) \in E_\lambda(u)$. Ainsi, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

11.a) Par définition, les $x_{k,i}$ non nuls sont des vecteurs propres de u. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose que x_j est vecteur propre de v associé à la valeur propre μ_j . Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \mu_j x_{i,j} &= \mu_j x_j = v(x_j) \\ &= v(x_{1,j}) + v(x_{2,j}) + \dots + v(x_{p,j}) = \sum_{i=1}^p v(x_{i,j}). \end{aligned}$$

Or, d'après la question 10, chaque $v(x_{k,j})$ est dans $E_{\lambda_k}(u)$. Par unicité de la décomposition selon la somme directe, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad v(x_{k,j}) = \mu_j x_{k,j}$$

les $x_{k,i}$ non nuls sont des vecteurs propres de v.

11.b) Soit $z \in E_{\lambda_k}(u)$. Le vecteur z se décompose sur la base $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sous la forme $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Donc

$$z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^p x_{i,j} = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_{i,j} \right).$$

Mais $z \in E_{\lambda_k}(u)$. Donc $z = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_{i,k}$.

11.c) De la famille génératrice de la question précédente, on peut extraire une base de $E_{\lambda_k}(u)$ par le théorème de la base incomplète. On obtient ainsi pour chaque sous-espace propre de u une base de vecteurs propres de v. En mettant ces bases bout à bout, on obtient une base de vecteurs propres commune à u et v.

12. Comme A et B sont diagonalisables avec la même matrice de passage P (question précédente), on peut écrire

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= P \text{diag}\left(e^{\lambda_1+\mu_1}, \dots, e^{\lambda_p+\mu_p}\right) P^{-1} \\ &= P \text{diag}\left(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}\right) P^{-1} \times P \text{diag}\left(e^{\mu_1}, \dots, e^{\mu_p}\right) P^{-1} \\ &= \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A). \end{aligned}$$

13. La matrice -A commute avec A. D'après la question précédente

$$\exp(-A) \exp(A) = \exp(A) \exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0_p) = I_p.$$

On en déduit que exp(A) est inverse et d'inverse

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A).$$