

CHAPITRE 13

Compléments sur les variables aléatoires à densité

Il n'y a rien de plus triste qu'une vie sans hasard.

HONORÉ DE BALZAC (1799-1850)

1

Loi du maximum, loi du minimum

Soient X, Y des variables aléatoires *indépendantes* à densité définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Notons f_X et f_Y des densités respectivement de X et Y . On définit les applications

$$Z: \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto \max(X(\omega); Y(\omega)) \end{cases} \quad \text{et} \quad T: \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto \min(X(\omega); Y(\omega)) \end{cases}$$

Noter simplement $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$. Les applications Z et T sont des variables aléatoires.

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbf{P}(Z \leq t) \\ &= \mathbf{P}([X \leq t] \cap [Y \leq t]) \\ &= \mathbf{P}([X \leq t]) \cdot \mathbf{P}([Y \leq t]) \quad \text{Par indépendance} \\ F_Z(t) &= F_X(t) \cdot F_Y(t). \end{aligned}$$

Par produit, F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points (noté D). Z est une variable aléatoire à densité. Une densité est donnée par dérivation, pour $t \in \mathbb{R} \setminus D$

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = F_X'(t) \cdot F_Y(t) + F_X(t) \cdot F_Y'(t) = f_X(t)F_Y(t) + f_Y(t)F_X(t).$$

La dernière égalité s'étend à tout réel t .

- Le calcul est similaire pour le minimum en rajoutant le passage au complémentaire. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 1 - F_T(t) &= \mathbf{P}(T > t) \\ &= \mathbf{P}([X > t] \cap [Y > t]) \\ &= \mathbf{P}([X > t]) \cdot \mathbf{P}([Y > t]) \quad \text{Par indépendance} \\ 1 - F_T(t) &= (1 - F_X(t)) \times (1 - F_Y(t)). \end{aligned}$$

Par produit, F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points (noté D_T). T est une variable aléatoire à densité. Une densité est donnée par dérivation, pour $t \in \mathbb{R} \setminus D_T$

$$-f_T(t) = (1 - F_T)'(t) = (1 - F_X)'(t) \cdot (1 - F_Y(t)) + (1 - F_X(t)) \cdot (1 - F_Y)'(t) = -f_X(t)(1 - F_Y(t)) - f_Y(t)(1 - F_X(t)).$$

Finalement, on peut poser pour tout réel t

$$f_T(t) = f_X(t)(1 - F_Y(t)) + f_Y(t)(1 - F_X(t)).$$

Le calcul précédent se généralise facilement au cas de n variables aléatoires indépendantes à densité $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Avec

$$Z = \max(X_1, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad T = \min(X_1, \dots, X_n),$$

on a
$$F_Z(t) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(t) \quad \text{et} \quad 1 - F_T(t) = \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(t)).$$

Les variables Z et T restent des variables à densité. Retenons aussi la simplification lorsque les variables X_i suivent la même loi (ainsi, $F_{X_i} = F_{X_1}$)

on a
$$F_Z(t) = F_{X_1}(t)^n \quad \text{et} \quad 1 - F_T(t) = (1 - F_{X_1}(t))^n.$$

Une densité pour Z et pour T sont données par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Z(t) = n f_{X_1}(t) F_{X_1}(t)^{n-1} \quad \text{et} \quad f_T(t) = n f_{X_1}(t) (1 - F_{X_1}(t))^{n-1}.$$

Exercice 1



✧ Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois exponentielles de paramètres λ et μ .

1. Donner la loi de $T = \min(X, Y)$.
2. En déduire l'existence et le calcul des espérances de $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$.
3. Généraliser le résultat de la première question avec n variables.

p. 16

VAD1

Exercice 2



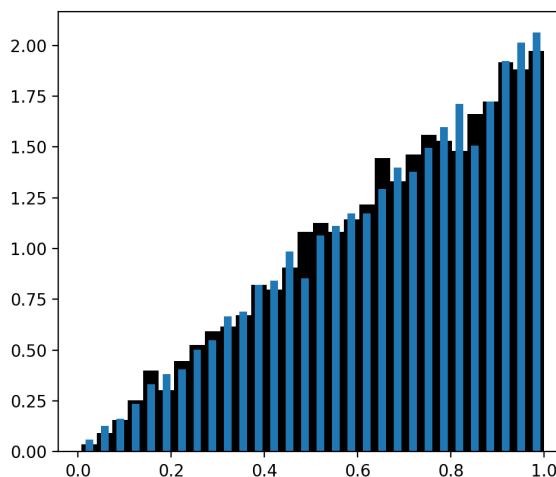
1. Que permet de conjecturer le programme et les résultats suivants?
2. Prouver votre conjecture puis généraliser le résultat obtenu? Comment interpréter graphiquement ce résultat?

p. 17

VAD2

Editeur

```
def simu1():
    return max(rd.random(2))
def simu2():
    return np.sqrt(rd.random())
m=5000
Ech1=np.zeros(m), Ech2=np.zeros(m)
for i in range(m):
    Ech1[i]=simu1()
    Ech2[i]=simu2()
plt.hist(Ech1,30,density=True,color='black')
plt.hist(Ech2,30,density=True,rwidth=0.5)
plt.show()
```



2

Loi d'une somme de variables aléatoires à densité

2.1

Calcul d'un produit de convolution

Soient f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points). Pour tout réel x , on définit, sous-réserve d'existence, $f * g(x)$ par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Cela définit alors une nouvelle fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f * g(x)$. On parle alors de produit de convolution.

Exercice 3



♦ Conditions suffisantes d'existence et propriétés

Soient f, g et h , trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que f soit bornée sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$ soient absolument convergentes.

p. 17

1. Montrer que $f * g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $f * g = g * f$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f * (g + \lambda h) = (f * g) + \lambda(f * h)$.

VAD3

Exemples. Nous en donnons deux. Chacun vérifie la condition de la question 1 de l'exercice précédent, le produit de convolution sera ainsi toujours bien défini.

• Exemple 1 avec la gaussienne.

Posons pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-t^2/2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculons $f * f(x)$. Dans un premier temps, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x-t)f(t) &= e^{-(x-t)^2/2} \cdot e^{-t^2/2} = e^{-((x-t)^2+t^2)/2} = e^{-(t^2-tx+\frac{x^2}{2})} = e^{-((t-x/2)^2+x^2/4)} \\ &= e^{-x^2/4} \cdot e^{-(t-x/2)^2}. \end{aligned}$$

On a donc

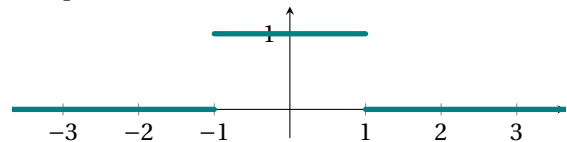
$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)f(t) dt = e^{-x^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-x/2)^2} dt.$$

À l'aide du changement de variable affine $u = t - x/2$, il vient

$$f * f(x) = e^{-x^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}.$$

• Exemple 2 avec une fonction à support borné. Soit c définie sur $\mathbb{R}$ par

$$c(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1; 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons

$$c * c(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(x-t)c(t) dt.$$

Tout d'abord, simplifions les bornes de l'intégrale.

$$c(x-t)c(t) \neq 0 \iff \begin{cases} -1 \leq t \leq 1 \\ -1 \leq t-x \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leq t \leq 1 \\ 1-x \leq t \leq 1+x \end{cases}.$$

Distinguons plusieurs cas :

- Si $x \leq -2$, alors les conditions précédentes ne peuvent être vérifiées simultanément : $c(x-t)c(t) = 0$ pour tout t et $c * c(x) = 0$.
- Si $x \geq 2$, on a de même, $c * c(x) = 0$.
- Si $x \in [-2; 0]$, on a $x-1 \leq -1$ et $x+1 \leq 1$. Les conditions se simplifient en $-1 \leq t \leq x+1$ et

$$c * c(x) = \int_{-1}^{x+1} c(x-t)c(t) dt = \int_{-1}^{x+1} 1 du = x+2.$$

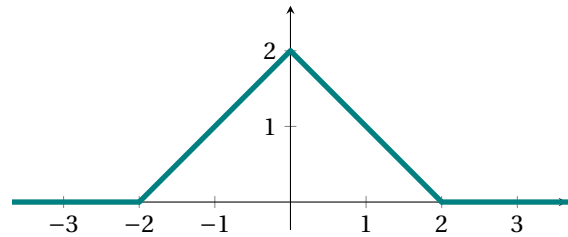
- Si $x \in [0; 2]$, on a maintenant $x-1 \leq t \leq 1$ et

$$c * c(x) = \int_{x-1}^1 c(x-t)c(t) dt = 2-x.$$

Finalement :

$$c * c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-2; 2] \\ 2+x & \text{si } x \in [-2; 0] \\ 2-x & \text{si } x \in [0; 2]. \end{cases}$$

On obtient un graphe en "triangle".



Exercice 4



◆◆◆ On définit les fonctions f , g et h sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad g(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

p. 17

Calculer $f * h$, $g * g$, $g * h$.

VAD4

2.2 Le théorème de sommation

THÉORÈME

loi d'une somme

Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, de densités respectives f_X et f_Y .

Si $\rightarrow$ Les variables X et Y sont indépendantes,

$\rightarrow$ La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt$$

est bien définie et continue sauf en un nombre fini de points.

Alors

la variable $X+Y$ est à densité et h est une densité.

Exemples. Reprenons les deux premiers calculs de la section précédente.

- Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont la loi est une loi normale centrée réduite. Une densité est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_X(t) = f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t).$$

Le premier calcul justifie l'existence du produit de convolution $f_X * f_Y$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X * f_Y(x) = \frac{1}{2\pi} f * f(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi} e^{-x^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2 \cdot \sqrt{2}^2)}.$$

On constate alors que $X+Y$ est encore une variable à densité qui suit encore une loi normale $\mathcal{N}(0; 2)$.

- Le deuxième calcul traduit le fait que la somme de deux lois uniformes sur $[-1; 1]$ est encore une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [-2; 2] \\ (2+x)/4 & \text{si } x \in [-2; 0] \\ (2-x)/4 & \text{si } x \in [0; 2]. \end{cases}$$

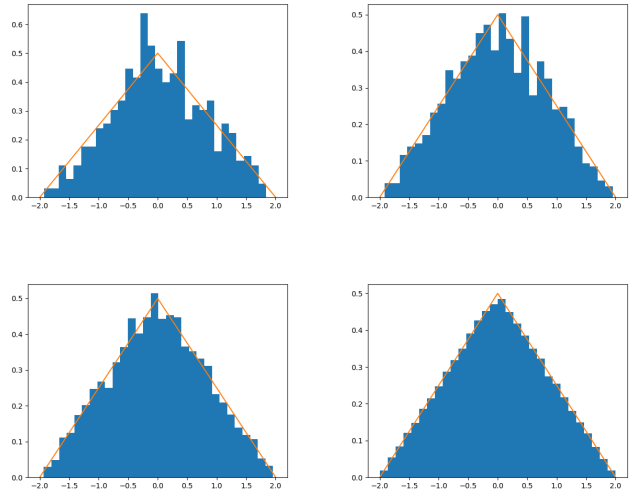
Vérification expérimentale avec Python

```

m=500
# puis, 1000, 5000 et 10^4
# taille de l'échantillon
x=-1+2*np.random.rand(m)
y=-1+2*np.random.rand(m)
# simulation d'une loi uniforme
# continue sur [-1;1]

plt.hist(x+y,30,density=True)
# tracé de l'histogramme
plt.plot([-2,0,2],[0,0.5,0])
# tracé de la densité
plt.show()
# affichage

```



Remarque. La somme de deux variables aléatoires à densité n'est pas toujours une variable aléatoire à densité. Il suffit de considérer $X + (-X)$ pour s'en convaincre.

Exercice 5



◆◆ Probabilité de collision

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à densité bornée.
Que dire de la probabilité $P(X = Y)$?

p. 17

VAD5

[Un lien vers une explication en vidéo.](#)

3

Application aux lois usuelles

3.1 Stabilité par somme des lois γ

On rappelle les définitions des fonctions Γ et β

$$\Gamma: x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \beta: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Les propriétés de ces fonctions et les liens entre elles sont étudiées à l'exercice ??, p. ??.

