DS 4 - sujet A

THÈMES : DIAGONALISATION, ALGÈBRE BILINÉAIRE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Un point bonus si vous écrivez superfétatoire sur la copie avec sa définition. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice
Famille d'endomorphismes à un paramètre

Dans cet exercice, on se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{D} = \text{Vect}(u)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, la base canonique que $\mathbb{R}^3$. Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ de norme 1.
On note p le projecteur sur la droite vectoriel $\mathscr{D}$ parallèlement à $\mathscr{D}^\perp$ et q le projecteur sur $\mathscr{D}^\perp$ parallèlement à $\mathscr{D}$. Dans la suite, id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Que vaut $p + q$?
2. Justifier que pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $p(v) = \langle u, v \rangle\, u$.
3. Calculer alors $p(e_i)$ pour $i \in \{1; 2; 3\}$. En déduire les matrices P et Q de p et q dans la base $\mathscr{B}$.

- Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que sa matrice dans la base canonique soit

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Montrer que $M^2 = -Q$.
5. Calculer $f(u)$. En déduire que $\text{rg}(f) \leqslant 2$. Déterminer le noyau et l'image de f et les exprimer en fonction de $\mathscr{D}$.
6. Déduire de la question précédente, une simplification de $f \circ p$. Montrer alors que le polynôme $P(x) = x + x^3$ est annulateur de f.
7. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?

- *Endomorphismes à paramètre*
Pour tout réel θ, on définit l'endomorphisme g_θ par

$$g_\theta = \text{id} + (\sin\theta) f + (1 - \cos\theta) f^2 \quad \text{où} \quad f^2 = f \circ f.$$

8. Pour θ et θ' réels, calculer $g_\theta \circ g_{\theta'}$ et montrer qu'il se met sous la forme $g_{\theta''}$, avec θ'' réel.
9. En déduire que, pour tout réel θ, g_θ est bijective et déterminer son application réciproque.

Problème I
Retour sur les polynômes de Lagrange et de Legendre

On rappelle que $\mathbb{R}[x]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[x]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

Partie I - Préliminaire sur les polynômes de Lagrange

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels tous distincts. On définit le polynôme A par

$$\mathrm{A}(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(x - x_i\right).$$

De plus, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on définit la fonction M_i sur $\mathbb{R} \setminus \{x_i\}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i\}, \qquad \mathrm{M}_i(x) = \frac{\mathrm{A}(x)}{\left(x - x_i\right)\mathrm{A}'\left(x_i\right)} \qquad (\star)$$

10. **a)** Vérifier que M_i est prolongeable par continuité en x_i en posant $\mathrm{M}_i(x_i) = 1$.
b) On note encore M_i ce prolongement. Justifier que M_i est un polynôme.
c) Démontrer que pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$,

$$\mathrm{M}_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

11. On définit pour tous $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $\psi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(x_k)\mathrm{Q}(x_k)$.
a) Justifier que ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
b) Est-ce que la famille $(\mathrm{M}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire ?
c) En déduire que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(x_i)\mathrm{M}_i.$$

Partie II - Étude des éléments propres d'un endomorphisme φ

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{U}_n = \left(x^2-1\right)^n$ et $\mathrm{L}_n = \frac{1}{2^n n!}\mathrm{U}_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés polynômes de Legendre. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

12. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

On considère dans la suite l'application φ de $\mathbb{R}[x]$ dans lui-même définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x], \qquad \varphi(\mathrm{P}) = \left(x^2-1\right)\mathrm{P}'' + 2x\mathrm{P}'.$$

13. **a)** Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Justifier que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par φ.
On note φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ induit par φ. Cet endomorphisme φ_n est donc défini par : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x], \quad \varphi_n(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P})$.
On note $\mathrm{M}_n = \left[m_{i,j}\right]_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

14. **a)** Vérifier que M_n est triangulaire supérieure et préciser les coefficients diagonaux.
b) Montrer que φ_n est diagonalisable et préciser les dimensions des sous-espaces propres.

15. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.
a) Vérifier que : $\quad \left(x^2-1\right)\mathrm{U}_k{}' - 2kx\mathrm{U}_k = 0$.
b) En dérivant $(k+1)$ fois la relation précédente, montrer à l'aide de la formule de Leibniz que

$$\left(x^2-1\right)\mathrm{U}_k{}^{(k+2)}(x) + 2x\mathrm{U}_k{}^{(k+1)}(x) - k(k+1)\mathrm{U}_k{}^{(k)}(x) = 0.$$

16. Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de φ_n, en précisant la valeur propre associée.
17. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de φ.

Partie III - Produit scalaire associé à la famille $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[x]$, on définit :

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t.$$

18. Justifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

19. Établir que pour tout $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[x]^2$, $\quad \langle \varphi(\mathrm{P}), \mathrm{Q}\rangle = -\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t$, puis que :

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[x]^2, \qquad \langle \varphi(\mathrm{P}), \mathrm{Q}\rangle = \langle \mathrm{P}, \varphi(\mathrm{Q})\rangle.$$

20. **a)** Montrer que la famille $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{L}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^{\perp}$.

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note pour tout entier naturel $k \leqslant 2n$, $u_k = \left\langle \mathrm{U}_n^{(k)}, \mathrm{U}_n^{(2n-k)}\right\rangle$.
a) Montrer que $\left((-1)^k\,(u_k)\right)_{k\in[[0;2n]]}$ est constante.
b) En admettant que $u_0 = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2(-1)^n}{2n+1}$, en déduire que $\|\mathrm{L}_n\|^2 = 2/(2n+1)$.

22. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{Q}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\mathrm{L}_n$. Que peut-on dire de la famille $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$?

Partie IV - Python : tracé des polynômes L_n

23. *Une relation de récurrence*
a) Montrer que pour tous $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[x]$, $\langle x\mathrm{P}(x), \mathrm{Q}(x)\rangle = \langle \mathrm{P}(x), x\mathrm{Q}(x)\rangle$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En décomposant le polynôme $x\mathrm{L}_n(x)$ à l'aide la famille $(\mathrm{Q}_i)_{i\in[[0;n+1]]}$, justifier l'existence de trois réels $s_{1,n}$, $s_{2,n}$ et $s_{3,n}$ tels que

$$x\mathrm{L}_n(x) = s_{1,n}\mathrm{L}_{n+1} + s_{2,n}\mathrm{L}_n + s_{3,n}\mathrm{L}_{n-1}.$$

On admet dans la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{L}_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}x\mathrm{L}_n(x) - \frac{n}{n+1}\mathrm{L}_{n-1}(x) \qquad (\bullet)$$

→ *Première solution*

24. **a)** En utilisant $(\bullet)$, écrire un programme qui prend en argument n et x et renvoie la valeur de $\mathrm{L}_n(x)$.
b) Comment obtenir le tracé de L_n sur $[-1;1]$?

→ *Deuxième solution*

25. Soit $\mathrm{N} = 20$ fixé dans toute la suite. Tout polynôme $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} p_i x^i$ peut être codé par une matrice ligne à $\mathrm{N}+1$ coefficients

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_{\mathrm{N}}\end{bmatrix}.$$

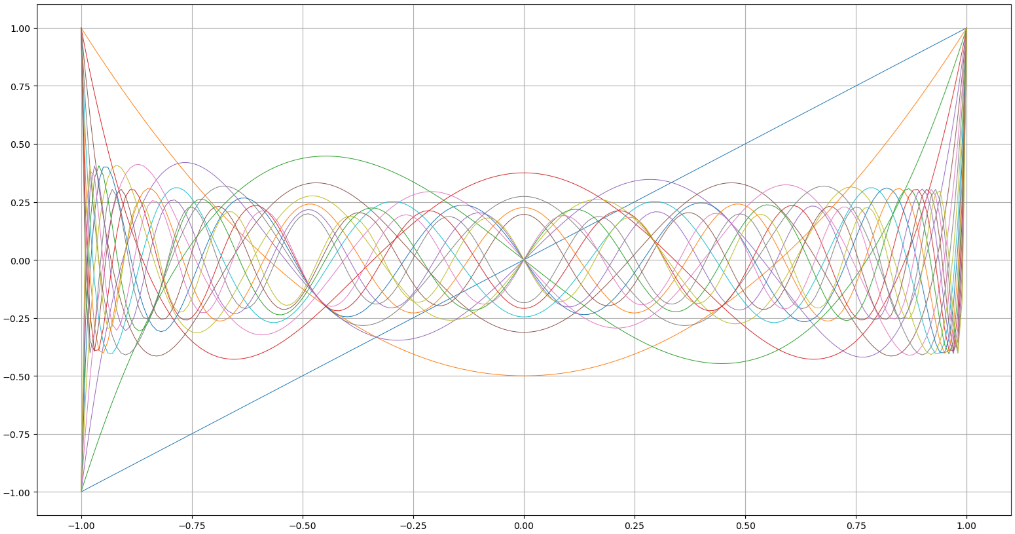
Ainsi la commande `M[i]` renvoie p_i, le i-ème coefficient de P.
a) Comment coder les polynômes L_0 et L_1 ?
b) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{\mathrm{N}}[x]$ codés par `M` et `N`. Soient a, b deux réels. Donner une fonction python `somme` qui permet d'obtenir la matrice qui code le polynôme $a\mathrm{P}+b\mathrm{Q}$?
c) Soit P appartenant à $\mathbb{R}_{\mathrm{N}-1}[x]$ et codé par `M`. Comment obtenir une fonction `multix` qui donne la matrice codant le polynôme $x\mathrm{P}(x)$?

26. Compléter ci-contre le code python suivant qui prend en argument $i \in [[0;\mathrm{N}]]$ et calcule la matrice qui code le polynôme $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_{\mathrm{N}}[x]$.

27. **a)** Écrire une fonction `eval` qui prend en arguments t, un réel, et `M`, une matrice ligne codant un polynôme P puis renvoie le réel $\mathrm{P}(t)$.
b) Comment tracer les polynômes L_i pour $i \in [[0;20]]$ sur $[-1;1]$?

Editeur

```
    def Legendre(n):
        N=20
        Mold=np.zeros(N)
        Mnew=np.zeros(N)
(1)     Mold[0]= ....   # corespond à L0
(2)     Mnew[1]= ....   # corespond à L1
        for i in range(2,n+1):
            Minter=Mnew
(3)         a=
(4)         b=
            xMnew=multix(Mnew)
(5)         Mnew=somme(   ....   )
            Mold=Minter
        return Mnew
```



Les 20 premiers polynômes de Legendre normalisés

Partie V - Application des polynômes de Legendre au calcul d'intégrales

On admet dans la suite que le polynôme L_n admet n racines distinctes dans $]-1;1[$. On note

- $x_1, \dots, x_n$, les racines de L_n rangés dans l'ordre croissant.
- Ψ l'application linéaire de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Psi(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,dt$.
- On reprend les notations de la première partie. Les polynômes $(M_i)_i$ vérifie alors

$$\forall\, i \in [\![1;n]\!], \qquad M_i(x) = \frac{L_n(x)}{(x - x_i)\,L_n{}'(x_i)}.$$

28. À l'aide de la première partie, montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[x], \qquad \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P(x_k) \qquad (\star\star)$$

où pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\alpha_i = \Psi(M_i)$.

29. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$

a) Énoncer la division euclidienne du polynôme P par L_n.

b) Montrer que la relation $(\star\star)$ trouvée à la question précédente reste vérifiée pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$.

c) En utilisant le polynôme $(L_n{}^2)'$, montrer que $L_n(1)^2 = L_n(-1)^2$.

30. *Expression des poids* α_i

a) En remarquant que $\left\langle M_i', L_n \right\rangle = 0$, montrer que $M_i(1)L_n(1) - M_i(-1)L_n(-1) - \alpha_i L_n'(x_i) = 0$.

b) En déduire que $\qquad \alpha_i = \dfrac{2}{(1 - x_i{}^2)\,L_n'(x_i)}$.

On pourra remarquer (ou admettre dans un premier temps) que $L_n(1) = 1$.

Bonus Qui est représenté sur l'image ci-contre : Lagrange, Legendre ou le gendre de Lagrange ?
Les réponses au hasard sont autorisées à condition de donner la probabilité d'avoir la bonne réponse.

Problème II

Moyennes de Césaro d'un endomorphisme

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\|\cdot\|$, la norme associé au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- On dit qu'un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \|f(x)\| = \|x\|.$$

- On rappelle que si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E et $(u,v) \in \mathrm{E}^2$ alors $\langle u,v\rangle = {}^t\mathrm{U}\mathrm{V}$ où U et V désignent les matrices des coordonnées de u et v dans la base $\mathscr{B}$.
- De plus, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et $x \in \mathrm{E}$, on dit que $(x_n)_n$ converge vers x si

$$\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Étant donné un endomorphisme f de E, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit l'endomorphisme de E

$$\mathrm{F}_n : x \in \mathrm{E} \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{F}^k(x).$$

L'objectif du sujet est d'étudier dans des cas particulier la limite de la suite $(\mathrm{F}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la première partie, on étudie cette limite dans sur exemple. Dans la deuxième partie, on obtient la limite de la suite $(\mathrm{F}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ dans un cadre plus général où f est un endomorphisme orthogonal.

Partie I : exemple

La partie I permet d'illustrer les résultats établis dans la partie II. Elle doit être traitée sans utiliser les résultats de la partie II.
Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension 4. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, une base orthonormée de E.
Soit s l'endomorphisme de E défini par sa matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \mathrm{S} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

31. Réduction de l'endomorphisme s

a) Justifier que l'endomorphisme s est diagonalisable.

b) À l'aide du calcul python suivant, vérifier que $\mathrm{Sp}(s) = \{-1;+1\}$.

Console

```
>>> import numpy as np

>>> S=np.array([[-1/3,0,2/3,2/3],[0,-1/3,-2/3,2/3],[2/3,-2/3,1/3,0],[2/3,2/3,0,1/3]])

>>> np.dot(S,S)
array([[1., 0., 0., 0.],
       [0., 1., 0., 0.],
       [0., 0., 1., 0.],
       [0., 0., 0., 1.]])
```

c) Justifier que $\mathrm{Tr}(\mathrm{S}) = \dim \mathrm{E}_1(s) - \dim \mathrm{E}_{-1}(s)$ où $\mathrm{E}_\lambda(s)$ désigne le sous-espace propre de s associé à la valeur propre λ.

d) En déduire les dimensions de $\mathrm{E}_1(s)$ et de $\mathrm{E}_{-1}(s)$.

32. On considère les trois vecteurs suivants de E : $u_1 = e_1 + e_3 + e_4$, $u_2 = e_1 + e_2 + 2e_4$ et $u_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

a) Calculer $s(u_1)$ et $s(u_2)$. En déduire une base de $\mathrm{E}_1(s)$ puis une base orthonormée de $\mathrm{E}_1(s)$.

b) Déterminer un vecteur non nul $u_4 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ orthogonal aux trois vecteurs u_1, u_2 et u_3. En déduire que (u_3, u_4) forme une base orthogonale de $\mathrm{E}_{-1}(s)$.

33. Vérifier que $\mathrm{E}_1(s)$ et $\mathrm{E}_{-1}(s)$ sont supplémentaires orthogonaux.

34. En déduire que s est un endomorphisme orthogonal de E. *On pourra partir de $x = x_+ + x_-$ où $x_+ \in \mathrm{E}_1(s)$ et $x_- \in \mathrm{E}_{-1}(s)$.*

35. Pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$, on note

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s^k(x).$$

- **a)** Pour $x \in E$ fixé, on note $x = y + z$ avec $y \in E_1(s)$ et $z \in E_{-1}(s)$. Soit $k \in \mathbb{N}$, déterminer un réel α_k tel que $s^k(x) = y + \alpha_k z$.
- **b)** En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un réel β_n tel que $S_n(x) = y + \beta_n z$.
- **c)** Déduire de ce qui précède que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Exprimer cette limite en fonction de x et de $s(x)$.

Partie II : généralisation au cas orthogonal

Dans cette partie, E est un espace euclidien. Étant donné un endomorphisme orthogonal f de E, pour tout x de E et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note toujours $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$.

- **Partie A. Étude des endomorphismes orthogonaux**

36.
- **a)** Justifier que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1;1\}$. A-t-on toujours égalité ?
- **b)** En déduire que f est un isomorphisme.

37. Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E et M, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
- **a)** Justifier que si la matrice M est une matrice orthogonale alors f est orthogonal.
- **b)** En vous appuyant sur le fait que

$$\forall\, x, y \in E, \qquad 4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2,$$

établir la réciproque.

- **Partie B**

38. Vérifier que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux dans E. En déduire qu'ils sont supplémentaires dans E.

39. Soit $x \in E$. D'après le résultat précédent, il existe $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $z \in E$ tels que $x = y + f(z) - z$.
- **a)** Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $f^k(x)$ en fonction de y, z et k. En déduire l'expression de $F_n(x)$ en fonction de y, z et n.
- **b)** Montrer que la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E a une limite que l'on déterminera lorsque n tend vers $+\infty$. On note $F(x)$ la limite.

40. Vérifier que F est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image.

– FIN –

DS 4 - sujet *

THÈMES : DIAGONALISATION, ALGÈBRE BILINÉAIRE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Un point bonus si vous écrivez superfétatoire sur la copie avec sa définition. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème I

Endomorphismes orthogonaux/contractants, limite des moyennes de Cesàro

Soit $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien. On note $\|\cdot\|$, la norme associé au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et on fixe $\mathscr{B}$, une base orthonormée de E.

- On rappelle que $\mathscr{B}$ étant une base orthonormée de E, si $(u,v) \in \mathrm{E}^2$ alors $\langle u, v\rangle = {}^t\mathrm{UV}$ où U et V désignent les matrices des coordonnées de u et v dans la base $\mathscr{B}$.
- On dit qu'un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \left\|f(x)\right\| = \|x\|.$$

- De plus, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et $x \in \mathrm{E}$, on dit que $(x_n)_n$ converge vers x si

$$\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Étant donné un endomorphisme f de E, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit l'endomorphisme de E

$$\mathrm{F}_n : x \in \mathrm{E} \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{F}^k(x).$$

L'objectif du sujet est d'étudier dans des cas particulier la limite de la suite $(\mathrm{F}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E lorsque n tend vers $+\infty$.

L'objectif des deux premières parties est d'étudier dans des cas particuliers la limite de la suite $(\mathrm{F}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E lorsque n tend vers $+\infty$.
Dans la première partie, on étudie cette limite sur un exemple. Dans la deuxième partie, on obtient la limite de la suite $(\mathrm{F}_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ dans un cadre plus général.
Dans la troisième partie, cette propriété algébrique permet d'obtenir un résultat concernant une décomposition des endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien.

Partie I : exemple

La partie I permet d'illustrer les résultats établis dans la partie II. Elle doit être traitée sans utiliser les résultats de la partie II.
Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension 4. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, une base orthonormée de E.
Soit s l'endomorphisme de E défini par sa matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \mathrm{S} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

— *Réduction de l'endomorphisme s*

1. **a)** Justifier que l'endomorphisme s est diagonalisable.
   b) À l'aide du calcul python suivant, vérifier que s admet deux valeurs propres que l'on explicitera (notées dans la suite λ, μ avec $\lambda > \mu$).

Console

```
>>> import numpy as np

>>> S=np.array([[-1/3,0,2/3,2/3],[0,-1/3,-2/3,2/3],[2/3,-2/3,1/3,0],[2/3,2/3,0,1/3]])

>>> np.dot(S,S)
array([[1., 0., 0., 0.],
       [0., 1., 0., 0.],
       [0., 0., 1., 0.],
       [0., 0., 0., 1.]])
```

   c) Justifier que $\mathrm{Tr}(S) = \dim E_\lambda(s) - \dim E_\mu(s)$ où $E_\ell(s)$ désigne le sous-espace propre de s associé à la valeur propre ℓ.
   d) En déduire les dimensions des sous-espaces propres.
2. On considère les trois vecteurs suivants de E : $u_1 = e_1 + e_3 + e_4$, $u_2 = e_1 + e_2 + 2e_4$ et $u_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.
   a) Vérifier que u_1 appartient à $E_\lambda(s)$.
   On admet dans la suite que $u_2 \in E_\lambda(s)$ et $u_3 \in E_\mu(s)$.
   b) En partant de la famille (u_1, u_2), construire une base orthonormée de $E_\lambda(s)$.
   c) Déterminer un vecteur non nul $u_4 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ orthogonal aux trois vecteurs u_1, u_2 et u_3. En déduire que (u_3, u_4) forme une base orthogonale de $E_\mu(s)$.
3. Comment obtenir une base orthonormée $\mathscr{C} = (\varepsilon_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ constituées de vecteurs propres de s ?

— *Limite des moyennes de Cesàro de s*

4. Pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$, on note $\quad S_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} s^k(x)$.
   Soit $x \in E$, fixé et (a, b, c, d) ses coordonnées dans la base $\mathscr{C}$. Déduire de ce qui précède que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Exprimer cette limite en fonction des coordonnées de x, puis seulement en fonction de x et $s(x)$.

Partie II : généralisation

Dans cette partie, E est un espace vectoriel réel. Étant donné un endomorphisme f de E, pour tout x de E et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note toujours

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x).$$

- **A. Le cas orthogonal**
  Dans les deux prochaines questions, on suppose que f est un endomorphisme orthogonal.

5. Vérifier que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

   Soit $x \in E$. D'après le résultat précédent, il existe $y \in \ker(f - \mathrm{id})$ et $z \in E$ tels que $x = y + f(z) - z$.
6. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer $f^k(x)$ en fonction de y, z et k. En déduire l'expression de $F_n(x)$ en fonction de y, z et n.
7. **a)** Montrer que la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E a une limite que l'on déterminera lorsque n tend vers $+\infty$. On note $F(x)$ la limite.
   b) Vérifier que F est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image.

- **B. Le cas contractant via l'endomorphisme adjoint**
  Dans la suite de cette partie II, on notera B(E) l'ensemble des endomorphismes h de E qui vérifient :

$$\forall x \in E, \qquad \|h(x)\| \leqslant \|x\|.$$

  Soit $f \in B(E)$. On définit f^* (lire l'adjoint de f) comme l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est la transposée de celle de f.

8. **a)** Vérifier que pour tout $x \in E$, $\left\|f^*(x)\right\|^2 = \left\langle x, f\circ f^*(x)\right\rangle$.
   b) Justifier que f^* appartient à B(E).
9. Montrer que si $x \in E$ vérifie $f(x) = x$, alors $\left\|f^*(x) - x\right\|^2 \leqslant 0$. En déduire l'égalité $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}\left(f^* - \mathrm{id}_E\right)$.
10. **a)** Vérifier que pour tout φ endomorphisme de E, $\mathrm{Ker}\left(\varphi^*\right) = (\mathrm{Im}\,\varphi)^\perp$.
    b) En déduire que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E.
11. Soit $x \in E$. Montrer que la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

Partie III : une application qui demande beaucoup de réflexions

Dans cette partie, f est un endomorphisme orthogonal de E.
Pour tout vecteur non nul e de E, on définit l'endomorphisme σ_e par

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \sigma_e(x) = x - 2\frac{\langle x, e\rangle}{\|e\|^2}e.$$

12. **a)** Calculer $\sigma_e(e)$, puis $\sigma_e(x)$ pour x orthogonal à e.
b) Montrer que σ_e est un endomorphisme orthogonal de E.

On dit que σ_e est la réflexion par rapport à l'hyperplan $(\mathrm{Vect}(e))^\perp$.

13. On note $\mathrm{W} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ et on suppose que W est différent de E. Soit u un vecteur fixé de E tel que $u \notin \mathrm{W}$. Dans la suite, on pose $e = f(u) - u$.
a) Montrer que $e \in \mathrm{W}^\perp$.
b) Calculer $\sigma_e\big(f(u) - u\big)$ et $\sigma_e\big(f(u) + u\big)$. En déduire $\sigma_e\big(f(u)\big)$ et $\sigma_e(u)$.
c) Montrer l'égalité $\mathrm{Vect}(u, \mathrm{W}) = \mathrm{Ker}\big(\sigma_e \circ f - \mathrm{id}_\mathrm{E}\big)$.

14. En déduire que f peut se décomposer en la composée de p réflexions et exprimer p en fonction de $k = \dim(\mathrm{W})$ et de $n = \dim(\mathrm{E})$.

Problème II

Polynômes de Lagrange et de Legendre - le retour

On rappelle que $\mathbb{R}[x]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[x]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. On note $\mathrm{P}^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{U}_n = \left(x^2 - 1\right)^n$ et $\mathrm{L}_n = \frac{1}{2^n n!}\mathrm{U}_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés polynômes de Legendre. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

15. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

On considère dans la suite l'application φ de $\mathbb{R}[x]$ dans lui-même définie par :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[x], \qquad \varphi(\mathrm{P}) = \left(x^2 - 1\right)\mathrm{P}'' + 2x\mathrm{P}'.$$

Partie I - Étude des éléments propres de l'endomorphisme φ

16. **a)** Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Justifier que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par φ.