THÉORÈME

somme de deux lois γ

Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_*^+$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\ \rightarrow X_1 \hookrightarrow \gamma(v_1) \text{ et } X_2 \hookrightarrow \gamma(v_2). \end{array} \right.$

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(v_1 + v_2).$

Preuve. Notons $\alpha_1 = \Gamma(v_1)^{-1}$ et $\alpha_2 = \Gamma(v_2)^{-1}$ pour alléger les notations. Considérons de plus les densités de probabilité :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \alpha_1 t^{v_1-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \alpha_2 t^{v_2-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Soient $x \in \mathbb{R}$. Justifions l'existence et calculons $f * g(x)$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$f(x-t)g(t) \neq 0 \iff \begin{cases} x-t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \iff 0 \leq t \leq x.$$

- Si $x < 0$, on a toujours $f(x-t)g(t) = 0$ et par suite

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = 0.$$

- Si $x \geq 0$. On peut réduire l'intervalle d'intégration à $[0, x]$. $f * g(x)$ est alors bien défini en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_0^x f(x-t)g(t) dt \\ &= \int_0^x \alpha_1 (x-t)^{\nu_1-1} e^{-(x-t)} \cdot \alpha_2 t^{\nu_2-1} e^{-t} dt \\ f * g(x) &= \alpha_1 \alpha_2 e^{-x} \int_0^x (x-t)^{\nu_1-1} t^{\nu_2-1} dt. \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $u = \frac{t}{x}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant de $[0; x]$ dans $[0; 1]$.

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^{\nu_1-1} t^{\nu_2-1} dt &= \int_0^1 (x-xu)^{\nu_1-1} (xu)^{\nu_2-1} \cdot (x du) \\ &= x^{\nu_1+\nu_2-1} \int_0^1 (1-u)^{\nu_1-1} u^{\nu_2-1} du = \beta(\nu_1, \nu_2) x^{\nu_1+\nu_2-1}. \end{aligned}$$

On obtient pour $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$f * g(x) = \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \beta(\nu_1, \nu_2)}_{\text{indépendant de } x} \cdot x^{\nu_1+\nu_2-1} e^{-x}$$

À une constante près, $f * g$ est une densité d'une loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$.

$$f * g(x) = \alpha_1 \alpha_2 \beta(\nu_1, \nu_2) \times \Gamma(\nu_1 + \nu_2) \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)} x^{\nu_1+\nu_2-1} e^{-x}.$$

Or, d'après le théorème sur les sommes, $f * g$ est une densité de la variable $X + Y$. Donc

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f * g(t) dt = \alpha_1 \alpha_2 \beta(\nu_1, \nu_2) \Gamma(\nu_1 + \nu_2)$$

On en déduit que

$$\alpha_1 \alpha_2 \beta(\nu_1, \nu_2) \cdot \Gamma(\nu_1 + \nu_2) = 1$$

et $X_1 + X_2$ suit une loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$.

Remarque. Ce calcul a permis de retrouver l'égalité

$$\forall \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}_*^+, \quad \beta(\nu_1, \nu_2) = \int_0^1 (1-u)^{\nu_1-1} u^{\nu_2-1} du = \frac{\Gamma(\nu_1) \Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1 + \nu_2)}.$$

COROLLAIRE

cas particulier des lois exponentielles

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé.

- Si** $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{Les variables } X_1, \dots, X_n \text{ sont mutuellement indépendantes.} \\ \rightarrow \text{Pour tout } i \in [1; n], X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1). \end{array} \right.$

Alors $X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \gamma(n).$

Preuve. Il suffit de procéder par récurrence en rappelant que la loi exponentielle de paramètre 1 est aussi une loi $\gamma(1)$.

Exercice 6



◆ Cas général - loi d'Erlang

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables mutuellement indépendantes suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Vérifier que la somme $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est à densité et préciser une densité.

p. 17

3.2 Stabilité par somme des lois normales

PROPOSITION

somme de deux lois normales

Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes.} \\ \rightarrow X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \text{ et } X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2). \end{array} \right.$

Alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$

Exercice 7



◆◆ Preuve

1. On suppose dans cette question que $m_1 = m_2 = 0$. Prouver l'énoncé en adaptant le premier exemple de la section et en admettant l'égalité suivante :

$$-\frac{(x-t)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{t^2}{2\sigma_2^2} = -\frac{\sigma^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(t - \frac{\sigma_2^2}{\sigma^2} x \right)^2 - \frac{x^2}{2\sigma^2} \quad \text{où } \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \quad \text{p. 18}$$

2. En déduire le cas général avec m_1 et m_2 non nécessairement nuls.

VAD7

Exercice 8



On considère X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Soient $S = X + Y$ et $T = X - Y$.

1. Déterminer la loi de S puis celle de T .
2. On suppose que S et T sont indépendantes. Donner la loi de $S + T$. En déduire $\sigma_1 = \sigma_2$.

p. 18

VAD8

On en déduit par récurrence :

COROLLAIRE

somme de n lois normales

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$. Alors

$$X_1 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

Exemple. En particulier, retenons que si $(X_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est un vecteur aléatoire composé de variables mutuellement indépendantes et de loi identique $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors

$$\overline{X}_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1).$$

Remarque. Nous avons vu que les lois normales sont stables par transformations affines, ainsi toute combinaison linéaire de variables aléatoires suivant des lois normales restent une loi normale.

! Attention. La condition d'indépendance est nécessaire. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et Y une loi uniforme sur $\{-1; 1\}$ alors $XY \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, X et Y ne sont pas indépendantes. Par contre avec vérifie que $X + XY = (1 + Y)X$ ne suit même pas une loi normale. La variable n'est même pas à densité car $\mathbf{P}(X + XY = 0) = 1/2$.

4

Un exemple détaillé

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $]0; 1[$. On pose

$$Z = \frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)}.$$

Déterminons la loi de Z.

Simulation Python et conjecture

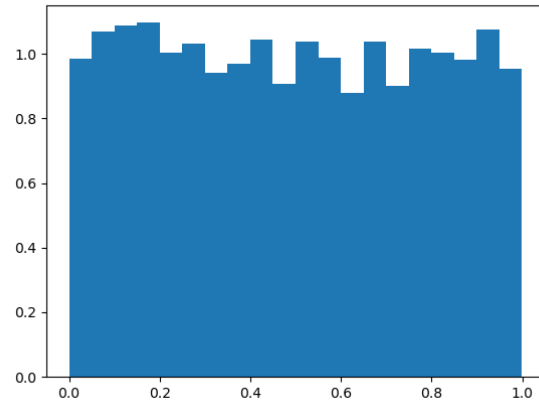
Editeur

```
import random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def simulation():
    X=rd.random()
    Y=rd.random()
    Z=min(X,Y)/max(X,Y)
    return Z

Ech=[]
for i in range(5000):
    Z=simulation()
    Ech.append(Z)

plt.clf()
plt.hist(Ech, bins=20, density=True)
plt.show()
```



De manière assez surprenante, la loi semble uniforme sur l'intervalle [0; 1]. Une preuve s'impose!

Exercice 9



◆ Une première approche?

Expliquer pourquoi le schéma de preuve suivant ne convient pas.

- Étape 1. Trouver, en reprenant la partie 1, la loi de $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$
- Étape 2. En déduire, en passant par la fonction de répartition, la loi de $\ln(U)$ et $-\ln(V)$.
- Étape 3. Appliquer le théorème de sommation pour obtenir la loi de

$$W = \ln(U/V) = \ln(U) + (-\ln(V)).$$

- Étape 4. Conclure, de nouveau avec la fonction de répartition, en obtenant la loi

$$Z = \exp(W).$$

p. 18

VAD9

Calcul de la loi

- Appliquons le logarithme afin d'avoir des sommes.

$$\begin{aligned} \ln(Z) &= \ln(\min\{X, Y\}) - \ln(\max\{X, Y\}) \\ &= \min\{\ln(X), \ln(Y)\} - \max\{\ln(X), \ln(Y)\} \quad \text{car } \ln \text{ est croissante} \\ &= -|\ln(X) - \ln(Y)|. \end{aligned}$$

- Donnons une densité de $\ln(Y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^-$. Soit $t \in \mathbb{R}^-$

$$\begin{aligned} F_{\ln(Y)}(t) &= \mathbf{P}(\ln(Y) \leq t) \\ &= \mathbf{P}(Y \leq e^t) \quad \text{car l'exponentielle est croissante} \\ &= F_Y(e^t) = e^t \quad \text{car } e^t \in]0; 1] \text{ et } F_Y(x) = x \text{ si } x \in [0; 1]. \end{aligned}$$

et $F_{\ln(Y)}(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}_*^+$. Par dérivation, une densité est

$$g(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En adaptant le résultat précédent, on constate que X est bien à densité avec une densité f donnée par

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit

$$-\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

- Soient $x, t \in \mathbb{R}$.

$$f(x-t)g(t) \neq 0 \iff \begin{cases} x-t \geq 0 \\ t \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t \leq x \\ t \leq 0. \end{cases}$$

Distinguons deux cas.

→ Si $x \in \mathbb{R}^+$, la condition devient $t \leq 0$ et le produit de convolution va être convergent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(x-t)}e^t dt = e^{-x} \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt = \frac{1}{2}e^{-x}.$$

→ Pour $x \in \mathbb{R}^-$, on a maintenant

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^x f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^x e^{-(x-t)}e^t dt \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^x e^{2t} dt = e^{-x} \left[\frac{1}{2}e^{2t} \right]_{-\infty}^x = \frac{1}{2}e^x. \end{aligned}$$

En résumé, on a convergence pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$f * g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

De plus, par le lemme de coalitions, les variables $\ln(X)$ et $-\ln(Y)$ sont indépendantes. Ensuite par le théorème de sommation $\ln(X) - \ln(Y)$ est une variable à densité et une densité est donnée par $h = f * g$.

Vocabulaire. On retrouve une loi de Laplace (voir exercice ??, p.??).

- Justifions maintenant que z est à densité et déterminons une densité. Soit H , la fonction de répartition de $\ln(X) - \ln(Y)$. Soit $t \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbf{P}(Z \leq t) \\ &= \mathbf{P}(-\ln(Z) \geq -\ln(t)) \\ &= \mathbf{P}(|\ln(X) - \ln(Y)| \geq -\ln(t)) \\ &= 1 - \mathbf{P}(|\ln(X) - \ln(Y)| \leq -\ln(t)) \\ &= 1 - \mathbf{P}(-\ln(t) > \ln X - \ln Y > \ln t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(-\ln(t) \geq \ln X - \ln Y > \ln t) \\ F_Z(t) &= 1 - (H(-\ln(t)) - H(\ln(t))). \end{aligned}$$

Puis par dérivation, une densité est donnée sur $[0; 1]$ par

$$f_Z(t) = \frac{1}{t}H'(-\ln(t)) + \frac{1}{t}H'(\ln(t)) = \frac{1}{t}h(-\ln(t)) + \frac{1}{t}h(\ln(t)).$$

Après simplifications, on trouve simplement $f_Z(t) = 1$. Au final

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0; 1] \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est l'expression d'une densité d'une loi uniforme sur $[0, 1]$:

$$Z \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1]).$$

Exercice 10



Les questions sont indépendantes.

1. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([0; 1])$. Donner la loi de

$$T = -\ln(\max\{X, Y\}).$$

p. 18

2. Reprendre le problème avec trois variables aléatoires indépendantes X, Y, T suivant des lois uniformes sur $[0; 1]$ et

$$Z = \frac{\min(X, Y, T)}{\max(X, Y, T)}.$$

VAD10



Exercices



Compléments sur les variables à densité

Exercice 11. ♦ Anticiper la réponse de la machine à la suite des commandes suivantes :

VAD11

» Solution p. 19

Editeur

```
import numpy.random as rd
C=0
m=5000
for i in range(m):
    if rd.normal(0,1)<rd.normal(0,1):
        C+=1
print(C/m)
```

Exercice 12. ♦

VAD12

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1; 0\}$. On définit

$$Y_0 = X_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = \alpha Y_n + X_{n+1}.$$

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable Y_n suit une loi normale dont on précisera les paramètres.
3. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+p})$.

» Solution p. 19

Exercice 13. ♦♦

VAD13

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telles que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(b, \sigma^2)$. Prouver l'équivalence

$$\mathbf{P}(X \leq Y) \geq \frac{1}{2} \iff a \leq b.$$

» Solution p. 19

Exercice 14. ♦♦

Soient f, g deux fonctions positives non nulles bornées, continues et telles que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ soient convergentes. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(t) dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \right).$$

» Solution p. 20

Exercice 15. ♦♦

D'après oraux HEC 2013 # VAD16

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On note α , la probabilité que la matrice ci-dessous soit diagonalisable.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & X & 0 \\ Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$ et $\mathbf{P}(XY > 0)$.
2. Calculer α .