On note φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ induit par φ. Cet endomorphisme φ_n est donc défini par : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x], \quad \varphi_n(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P})$.
On note $\mathrm{M}_n = \left[m_{i,j}\right]_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

17. Expliciter M_n, puis montrer que φ_n est diagonalisable.

18. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
a) Vérifier que : $\quad (x^2 - 1)\,\mathrm{U}_k{}' - 2kx\mathrm{U}_k = 0$.
b) En dérivant $(k+1)$ fois la relation précédente, montrer que : $\left(x^2 - 1\right)\mathrm{U}_k{}^{(k+2)} + 2x\mathrm{U}_k{}^{(k+1)} - k(k+1)\mathrm{U}_k{}^{(k)} = 0$.

19. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de φ_n, en précisant la valeur propre associée.

20. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de φ.

Partie II - Produit scalaire associé à (L_n) et distance à un sous-espace vectoriel

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[x]$, on définit :

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t.$$

21. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

22. Établir que :

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}[x]^2, \qquad \langle \varphi(\mathrm{P}),\mathrm{Q}\rangle = \langle \mathrm{P},\varphi(\mathrm{Q})\rangle.$$

23. **a)** Montrer que la famille $(\mathrm{L}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{L}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^{\perp}$.

24. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note pour tout $k \leqslant 2n$, $u_k = \left\langle \mathrm{U}_n^{(k)}, \mathrm{U}_n^{(2n-k)} \right\rangle$.

a) Montrer que $\left((-1)^k\left(u_k\right)\right)_{0\leqslant k\leqslant 2n}$ est constant. On admet dans la suite que $u_0 = \frac{2^{2n+1}(n!)^2(-1)^n}{2n+1}$

b) Calculer $\|\mathrm{L}_n\|$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{Q}_n = \sqrt{(2n+1)/2}\,\mathrm{L}_n$.
Que peut-on dire de la famille $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$?

25. Soit P, un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $c_k(\mathrm{P}) = \left\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}_k\right\rangle$. Prouver que la série $\sum \left(c_k(\mathrm{P})\right)^2$ converge et que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(c_k(\mathrm{P})\right)^2 = \|\mathrm{P}\|^2.$$

Partie III - Python : tracé des polynômes L_n

— *Une relation de récurrence*

26. **a)** Montrer que pour tous P, Q $\in \mathbb{R}[x]$, $\langle x\mathrm{P}(x),\mathrm{Q}(x)\rangle = \langle \mathrm{P}(x), x\mathrm{Q}(x)\rangle$. Que dire sur ce produit scalaire si le polynôme PQ est un polynôme pair ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En décomposant le polynôme $x\mathrm{L}_n(x)$ à l'aide la famille $\left(\mathrm{Q}_i\right)_{i\in[\![0;n+1]\!]}$, justifier l'existence de deux réels s_n, t_n tels que

$$x\mathrm{L}_n(x) = s_n\mathrm{L}_{n+1} + t_n\mathrm{L}_{n-1}.$$

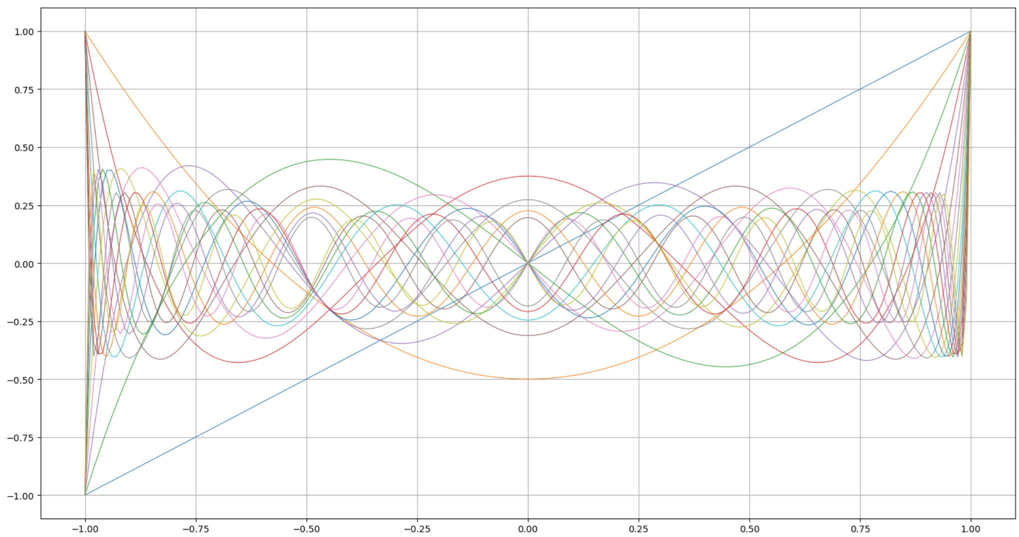
On admet dans la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{L}_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}x\mathrm{L}_n(x) - \frac{n}{n+1}\mathrm{L}_{n-1}(x) \qquad (\bullet)$$

— *Première solution*

27. **a)** En utilisant $(\bullet)$, écrire un programme qui prend en argument n et x et renvoie la valeur de $\mathrm{L}_n(x)$.

b) Comment obtenir le tracé de L_n sur $[-1;1]$?



Les 20 premiers polynômes de Legendre normalisés

— *Deuxième solution*

28. Soit N = 20 fixé dans toute la suite. Tout polynôme $\mathrm{P} = \sum_{i=0}^{\mathrm{N}} p_i x^i$ peut être codé par une matrice ligne à N + 1 coefficients

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & \dots & p_{\mathrm{N}} \end{bmatrix}.$$

Ainsi la commande `M[i]` renvoie p_i, le i-ème coefficient de P.

a) Comment coder les polynômes L_0 et L_1 ?

b) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_N[x]$ codés par `M` et `N`. Soient a, b deux réels. Donner une fonction python `somme` qui permet d'obtenir la matrice qui code le polynôme $aP + bQ$?

c) Soit P appartenant à $\mathbb{R}_{N-1}[x]$ et codé par `M`. Comment obtenir une fonction `multix` qui donne la matrice codant le polynôme $xP(x)$?

29. Compléter ci-contre le code python suivant qui prend en argument $i \in [\![0;N]\!]$ et calcule la matrice qui code le polynôme $L_i \in \mathbb{R}_N[x]$.

30. **a)** Écrire une fonction `eval` qui prend en arguments t, un réel, et `M`, une matrice ligne codant un polynôme P puis renvoie le réel $P(t)$.

b) Comment tracer les polynômes L_i pour $i \in [\![0;20]\!]$ sur $[-1;1]$?

Editeur

```
    def Legendre(n):
        N=20
        Mold=np.zeros(N)
        Mnew=np.zeros(N)
(1)     Mold[0]= ....  # corespond à L0
(2)     Mnew[1]= ....  # corespond à L1
        for i in range(2,n+1):
            Minter=Mnew
(3)         a=
(4)         b=
            xMnew=multix(Mnew)
(5)         Mnew=somme(  ....  )
            Mold=Minter
        return Mnew
```

Partie IV - Application des polynômes de Legendre à l'approximation d'intégrales

Dans les questions suivantes, n désigne un entier naturel non nul.

31. Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{2n-1}$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $2n$ réels $t_1 < \cdots < t_{2n}$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,2n]\!], \qquad h\left(t_i\right) = 0.$$

Montrer qu'il existe un réel c tel que : $h^{(2n-1)}(c) = 0$.

On admet dans la suite que le polynôme L_n admet n racines distinctes dans $]-1;1[$. On note :

- $x_1, \dots, x_n$, les racines de L_n rangés dans l'ordre croissant.
- E_n, l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}$.
- Ψ l'application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Psi(P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t$.
- Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note ℓ_i l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[x], \qquad \ell_i(P) = P\left(x_i\right).$$

- Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, on pose

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_k\}, \qquad M_k(x) = \frac{L_n(x)}{(x - x_k)\, L_n'\left(x_k\right)}.$$

32. **a)** Vérifier que M_k est prolongeable par continuité en x_k et que ce prolongement est une fonction polynomiale. On note encore M_k ce prolongement.

b) Préciser $M_i\left(x_j\right)$ pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$.

- *Une formule d'intégration*

33. Montrer que $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est libre dans E_n.

34. Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[x], \qquad \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n) \qquad (\star)$$

35. Montrer que la relation $(\star)$ reste vérifiée pour tout P de $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$.
On pourra, pour $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$, *utiliser la division euclidienne de* P *par* L_n.

36. *Expression des poids* α_i

a) En remarquant que $\left\langle M_i', L_n \right\rangle = 0$, montrer que $M_i(1)L_n(1) - M_i(-1)L_n(-1) - \alpha_i L_n'\left(x_i\right) = 0$.

b) En déduire que $\qquad \alpha_i = \dfrac{2}{(1 - x_i{}^2)\, L_n'\left(x_i\right)}$.

On pourra remarquer (ou admettre dans un premier temps) que $L_n(1)^2 = L_n(-1)^2 = 1$.

- *Application au calcul approché d'intégrales et estimation de l'erreur*

Dans la suite du problème, f désigne une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$.

37. **a)** Déterminer le noyau de l'application linéaire Φ de $\mathbb{R}_{2n-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ qui à P associe : $\big(P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n)\big)$.

b) En déduire que :

$$\exists ! \mathrm{H}_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[x], \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \begin{cases} \mathrm{H}_n(x_i) = f(x_i) \\ \mathrm{H}'_n(x_i) = f'(x_i) \end{cases}.$$

c) Calculer $\Phi(\mathrm{T}_n)$ où T_n est le polynôme défini par

$$\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k) + (x - x_k)\left(f'(x_k) - \alpha_k f(x_k)\right)\right] \cdot \mathrm{M}_k(x)^2.$$

Commenter le résultat obtenu.

38. Soit $x \in [-1,1]$ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x \neq x_i$. Montrer que :

$$\exists c \in [-1,1], \qquad f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{\mathrm{A}_n(x)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c).$$

On pourra considérer l'application g définie sur $[-1,1]$ *par* $g(t) = f(t) - \mathrm{H}_n(t) - \frac{\mathrm{A}_n(t)^2}{(2n)!}\mathrm{K}$, *où* K *est un réel dépendant de x à préciser, et appliquer le résultat de la question 16 à la fonction* g'.

39. **a)** Montrer que : $\forall y \in [-1,1], \exists c \in [-1,1], f(y) - \mathrm{H}_n(y) = \dfrac{\mathrm{A}_n(y)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$.

b) Justifier l'existence de $\mathrm{M}_{2n}(f) = \max\limits_{t \in [-1,1]} \left| f^{(2n)}(t) \right|$, puis prouver que :

$$\left| \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \left(\alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)\right) \right| \leqslant \frac{\mathrm{M}_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} \mathrm{A}_n(t)^2 \, \mathrm{d}t$$

40. Justifier l'équivalent suivant au voisinage de $+\infty$: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{A}_n(t)^2 \, \mathrm{d}t \sim \frac{\pi}{2^{2n}}$.
On pourra admettre la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

– FIN –

DS 4 A - solution

Exercice 1

1. On a $p+q=\mathrm{id}$. En effet, pour $x\in E$, il existe $x_{\mathscr{D}}\in\mathscr{D}$, $x_{\perp}\in\mathscr{D}^{\perp}$ tels que $x=x_{\mathscr{D}}+x_{\perp}$. Par définition du projecteur

$$p(x)=x_{\mathscr{D}}\quad\text{et}\quad q(x)=x_{\perp}.$$

D'où $$p(x)+q(x)=x_{\mathscr{D}}+x_{\perp}=x.$$

2. *Rédaction 1.*
Soit $v\in\mathbb{R}^3$. On a $p(v)\in\operatorname{Im}p=\operatorname{Vect}u$. Il existe donc $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$p(v)=\lambda u$$

or $v-p(v)\in(\operatorname{Vect}u)^{\perp}$. Donc

$$0=\langle v-p(v),u\rangle=\langle v,u\rangle-\langle p(v),u\rangle=\langle v,u\rangle-\lambda\langle u,u\rangle.$$

D'où $\lambda=\langle u,u\rangle$ (car u est unitaire). Ce qui conclut.

- *Rédaction 2*

La famille (u) est une b.o.n de $\operatorname{Vect}u$ que l'on complète en une b.o.n (u,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$. D'où

$$v=\underbrace{\langle v,u\rangle}_{\in\mathscr{D}}+\underbrace{\langle v,e_2\rangle e_2+\langle v,e_3\rangle e_3}_{\in\mathscr{D}^{\perp}}.$$

Par définition d'un projecteur, on ne « garde » que la partie dans $\mathscr{D}$

$$p(v)=\langle v,u\rangle u.$$

3. On a

$$\begin{cases} p(e_1)=\langle u,e_1\rangle u=au=\left(a^2,ab,ac\right)\\ p(e_2)=\langle u,e_2\rangle u=bu=\left(ba,b^2,bc\right)\\ p(e_3)=\langle u,e_3\rangle u=cu=\left(ca,cb,c^2\right).\end{cases}$$

Il vient

$$P=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{bmatrix} a^2 & ba & ca\\ ab & b^2 & cb\\ ac & bc & c^2\end{bmatrix}.$$

Puis

$$\begin{aligned}Q=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(q)&=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}-p)=I_n-P\\ &=\begin{bmatrix} 1-a^2 & -ba & -ca\\ -ab & 1-b^2 & -cb\\ -ac & -bc & 1-c^2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

4. On calcule

$$\begin{aligned}M^2&=\begin{bmatrix} 0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} -c^2-b^2 & ab & ca\\ ab & -c^2-a^2 & cb\\ ac & bc & -b^2-a^2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

On a bien $M^2=-Q$ car $a^2+b^2+c^2=1$.

5. On a par linéarité de f

$$\begin{aligned}f(u)&=af(e_1)+bf(e_2)+cf(e_3)\\ &=a(0,c,-b)+b(-c,0,a)+c(b,-a,0)\\ f(u)&=(0,0,0).\end{aligned}$$

Comme $u\neq 0_{\mathbb{R}^3}$, le noyau de f n'est pas réduit à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et par la formule du rang

$$\operatorname{rg}(f)=3-\underbrace{\dim\operatorname{Ker}f}_{\geqslant 1}\leqslant 2.$$

Notons que a, b, c ne peuvent être simultanément nuls (condition $a^2+b^2+c^2=1$), les colonnes

$$\begin{array}{lll}\begin{bmatrix}0\\c\\-b\end{bmatrix}\ \text{et}\ \begin{bmatrix}-c\\0\\a\end{bmatrix} & & \text{si } c\neq 0\\ \begin{bmatrix}0\\c\\-b\end{bmatrix}\ \text{et}\ \begin{bmatrix}b\\-a\\0\end{bmatrix} & & \text{si } b\neq 0\\ \begin{bmatrix}-c\\0\\a\end{bmatrix}\ \text{et}\ \begin{bmatrix}b\\-a\\0\end{bmatrix} & & \text{si } a\neq 0\end{array}$$

ne sont pas colinéaires. D'où $\operatorname{rg}f=\operatorname{rg}M\geqslant 2$. Dès lors

$$\operatorname{rg}f=2\quad\text{et}\quad\dim\operatorname{Ker}f=1.$$

Comme $u\in\operatorname{Ker}f\setminus\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\operatorname{Ker}f=\operatorname{Vect}u=\mathscr{D}$.
De plus, les vecteurs $(0,c,-b),(-c,0,a)$ et $(b,-a,0)$ sont dans l'image de f et orthogonaux à u. D'où

$$\operatorname{Im}f\subset\operatorname{Vect}(u)^{\perp}$$

puis égalité car les deux sous-espaces sont de dimension 2.

6. Soit $v\in\mathbb{R}^3$

$$f\circ p(v)=f(\langle u,v\rangle u)=\langle u,v\rangle f(u)=0_{\mathbb{R}^3}.$$

Ainsi $$f\circ p=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.$$

On a vu aussi que $M^2=-Q$, d'où $f^2=-q$. Ainsi

$$\begin{aligned}f+f^3=f+f^2\cdot f&=f-f\circ q=f\circ(\mathrm{id}-q)\\ &=f\circ p=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

Le polynôme $x+x^3$ est bien annulateur de f.

7. On a $P(x)=x\left(1+x^2\right)$. Le réel 0 est l'unique racine de P, c'est aussi l'unique valeur propre possible de f.
Or on a vu que $f(u)=0_{\mathbb{R}^3}$, le réel 0 est donc bien valeur propre :

$$\operatorname{Sp}(f)=\{0\}.$$

- Raisonnons par l'absurde en supposant f diagonalisable. Comme 0 est la seule valeur propre. La matrice de f dans une base de vecteurs propres serait $\mathrm{Diag}(0,0,\dots,0) = 0_3$. Dès lors f serait l'endomorphisme nul. Absurde.
Finalement, f n'est pas diagonalisable.

8. On a avec $f^3 = -f$, $f^4 = -f^2$. On calcule en regroupant les termes proportionnels à id, à f et à f^2

$$\begin{aligned}
& g_\theta \circ g_{\theta'} \\
&= \left(\mathrm{id} + \sin\theta f + (1-\cos\theta) f^2\right)\left(\mathrm{id} + \sin\theta' f + \left(1-\cos\theta'\right) f^2\right) \\
&= \mathrm{id} \\
&\quad + \left(\sin\theta' + \sin\theta - \left(1-\cos\theta'\right)\sin\theta - \left(1-\cos\left(\sin\theta'\right)\right) f\right. \\
&\quad + \left(\left(1-\cos\theta'\right) + \sin\theta\sin\theta' + (1-\cos\theta) - (1-\cos\theta)\left(1-\cos\theta'\right)\right) f^2 \\
&= \mathrm{id} \\
&\quad + \left(\cos\theta'\sin\theta + \cos\theta\sin\theta'\right) f \\
&\quad + \left(1 + \sin\theta\sin\theta' - \cos\theta\cos\theta'\right) f^2 \\
&= \mathrm{id} + \sin\left(\theta+\theta'\right) f + \left(1-\cos\left(\theta+\theta'\right)\right) f^2.
\end{aligned}$$

Concluons
$$g_\theta \cdot g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}.$$

9. Notons que $g_0 = \mathrm{id}$. Ainsi

$$g_\theta \circ g_{-\theta} = g_0 = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad g_{-\theta} \circ g_\theta = g_0 = \mathrm{id}.$$

D'après la caractérisation des applications bijectives, g_θ est bijective et
$$g_\theta^{-1} = g_{-\theta}.$$

Problème 1

10.a) On reconnaît l'expression d'un taux d'accroissement entre x et x_i. Comme A est dérivable en x_i, ce taux d'accroissement admet une limite lorsque $x \to x_i$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_i(x) &= \frac{\mathrm{A}(x)}{\left(x-x_i\right)\mathrm{A}'\left(x_i\right)} = \frac{\mathrm{A}(x) - \mathrm{A}\left(x_i\right)}{x-x_i} \cdot \frac{1}{\mathrm{A}'\left(x_i\right)} \\
&\xrightarrow[x\to x_i]{} \frac{\mathrm{A}'\left(x_i\right)}{\mathrm{A}'\left(x_i\right)} = 1.
\end{aligned}$$

La fonction M_i est prolongeable par continuité en x_i.

10.b) Pour $x \neq x_i$, $\mathrm{M}_i(x)$ s'écrit sous forme $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ Par continuité, la formule s'étend par passage à la limite $\left(x \to x_i\right)$ à $x = x_i$. La fonction M_i est donc bien polynomiale.

10.c) La formule est vraie pour $i = j$, d'après la question précédente et comme x_j est racine de A. On a bien $\mathrm{M}_i\left(x_j\right) = 0$ pour $i \neq j$.

11.a) Voir cours.

11.b) Oui car pour tous $i, j \in [\![1;n]\!]$

$$\psi\left(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}_k\left(x_i\right)\mathrm{M}_k\left(x_j\right) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}.$$

La famille est orthogonale pour ce produit scalaire.
En particulier elle est libre. Avec $n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[x]$ vecteurs appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, c'est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

11.c) On a pour une base orthonormée

$$\mathrm{P} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathrm{P}, \mathrm{M}_k \rangle \mathrm{M}_k.$$

En remarquant que

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{M}_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}\left(x_j\right)\mathrm{M}_k\left(x_j\right) = \mathrm{P}\left(x_k\right),$$

on a bien le résultat demandé.

12. On a $\mathrm{U}_n = x^{2n} + \mathrm{Q}(x)$ où $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$. En dérivant n fois, on a

$$\mathrm{U}_n^{(n)} = \underbrace{2n(2n-1) \times \cdots \times (2n-(n-1))}_{=(2n)!/n! \neq 0} x^{2n-n} + \underbrace{\mathrm{Q}^{(n)}(x)}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[x]}$$

On constate que L_n est de degré n avec

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!} \times \frac{1}{2^n n!} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.$$

13.a,b) • La linéarité de φ découle de la linéarité de la dérivation.
- De plus pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$

$$\begin{aligned}
&\deg \mathrm{P}'' \leqslant \deg \mathrm{P} - 2 \text{ puis } \deg\left(x^2-1\right)\mathrm{P}'' \leqslant n \\
&\deg \mathrm{P}' \leqslant \deg \mathrm{P} - 1 \text{ puis } \deg\left(2x\mathrm{P}'\right) \leqslant n.
\end{aligned}$$

Ainsi $\qquad \varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[x].$

L'application φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ est bien stable par φ.

14.a) Pour $k \in \mathbb{N}$, $\quad k \geqslant 2$

$$\begin{aligned}
&\varphi(1) = 0, \quad \varphi(x) = 2x \\
&\varphi\left(x^k\right) = \left(x^2-1\right) k(k-1) x^{k-2} + 2xkx^{k-1} \\
&\quad = (k(k-1) + 2k) x^k - k(k-1) x^{k-2} \\
&\varphi\left(x^k\right) = k(k+1) x^k - k(k-1) x^{k-1}.
\end{aligned}$$

Dès lors M_n est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux sont :

$$0; 2; \dots k(k+1), \dots, n(n+1).$$

14.b) Dans le cas d'une matrice triangulaire, le spectre se lit sur la diagonale

$$\mathrm{Sp}\left(\varphi_n\right) = \left\{k(k+1) \mid k \in [\![0;n]\!]\right\}.$$

Les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes, il y en a $\dim \mathbb{R}_n[x]$.
On sait alors que φ_n est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

15.a)

$$\begin{aligned}
&\left(x^2-1\right)\mathrm{U}_k' - 2kx\mathrm{U}_k \\
&= \left(x^2-1\right) k \cdot 2x \cdot \left(x^2-1\right)^{k-1} - 2kx\left(x^2-1\right)^k = 0
\end{aligned}$$

15.b) D'après la formule de Leibniz en posant $S(x) = x^2 - 1$ et $T(x) = x$,

$$0 = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} S^{(i)} U_k^{(k+1+1-i)} - 2k \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} T^{(i)} U_k^{(k+1-i)}$$

Comme $S^{(i)} = 0$ pour $i \geqslant 3$ et $T^{(i)} = 0$ pour $i \geqslant 2$, les sommes se simplifient

$$\begin{aligned} 0 &= \binom{k+1}{0} SU_k^{(k+2)} + \binom{k+1}{1} S'U_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{2} S''U_k^{(k)} \\ &\quad - 2k\binom{k+1}{0} TU_k^{(k+1)} - 2k\binom{k+1}{1} T'U_k^{(k)} \\ &= \left(x^2-1\right) U_k^{(k+2)} + (k+1)2xU_k^{(k+1)} + \frac{k(k+1)}{2} \times 2 \cdot U_k^{(k)} \\ &\quad - 2kxU_k^{(k+1)} - 2k(k+1)U_k^{(k)} \\ &= \left(x^2-1\right) U_k^{(k+2)} + 2xU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)}. \end{aligned}$$

16. La relation précédente donne

$$\varphi\left(U_k^{(k)}\right) - k(k+1)U_k^{(k)} = 0.$$

En divisant par $2^k k!$ et par linéarité de φ

$$\varphi\left(L_k\right) = k(k+1)L_k \quad \text{et} \quad L_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[x]}$$

le polynôme L_k est donc bien vecteur propre pour la valeur propre $k(k+1)$.

17. Soit P un vecteur propre associé à λ

$$\varphi(P) = \lambda P \quad \text{et} \quad P \neq 0_{\mathbb{R}}[x].$$

Soit n un entier tel que $n \geqslant \deg P$

$$\varphi_n(P) = \varphi(P) = \lambda P \quad \text{et} \quad P \neq 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

Donc P est un vecteur propre de φ_n. Il existe $k \in [\![0;n]\!]$ tel que $\lambda = k(k+1)$ et $P \in E_{k(k+1)}\left(\varphi_n\right)$. Or on a montré que ce sous-espace est de dimension 1 et contient L_k.

$$P \in E_{k(k+1)}\left(\varphi_n\right) = \mathrm{Vect}\left(L_k\right).$$

En revenant à φ

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \left\{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\right\}.$$

et $$E_{k(k+1)}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(L_k\right).$$

18. Voir le cours.

19. On a par intégration par partie (les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$) :

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right) P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\left(t^2-1\right)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(2tP'(t) + \left(t^2-1\right)P''(t)\right)Q(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^{1} \varphi(P)(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = -\langle \varphi(P), Q\rangle. \end{aligned}$$

Par symétrie des rôles

$$\langle P, \varphi(Q)\rangle = \langle \varphi(Q), P\rangle = -\int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right) Q'(t)P'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a bien $$\langle P, \varphi(Q)\rangle = \langle Q, \varphi(P)\rangle.$$

On dira au second semestre que l'endomorphisme φ est symétrique.