» Solution p. 20

Exercice 16. ♦♦ Soient X, Y , et Z trois variables aléatoires, indépendantes de même loi. On pose

VAD17

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad M(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

1. a)  Justifier que si $a + b + c \neq 0$ alors $M(a, b, c)$ est diagonalisable.
b) Comparer les événements $[X + Y + Z \neq 0]$ et "La matrice $M(X, Y, Z)$ est diagonalisable". En déduire la probabilité que la matrice aléatoire $M(X, Y, Z)$ soit diagonalisable lorsque les trois variables suivent des lois normales.
2.  Reprendre la question en supposant que $X + 1$, Y et Z suivent des lois de Poisson.

» Solution p. 21

Loi d'une somme, d'un maximum, d'un produit, etc

Exercice 17. ♦ Soient n un entier ≥ 2 et $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de densité f :

VAD18

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1, +\infty[\\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Étudier l'existence de $E(X_i)$ et $V(X_i)$. Les calculer si possible.
2. Soit $Y = \min_{1 \leq i \leq n} (X_i)$. Déterminer la loi de Y et étudier l'existence de $E(Y)$.
3. De même avec $Z = \max_{1 \leq i \leq n} (X_i)$.

» Solution p. 21

Exercice 18. ♦   **Maximum et loi de Gumbel**

VAD19

On dit que la variable X suit la loi de Gumbel si sa fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = e^{-e^{-x}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_n$ suivant chacune la loi de Gumbel. Montrer que la variable aléatoire Z définie par $Z = \max(X_1, \dots, X_n) - \ln n$ suit également la loi de Gumbel.
2. On considère maintenant une suite de variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivant chacune la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Posons $S_n = \max(Y_1, \dots, Y_n) - \ln n$. Montrer que l'on a, pour tout $x \geq 0$, la convergence suivante :

$$F_{S_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x) \quad \text{où } X \text{ suit une loi de Gumbel.}$$

» Solution p. 21

Exercice 19. ♦   **Loi d'un produit d'une variable discrète et d'une continue**

VAD20

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que X est une variable discrète à valeurs dans $\{-1; 1\}$ et que Y suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$. Donner la loi de $Z = XY$?

» Solution p. 22

Exercice 20. ♦ **Exemples avec les lois uniformes**

D'après EDHEC # VAD21

On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose : $Z = X + Y$.

1. a) Déterminer une densité de Z .
b) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, les événements $(Z > 1)$ et $(1 - x < Z \leq 1 + x)$ sont indépendants.
2. On pose : $T = \max(X, Y)$. On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
a) Montrer que T est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de T .
b) En déduire que T possède une espérance et la déterminer.
3. On pose : $U = |X - Y|$ et on admet que U est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que U est combinaison linéaire de Z et T , puis en déduire l'espérance de U .

» Solution p. 22

Exercice 21. ♦ **Loi d'une différence de lois exponentielles**

D'après Ecricome # VAD22

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b .

1. Déterminer la fonction de répartition, puis donner une densité de la variable $T = -X$.
2. Montrer que $Y - X$ admet une densité, notée h , définie par :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{ab}{a+b} e^{-bt}, & \text{pour } t > 0 \\ \frac{ab}{a+b} e^{at}, & \text{pour } t \leq 0. \end{cases}$$

3. On considère la variable $Z = |Y - X|$.

- a) Montrer que pour tout $s \in [0, +\infty[$, $\mathbf{P}(Z \leq s) = 1 - \frac{be^{-as} + ae^{-bs}}{a+b}$.
- b) Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Z .
- c) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

>> Solution p. 23

Exercice 22. ♦♦ Lois de Pareto et produit

VAD23

Pour $a \in \mathbb{R}_*^+$, on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(t) = \begin{cases} \frac{a}{t^{a+1}} & \text{si } t \in [1; +\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Vérifier que f_a est une densité de probabilité.
On dit qu'une variable X suit une loi de Pareto de paramètre a si X admet f_a comme densité.
2. Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Pareto de paramètre a . Justifier que le produit $X_1 \dots X_n$ est une variable à densité, et en donner une densité.

>> Solution p. 24

Exercice 23. ♦♦ Loi de la partie fractionnaire

VAD24

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Donner la loi de $[X]$. Préciser son espérance et sa variance.
2. Démontrer que la variable $Y = X - [X]$ est à densité et donner une densité.

>> Solution p. 24

Exercice 24. ♦♦ Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de la loi $\mathcal{E}(1)$.

VAD25

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$. Vérifier que $X - \alpha Y$ est une variable à densité dont une densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x/\alpha}}{\alpha+1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^{-x}}{\alpha+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

2. Soit $Z = \frac{X}{Y}$. Vérifier que Z est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
3. Déterminer la loi de $\frac{X}{X+Y}$.

>> Solution p. 25

Exercice 25. ♦♦ Somme de lois uniformes

VAD26

Soient $Z, X_1, \dots, X_n$, $n+1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[0; 1]$.

1. Justifier que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une variable à densité et qu'il existe une densité f_n dont la restriction à $[0; 1]$ est donnée par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2. Calculer $\mathbf{P}(Z > X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.

>> Solution p. 25

Exercice 26. ♦♦ Un exemple sans l'hypothèse d'indépendance

VAD27

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0; 1]$.

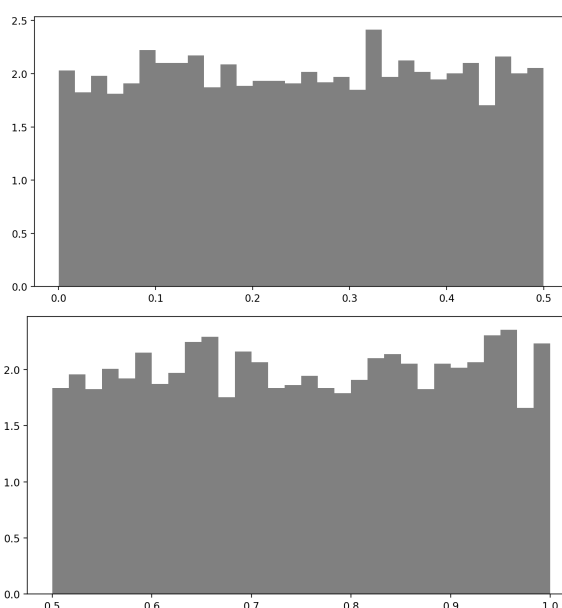
1. Déterminer la loi et l'espérance de $Y = \min(X, 1-X)$, ainsi que de $Z = \max(X, 1-X)$.
2. Vérifier que vos résultats sont en accord avec les simulations numériques suivantes :

Editeur

```
ech=np.zeros(5000)
for i in range(5000):
    x=np.random.rand()
    ech[i]=min(x,1-x)
plt.hist(ech,30,density=True)
plt.show()
```

Editeur

```
ech=np.zeros(5000)
for i in range(5000):
    x=np.random.rand()
    ech[i]=max(x,1-x)
plt.hist(ech,30,density=True)
plt.show()
```



3. Calculer, si elles existent, les espérances de X/Z et de X/Y .

Exercice 27. ♦♦♦ Minimum sur un nombre aléatoire de variables

#VAD28

On considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

- Donner la loi de U_n .
- Soit N une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On suppose que N est indépendant des X_k , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et on pose :

$$U_N = \min(X_1, \dots, X_N)$$

i.e. $U_N(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega))$, pour tout $\omega \in \Omega$. On admet que U_N est une variable aléatoire.

Déterminer la loi de U_N .

- Soient $q \in]0, 1[$ et $I(q) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-qt)^2} dt$.

- Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall t \in]0, 1/q[, \frac{1}{t(1-qt)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1-qt}$.
- En déduire l'existence et la valeur de $I(q)$.
- Conclure en montrant que U_N a une espérance que l'on calculera.
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $\varphi(t) = e^{-t}$.

>> Solution p. 26

Exercice 28. ♦♦♦ Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme continue sur $[0; 1]$. #VAD29

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires S_n et T_n :

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j \quad \text{et} \quad T_n = S_n - \lfloor S_n \rfloor.$$

- Vérifier que S_2 est à densité et donner une densité.
- Montrer que T_2 suit la loi uniforme sur $[0; 1]$.
- On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - \lfloor x \rfloor$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $h(h(S_n) + X_{n+1}) = T_{n+1}$.
 - En déduire que T_n suit la loi uniforme sur $[0; 1]$.

>> Solution p. 27

Problème 29. ♦♦♦ Lois de Cauchy

- Préliminaire sur la loi de Cauchy

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_a par : $f_a(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$.

- a) Montrer que f_a est une densité de probabilité.

Dans la suite, X est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ admettant f_a pour densité. On dit alors que X suit une loi de Cauchy de paramètre a et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$.

- b) Donner la fonction de répartition de X .

- c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$. Reconnaître la loi de λX lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{C}(a)$.

2. Quotient de lois normales centrées

Soient N et N' deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

- a) Montrer que la variable aléatoire $Z = \ln |N|$ est une variable aléatoire à densité, et en déterminer une densité. Quelle est une densité de la variable aléatoire $-Z$?

- b) Montrer qu'une densité h de la variable aléatoire $\ln |N/N'|$ est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

- c) i) En déduire que la fonction de répartition de $U = |N/N'|$ est donnée par $F_U(x) = 2 \arctan(x) / \pi \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

- ii) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathbf{P}(N/N' = x) = 0$. En remarquant que N et $-N$ ont même loi, déduire que $G(x) + G(-x) = 1$ où G désigne la fonction de répartition de N/N' .

- iii) Conclure en montrant que $N/N' \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$.

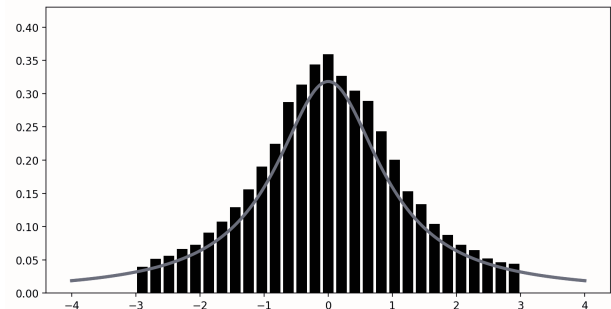
3. Proposer une fonction python qui simule une loi de Cauchy de paramètre 1, puis de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$.

4. À l'aide du code suivant, que peut-on conjecturer sur la loi de $1/X$ si $X \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$? Prouver la conjecture.

>> Solution p. 28

Editeur

```
plt.clf()
X=np.zeros(50000)
for iter in range(50000):
    X[iter]=1/Cauchy()
plt.hist(X,np.linspace(-3,3,30),density=
    True,rwidth=0.8,color='k')
x=np.linspace(-4,4,200)
plt.plot(x,1/(np.pi*(1+x**2)),linewidth=3)
plt.show()
```



Compléments

Problème 30. ♦♦ Maximum de loi normale

D'après EDHEC 2006 #VADp2

On considère deux variables aléatoires X et Y , définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ).

On pose $Z = \max(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z , ainsi que son espérance et sa variance.

1. a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

- b) Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x).$$

2. a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$.

- b) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

- c) En remarquant que, pour tout réel $x, \varphi'(x) = -x\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\int_0^{+\infty} xf(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

- d) Montrer de même que : $\int_{-\infty}^0 xf(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt$. En déduire que Z a une espérance et donner sa valeur.

3. a) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

- b) Déterminer $\mathbf{E}(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z .

>> Solution p. 29



Indications et solutions



Indication de l'exercice 1

p. 2

2. Partir de la relation $\max(X, Y) + \min(X, Y) = X + Y$ pour calculer l'espérance du maximum.

Indication de l'exercice 5

p. 5

Justifier que $Z = X - Y$ est une variable à densité. Si $a \in \mathbb{R}$, que dire de $\mathbf{P}(Z = a)$?

Indication de l'exercice 6

p. 6

Se souvenir que si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Indication de l'exercice 7

p. 7

2. On rappelle qu'une combinaison linéaire non nulle de variables aléatoires indépendantes et de lois normales suit encore une loi normale.