20.a) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned} n(n+1)\langle L_n, L_m\rangle &= \langle n(n+1)L_n, L_m\rangle \\ &= \left\langle \varphi\left(L_n\right), L_m\right\rangle \quad \text{(question 16)} \\ &= \left\langle L_n, \varphi\left(L_m\right)\right\rangle \quad \text{(question 19)} \\ &= \langle L_m, m(m+1)L_m\rangle \\ n(n+1)\langle L_n, L_m\rangle &= m(m+1)\langle L_n, L_m\rangle. \end{aligned}$$

Comme $n(n+1) \neq m(m+1)$, on a $\langle L_n, L_m\rangle = 0$.
La famille est orthogonale.

20.b) La famille $\left(L_k\right)_{k \in [\![0;n-1]\!]}$ est une famille libre car échelonnée en degré (ou encore, car associée à des valeurs propres distinctes).
Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $L_k \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Ainsi, la famille est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
Comme L_n est orthogonale à chaque vecteur de cette base,

$$L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^{\perp}.$$

21.a) Procédons par intégration par parties pour $k \in [\![0;2n-1]\!]$

$$\begin{aligned} U_k &= \left\langle U_n^{(k)}, U_n^{(2n-k)}\right\rangle \\ &= \int_{-1}^{1} U_n^{(k)}(t)U_n^{(2n-k)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[U_n^{(k-1)}U_n^{(2n-k-1)}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} U_n^{(k+1)}(t)U_n^{(2n-(k+1))}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[U_n^{(k)}U_n^{(2n-(k+1))}\right]_{-1}^{1} - \underbrace{\left\langle U_n^{(k+1)}, U_n^{(2n-(k+1))}\right\rangle}_{(-1)^{k+1}u_{k+1}} \end{aligned}$$

Notons que le crochet est nul. En effet -1 et 1 sont racines de multiplicité n de U_n. D'où

$$\forall k \in [\![0;n-1]\!], \qquad U_n^{(k)}(1) = 0 = U_n^{(k)}(-1).$$

et pour $k \in [\![n, 2n-1]\!]$,

$$0 \leqslant 2n-(k+1) \leqslant 2n-(n+1) \leqslant n-1$$

puis $$U_n^{(2n-(k+1))}(1) = 0 = U_n^{(2n-(k+1))}(-1).$$

Résumons $(-1)^k u_k = (-1)^k\left(-u_{k+1}\right) = (-1)^{k+1}u_{k+1}$.
La suite est bien constante.

21.b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|L_n\|^2 &= \langle L_n, L_n\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \left\langle U_n^{(n)}, U_n^{(n)}\right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 (-1)^n u_n \\ &= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 (-1)^0 u_0 \quad \left(\text{constance de } \left((-1)^k u_k\right)\right). \\ &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} \\ \|L_n\|^2 &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Le calcul de u_0 se fait par l'intermédiaire des intégrales de Wallis.

22. La famille est orthonormée pour ce produit scalaire car elle était déjà orthogonale d'après la question 20.a) et le fait de diviser chaque vecteur par sa norme, l'a rend normée.

23.a) Soient $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in\mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned}\langle x\mathrm{P}(x),\mathrm{Q}(x)\rangle &= \int_{-1}^{1}\big(x\mathrm{P}(x)\big)\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1}\mathrm{P}(x)\big(x\mathrm{Q}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \langle \mathrm{P}(x),x\mathrm{Q}(x)\rangle.\end{aligned}$$

23.b) $x\mathrm{L}_n(x)\in\mathbb{R}_{n+1}[x]$ et $\big(\mathrm{Q}_i\big)_{i\in[\![0;n+1]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n+1}[x]$. D'où

$$\begin{aligned}x\mathrm{L}_n(x) &= \sum_{i=0}^{n+1}\big\langle x\mathrm{L}_n(x),\mathrm{Q}_i(x)\big\rangle \mathrm{Q}_i(x)\\ &= \sum_{i=0}^{n+1}\big\langle \ln(x),x\mathrm{Q}_i(x)\big\rangle \mathrm{Q}_i(x)\end{aligned}$$

or pour $i\leqslant n-2$, $x\mathrm{Q}_i(x)\in\mathbb{R}_{n-1}[x]$ et on a vu que

$$\mathrm{L}_n\in\mathbb{R}_{n-1}[x]^{\perp}$$

Ainsi

$$\forall i\in[\![0;n-2]\!],\qquad \big\langle \mathrm{L}_n,x\mathrm{Q}_i(x)\big\rangle=0.$$

La somme se simplifie et avec $\mathrm{Q}_i(x)=\mathrm{L}_i(x)/\big\|\mathrm{L}_i\big\|$, on obtient

$$\begin{aligned}x\mathrm{L}_n(x) =&\frac{\langle \mathrm{L}_n(x),x\mathrm{L}_{n+1}(x)\rangle}{\|\mathrm{L}_{n+1}\|^2}\mathrm{L}_{n+1}+\frac{\langle \mathrm{L}_n(x),x\mathrm{L}_n(x)\rangle}{\|\mathrm{L}_n\|^2}\mathrm{L}_n\\ &+\frac{\langle \mathrm{L}_n(x),x\mathrm{L}_{n-1}(x)\rangle}{\|\mathrm{L}_{n-1}\|}\mathrm{L}_{n-1}.\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Notons que par imparité de $x\mapsto x\mathrm{L}_n(x)^2$ (car L_n est soit pair, soit impair car U_n est pair), on a

$$\langle \mathrm{L}_n(x),x\mathrm{L}_n(x)\rangle=\int_{-1}^{1}x\mathrm{L}_n(x)^2\,\mathrm{d}x=0.$$

La coordonnée suivant L_n est même nulle.

24. On commence par importer les bibliothèques :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

24.a)

```
def PolyLegendre(n,x):
    lold=1
    if n==0:
        return lold
    lnew=x
    for i in range(2,n+1):
        linter=lnew
        lnew=((2*i-1)*x*lnew-(i-1)*lold)/i
    return lnew
```

24.b)

```
plt.clf()
def trace_legendre(n):
    x=np.linspace(-1,1,200)
    y=np.zeros(200)
    for i in range(200):
        y[i]=PolyLegendre(n,x[i])
    plt.plot(x,y,linewidth=0.5)
    plt.show()
```

25.a) On $\mathrm{L}_0=1$ et $\mathrm{L}_1=1$. Pour coder ces polynômes, on commence par une matrice ligne remplie de 0 et l'on change respectivement le premier et le deuxième coefficient :

```
M0=np.zeros(N)
M0[0]=1 # corespond à L0
M1=np.zeros(N)
M1[1]=1
```

25.b)

```
def somme(M,N,a,b):
    m=len(M) # m=n+1
    R=np.zeros(m)
    for i in range(m):
        R[i]=a*M[i]+b*N[i]
    return R
```

25.c)

```
def multix(M):
    m=len(M) # m=n+1
    R=np.zeros(m)
    for i in range(m-1):
        R[i+1]=M[i]
    return R
```

26.

```
def Legendre(n):
    N=20
    Mold=np.zeros(N)
    Mold[0]=1 # corespond à L0
    Mnew=np.zeros(N)
    Mnew[1]=2
    for i in range(2,n+1):
        Minter=Mnew
        a=2*(2*i-1)
        b=-4*(i-1)**2
        xMnew=multix(Mnew)
        Mnew=somme(xMnew,Mold,a,b)
        Mold=Minter
    return Mnew
```

27.a)

```
def eval(M,t):
    m=len(M)
    s=0
    for i in range(m):
        s+=M[i]*t**i
    return s
```

27.b)

```
from scipy.special import factorial
def trace(n):
    x=np.linspace(-1,1,200)
    y=np.zeros(200)
    M=Legendre(n)/(2**n*factorial(n))
    for i in range(200):
        y[i]=eval(M,x[i])
    plt.plot(x,y,linewidth=0.5)
```

```python
for n in range(1,20):
    trace(n)
plt.show()
```

28. *Remarque : Comme* $L_n = a_n A_n$*, on a bien*

$$\frac{L_n(x)}{(x-x_i)L_n'(x_i)} = \frac{\frac{L_n(x)}{a_n}}{(x-x_i)\left(\frac{L_n}{a_n}\right)'(x_i)} = \frac{A_n(x)}{(x-x_i)A_n'(x_i)} = M_i(x).$$

La question 11.c) et la linéarité de l'intégrale donnent

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \int_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{n} P(x_i)M_i(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{-1}^{1} M_i(t)\,dt\right)P(x_i)$$

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i P(x_i)$$

29.a) Il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que

$$P = QL_n + R \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg L_n = n.$$

Ne pas oublier la condition sur le degré du reste R pour avoir l'unicité de la décomposition.

28.b) Notons que les réels $(x_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ étant les racines de L_n

$$P(x_i) = Q(x_i)\underbrace{L_n(x_i)}_{=0} + R(x_i) = R(x_i).$$

De plus, $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$ impose $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \int_{-1}^{1} Q(t)L_n(t) + R(t)\,dt = \langle Q, L_n\rangle + \int_{-1}^{1} R(t)\,dt = 0 + \int_{-1}^{1} R(t)\,dt.$$

Car $L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^{\perp}$. De plus $R \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, la relation $(\star\star)$ s'applique sur R :

$$\int_{-1}^{1} R(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k R(x_k) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k P(x_k).$$

On a bien $$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k P(x_k)..$$

29.c) On a $\deg {L_n}^2 = 2\deg L_n = 2n$ puis

$$\deg\left({L_n}^2\right)' = 2n-1.$$

La relation $(\star\star)$ s'applique sur $\left({L_n}^2\right)'$ avec

$$L_n(1)^2 - L_n(-1)^2 = \left[L_n^2\right]_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1}\left({L_n}^2\right)'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left({L_n}^2\right)'(x_k)$$

Or $$\left(L_n^2\right)'(x_k) = 2L_n'(x_k)L_n(x_k) = 0$$

car x_k est racine de L_n. Finalement

$$L_n(1)^2 = L_n(-1)^2.$$

Notons que l'on montre à partir de la parité de U_n que L_n est une fonction paire (respectivement impaire) si n est un entier pair (respectivement pair). Ainsi L_n^2 est une fonction paire et on retrouve le résultat précédent.

30.a) Comme $M_i' \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^{\perp}$ on a bien

$$\langle M_i', L_n\rangle = 0.$$

Puis par intégration par parties

$$0 = \langle M_i', L_n\rangle = [M_iL_n]_{-1}^{1} - \langle M_i, L_n'\rangle$$

Or $$[M_iL_n]_{-1}^{1} = M_i(1)L_n(1) - M_i(-1)L_n(-1)$$

et $M_iL_n' \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$ et la relation $(\star\star)$ donne

$$\langle M_iL_n'\rangle = \int_{-1}^{1} M_iL_n'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k M_i(x_k)L_n'(x_k) = \alpha_i L_n'(x_i)$$

D'où le résultat.

30.b) On montre par récurrence double à partir de $(\bullet)$ que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \qquad L_n(1) = 1.$$

On peut aussi utiliser la formule de Leibniz à partir de $U_n^{(n)} = (x-1)^{(n)}(x+1)^{(n)}$.

Ainsi

$$\alpha_i = \frac{M_i(1)L_n(1)}{L_n'(x_i)} - \frac{M_i(-1)L_n(-1)}{L_n'(x_i)} = \frac{L_n(1)^2}{(1-x_i)L_n'(x_i)^2} - \frac{L_n(-1)^2}{(-1-x_i)L_n'(x_i)^2} = \left(\frac{1}{1-x_i} + \frac{1}{1+x_i}\right)\cdot\frac{1}{L_n'(x_i)^2}$$

$$\alpha_i = \frac{2}{\left(1-x_i^2\right)L_n'(x_i)^2}.$$

Problème 2

31.a) La matrice S est symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable. Il en va de même pour s.