Indication de l'exercice 16

p. 12

- 1.a) Remarquer que $M(a, b, c)$ est de rang 1. Que peut-on en déduire sur le spectre? De plus, si $U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ne contient que des "1", calculer $M(a, b, c)U$.
2. Affiner le résultat de la question 1.a). $M(a, b, c)$ est diagonalisable si c'est la matrice nulle ou $a + b + c \neq 0$.

Indication de l'exercice 19

p. 12

Appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements

$$([X = -1], [X = 1]).$$

Indication de l'exercice 22

p. 13

2. $\rightarrow$ Si X suit une loi de Pareto vérifier que

$$\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(a).$$

- $\rightarrow$ En déduire la loi de $a \ln(X_1 \dots X_n)$.
 $\rightarrow$ Par passage à l'exponentielle, conclure en montrant que $X_1 \dots, X_n$ est à densité et en déduire une densité.

Indication de l'exercice 25

p. 13

Noter que l'on ne détermine pas f_n sur tout son ensemble de définition, mais seulement sur $[0; 1]$. Procéder par récurrence.

Indication de l'exercice 26

p. 13

Appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements

$$([X \leq 1/2], [X > 1/2]).$$

Indication de l'exercice 27

p. 14

2. Appliquer une nouvelle fois la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([N = n])_n$ pour se ramener à la question précédente.

Indication de l'exercice 28

p. 14

2. Penser à la formule des probabilités totales avec $([S_2] = k)_{k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket}$ comme système complet d'événements.

- 3.b) Procéder par récurrence.

Exercice 1

p. 2

VAD1

1. En reprenant le calcul précédent, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1 - F_T(t) &= (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)) \\ &= e^{-\lambda t} \times e^{-\mu t} = e^{-(\lambda + \mu)t}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$F_T(t) = 1 - e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi,

$$T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda + \mu).$$

2. On sait que pour une loi exponentielle, l'espérance est bien définie et

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{E}(Y) = \frac{1}{\mu}, \quad \mathbf{E}(T) = \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

De plus $\max(X, Y) + \min(X, Y) = X + Y$.

Par linéarité, on en déduit que $\max(X + Y)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\max(X, Y)) &= \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(\min(X, Y)) \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

3. Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé suivant des lois exponentielles de paramètre λ_j . Si, de plus, les variables sont mutuellement indépendantes, alors on montre de même que

$$\min(X_1, \dots, X_n) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).$$

Exercice 2

p. 2

VAD2



Explication géométrique de l'égalité en loi.

Exercice 3

p. 3

VAD3

1. Soit M tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq |f(x-t)g(t)| \leq M|g(t)|.$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} M|g(t)| dt$ est convergente, donc par le critère de majoration $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Le premier point s'obtient par le changement de variable affine $u = x - t$, $du = -dt$, le second point traduit les propriétés de linéarité des intégrales convergentes.

Exercice 4

p. 4

VAD4

Précisons que les produits de convolution sont bien définis (question 1 de l'exercice 3).

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons

$$f * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)h(t) dt$$

$$\text{or } f(x-t)h(t) \neq 0 \iff t \in [0; 1].$$

On peut donc réduire le domaine d'intégration à $[0; 1]$.

$$\begin{aligned} f * h(x) &= \int_0^1 f(x-t)h(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+(x-t)^2} \times 1 dt \\ &= [\arctan(t-x)]_0^1 = \arctan(1-x) - \arctan(-x) \\ &= \arctan(x) + \arctan(1-x). \end{aligned}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons

$$g * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)g(t) dt.$$

Or

$$g(x-t)g(t) \neq 0 \iff \begin{cases} x-t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t \leq x \\ t \geq 0 \end{cases}.$$

On constate que cette condition est impossible pour $x < 0$ et dans ce cas

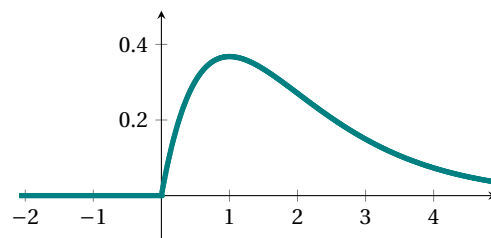
$$g * g(x) = 0.$$

Sinon, pour $x \in \mathbb{R}^+$, le domaine d'intégration se simplifie

$$\begin{aligned} g * g(x) &= \int_0^x g(x-t)g(t) dt = \int_0^x e^{-(x-t)} \cdot e^{-t} dt \\ &= \int_0^x e^{-x} dt = xe^{-x}. \end{aligned}$$

En résumé

$$g * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$



- Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons

$$g * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)h(t) dt.$$

Or

$$g(x-t)h(t) \neq 0 \iff \begin{cases} x-t \geq 0 \\ 1 \geq t \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t \leq x \\ t \geq 0 \\ t \leq 1 \end{cases}$$

Distinguons plusieurs cas.

→ Si $x < 0$, la condition précédente ne peut être réalisée et

$$g * h(x) = 0.$$

→ Si $x \in [0; 1]$, la condition se simplifie à $0 \leq t \leq x$ et

$$\begin{aligned} g * h(x) &= \int_0^x g(x-t)h(t) dt = \int_0^x e^{-(x-t)} \times 1 dt \\ &= e^{-x} \int_0^x e^t dt. \end{aligned}$$

$$\text{On trouve } g * h(x) = 1 - e^{-x}.$$

Pour $x > 1$, on a maintenant

$$\begin{aligned} g * h(x) &= \int_0^1 g(x-t)h(t) dt = \int_0^1 e^{-(x-t)} dt \\ &= [e^{t-x}]_0^1 = e^{1-x} - e^{-x} = e^{-x}(e - 1). \end{aligned}$$

Exercice 5

p. 5

VAD5

Appliquons le théorème de sommation :

- Les variables X et $-Y$ sont indépendantes.
 - Comme les densités sont bornées et d'intégrales absolument convergentes, le produit de convolution des densités est bien défini sur $\mathbb{R}$ (précisions à l'exercice 3).
- Alors $X - Y = X + (-Y)$ est une variable à densité. En particulier

$$\mathbf{P}(X = Y) = \mathbf{P}(X - Y = 0) = 0.$$

Exercice 6

p. 6

VAD6

D'après les résultats sur les transformations linéaires, on sait que si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Ainsi

$$\lambda(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \underbrace{\lambda X_1}_{\hookrightarrow \mathcal{E}(1)} + \underbrace{\lambda X_2}_{\hookrightarrow \mathcal{E}(1)} + \dots + \underbrace{\lambda X_n}_{\hookrightarrow \mathcal{E}(1)}$$

suit une loi $\gamma(n)$ (rappelons que les variables restant mutuellement indépendantes). On en déduit que la somme

$X_1 + \dots + X_n$ est bien une variable à densité et si f est une densité de $\gamma(n)$, une densité de

$$X_1 + \dots + X_n = \frac{1}{\lambda} (\lambda (X_1 + \dots + X_n))$$

est donnée par (détails page ??)

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1/\lambda} f\left(\frac{t}{1/\lambda}\right) = \lambda f(\lambda t).$$

Par exemple :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 7

p. 7

VAD7

1. Posons f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-t^2/(2\sigma_1^2)}, \quad g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-t^2/(2\sigma_2^2)}.$$

Les fonctions f et g sont des densités respectivement de $\mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$.

Soient $x, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x-t)g(t) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{t^2}{2\sigma_2^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(t - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}x\right) - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

est généralisée en $\pm\infty$. Effectuons le changement de variable affine :

$$u = \frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2} \left(t - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}x\right) \quad du = \frac{\sigma}{\sigma_1\sigma_2} dt.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2} - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) du \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du\right). \end{aligned}$$

Or on reconnaît dans le deuxième facteur, une densité de la loi normale centrée réduite. Il y a donc bien convergence (le deuxième facteur vaut 1) et par le théorème de changement de variable, on a même l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ sont indépendantes, le théorème de sommation s'applique. La variable $X_1 + X_2$ est à densité et une densité est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

On constate que

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ avec } \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

2. Utilisons maintenant les règles de transformations affines (p. ??)

$$X_1 + X_2 = \underbrace{(X_1 - m_1)}_{\hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)} + \underbrace{(X_2 - m_2)}_{\hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)} + m_1 + m_2.$$

D'après la question 1,

$$(X_1 - m_1) + (X_2 - m_2) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Le résultat s'en déduit en ajoutant $m_1 + m_2$.

Exercice 8

p. 7

VAD8

1. D'après le théorème précédent avec X, Y indépendant :

$$\begin{aligned} S &\hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \\ T &\hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 - m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2). \end{aligned}$$

2. D'une part,

$$S + T \hookrightarrow \mathcal{N}(2m_1, 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)).$$

D'autre part

$$S + T = 2X \hookrightarrow \mathcal{N}(2m_1, 4\sigma_1^2).$$

Nécessairement

$$2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 = 4\sigma_1^2$$

Sachant que $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$, il vient $\sigma_1 = \sigma_2$.

Exercice 9

p. 8

VAD9

À l'étape 3, on ne peut appliquer le théorème de sommation car les variables $\ln(U)$ et $-\ln(V)$ ne sont pas indépendantes. Si c'était le cas, d'après le lemme des coalitions, on montrerait que $\max(X, Y)$ et $\min(X, Y)$ serait indépendantes.

Exercice 10

p. 10

VAD10

1. Comme la fonction logarithme est croissante

$$\ln(\max\{X, Y\}) = \max\{\ln(X), \ln(Y)\}.$$

puis

$$T = \min\{-\ln(X), -\ln(Y)\}.$$

On vérifie que

$$-\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \quad \text{et} \quad -\ln(Y) \hookrightarrow \mathcal{E}(1).$$

En reprenant l'étude de l'exercice 1, il vient

$$T \hookrightarrow \mathcal{E}(2).$$

2.

Exercice 11

p. 11

VAD11

Le programme compte le nombre de succès dans 5000 tests de $[X < Y]$ où

$$X, Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1).$$

Comme les simulations sont supposées indépendantes, X et Y le sont. Finalement, on a une approximation de

$$\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(X - Y < 0).$$

Comme X et Y sont deux variables indépendantes, on sait que $X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 2)$. Finalement

$$\mathbf{P}(X < Y) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 12

p. 11

VAD12

1. • Par linéarité de l'espérance.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(Y_{n+1}) &= \alpha \mathbf{E}(Y_n) + \mathbf{E}(X_{n+1}) \\ &= \alpha \mathbf{E}(Y_n). \end{aligned}$$

Or $\mathbf{E}(Y_0) = \mathbf{E}(X_0) = 0$. On reconnaît une suite géométrique de premier terme 0. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(Y_n) = 0.$$

- Par les propriétés de la variance

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Y_{n+1}) &= \mathbf{V}(\alpha Y_n + X_{n+1}) \\ &= \alpha^2 \mathbf{V}(Y_n) + \mathbf{V}(X_{n+1}). \end{aligned}$$

Car X_{n+1} est indépendant de $X_0 \dots X_n$ et donc de toute fonction de $X_0, \dots, X_n$, en particulier Y_n (lemme des coalitions). D'où

$$\mathbf{V}(Y_{n+1}) = \alpha^2 \mathbf{V}(Y_n) + 1.$$

Posons $u_n = \mathbf{V}(Y_n)$ de sorte que u soit une suite arithmético-géométrique. Un point fixe est

$$\ell = \alpha^2 \ell + 1 \iff \ell = \frac{1}{1 - \alpha^2}.$$

$$\text{Ainsi} \quad \begin{cases} u_{n+1} &= \alpha^2 u_n + 1 \\ \ell &= \alpha^2 \ell + 1 \end{cases}$$

Par différence des deux lignes

$$u_{n+1} - \ell = \alpha^2 (u_n - \ell).$$

On reconnaît une suite géométrique de raison α^2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \ell = \alpha^{2n} (u_0 - \ell).$$

Sachant que $u_0 = \mathbf{V}(X_0) = 1$ et

$$\begin{aligned} u_0 - \ell &= 1 + \frac{1}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \\ \mathbf{V}(Y_n) &= \frac{1}{1 - \alpha^2} + \alpha^{2n} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \\ &= \frac{1}{1 - \alpha^2} (1 - \alpha^{2(n+1)}). \end{aligned}$$

Notons que l'on peut aussi écrire

$$\mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{1 - \alpha^2} (1 - \alpha^2) \sum_{k=0}^n \alpha^{2k} = \sum_{k=0}^n \alpha^{2k}.$$

Notons que cette expression est aussi valable pour $\alpha = \pm 1$.