31.b) D'après le calcul python

$$S^2 = I_4 \quad \text{puis} \quad (S-I_4)(S+I_4) = 0_4 \quad (\star)$$

Par conséquent $(x-1)(x+1)$ est un polynôme annulateur de S (et donc de s). Ainsi

$$\mathrm{Sp}(S) \subset \{\pm 1\}.$$

De plus $1 \in \mathrm{Sp(S)}$ car si cela n'est pas le cas $(\mathrm{S}-\mathrm{I}_4)$ est inversible et en multipliant à gauche par $(\mathrm{S}-\mathrm{I}_4)^{-1}$ dans $(\star)$, on trouve $\mathrm{S}+\mathrm{I}_4 = 0_4$, $\mathrm{S} = -\mathrm{I}_4$. Absurde. De même $-1 \in \mathrm{Sp(S)}$. On en déduit

$$\mathrm{Sp(S)} = \mathrm{Sp}(s) = \{\pm 1\}.$$

31.c)d) Comme S est diagonalisable, il existe P inversible, D diagonale telle que

$$\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^{-1}.$$

Par invariance de la trace par similitude

$$0 = \mathrm{Tr(S)} = \mathrm{Tr(D)}.$$

Or $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ avec $\lambda_i \in \{\pm 1\}$. Le nombre de $\lambda_i = 1$ est donné par $\dim \mathrm{E}_1(s)$ et celui de $\lambda_i = -1$ par $\dim \mathrm{E}_{-1}(s)$. Ainsi

$$\mathrm{Tr(D)} = 1 \times \dim \mathrm{E}_1(s) + (-1) \times \dim \mathrm{E}_{-1}(s).$$

D'où $\quad \dim \mathrm{E}_1(s) = \dim \mathrm{E}_{-1}(s).$

De plus, S est diagonalisable avec ± 1 comme valeurs propres

$$\dim \mathrm{E}_1(s) + \dim \mathrm{E}_{-1}(s) = 4.$$

D'où $\quad \dim \mathrm{E}_1(s) = \dim \mathrm{E}_{-1}(s) = 2.$

32.a) On a

$$\begin{aligned} s(u_1) &= s(e_1) + s(e_3) + s(e_4) \\ &= \frac{1}{3}(-1,0,2,2) + \frac{1}{3}(2,-2,1,0) + \frac{1}{3}(2,2,0,1) \\ &= (1,0,1,1) \\ s(u_1) &= u_1 \text{ avec } u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^4}. \end{aligned}$$

De même, on montre que $s(u_2) = u_2$. D'où

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2) \subset \mathrm{E}_1(s).$$

Comme (u_1, u_2) est libre et $\dim \mathrm{E}_1(s) = 2$, on a nécessairement

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{E}_1(s).$$

Notons que

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \neq 0.$$

Appliquons le procédé d'orthonormalisation pour obtenir une base orthonormée de $\mathrm{E}_1(s)$. On pose

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} u_1.$$

Puis on pose

$$v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

avec $\langle u_2, u_1 \rangle = 3$, il vient $v_2 = u_2 - u_1 = (0,-1,1,-1)$. On convient alors de poser

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,-1)$$

de sorte que (e_1, e_2) soit une b.o.n de $\mathrm{E}_1(s)$.

32.b) On veut

$$\begin{cases} 0 = \langle u_4, u_1 \rangle = a + c + d \\ 0 = \langle u_4, u_2 \rangle = a + b + 2d \\ 0 = \langle u_4, u_3 \rangle = -a + b + c \end{cases}$$

$$\iff$$

$$\begin{matrix} \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 4 \\ \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 4 \end{matrix} \begin{cases} a + c + d = 0 \\ b - c + d = 0 \\ b + 2c + d = 0 \end{cases}$$

Si on pose $c = 0, b = 1, d = -1, a = 1$, on a une solution. On choisit alors

$$u_4 = (1,1,0,-1).$$

Ensuite, on vérifie par le calcul que

$$s(u_3) = -u_3 \quad \text{et} \quad s(u_4) = -u_4.$$

Pour s'en convaincre, on peut refaire le calcul du 31.a) ou remarquer que

$$\mathrm{S} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{S} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(u_3, u_4) \subset \mathrm{E}_{-1}(s)$. Par des questions d'égalité des dimensions, on a même l'égalité :

$$\mathrm{Vect}(u_3, u_4) = \mathrm{E}_{-1}(s).$$

La famille (u_3, u_4) est une base orthogonale de $\mathrm{E}_{-1}(s)$.

33. Comme s est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(s) = \{\pm 1\}$, on a

$$\mathrm{E}_1(s) \oplus \mathrm{E}_{-1}(s) = \mathrm{E}.$$

Comme (u_1, u_2) sont orthogonaux à (u_3, u_4), les espaces sont bien supplémentaires orthogonaux.

34. Soit $x = x_+ + x_- \in \mathrm{E}$ avec $x_+ \in \mathrm{E}_1(s)$ et $x_- \in \mathrm{E}_{-1}(s)$. D'après le théorème de Pythagore sachant que x_+ et x_- sont orthogonaux :

$$\begin{aligned} \|s(x)\|^2 &= \|s(x_+) + s(x_-)\|^2 \\ &= \|s(x_+) - x_-\|^2 \\ &= \|x_+\|^2 + (-1)^2 \|x_-\|^2 \\ &= \|x_+ + \| + \|x_-\|^2 \\ &= \|x_+ + x_-\|^2 \\ \|s(x)\|^2 &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

Comme une norme est positive, on a $\|s(x)\| = \|x\|$. L'application s est orthogonale.

35.a) On a par linéarité de s^k :

$$\begin{aligned} s^k(x) &= s^k(y) + s^k(z) \\ &= 1^k \cdot y + (-1)^k z \\ s^k(x) &= y + (-1)^k z. \end{aligned}$$

On rappelle que pour $u \in E_\lambda(\varphi)$, $Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q(\varphi)(u) = \varphi(\lambda)u$.

35.b) Par somme

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(y+(-1)^k z\right) = y + \frac{1-(-1)^n}{n} z$$

(somme géométrique).

35.c) On en déduit que

$$\|S_n(x) - y\| = \left\|\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)z\right\| = \left|\frac{1-(-1)}{n}\right| \cdot \|z\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Comme

$$\begin{cases} x = y+z & L_1 \\ s(x) = s(y)+s(z) = y-z & L_2 \end{cases}$$

on a par $(L_1+L_2)/2$

$$y = \frac{s(x)+x}{2}$$

et on peut conclure :

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} y = \frac{s(x)+x}{2}.$$

36.a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$f(x) = \lambda x.$$

D'où $\quad \|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$

Comme $\|x\| \neq 0$, $|\lambda| = 1$. Finalement

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{\pm 1\}.$$

36.b) Comme $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$, $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$. L'application f est injective. En tant qu'endomorphisme de dimension finie (E est euclidien), f est un isomorphisme.

37.a) Supposons M orthogonale.
Soient $x \in E$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice colonne des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On sait que MX est la matrice colonne des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$. Dès lors

$$\|f(x)\|^2 = {}^t(MX)MX = {}^tX\underbrace{{}^tMMX}_{=I_n} = {}^tXX = \|x\|^2.$$

Cela prouve que f est orthogonal.

37.b) Soient x, $y \in E$ et X, Y les matrices colonnes associées dans la base $\mathcal{B}$. on a alors

$$\langle f(x), f(y)\rangle = {}^t(MX)MY = {}^tX{}^tMMY$$
$$\langle x, y\rangle = {}^tXY.$$

Comme f est orthogonal, on montre avec l'égalité rappelée que

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

d'où

$${}^tX{}^tMMY = {}^tXY$$

Puis $\quad {}^tX\left({}^tMM - I_n\right)Y = 0.$

Le résultat étant valable pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il vient

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \left({}^tMM - I_n\right)Y = 0.$$

Finalement ${}^tMM - I_n = 0$. La matrice M est orthogonale.

38. Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{id}_E\right)$. Soit $y \in \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{id}_E\right)$, il existe donc $z \in E$ tel que

$$(f - \mathrm{id})(z) = y \quad \text{i.e} \quad y = f(z) - z.$$

On a aussi $f(x) = x$. Ainsi

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, f(z) - z\rangle \\ &= \langle x, f(z)\rangle - \langle x, z\rangle \\ &= \langle f(x), f(z)\rangle - \langle x, z\rangle \\ \langle x, y\rangle &= 0\end{aligned}$$

Les sous-espaces $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{id}_E\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{id}_E\right)$ sont orthogonaux. En particulier, ces sous-espaces sont en somme directe. La formule du rang appliquée à l'endomorphisme $f - \mathrm{id}$ donne :

$$\dim\ker\left(f - \mathrm{id}_E\right) + \dim\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{id}_E\right) = \dim E.$$

En conclusion, ces sous-espaces sont supplémentaires orthogonaux.

39.a) On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k(x) = f^k(y) + f^{k+1}(z) - f^k(z) = y + f^{k+1}(z) - f^k(z).$$

Puis par télescopage

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(y + f^{k+1}(z) - f^k(z)\right) \\ &= y + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(z) - f^k(z) \\ F_n(x) &= y + \frac{1}{n}\left(f^n(z) - z\right).\end{aligned}$$

39.b) On a par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}\left\|F_n(x) - y\right\| &= \frac{1}{n}\left\|f^n(z) - z\right\| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(\left\|f^n(z)\right\| + \|z\|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n}(\|z\| + \|z\|) \qquad (f \text{ est orthogonal}) \\ \left\|F_n(x) - y\right\| &\leqslant \frac{2\|z\|}{n}.\end{aligned}$$

Par encadrement $\qquad \left\|F_n(x) - y\right\| \xrightarrow[n\infty]{} 0.$

On a alors la limite en posant $y = F(x)$.

40. D'après ce qui précède, F est le projecteur sur $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{id}_E\right)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{id}_E\right)$.

DS 4* - solution

Problème 1

1.a) La matrice S est symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable. Il en va de même pour s.

2.b) D'après le calcul python

$$S^2 = I_4 \quad \text{puis} \quad (S - I_4)(S + I_4) = 0_4 \quad (\star)$$

Par conséquent $(x-1)(x+1)$ est un polynôme annulateur de S (et donc de s). Ainsi

$$\mathrm{Sp}(S) \subset \{\pm 1\}.$$

De plus $1 \in \mathrm{Sp}(S)$ car si cela n'est pas le cas $(S - I_4)$ est inversible et en multipliant à gauche par $(S - I_4)^{-1}$ dans $(\star)$, on trouve $S + I_4 = 0_4$, $S = -I_4$. Absurde. De même $-1 \in \mathrm{Sp}(S)$. On en déduit

$$\mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}(s) = \{\pm 1\}.$$

On pose donc

$$\lambda = 1 \quad \text{et} \quad \mu = -1.$$

1.c)d) Comme S est diagonalisable, il existe P inversible, D diagonale telle que

$$S = PDP^{-1}.$$

Par invariance de la trace par similitude

$$0 = \mathrm{Tr}(S) = \mathrm{Tr}(D).$$

Or $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ avec $\lambda_i \in \{\pm 1\}$. Le nombre de $\lambda_i = 1$ est donné par $\dim E_1(s)$ et celui de $\lambda_i = -1$ par $\dim E_{-1}(s)$. Ainsi

$$\mathrm{Tr}(D) = 1 \times \dim E_1(s) + (-1) \times \dim E_{-1}(s).$$

D'où $\qquad \dim E_1(s) = \dim E_{-1}(s).$

De plus, S est diagonalisable avec ± 1 comme valeurs propres

$$\dim E_1(s) + \dim E_{-1}(s) = 4.$$

D'où $\qquad \dim E_1(s) = \dim E_{-1}(s) = 2.$

2.a) On a

$$\begin{aligned} s(u_1) &= s(e_1) + s(e_3) + s(e_4) \\ &= \frac{1}{3}(-1,0,2,2) + \frac{1}{3}(2,-2,1,0) + \frac{1}{3}(2,2,0,1) \\ &= (1,0,1,1) \\ s(u_1) &= u_1 \text{ avec } u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^4}. \end{aligned}$$

2.b) Notons que

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \neq 0.$$

Appliquons le procédé d'orthonormalisation pour obtenir une base orthonormée de $E_1(s)$. On pose

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} u_1.$$

Puis on pose

$$v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

avec $\langle u_2, u_1 \rangle = 3$, il vient $v_2 = u_2 - u_1 = (0,-1,1,-1)$.
On pose ensuite

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,-1,1,-1).$$

Les vecteurs (e_1, e_2) constituent une b.o.n de $E_1(s)$ qui est de dimension 2._

2.c) On veut

$$\begin{cases} 0 = \langle u_4, u_1 \rangle = a + c + d \\ 0 = \langle u_4, u_2 \rangle = a + b + 2d \\ 0 = \langle u_4, u_3 \rangle = -a + b + c \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4 \end{matrix} \begin{cases} a + c + d = 0 \\ b - c + d = 0 \\ b + 2c + d = 0 \end{cases}$$

Si on pose $c = 0, b = 1, d = -1, a = 1$, on a une solution. On choisit alors

$$u_4 = (1,1,0,-1).$$

Ensuite on calcule

$$s(u_3) = -u_3 \quad \text{et} \quad s(u_4) = -u_4.$$

Pour s'en convaincre, on peut refaire le calcul du 31.a) ou remarquer que

$$S \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } S \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi $\mathrm{Vect}(u_3, u_4) \subset E_{-1}(s)$. Comme les deux sous-espace ont même dimension, on a même égalité. La famille (u_3, u_4) est une base orthogonale de $E_{-1}(s)$.