2. Procéder par récurrence. Pour l'hérédité :

- Y_n et X_{n+1} sont indépendantes.
- Y_n et X_{n+1} suivent des lois normales alors toutes combinaisons linéaires suivent une loi normale. Ainsi

$$Y_{n+1} = \alpha Y_n + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{E}(Y_{n+1}), \mathbf{V}(Y_{n+1})).$$

Avec la question 1,

$$Y_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sum_{k=0}^{n+1} \alpha^{2k}\right).$$

Remarque. On peut aussi écrire

$$Y_n = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} X_k$$

et utiliser les propriétés de stabilité des lois normales sans utiliser les suites arithmético-géométriques.

3. On a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) &= \text{Cov}(Y_n, \alpha Y_n + X_{n+1}) \\ &= \text{Cov}(Y_n, \alpha Y_n) + \text{Cov}(Y_n, X_{n+1}) \\ &= \alpha \mathbf{V}(Y_n) + 0 \end{aligned}$$

car Y_n et X_{n+1} sont indépendants. Puis

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_n, Y_{n+2}) &= \text{Cov}(Y_n, \alpha Y_{n+1} + X_{n+2}) \\ &= \alpha \text{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) + \text{Cov}(Y_n, X_{n+2}) \\ &= \alpha^2 \mathbf{V}(Y_n) + 0. \end{aligned}$$

Ces deux exemples permettent de conjecturer

$$\text{Cov}(Y_n, Y_{n+p}) = \alpha^p \mathbf{V}(Y_n).$$

Ce qu'on montre par récurrence.

Exercice 13

p. 11

VAD13

- Méthode 1 (par le calcul).

La variable $X - Y$ suit une loi normale d'espérance :

$$\mathbf{E}(X - Y) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y) = a - b$$

et de variance

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X - Y) &= \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(-Y) \quad \text{indépendance} \\ &= \mathbf{V}(X) + (-1)^2 \mathbf{V}(Y) = 2\sigma^2. \end{aligned}$$

D'une part

$$\mathbf{P}(X \leq Y) = \mathbf{P}(X - Y \leq 0) = F(0).$$

Où F est la fonction de répartition de $X - Y$. D'autre part, pour une loi normale,

$$\frac{1}{2} = \mathbf{P}(X - Y \leq \mathbf{E}(X - Y)) = \mathbf{P}(X - Y \leq a - b) = F(a - b).$$

Comme F est strictement croissante

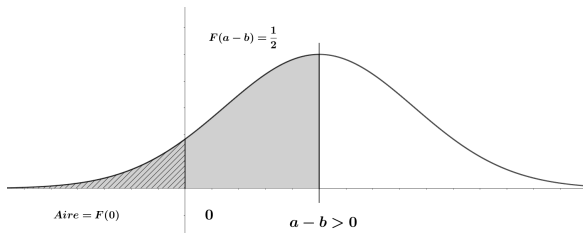
$$a - b \leq 0 \iff F(a - b) \leq F(0).$$

D'où le résultat.

• *Méthode 2 (par une représentation graphique).*

Raisonnons par disjonction des cas :

→ Si $a - b > 0$



L'aire hachurée est inférieure à l'aire grisée

$$\mathbf{P}(X \leq Y) = F(0) \leq F(a - b) = \frac{1}{2}.$$

→ Si $a - b < 0$, c'est l'opposé.

Exercice ??

p. ??

VAD14

Exercice 14

p. 11

VAD15

Posons

$$\bar{f} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt} \cdot f \quad \text{et} \quad \bar{g} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt} \cdot g.$$

On vérifie que $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont deux densités de probabilités. Soient X et Y deux variables indépendantes à densité avec $\bar{f}$ une densité de X et $\bar{g}$, une densité de Y . Les hypothèses du théorème de sommation sont alors vérifiées et une densité de $X + Y$ est donnée par

$$\bar{f} * \bar{g} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt} \times \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt} f * g.$$

En particulier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f} * \bar{g}(x) dx = 1$$

et le résultat s'en déduit.

Exercice 15

p. 11

VAD16

1. La variable $X - Y$ suit une loi normale. En particulier, c'est une variable à densité et

$$\mathbf{P}(X = Y) = \mathbf{P}(X - Y = 0) = 0.$$

Remarque. On a vu une généralisation à l'exercice 5.

Les événements $[Y \geq 0]$ et $[Y < 0]$ forment un système complet d'événements, on a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(XY > 0) &= \mathbf{P}([XY > 0] \cap [Y \geq 0]) + \mathbf{P}([XY > 0] \cap [Y < 0]) \\ &= \mathbf{P}([X > 0] \cap [Y > 0]) + \mathbf{P}([X < 0] \cap [Y < 0]) \\ &= \mathbf{P}([X > 0]) \cdot \mathbf{P}([Y > 0]) + \mathbf{P}([X < 0]) \cdot \mathbf{P}([Y < 0]) \\ &= \frac{1}{2} \quad \text{par indépendance.} \end{aligned}$$

2. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on pose

$$M(a, b) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Justifions que $M(a, b)$ est diagonalisable si et seulement si

$$a = b = 0 \quad \text{ou} \quad ab > 0.$$

On a

$$\begin{aligned} M(a, b)^2 &= \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On constate que $(x^2 - ab)x$ est annulateur de $M(a, b)$. Donc

$$\text{Sp}(M(a, b)) \subset \{0\} \quad \text{si} \quad ab \leq 0$$

$$\text{et} \quad \text{Sp}(M(a, b)) \subset \{0, \sqrt{ab}, -\sqrt{ab}\} \quad \text{si} \quad ab > 0.$$

Dans le premier cas, il n'y a qu'une valeur propre possible. Dès lors, $M(a, b)$ est diagonalisable si et seulement si $M(a, b)$ est la matrice nulle, c'est-à-dire $a = b = 0$.

Dans le second cas, étudions l'espace propre associé à la valeur propre $\sqrt{ab}$. Il vient

$$\begin{aligned} X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_{\sqrt{ab}} &\iff \begin{cases} ay = \sqrt{ab}x \\ bx = \sqrt{ab}y \\ 0 = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \sqrt{\frac{b}{a}}x \\ bx = \sqrt{ab}y \\ 0 = z \end{cases} \\ &\iff X = \begin{bmatrix} x \\ \sqrt{\frac{b}{a}}x \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{b/a} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

et

$$\dim E_{\sqrt{ab}} = 1.$$

De même, on montre que

$$\dim E_{-\sqrt{ab}} = 1 \quad \text{et} \quad \dim E_0 = 1.$$

On constate que la somme des dimensions des espaces propres vaut la dimension de l'espace total. Ainsi $M(a, b)$ est diagonalisable. Ce qui prouve l'équivalence.

Nous pouvons donc conclure cet exercice :

$$\alpha = \underbrace{\mathbf{P}([X = Y = 0])}_{=0} + \underbrace{\mathbf{P}([XY > 0])}_{=1/2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 16

p. 12

VAD17

1.a) Comme les colonnes sont proportionnelles

$$\text{rg}(M(a, b, c)) \leq 1.$$

De plus, a , b et c ne peuvent être simultanément nuls. $M(a, b, c)$ n'est pas la matrice nulle :

$$\text{rg}(M(a, b, c)) = 1.$$

Par la formule du rang, 0 est valeur propre et l'espace propre est de dimension 2. De plus :

$$M(a, b, c) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (a + b + c) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $a + b + c \neq 0$ est une autre valeur propre. Par un compte des dimensions, on peut affirmer que $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

1.b) Notons A l'événement " $M(X, Y, Z)$ est une matrice diagonalisable". D'après ce qui précède

$$[X + Y + Z \neq 0] \subset A.$$

Par croissance de la probabilité

$$\mathbf{P}(X + Y + Z \neq 0) \leq \mathbf{P}(A) \leq 1.$$

Or, par les règles de stabilités de variables indépendantes de lois normales, $X + Y + Z$ est une variable aléatoire de loi normale. En particulier, $X + Y + Z$ est une variable à densité et

$$\mathbf{P}(X + Y + Z \neq 0) = 1 - \mathbf{P}(X + Y + Z = 0) = 1.$$

On a donc $\mathbf{P}(A) = 1$.

2. Affinons la condition de diagonalisabilité.

→ Si $a + b + c = 0$, $M(a, b, c)$ n'a que 0 comme valeur propre.

→ Si l'un des trois nombres a , b , c n'est pas nul, alors $\text{rg}(M(a, b, c)) = 1$, l'espace propre associé à 0 est de dimension 2 et non 3. On montre qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres et $M(a, b, c)$ n'est pas diagonalisable. Par contre, si $a = b = c = 0$, $M(a, b, c)$ est la matrice nulle qui est bien diagonalisable.

Résumons $M(a, b, c)$ est diagonalisable si $a = b = c = 0$ ou si $a + b + c \neq 0$.

• Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

$$X + 1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha), \quad Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\beta), \quad Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\gamma).$$

La stabilité par somme de variables indépendantes suivant des lois de Poisson donne

$$X + 1 + Y + Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha + \beta + \gamma).$$

On en déduit

$$\mathbf{P}(X + Y + Z \neq 0) = \mathbf{P}(X + 1 + Y + Z \neq 1)$$

$$= 1 - \mathbf{P}(X + 1 + Y + Z = 1)$$

$$\mathbf{P}(X + Y + Z \neq 0) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) e^{-(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Ensuite

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}([X = 0] \cap [Y = 0] \cap [Z = 0]) \\ &= \mathbf{P}(X = 0) \mathbf{P}(Y = 0) \mathbf{P}(Z = 0) \quad (\text{indépendance}) \\ &= \alpha e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta} \cdot e^{-\gamma}. \end{aligned}$$

$$\text{Car} \quad \mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X + 1 = 1) = \frac{\alpha^1}{1!} e^{-\alpha}.$$

Concluons : l'événement "la matrice $M(X, Y, Z)$ est diagonalisable" est réalisé si l'événement $[X = 0] \cap [Y = 0] \cap [Z = 0]$ est réalisé ou $X + Y + Z \neq 0$ est réalisé. Comme ces deux derniers événements sont incompatibles, la probabilité que la matrice soit diagonalisable est la somme des probabilités des deux événements. Soit

$$\begin{aligned} p &= 1 - (\alpha + \beta + \gamma) e^{-(\alpha + \beta + \gamma)} + \alpha e^{-(\alpha + \beta + \gamma)} \\ &= 1 - (\beta + \gamma) e^{-(\alpha + \beta + \gamma)}. \end{aligned}$$

Exercice 17

p. 12

VAD18

...

Exercice 18

p. 12

VAD19

1. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F_Z(x) = \mathbf{P}(Z \leq x) = \mathbf{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x + \ln(n)).$$

Comme X suit une loi de Gumbel, il vient

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= F_X(x + \ln(n))^n \\ &= \left(e^{-e^{-(x + \ln(n))}} \right)^n \\ &= \left(e^{-e^{-x}/n} \right)^n = e^{-e^{-x}}. \end{aligned}$$

Comme la fonction caractérise la loi de répartition, Z suit également une loi de Gumbel.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} F_{S_n}(x) &= \mathbf{P}(S_n \leq x) = \mathbf{P}(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leq x + \ln(n)) \\ &= \left(\mathbf{P}(Y_1 \leq x + \ln(n)) \right)^n \\ &= \left(1 - e^{-(x + \ln(n))} \right)^n \\ F_{S_n}(x) &= \left(1 - \frac{1}{n} e^{-x} \right)^n. \end{aligned}$$

Calculons la limite.

$$\begin{aligned} \ln F_{S_n}(x) &= n \ln \left(1 - \frac{1}{n} e^{-x} \right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \left(-\frac{1}{n} e^{-x} \right) = -e^{-x} \neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\ln F_{S_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -e^{-x}$ et par continuité de la fonction exponentielle :

$$F_{S_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-e^{-x}}.$$

Ce qui conclut.

Exercice 19

p. 12

VAD20

Posons $p \in]0; 1[$ tel que

$$\mathbf{P}(X = -1) = p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = 1 - p.$$

Le système $([X = -1], [X = 1])$ est un système complet d'événements et d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z \leq x) &= \mathbf{P}([Z \leq x] \cap [X = 1]) \\ &\quad + \mathbf{P}([Z \leq x] \cap [X = -1]) \\ &= \mathbf{P}([Y \leq x] \cap [X = 1]) \\ &\quad + \mathbf{P}([Y \geq -x] \cap [X = -1]). \end{aligned}$$

Comme les variables X et Y sont indépendantes, on poursuit par

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z \leq x) &= \mathbf{P}(Y \leq x) \mathbf{P}(X = 1) \\ &\quad + \mathbf{P}(Y \geq -x) \mathbf{P}(X = -1). \end{aligned}$$

En notant Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z \leq x) &= \Phi(x) \cdot p + (1 - \Phi(-x))(1 - p) \\ &= \Phi(x)p + \Phi(x)(1 - p) \\ \mathbf{P}(Z \leq x) &= \Phi(x). \end{aligned}$$

Dès lors Φ est aussi la fonction de répartition de Z . Comme la fonction de répartition caractérise la loi,

$$Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1).$$

Exercice 20

p. 12

VAD21

1.a) Appliquons le théorème de sommation des variables à densité.

• X et Y sont indépendantes.

• Notons $f = \mathbf{1}_{[0;1]}$ une densité commune à X et Y . Soient $x, t \in \mathbb{R}$. On a

$$f(t)f(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq x-t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ x-1 \leq t \leq x \end{cases} \quad (*)$$

Distinguons quatre cas :

→ Si $x < 0$, alors la condition $(*)$ est impossible et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dt = 0.$$

→ Si $x > 1$, le cas est similaire au précédent et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt = 0.$$

→ Si $x \in [0; 1]$, la condition devient $0 \leq t \leq x$ et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt &= \int_0^x f(t)f(x-t) dt \\ &= \int_0^x 1 \cdot 1 dt = x. \end{aligned}$$

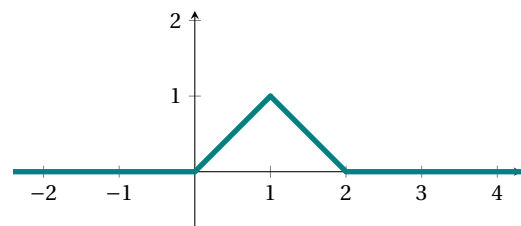
→ Si $x \in [1; 2]$, la condition devient $x-1 \leq t \leq 1$ et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt &= \int_{x-1}^1 f(t)f(x-t) dt \\ &= \int_{x-1}^1 1 dt = 1 - (x-1) = 2-x. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a convergence du produit de convolution, on peut donc affirmer que $X+Y$ est une variable à densité dont une densité h est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1; 2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voici le graphe de h :



1.b) On a

$$\mathbf{P}(Z > 1) = \int_1^{+\infty} h(t) dt = \int_1^2 h(t) dt = \int_1^2 2-t dt = \frac{1}{2}.$$

Et

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(1-x \leq Z \leq 1+x) &= \int_{1-x}^1 h(t) dt + \int_1^{1+x} h(t) dt \\ &= \int_{1-x}^1 t dt + \int_1^{1+x} 2-t dt \\ &\stackrel{u=2t-1}{=} - \int_{1+x}^1 u-2 du + \int_1^{1+x} 2-t dt \\ &= 2 \int_1^{1+x} 2-t dt = 2 \int_1^{1+x} h(t) dt \\ &= 2\mathbf{P}(1 < Z \leq 1+x). \end{aligned}$$

On constate que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z > 1)\mathbf{P}(1-x < Z \leq 1+x) &= \mathbf{P}(1 < Z \leq 1+x) \\ &= \mathbf{P}([Z > 1] \cap [1-x < Z \leq 1+x]). \end{aligned}$$

C'est la définition de l'indépendance des événements.

2.a) En reprenant la démonstration du cours (le faire), T est une variable à densité et une densité est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_T(x) = 2f(x)F(x)$$

où F est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0; 1]$ et f , une densité. Il vient par exemple

$$f_T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.b) On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) dt = \int_0^1 t \cdot 2t dt = \left[\frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Précisons que la convergence absolue est claire, l'espérance de T existe et

$$E(T) = \frac{2}{3}.$$

3. On sait que si $x, y \in \mathbb{R}$ alors

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

(pour le vérifier, on peut procéder par disjonction des cas).
Dès lors

$$T = \frac{Z + U}{2}$$

ou encore $U = 2T - Z$.

Comme T et Z admettent une espérance, U aussi et

$$\begin{aligned} E(U) &= 2E(T) - E(Z) = 2E(T) - 2E(X) \\ &= 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 21

p. 12

VAD22

1. Par définition de la fonction de répartition, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{-X}(x) &= P([-X \leq x]) = P([X \geq -x]) = 1 - P([X < -x]) \\ &= 1 - P([X \leq -x]) \quad X \text{ à densité} \\ &= 1 - F_X(-x). \end{aligned}$$

Or $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$, $F_X(x) = 1 - e^{-ax}$ si $x \geq 0$ et $F_X(x) = 0$ si $x < 0$. Il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{-X}(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En dérivant sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, on en déduit une densité de $-X$:

$$f_{-X}(x) = \begin{cases} ae^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

2. Comme X, Y sont indépendantes, Y et $-X$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. Appliquons le théorème de sommation. Soient $x, t \in \mathbb{R}$,

$$f_Y(t)f_{-X}(x-t) \neq 0 \iff \begin{cases} t \geq 0 \\ x-t \leq 0 \end{cases}$$

On procède par disjonction des cas.

→ Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. La condition de vient $t \geq x$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_x^{+\infty} be^{-bt} ae^{a(x-t)} dt \\ &= abe^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-(a+b)t} dt \\ &= \frac{abe^{-bx}}{a+b}. \end{aligned}$$

→ Soit $x \in \mathbb{R}_*^-$. La condition est simplement $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^{+\infty} be^{-bt} ae^{a(x-t)} dt \\ &= abe^{ax} \int_0^{+\infty} e^{-(a+b)t} dt \\ &= \frac{abe^{ax}}{a+b}. \end{aligned}$$

On a bien convergence du produit de convolution. Par conséquent, on en déduit que $Y - X$ admet une densité h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{ab}{a+b} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ \frac{ab}{a+b} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

3.(a) On a

$$\begin{aligned} P([Z \leq s]) &= P([|Y - X| \leq s]) \\ &= P([-s \leq Y - X \leq s]) = F_{Y-X}(s) - F_{Y-X}(-s). \end{aligned}$$

D'après les propriétés des fonctions de répartition, il vient

$$P([Z \leq s]) = F_{Y-X}(s) - F_{Y-X}(-s) = \int_{-s}^s h(t) dt.$$

D'après la relation de Chasles, on trouve que

$$\begin{aligned} P([Z \leq s]) &= \int_{-s}^0 h(t) dt + \int_0^s h(t) dt \\ &= \int_{-s}^0 \frac{ab}{a+b} e^{at} dt + \int_0^s \frac{ab}{a+b} e^{-bt} dt \\ &= \left[\frac{b}{a+b} e^{at} \right]_{-s}^0 + \left[-\frac{a}{a+b} e^{-bt} \right]_0^s \\ &= \frac{b}{a+b} - \frac{b}{a+b} e^{-as} - \frac{a}{a+b} e^{-bs} + \frac{a}{a+b} \\ &= \frac{a+b}{a+b} - \frac{be^{-as} + ae^{-bs}}{a+b}. \end{aligned}$$

D'où pour tout $s \geq 0$:

$$P([Z \leq s]) = 1 - \left(\frac{be^{-as} + ae^{-bs}}{a+b} \right).$$

3.(b) Montrons que Z est une variable aléatoire à densité et précisons une densité. Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $s \mapsto P([Z \leq s])$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, comme combinaison linéaire de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme de plus $Z = |X - Y|$, on voit que

$$\forall s < 0, \quad P([Z \leq s]) = 0,$$

et donc $s \mapsto P([Z \leq s])$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ vu qu'elle y est nulle. En outre, on voit que :

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} P([Z \leq s]) = 0$$

et

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} P([Z \leq s]) = \lim_{s \rightarrow 0^+} 1 - \frac{be^{-as} + ae^{-bs}}{a+b} = 0,$$

d'où il s'ensuit que $P([Z \leq s])$ tend vers 0 = $P([Z \leq 0])$ quand s tend vers 0, et donc la fonction $s \mapsto P([Z \leq s])$ est continue en 0. Mais alors la fonction de répartition de Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$, ce qui entraîne que Z est une variable aléatoire à densité. En outre, comme la fonction de répartition de Z est donnée pour tout $s \in \mathbb{R}$ par :

$$F_Z(s) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{be^{-as} + ae^{-bs}}{a+b} \right) & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases},$$

il s'ensuit par dérivation sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ qu'une densité de Z est donnée pour tout $s \in \mathbb{R}$ par :

$$f_Z(s) = \begin{cases} \frac{ab(e^{-as} + e^{-bs})}{a+b} & \text{si } s \geq 0 \\ 0 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

3.c) Montrons que Z admet une espérance et calculons-la. D'après le cours, on sait que Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} s f_Z(s) ds$ converge absolument. Mais comme $f_Z(s) = 0$ pour tout $s \leq 0$ et que $s f_Z(s) \geq 0$ pour tout $s \geq 0$, ceci revient à montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} s f_Z(s) ds$ converge. Pour établir cette convergence, on considère un réel $c > 0$. Alors, par linéarité de l'intégrale, on voit que :

$$\begin{aligned} \int_0^c s f_Z(s) ds &= \int_0^c \frac{sab(e^{-as} + e^{-bs})}{a+b} ds \\ &= \frac{ab}{a+b} \int_0^c s(e^{-as} + e^{-bs}) ds. \end{aligned}$$

Posons $u(s) = s$ et $v(s) = -\frac{e^{-as}}{a} - \frac{e^{-bs}}{b}$ pour tout $s \in [0, c]$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, c]$. Par intégration par parties, on trouve que :

$$\begin{aligned} &\int_0^c s(e^{-as} + e^{-bs}) ds \\ &= \int_0^c u(s)v'(s) ds \\ &= [u(s)v(s)]_0^c - \int_0^c u'(s)v(s) ds \\ &= \left[-\frac{se^{-as}}{a} - \frac{se^{-bs}}{b} \right]_0^c - \int_0^c \left[-\frac{e^{-as}}{a} - \frac{e^{-bs}}{b} \right] ds \\ &= -\frac{ce^{-ac}}{a} - \frac{ce^{-bc}}{b} - \frac{e^{-as}}{a^2} - \frac{e^{-bs}}{b^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \end{aligned}$$

Comme e^{-ac}, e^{-bc} tendent vers 0 quand c tend vers $+\infty$ et que ce^{-ac}, ce^{-bc} tendent aussi vers 0 quand c tend vers $+\infty$ par croissance comparée, cela entraîne que :

$$\int_0^c s(e^{-as} + e^{-bs}) ds \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

D'après ce qui précède, il vient

$$\int_0^{+\infty} s f_Z(s) ds = \frac{ab}{a+b} \times \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} s f_Z(s) ds$ converge et vaut $\frac{a^2+b^2}{ab(a+b)}$. Finalement, Z admet une espérance égale à

$$E(Z) = \frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)}.$$

Exercice 22

p. 13

VAD23

1. La fonction f_a est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus, pour $A \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^A f_a(t) dt &= \int_1^A f_a(t) dt = \int_1^A \frac{a}{t^{a+1}} dt \\ &= \left[-t^{-a} \right]_1^A \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

2. La fonction de répartition est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \frac{1}{t^a} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Posons $T = \ln(X)$. La variable T est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Si G est sa fonction de répartition, alors $G(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} G(t) &= \mathbf{P}(T \leq t) = \mathbf{P}(X \leq e^t) \\ &= F(e^t) = 1 - e^{-at}. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre a . Résumons, si X suit une loi de Pareto de paramètre a , alors $\ln(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre a .

Par transformation linéaire, on sait que $a \ln(X)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ suivent des lois de Pareto, alors

$$a \ln(X_1), a \ln(X_2), \dots, a \ln(X_n)$$

sont indépendantes et

$$a \ln(X_1) + a \ln(X_2) + \dots + a \ln(X_n) \hookrightarrow \gamma(n).$$

Puis $a \ln(X_1 X_2 \dots X_n) \hookrightarrow \gamma(n)$.