3. On a construit une base orthonormée de $E_1(s)$. De plus, si on pose

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \quad \text{et} \quad e_4 = \frac{u_4}{\|u_4\|}$$

alors (e_3, e_4) est une base orthonormée de $E_{-1}(s)$. On a déjà vérifié que e_4 est orthogonal à e_1, e_2 (et donc à tout vecteur de $E_1(s)$). On vérifie que e_3 est orthogonal à e_1 et e_2. Finalement, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) ainsi construite est une base orthonormée de vecteurs propres de s.

4. Soit $x = \underbrace{a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2}_{\in E_1(s)} + \underbrace{c\varepsilon_3 + d\varepsilon_4}_{\in E_{-1}(s)}$.

$$s(x) = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 - c\varepsilon_3 - d\varepsilon_4.$$

Plus généralement, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$s^k(x) = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + (-1)^k (c\varepsilon_3 + d\varepsilon_4).$$

En reconnaissant une somme géométrique de raison -1, il vient :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + \frac{1-(-1)^n}{2n}(c\varepsilon_3 + d\varepsilon_4). \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2. \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que

$$S_n(x) = \frac{x + s(x)}{2}.$$

5. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. Soit $y \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)$, il existe donc $z \in E$ tel que

$$(f - \mathrm{id})(z) = y \quad \text{i.e} \quad y = f(z) - z.$$

On a aussi $f(x) = x$. Ainsi

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \langle x, f(z) - z\rangle \\ &= \langle x, f(z)\rangle - \langle x, z\rangle \\ &= \langle f(x), f(z)\rangle - \langle x, z\rangle \\ \langle x, y\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Les sous-espaces $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ sont orthogonaux. En particulier, ces sous-espaces sont en somme directe. La formule du rang appliqué à l'endomorphisme $f - \mathrm{id}_E$ donne :

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) + \dim \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E) = \dim E.$$

En conclusion, ces sous-espaces sont supplémentaires orthogonaux.

6. On a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k(x) = f^k(y) + f^{k+1}(z) - f^k(z) = y + f^{k+1}(z) - f^k(z).$$

Puis par télescopage

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(y + f^{k+1}(z) - f^k(z)\right) \\ &= y + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^{k+1}(z) - f^k(z) \\ F_n(x) &= y + \frac{1}{n}\left(f^n(z) - z\right). \end{aligned}$$

7.a) On a par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|F_n(x) - y\| &= \frac{1}{n}\|f^n(z) - z\| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left(\|f^n(z)\| + \|z\|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n}(\|z\| + \|z\|) \quad (f \text{ est orthogonal}) \\ \|F_n(x) - y\| &\leqslant \frac{2\|z\|}{n}. \end{aligned}$$

Par encadrement $\quad \|F_n(x) - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

On a alors la limite en posant $y = F(x)$.

7.b) D'après ce qui précède, F est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)$.

8.a) Soit $x \in E$. Notons $X = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Comme ${}^t M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*)$, on a ${}^t MX = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f^*(x))$ et

$$\begin{aligned} \|f^*(x)\|^2 &= \langle f^*(x), f^*(x)\rangle \\ &= {}^t({}^t MX)\,{}^t MX \\ &= {}^t X(M\,{}^t MX) \\ \|f^*(x)\|^2 &= \langle x, f\circ f^*(x)\rangle. \end{aligned}$$

Retenons cette relation sur l'adjoint :

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$

car

$$\langle f(x), y\rangle = {}^t(MX)Y = {}^t X({}^t MY) = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

8.b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|f^*(x)\|^2 &= |\langle x, f\circ f^*(x)\rangle| \\ &\leqslant \|x\|\cdot\|f\circ f^*(x)\| \\ &\leqslant \|x\|\cdot\|f^*(x)\| \quad (f \text{ contractante}). \end{aligned}$$

→ Si $f^*(x) \neq 0$, alors en divisant par $\|f^*(x)\| > 0$

$$\|f^*(x)\| \leqslant \|x\|.$$

→ Si $f^*(x) = 0$, L'inégalité précédente est encore vérifiée.
Finalement, $f^* \in B(E)$.

9. On a

$$\begin{aligned} \|f^*(x) - x\|^2 &= \langle f^*(x) - x, f^*(x) - x\rangle \\ &= \|f^*(x)\|^2 - 2\langle x, f^*(x)\rangle + \|x\|^2 \\ &= \|f^*(x)\| - 2\langle f(x), x\rangle + \|x\|^2 \quad (\text{q8}.a) \\ &= \|f^*(x)\| - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 \quad (f(x) = x) \\ &= \|f^*(x)\| - \|x\|^2 \\ \|f^*(x) - x\|^2 &\leqslant 0 \quad (f^* \in B(E)). \end{aligned}$$

Nécessairement $\|f^*(x) - x\|^2 = 0$, puis $f^*(x) - x = 0_E$.

- Raisonnons par double inclusion :

→ Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, on a donc $f(x) = x$ et d'après le calcul précédent $f^*(x) = x$. Ainsi $x \in \operatorname{Ker}(f^* - \mathrm{id}_E)$. La première inclusion est établie :

$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f^* - \mathrm{id}_E).$$

En appliquant le résultat à $f^* \in \mathrm{B(E)}$ au lieu de f, on a

$$\mathrm{Ker}\left(f^* - \mathrm{id_E}\right) \subset \mathrm{Ker}\left(\left(f^*\right)^* - \mathrm{id_E}\right).$$

Or $\left(f^*\right)^* = f$ (puisque ${}^t({}^t\mathrm{M}) = \mathrm{M}$) et l'inclusion réciproque est établie.
Finalement $\mathrm{Ker}\left(f^* - \mathrm{id_E}\right) = \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{id_E}\right)$.

10.a) Soient $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi^*$ et $\varphi(y) \in \mathrm{Im}\,\varphi$.

$$\langle x, \varphi(y)\rangle = \left\langle \varphi^*(x), y\right\rangle = \left\langle 0_\mathrm{E}, y\right\rangle = 0.$$

Ainsi $x \in \left(\mathrm{Im}\,\varphi\right)^\perp$.
Réciproquement, si $x \in (\mathrm{Im}\,\varphi)^\perp$ alors pour tout $z \in \mathrm{E}$, $\varphi(z) \in \mathrm{Im}\,\varphi$ et

$$0 = \langle \varphi(z), x\rangle = \left\langle z, \varphi^*(x)\right\rangle.$$

Dès lors $\varphi^*(x) \in \mathrm{E}^\perp = \left\{0_\mathrm{E}\right\}$; $\varphi^*(x) = 0_\mathrm{E}$ et $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi^*$.
L'égalité est établie par double inclusion.

10.b) Avec $\varphi = f - \mathrm{id_E}$, on a

$$\varphi^* = f^* - \mathrm{id_E},$$

(relation qui découle de ${}^t(\mathrm{M} - \mathrm{I}_n) = {}^t\mathrm{M} - \mathrm{I}_n$) et

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{id_E}\right) &= \mathrm{Ker}\left(f^* - \mathrm{id_E}\right)\\ &= \mathrm{Ker}\left(\left(f - \mathrm{id_E}\right)^*\right) = \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{id_E}\right)^\perp.\end{aligned}$$

Comme pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien :

$$\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E},$$

les sous-espaces $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{id_E}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{id_E}\right)$ sont bien supplémentaires et orthogonaux.

11. Il suffit de reprendre le raisonnement des questions 6 et 7.

12.a) On a

$$\sigma_e(e) = e - \frac{2\langle e, e\rangle}{\|e\|^2} e = e - 2e = -e.$$

et pour $x \in \mathrm{Vect}(e)^\perp$

$$\sigma_e(x) = x - \frac{2(x, e)}{\|e\|^2} = x.$$

12.b) On a pour $x = \lambda e + x_\perp$ avec $e \in \mathrm{Vect}(e)$, $x_\perp \in \mathrm{Vect}(e)^\perp$

$$\begin{aligned}\|\sigma_e(x)\|^2 &= \|-\lambda e + x_\perp\|^2\\ &= \|-\lambda e\|^2 + \|x_\perp\|^2 \quad \text{(Pythagore)}\\ &= \|\lambda e\|^2 + \|x_\perp\|^2\\ &= \|\lambda e + x_\perp\|^2 \quad \text{(Pythagore)}\\ \|\sigma_e(x)\|^2 &= \|x\|^2.\end{aligned}$$

Par définition, σ_e est donc orthogonal.
De plus, tout endomorphisme orthogonal est bijectif. En effet, si $x \in \mathrm{Ker}\,\sigma_e$

$$0 = \|\sigma_e(x)\| = \|x\| \quad \text{puis } x = 0_\mathrm{E}.$$

On en déduit l'injectivité de σ_e puis la bijectivité (dimension finie).

13.a) Comme σ_e est orthogonal, on a vu que les sous-espaces

$$\mathrm{Im}\left(f - \mathrm{id_E}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{id_E}\right)$$

sont supplémentaires orthogonaux. Comme $e \in \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{id_E}\right)$, on sait alors que $e \in \left(\mathrm{Ker}\, f - \mathrm{id_E}\right)^\perp = \mathrm{W}^\perp$.

13.b) Dans ce cas et avec la première question de cette partie

$$\sigma_e(f(u) - u) = \sigma_e(e) = -e = -f(u) + u \quad (\mathrm{L}_1)$$

De plus, $u + f(u) \perp e$ car

$$\langle u + f(u), u - f(u)\rangle = \|u\|^2 - \|f(u)\|^2 = 0.$$

On a

$$\sigma_e(f(u) + u) = f(u) + u \quad (\mathrm{L}_2)$$

En effectuant l'opération sur les lignes : $(\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2)/2$, on obtient

$$\sigma_e(f(u)) = u.$$

Puis $(\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1)/2$ donne

$$\sigma_e(u) = f(u).$$

13.c)
14.

Problème 2

---

15. On a $\mathrm{U}_n = x^{2n} + \mathrm{Q}(x)$ où $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$. En dérivant n fois, on a

$$\mathrm{U}_n^{(n)} = \underbrace{2n(2n-1) \times \cdots \times (2n-(n-1))}_{=(2n)!/n! \neq 0} x^{2n-n} + \underbrace{\mathrm{Q}^{(n)}(x)}_{\in \mathbb{R}_{n-1}[x]}$$

On constate que L_n est de degré n avec

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!} \times \frac{1}{2^n n!} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.$$

16.a,b) La linéarité de φ découle de la linéarité de la dérivation.
De plus pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[x]$

$$\begin{aligned}&\deg \mathrm{P}'' \leqslant \deg \mathrm{P} - 2 \text{ puis } \deg\left(x^2 - 1\right)\mathrm{P}'' \leqslant n\\ &\deg \mathrm{P}' \leqslant \deg \mathrm{P} - 1 \text{ puis } \deg\left(2x\mathrm{P}'\right) \leqslant n.\end{aligned}$$

Ainsi $\qquad \varphi(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[x]$.

L'application φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ est bien stable par φ.

17. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\quad k \geqslant 2$

$$\begin{aligned}&\varphi(1) = 0, \quad \varphi(x) = 2x\\ &\varphi\left(x^k\right) = \left(x^2 - 1\right) k(k-1)x^{k-2} + 2x k x^{k-1}\\ &= (k(k-1) + 2k)x^k - k(k-1)x^{k-2}\\ &\varphi\left(x^k\right) = k(k+1)x^k - k(k-1)x^{k-1}.\end{aligned}$$

Dès lors M_n est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux sont :

$$0; 2; \ldots k(k+1), \ldots, n(n+1).$$

Dans le cas d'une matrice triangulaire, le spectre se lit sur la diagonale

$$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \left\{k(k+1) \mid k \in [\![0;n]\!]\right\}.$$

Les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes, il y en a $\dim \mathbb{R}_n[x]$. On sait alors que φ_n est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont de dimension 1.