Si F_n désigne la fonction de répartition de la loi $\gamma(n)$, alors la fonction de répartition H du produit $X_1 \dots X_n$ vérifie pour tout $t \in]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} H(t) &= \mathbf{P}(X_1 \dots X_n \leq t) \\ &= \mathbf{P}(a \ln(X_1 \dots X_n) \leq a \ln(t)) \\ H(t) &= F_n(a \ln(t)). \end{aligned}$$

La fonction H est nulle sur $] -\infty, 1]$. On vérifie par les théorèmes généraux que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$. De plus

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} H(t) = H(1) = 0 = \lim_{t \rightarrow 1^-} H(t).$$

Cela prouve la continuité de H en 1 qui est donc continue sur tout $\mathbb{R}$. On en déduit que le produit $\prod_{i=1}^n X_i$ est une variable à densité et une densité est donnée par dérivation. Si on note f_n , une densité de la loi $\gamma(n)$, alors pour tout $t \in]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} H'(t) &= \frac{a}{t} F'_n(a \ln(t)) \\ &= \frac{a}{t} f_n(a \ln(t)) \\ &= \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{\Gamma(n)} (a \ln(t))^{n-1} e^{-(a \ln(t))} \\ &= \frac{a^n}{t \Gamma(n)} \ln(t)^{n-1} \cdot \frac{1}{t^a} \\ h(t) &= \frac{a^n}{(n-1)!} \cdot \frac{\ln(t)^{n-1}}{t^{a+1}}. \end{aligned}$$

Résumons, une densité du produit est donnée par

$$h(t) = \begin{cases} \frac{a^n}{(n-1)!} \cdot \frac{\ln(t)^{n-1}}{t^{a+1}} & \text{si } t > 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 23

p. 13

VAD24

...

Exercice 24

p. 13

VAD25

...

Exercice 25

p. 13

VAD26

1. Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « S_n est une variable à densité et une densité est donnée par f_n » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

→ *Initialisation.* Pour $n = 1$, S_1 suit une loi uniforme sur $[0; 1]$ et $\mathcal{P}(1)$ est automatiquement vérifiée.

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Appliquons le théorème de sommation à partir de

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$

→ Par le lemme des coalitions S_n (fonction de $X_1, \dots, X_n$) est indépendante de X_{n+1} .

→ Comme S_n est à valeurs dans $[0; n]$, f_n est continue sur $[0; n]$, le produit de convolution

$$f_n * f_1(x) = \int_0^n f_n(t) f_1(x-t) dt$$

est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier pour $x \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} f_n(t) f_1(x-t) \neq 0 &\iff \begin{cases} t \in [0; n] \\ x-t \in [0; 1] \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 0 \leq t \leq n \\ 0 \leq x-t \leq 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} 0 \leq t \leq n \\ x-1 \leq t \leq x \end{cases} \\ \iff 0 \leq t \leq x. \end{aligned}$$

Dès lors

$$f_n * f_1(x) = \int_0^x f_n(t) f_1(x-t) dt = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot 1 dt = \frac{x^n}{n!}.$$

Ainsi $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ est bien une variable à densité et il existe une densité f_{n+1} telle que sa restriction à $[0; 1]$ soit donnée par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1-1}}{(n+1-1)!}.$$

La propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée.

2. Appliquons de nouveau le théorème de sommation :

→ Les variables Z et $-(X_1 + \dots + X_n)$ sont indépendantes (lemme des coalitions);

→ La variable Z admet une densité bornée, ce qui justifie la convergence de

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x-t) g_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) g_n(x-t) dt$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ où g_n est une densité de $-(X_1 + \dots + X_n)$.

Dès lors $Z - (X_1 + \dots + X_n)$ est une variable à densité et une

densité est donnée par h . Précisons aussi (voir exercice ??) qu'une densité g_n est donnée par $g_n : t \in \mathbb{R} \mapsto f_n(-t)$.

Calculons maintenant $h(x)$ dans deux cas $x \geq 1$ et $x \in [0; 1]$.

→ Comme les variables Z et X_i sont à valeurs dans $[0; 1]$, $Z - X_1 - \dots - X_n$ est à valeurs dans $[-n; 1]$. En particulier, $h(x) = 0$ pour $x \geq 1$.

→ Soit $x \in [0; 1]$.

$$\begin{aligned} f(t) g_n(x-t) \neq 0 &\iff \begin{cases} t \in [0; 1] \\ -(x-t) \in [0; n] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ x \leq t \leq x+n. \end{cases} \iff x \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

On peut donc réduire l'intervalle d'intégration

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_x^1 f_Z(t) g_n(x-t) dt = \int_x^1 1 \times \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &= \int_0^{1-x} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} du = \left[\frac{u^n}{n!} \right]_0^{1-x} = \frac{(1-x)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z > X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= \mathbf{P}(Z - (X_1 + \dots + X_n) \geq 0) \\ &= \int_0^{+\infty} h(x) dx = \int_0^1 h(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} dx \underset{u=1-x}{=} \int_0^1 \frac{u^n}{n!} du \\ \mathbf{P}(Z > X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= \left[\frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Exercice 26

p. 13

VAD27

1. La variable Y est à valeurs dans $[0; 1/2]$. Ainsi, pour tout $t \leq 0$,

$F_Y(t) = 0$ et pour tout $t \geq 1/2$, $F_Y(t) = 1$.

Soit $t \in [0; 1/2]$

$$F_Y(t) = \mathbf{P}(Y \leq t) = \mathbf{P}([X \leq t] \cap [1-X \leq t]).$$

Posons $A = [X \leq \frac{1}{2}]$ de sorte que $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements. Lorsque A est réalisé, alors $Y = X$. Lorsque $\bar{A}$ est réalisé, $Y = 1 - X$. La formule des probabilités totales impose

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y \leq t) &= \mathbf{P}([Y \leq t] \cap A) + \mathbf{P}([Y \leq t] \cap \bar{A}) \\ &= \mathbf{P}([X \leq t] \cap A) + \mathbf{P}([1-X \leq t] \cap \bar{A}) \\ &= \mathbf{P}([X \leq t] \cap [X \leq \frac{1}{2}]) + \mathbf{P}([X \geq 1-t] \cap [X \geq \frac{1}{2}]) \\ &= \mathbf{P}(X \leq t) + \mathbf{P}(1-t \leq X) \quad \text{car } t \in [0; 1/2]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(1-t \leq X) &= 1 - \mathbf{P}(X < 1-t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(X \leq 1-t) \quad X \text{ à densité} \\ &= 1 - F_X(1-t). \end{aligned}$$

Finalement pour $t \in [0; \frac{1}{2}]$, on obtient à partir de la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0; 1]$

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= F_X(t) + 1 - F_X(1-t) \\ &= t + 1 - (1-t) = 2t. \end{aligned}$$

On obtient une loi uniforme sur $[0; 1/2]$. D'où

$$Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1/2]).$$

L'espérance de Y existe et vaut 1/4.

On procède de même pour le maximum. Pour tout $t \leq 1/2$, $F_Z(t) = 0$ et pour tout $t \geq 1$, $F_Z(t) = 1$.

Soit $t \in [1/2; 1]$

$$F_Z(t) = \mathbf{P}(Z \leq t) = \mathbf{P}([X \leq t] \cap [1 - X \leq t]).$$

Lorsque A est réalisé, alors $Z = 1 - X$, lorsque $\bar{A}$ est réalisé, $Z = X$. La formule des probabilités totales impose

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z \leq t) &= \mathbf{P}([Z \leq t] \cap A) + \mathbf{P}([Z \leq t] \cap \bar{A}) \\ &= \mathbf{P}([1 - X \leq t] \cap A) + \mathbf{P}([X \leq t] \cap \bar{A}) \\ &= \mathbf{P}([1 - X \leq t] \cap [X \leq \frac{1}{2}]) + \mathbf{P}([X \leq t] \cap [X \geq \frac{1}{2}]) \\ &= \mathbf{P}(1 - t \leq X \leq \frac{1}{2}) + \mathbf{P}(\frac{1}{2} \leq X \leq t). \end{aligned}$$

On poursuit le calcul avec la fonction de répartition d'une loi uniforme :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z \leq t) &= F(1/2) - F(1 - t) + F(t) - F(1/2) \\ &= -(1 - t) + t = 2t - 1 \\ &= \frac{t - 1/2}{1 - 1/2}. \end{aligned}$$

On reconnaît ainsi la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[1/2; 1]$. D'où

$$Z \hookrightarrow \mathcal{U}([1/2; 1]).$$

L'espérance de Z existe et vaut 3/4.

2. Le programme simule les variables Y et Z. On constate bien que les histogrammes sont proches des courbes de densités des lois uniformes continues sur $[0; 1/2]$ et $[1/2; 1]$.

3. D'après la formule de transfert, la variable X/Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t}{\max(t, 1-t)} dt$$

est absolument convergente (convergente suffit car l'intégrande est positive). Pour $t \in [0; 1/2]$, $\max(t, 1-t) = 1-t$, et pour $t \in [1/2; 1]$, $\max(t, 1-t) = t$. On constate que l'intégrande est continue sur $[0; 1]$, l'espérance existe et par la relation de Chasles

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\frac{X}{Z}\right) &= \int_0^1 \frac{t}{\max(t, 1-t)} dt \\ &= \int_0^{1/2} \frac{t}{1-t} dt + \int_{1/2}^1 \frac{t}{t} dt \\ &= \int_0^{1/2} \frac{t}{1-t} dt + \int_{1/2}^1 1 dt \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{1-t} - 1 dt + \int_{1/2}^1 1 dt \end{aligned}$$

Après simplifications, il vient :

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{Z}\right) = \ln(2).$$

On peut vérifier ce résultat en modifiant le code précédent :

```
ech=np.zeros(5000)
for i in range(5000):
    x=np.random.rand()
    ech[i]=x/max(x,1-x)

print(np.mean(ech))
print(np.log(2))

0.6913882960177902
0.6931471805599453
```

• Par contre, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t}{\min(t, 1-t)} dt$$

est divergente car on reconnaît au voisinage de 1, une intégrale de Riemann divergente :

$$\forall t \in [1/2; 1], \quad \frac{t}{\min(t, 1-t)} = \frac{1}{1-t}.$$

Par le théorème de transfert, X/Y n'admet pas d'espérance.

Exercice 27

p. 14

VAD28

1. En reprenant l'exercice 1, on montre que

$$U_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n).$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_{U_N}(x) = 0$.

La variable N est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $([N = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc un système complet d'événements. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} F_N(x) = \mathbf{P}(U_N \leq x) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}([U_N \leq x] \cap [N = n]) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}([U_n \leq x] \cap [N = n]). \end{aligned}$$

Or U_n , fonction de $X_1 \dots X_n$, est indépendant de N (lemme des coalitions). On peut donc poursuivre le calcul par :

$$\begin{aligned} F_{U_N}(x) &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{P}(U_n \leq x) \mathbf{P}(N = n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (1 - e^{-nx}) \cdot pq^{n-1} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} pq^{n-1} - \frac{p}{q} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (qe^{-x})^n \\ &= 1 - \frac{p}{q} \cdot \frac{qe^{-x}}{1 - qe^{-x}} \\ &= 1 - \frac{pe^{-x}}{1 - qe^{-x}} = 1 - \frac{p}{e^x - q}. \end{aligned}$$

→ F_{U_N} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes généraux.

→ On vérifie que F_{U_N} est continue en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_{U_N}(x) = F_{U_N}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_{U_N}(x).$$

Ainsi F_{U_N} est continue sur $\mathbb{R}$. Par définition, U_N est une variable à densité et une densité est obtenue en dérivant la fonction de répartition (là où c'est possible, ici sur $\mathbb{R}^*$)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{U_N}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{pe^t}{(e^t - q)^2} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

3.a) Par réduction au même dénominateur, on a :

$$a = 1 \quad \text{et} \quad b = q.$$

3.b) Soit $A \in]0; 1[$. Effectuons une intégration par parties (les fonctions considérées sont $\mathcal{C}^1$ sur $]A; 1[$).

$$\begin{aligned} & \int_A^1 \frac{\ln(t)}{(1-qt)^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{q(1-qt)} \ln(t) \right]_A^1 - \int_A^1 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{q(1-qt)} dt \\ &= -\frac{\ln(A)}{q(1-qA)} - \frac{1}{q} \int_A^1 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{(1-qt)} dt. \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, on a aussi

$$\begin{aligned} \int_A^1 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{(1-qt)} dt &= \int_A^1 \frac{1}{t} + \frac{q}{1-qt} dt \\ &= [\ln(t) - \ln(1-qt)]_A^1 \\ &= -\ln(1-q) - \ln(A) + \ln(1-qA). \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} & \int_A^1 \frac{\ln(t)}{(1-qt)^2} dt \\ &= \frac{\ln(A)}{q} \left(1 - \frac{1}{(1-qA)} \right) - \ln(1-q) - \ln(1-qA) \\ &= -\frac{\ln(A)}{q} \frac{qA}{(1-qA)} + \frac{\ln(1-q) - \ln(1-qA)}{q}. \end{aligned}$$

Par les croissances comparées et par continuité du logarithme en 1, on a respectivement les limites

$$\frac{\ln(A)}{q} \frac{qA}{(1-qA)} \xrightarrow{A \rightarrow 0^+} 0, \quad \ln(1-qA) \xrightarrow{A \rightarrow 0^+} 0.$$

On en déduit la convergence et l'égalité :

$$I(q) = \frac{\ln(1-q)}{q}.$$

3.c) Par le théorème de transfert, U_N admet une espérance si et seulement si l'intégrale suivante est absolument convergente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{U_N}(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{pt \cdot e^t}{(e^t - q)^2} dt.$$

Précisons que l'intégrande étant positive, la convergence implique l'absolue convergence. Effectuons le changement de variable $u = e^{-t}$ indiqué ($\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant)

$$du = -e^{-t} dt \iff dt = -\frac{1}{u} du.$$

L'intégrale est convergente si et seulement si l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_1^0 \frac{p(-\ln(u)) \cdot u^{-1}}{(u^{-1} - q)^2} \left(-\frac{1}{u} du \right) = -p \int_0^1 \frac{\ln(u)}{(1-qu)^2} du.$$

On reconnaît l'expression de $-pI(q)$. Cette dernière est convergente d'après la question précédente et

$$E(U_N) = -pI(q) = -\frac{p \ln(p)}{1-p}.$$

Exercice 28

p. 14

VAD29

1. En reprenant l'exemple du cours p.4, on montre par le théorème de sommation que S_2 est à densité avec une densité donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_2(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0; 1] \\ 2-t & \text{si } t \in [1; 2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Notons F_2 la fonction de répartition de T_2 et G_2 celle de S_2 . La variable T_2 est à valeurs dans $[0; 1]$. Pour $x \in [0; 1]$, $([S_2] = k)_{k \in \llbracket 0; 2 \rrbracket}$ est un système complet d'événements avec

$$P([S_2] = 0) = \int_0^1 f_2(t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{et} \quad P([S_2] = 1) = \frac{1}{2}, \quad P([S_2] = 2) = 0.$$

D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} F_2(x) &= P(T_2 \leq x) \\ &= P([T_2 \leq x] \cap [[S_2] = 0]) + P([T_2 \leq x] \cap [[S_2] = 1]) \\ &\quad + P([T_2 \leq x] \cap [[S_2] = 2]) \\ &= \frac{1}{2} P(0 \leq S_2 \leq x) + \frac{1}{2} P(1 \leq S_2 \leq 1+x) + 0 \\ &= \frac{1}{2} (G_2(x) - G_2(0) + G_2(1+x) - G_2(1)). \end{aligned}$$

Pour $x \leq 0$, $F_2(x) = 0$ et pour $x \geq 1$, $F_2(x) = 1$. On vérifie que F_2 est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Ainsi T_2 est une variable à densité et une densité est donnée pour tout $t \in]0; 1[$ par

$$\begin{aligned} h_2(t) &= F_2'(t) \\ &= \frac{1}{2} (G_2'(t) + G_2'(1+t)) = \frac{1}{2} (t+2-t) = t. \end{aligned}$$

Pour $t \notin]0; 1[$, $h_2(t) = 0$. On reconnaît l'expression d'une densité de la loi uniforme continue sur $[0; 1]$. Finalement

$$T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1]).$$

3.a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} h(h(S_n) + X_{n+1}) &= h(S_n + X_{n+1} - [S_n]) \\ &= h(S_{n+1} - [S_n]) \\ &= h(S_{n+1}) = T_{n+1}. \end{aligned}$$

Car pour tous $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$

$$[x+p] = [x] + p \quad \text{et} \quad h(x+p) = h(x).$$

3.b) Procédons par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(n): \quad T_n \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1]).$$

→ Initialisation.

Comme X_1 est à valeurs presque sûrement dans $[0; 1]$,

$$T_1 = S_1 - [S_1] = X_1 - [X_1] = X_1$$

Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

→ Hérédité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a par hypothèse

$$T_n \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1]), \quad X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([0; 1])$$

et par le lemme des coalitions T_n et X_{n+1} sont indépendantes et suivent des lois uniformes sur $[0; 1]$. En reprenant les questions 1 et 2, on sait que $h(T_{n+1} + X_{n+1})$ suit une loi uniforme sur $[0; 1]$. D'après la question précédente, T_{n+1} suit aussi une loi uniforme sur $[0; 1]$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est prouvée.

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exercice 29

p. 14

VADp1

1.a) La fonction f_a est continue positive sur $\mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \int_0^A f_a(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^A \frac{a}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^A \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{dx}{a} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^A \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par parité de la fonction f_a , on en déduit la convergence et l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

La fonction f_a est une densité.

1.b) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{t}{a}\right) \right]_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

1.c) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_{\lambda X}(x) &= \mathbf{P}(\lambda X \leq x) = \mathbf{P}\left(X \leq \frac{x}{\lambda}\right) \quad \text{car } \lambda > 0 \\ &= F_X\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{x}{\lambda a}\right) + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de $\mathcal{C}(\lambda a)$. Comme la fonction de répartition caractérise la loi

$$\lambda X \hookrightarrow \mathcal{C}(\lambda a).$$

2.a) Notons Φ la fonction de répartition de N et

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2)$$

la densité de N continue sur $\mathbb{R}$. On sait que Φ est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi$.

• Calculons la fonction de répartition F_Z de Z .

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z \leq x) &= \mathbf{P}(\ln|N| \leq x) = \mathbf{P}(|N| \leq e^x) \\ &= \Phi(e^x) - \Phi(-e^x) = 2\Phi(e^x) - 1. \end{aligned}$$

Les fonctions Φ et $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition $x \mapsto \Phi(e^x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Dès lors,

F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La variable Z est à densité et une densité est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad F'_Z(x) &= 2e^x \Phi'(e^x) \\ &= 2e^x \varphi(e^x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^x e^{-\frac{e^{2x}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^x e^{-\frac{e^{2x}}{2}}. \end{aligned}$$

On obtient une densité par dérivation. Ainsi

$$\begin{aligned} x &\mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^x e^{-\frac{e^{2x}}{2}} \text{ est une densité de } Z. \\ x &\mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x} e^{-\frac{e^{-2x}}{2}} \text{ est une densité de } -Z. \end{aligned}$$

2.b) Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^x e^{-\frac{e^{2x}}{2}}.$$

Justifions dans un premier temps que g est bornée afin de justifier l'existence du produit de convolution.

Par produit et les croissances comparées.

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{et} \quad g(x) = e^{x - \frac{e^{2x}}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme g est en plus continue sur $\mathbb{R}$, g est bien bornée sur $\mathbb{R}$.

Partons de $\ln|N/N'| = \ln|N| + (-\ln|N'|)$.

- N et N' sont deux variables aléatoires indépendantes donc $\ln|N|$ et $(-\ln|N'|)$ sont aussi indépendantes par le lemme des coalitions.
- $\ln|N|$ et $-\ln|N'|$ sont deux variables aléatoires à densité de densités respectives g et $x \mapsto g(-x)$.
- g est une densité de $\ln|N|$ et g est bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction

$$h : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) g(-(x-t)) dt$$

est donc bien définie.

Par le théorème de sommation, $\ln|N/N'|$ est une variable aléatoire à densité et une densité est donnée par h .

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^t e^{-\frac{e^{2t}}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(x-t)} e^{-\frac{e^{-2(x-t)}}{2}} \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t} e^{-\frac{(1+e^{-2x})e^{2t}}{2}} dt. \end{aligned}$$

Posons $c = 1 + e^{-2x}$ et $s(t) = -c/2 \cdot e^{2t}$ de sorte que

$$h(x) = -\frac{2}{\pi c} e^{-x} \int_{-\infty}^{+\infty} s'(t) e^{s(t)} dt.$$

Une primitive de l'intégrande est $t \mapsto e^{s(t)}$ avec

$$\begin{aligned} s(t) &\xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{et} \quad s(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty, \\ e^{s(t)} &\xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 1 \quad \text{et} \quad e^{s(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Il vient

$$h(x) = -\frac{2}{\pi c} e^{-x} \left[e^{s(t)} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{\pi} e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-2x}}.$$

Enfin

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \frac{2}{\pi} \frac{e^{2x}e^{-x}}{e^{2x}(1+e^{-2x})} = \frac{2}{\pi} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)}.$$

Ainsi, la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2}{\pi} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)}$$

est une densité de $\ln|N/N'|$.

2.c)i) Notons F_T la fonction de répartition de $T = \ln \left| \frac{N}{N'} \right|$ et F_U la fonction de répartition de U . On a donc $U = e^T$ et U est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ donc

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad F_U(x) = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \mathbf{P}(U \leq x) = \mathbf{P}(e^T \leq x) \\ &= \mathbf{P}(T \leq \ln x) = F_T(\ln x). \end{aligned}$$

Sachant que h est une densité, on poursuit :

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\ln x} h(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^t}{(e^t)^2 + 1} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \lim_{A \rightarrow -\infty} [\arctan(e^t)]_A^{\ln x} \\ F_U(x) &= \frac{2}{\pi} \arctan x. \end{aligned}$$

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ \frac{2}{\pi} \arctan x & \text{si } x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

2.c)ii) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{P}\left(\frac{N}{N'} = x\right) = \mathbf{P}(N - xN' = 0).$$

Or par le théorème de stabilité des lois normales indépendantes, $N - xN'$ suit une loi normale. En particulier, la variable est à densité et la probabilité de tomber sur une valeur fixée est nulle. D'où

$$\mathbf{P}\left(\frac{N}{N'} = x\right) = 0.$$

• Comme (N, N') et $(-N, N')$ ont même loi, N/N' et $-N/N'$ ont aussi même loi.

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbf{P}\left(\frac{N}{N'} \leq x\right) \\ &= \mathbf{P}\left(-\frac{N}{N'} \leq x\right) \quad (\text{même loi}) \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{N}{N'} \geq -x\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\frac{N}{N'} < -x\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\frac{N}{N'} \leq -x\right) \quad \text{car } \left(\mathbf{P}\left(\frac{N}{N'} = -x\right) = 0\right) \\ G(x) &= 1 - G(-x). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.c)iii) Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} F_U(x) &= \mathbf{P}\left(\left|\frac{N}{N'}\right| \leq x\right) = G(x) - G(-x) \\ &= 2G(x) - 1. \end{aligned}$$

On inverse la relation et on utilise l'expression de la question 2.c)i)

$$G(x) = \frac{F_U(x) + 1}{2} = \frac{1}{\pi} \left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \right).$$

Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}^-$, il vient en utilisant l'impairité de la fonction arctangente

$$G(x) = 1 - G(\underbrace{-x}_{\geq 0}) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \right).$$

Finalement G a la même fonction de répartition qu'une loi de Cauchy de paramètre 1. Comme la fonction de répartition caractérise la loi

$$\frac{N}{N'} \hookrightarrow \mathcal{C}(1).$$

3.

```
def Cauchy():
    x=rd.normal(0,1)
    y=rd.normal(0,1)
    return x/y
```

En utilisant la question 1.c)

```
def Cauchy2(lbda):
    x=rd.normal(0,1)
    y=rd.normal(0,1)
    return lbda*x/y
```

4. Le code simule la variable $1/X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{C}(1)$. On constate que l'histogramme de l'échantillon semble épouser la forme de la courbe d'une densité d'une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. On conjecture que

$$1/X \hookrightarrow \mathcal{C}(1).$$

• Soient N, N' indépendantes telles que N et N' suivent des lois normales $\mathcal{N}(0;1)$ et N/N' ait la même loi que X . On montre que $\frac{1}{X}$ a la même loi que N'/N . Or N'/N suit aussi une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. C'est donc aussi le cas de $1/X$.

Exercice 30

p. 15

VADp2

...

Table des matières

10 Compléments sur les variables aléatoires à densité	1
1 Loi du maximum, loi du minimum	1
2 Loi d'une somme de variables aléatoires à densité	2
2.1 Calcul d'un produit de convolution	2
2.2 Le théorème de sommation	4
3 Application aux lois usuelles	5
3.1 Stabilité par somme des lois γ	5
3.2 Stabilité par somme des lois normales	7
4 Un exemple détaillé	7