18.a)

$$\begin{aligned}&\left(x^2-1\right)\mathrm{U}_k' - 2kx\mathrm{U}_k\\ &= \left(x^2-1\right)k\cdot 2x\cdot\left(x^2-1\right)^{k-1} - 2kx\left(x^2-1\right)^k = 0\end{aligned}$$

18.b) D'après la formule de Leibniz en posant $\mathrm{S}(x) = x^2-1$ et $\mathrm{T}(x) = x$,

$$0 = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\mathrm{S}^{(i)}\mathrm{U}_k^{(k+1+1-i)} - 2k\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\mathrm{T}^{(i)}\mathrm{U}_k^{(k+1-i)}$$

Comme $\mathrm{S}^{(i)} = 0$ pour $i \geqslant 3$ et $\mathrm{T}^{(i)} = 0$ pour $i \geqslant 2$, les sommes se simplifient

$$\begin{aligned}0 &= \binom{k+1}{0}\mathrm{S}\mathrm{U}_k^{(k+2)} + \binom{k+1}{1}\mathrm{S}'\mathrm{U}_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{2}\mathrm{S}''\mathrm{U}_k^{(k)}\\ &\quad -2k\binom{k+1}{0}\mathrm{T}\mathrm{U}_k^{(k+1)} - 2k\binom{k+1}{1}\mathrm{T}'\mathrm{U}_k^{(k)}\\ &= \left(x^2-1\right)\mathrm{U}_k^{(k+2)} + (k+1)2x\mathrm{U}_k^{(k+1)} + \frac{k(k+1)}{2}\times 2\cdot\mathrm{U}_k^{(k)}\\ &\quad -2kx\mathrm{U}_k^{(k+1)} - 2k(k+1)\mathrm{U}_k^{(k)}\\ &= \left(x^2-1\right)\mathrm{U}_k^{(k+2)} + 2x\mathrm{U}_k^{(k+1)} - k(k+1)\mathrm{U}_k^{(k)}.\end{aligned}$$

19. La relation précédente donne

$$\varphi\left(\mathrm{U}_k^{(k)}\right) - k(k+1)\mathrm{U}_k^{(k)} = 0.$$

En divisant par $2^k k!$ et par linéarité de φ

$$\varphi\left(\mathrm{L}_k\right) = k(k+1)\mathrm{L}_k \quad\text{et}\quad \mathrm{L}_k \neq 0_{\mathbb{R}_n[x]}$$

le polynôme L_k est donc bien vecteur propre pour la valeur propre $k(k+1)$.

20. Soit P un vecteur propre associé à λ

$$\varphi(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P} \quad\text{et}\quad \mathrm{P} \neq 0_{\mathbb{R}}[x].$$

Soit n un entier tel que $n \geqslant \deg \mathrm{P}$

$$\varphi_n(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P}) = \lambda\mathrm{P} \quad\text{et}\quad \mathrm{P} \neq 0_{\mathbb{R}[x]}.$$

Donc P est un vecteur propre de φ_n. Il existe $k \in [\![0;n]\!]$ tel que $\lambda = k(k+1)$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_{k(k+1)}(\varphi_n)$. Or on a montré que ce sous-espace est de dimension 1 et contient L_k.

$$\mathrm{P} \in \mathrm{E}_{k(k+1)}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{L}_k\right).$$

En revenant à φ

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \left\{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\right\}.$$

et $$\mathrm{E}_{k(k+1)}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{L}_k\right).$$

21. Voir le cours.

22. On a par intégration par parties (les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$) :

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1\left(t^2-1\right)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\left(t^2-1\right)\mathrm{P}'(t)\mathrm{Q}(t)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1\left(2t\mathrm{P}'(t) + \left(t^2-1\right)\mathrm{P}''(t)\right)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_{-1}^1\varphi(\mathrm{P})(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{d}t = -\langle\varphi(\mathrm{P}),\mathrm{Q}\rangle.\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles

$$\langle\mathrm{P},\varphi(\mathrm{Q})\rangle = \langle\varphi(\mathrm{Q}),\mathrm{P}\rangle = -\int_{-1}^1\left(t^2-1\right)\mathrm{Q}'(t)\mathrm{P}'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a bien

$$\langle\mathrm{P},\varphi(\mathrm{Q})\rangle = \langle\mathrm{Q},\varphi(\mathrm{P})\rangle.$$

On dira au second semestre que l'endomorphisme φ est symétrique.

23.a) Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned}n(n+1)\langle\mathrm{L}_n,\mathrm{L}_m\rangle &= \langle n(n+1)\mathrm{L}_n,\mathrm{L}_m\rangle\\ &= \left\langle\varphi\left(\mathrm{L}_n\right),\mathrm{L}_m\right\rangle \quad\text{(question 16)}\\ &= \left\langle\mathrm{L}_n,\varphi\left(\mathrm{L}_m\right)\right\rangle \quad\text{(question 19)}\\ &= \langle\mathrm{L}_m, m(m+1)\mathrm{L}_m\rangle\\ n(n+1)\langle\mathrm{L}_n,\mathrm{L}_m\rangle &= m(m+1)\langle\mathrm{L}_n,\mathrm{L}_m\rangle.\end{aligned}$$

Comme $n(n+1) \neq m(m+1)$, on a $\langle\mathrm{L}_n,\mathrm{L}_m\rangle = 0$.
La famille est orthogonale.

23.b) La famille $\left(\mathrm{L}_k\right)_{k\in[\![0;n-1]\!]}$ est une famille libre car échelonnée en degré (ou encore, car associée à des valeurs propres distinctes)
Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, $\mathrm{L}_k \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Ainsi, la famille est une base de $\mathbb{R}_{n_1}[x]$.
Comme L_n est orthogonale à chaque vecteur de cette base,

$$\mathrm{L}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^{\perp}.$$

24.a) Procédons par intégration par partie pour $k \in [\![0;2n-1]\!]$

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_k &= \left\langle\mathrm{U}_n^{(k)},\mathrm{U}_n^{(2n-k)}\right\rangle\\ &= \int_{-1}^1\mathrm{U}_n^{(k)}(t)\mathrm{U}_n^{(2n-k)}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\mathrm{U}_n^{(k-1)}\mathrm{U}_n^{(2n-k-1)}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1\mathrm{U}_n^{(k+1)}(t)\mathrm{U}_n^{(2n-(k+1))}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\mathrm{U}_n^{(k)}\mathrm{U}_n^{(2n-(k+1))}\right]_{-1}^1 - \underbrace{\left\langle\mathrm{U}_n^{(k+1)},\mathrm{U}_n^{(2n-(k+1))}\right\rangle}_{(-1)^{k+1}u_{k+1}}\end{aligned}$$

Notons que le crochet est nul. En effet -1 et 1 sont racines de multiplicité n de U_n. D'où

$$\forall k \in [\![0;n-1]\!],\qquad \mathrm{U}_n^{(k)}(1) = 0 = \mathrm{U}_n^{(k)}(-1).$$

et pour $k \in [\![n,2n-1]\!]$,

$$0 \leqslant 2n-(k+1) \leqslant 2n-(n+1) \leqslant n-1$$

puis $$\mathrm{U}_n^{(2n-(k+1))}(1) = 0 = \mathrm{U}_n^{(2n-(k+1))}(-1).$$

Résumons $(-1)^k u_k = (-1)^k(-u_{k+1}) = (-1)^{k+1}u_{k+1}$.
La suite est bien constante.

24.b) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|L_n\|^2 &= \langle L_n, L_n\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \left\langle U_n^{(n)}, U_n^{(n)}\right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 (-1)^n u_n \\
&= \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 (-1)^n u_0 \quad \left(\text{constance de } \left((-1)^n u_k\right)\right). \\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1} \\
\|L_n\|^2 &= \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

24.c) La famille est orthonormée pour ce produit scalaire.

25. Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{R}_n[x]$. D'après ce qui précède

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k > n \quad \Rightarrow \quad \langle L_k, P\rangle = 0$$

Comme L_k et Q_k sont colinéaires :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad k > n \quad \Rightarrow \quad \langle Q_k, P\rangle = 0$$

Par conséquent

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad m > n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{m} c_k(P)^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k(P)^2$$

La série $\sum c_k(P)^2$ est constante à partir d'un certain rang, elle converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(P)^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k(P)^2.$$

Or dans l'espaces euclidien $\mathbb{R}_n[x]$ avec la b.o.n $(Q_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$, on sait que

$$\|P\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle P, Q_k\rangle^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k(P)^2.$$

Ce qui conclut.

26.a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned}
\langle xP(x), Q(x)\rangle &= \int_{-1}^{1} \big(xP(x)\big)Q(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} P(x)\big(xQ(x)\big)\,dx = \langle P(x), xQ(x)\rangle.
\end{aligned}$$

Si PQ est une polynôme pair, la fonction $x \in [-1;1] \mapsto xQ(x)P(x)$ est une fonction impaire et

$$\langle P(x), xQ(x)\rangle = \int_{-1}^{1} xP(x)Q(x)\,dx = 0.$$

26.b) $xL_n(x) \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ et $(Q_i)_{i\in[\![0;n+1]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n+1}[x]$. D'où

$$\begin{aligned}
xL_n(x) &= \sum_{i=0}^{n+1} \big\langle xL_n(x), Q_i(x)\big\rangle Q_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \big\langle \ln(x), xQ_i(x)\big\rangle Q_i(x)
\end{aligned}$$

or pour $i \leqslant n-2$, $xQ_i(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et on a vu que

$$L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^{\perp}$$

Ainsi

$$\forall i \in [\![0; n-2]\!], \qquad \big\langle L_n, xQ_i(x)\big\rangle = 0.$$

La somme se simplifie et $Q_i(x) = L_i(x)/\|L_i\|$

$$\begin{aligned}
xL_n(x) = &\frac{\langle L_n(x), xL_{n+1}(x)\rangle}{\|L_{n+1}\|^2} L_{n+1} + \frac{\langle L_n(x), xL_n(x)\rangle}{\|L_n\|^2} L_n \\
&+ \frac{\langle L_n(x), xL_{n-1}(x)\rangle}{\|L_{n-1}\|} L_n.
\end{aligned}$$

Notons que par imparité de $x \mapsto xL_n(x)^2$ (car L_n est soit pair, soit impair car U_n est pair), on a

$$\langle L_n(x), xL_n(x)\rangle = \int_{-1}^{1} xL_n(x)^2\,dx = 0.$$

Ce qui conclut sur l'existence des deux réels.

27. On commence par importer les bibliothèques :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

27.a)

```
def PolyLegendre(n,x):
    lold=1
    if n==0:
        return lold
    lnew=x
    for i in range(2,n+1):
        linter=lnew
        lnew=((2*i-1)*x*lnew-(i-1)*lold)/i
    return lnew
```

27.b)

```
plt.clf()
def trace_legendre(n):
    x=np.linspace(-1,1,200)
    y=np.zeros(200)
    for i in range(200):
        y[i]=PolyLegendre(n,x[i])
    plt.plot(x,y,linewidth=0.5)
    plt.show()
```

28.a) On $L_0 = 1$ et $L_1 = 1$. Pour coder ces polynômes, on commence par une matrice ligne remplie de 0 et l'on change respectivement le premier et le deuxième coefficient :

```
M0=np.zeros(N)
M0[0]=1 # corespond à L0
M1=np.zeros(N)
M1[1]=1
```

28.b)

```
def somme(M,N,a,b):
    m=len(M) # m=n+1
    R=np.zeros(m)
    for i in range(m):
        R[i]=a*M[i]+b*N[i]
    return R
```

28.c)

```python
def multix(M):
    m=len(M) # m=n+1
    R=np.zeros(m)
    for i in range(m-1):
        R[i+1]=M[i]
    return R
```

29.

```python
def Legendre(n):
    N=20
    Mold=np.zeros(N)
    Mold[0]=1 # corespond à L0
    Mnew=np.zeros(N)
    Mnew[1]=2
    for i in range(2,n+1):
        Minter=Mnew
        a=2*(2*i-1)
        b=-4*(i-1)**2
        xMnew=multix(Mnew)
        Mnew=somme(xMnew,Mold,a,b)
        Mold=Minter
    return Mnew
```

30.a)

```python
def eval(M,t):
    m=len(M)
    s=0
    for i in range(m):
        s+=M[i]*t**i
    return s
```

30.b)

```python
from scipy.special import factorial
def trace(n):
    x=np.linspace(-1,1,200)
    y=np.zeros(200)
    M=Legendre(n)/(2**n*factorial(n))
    for i in range(200):
        y[i]=eval(M,x[i])
    plt.plot(x,y,linewidth=0.5)


for n in range(1,20):
    trace(n)
plt.show()
```

31. Prouvons par récurrence que pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, la propriété $\mathscr{Q}_k$: « Il existe $t_{1,k} < t_{2,k} < \cdots < t_{2n-k,k}$ tel que pour tout $i \in [\![1, 2n-k]\!]$, $h^{(k)}\left(t_{i,k}\right) = 0$ » est vérifiée.

→ *Initialisation.* Par hypothèse, $\mathscr{Q}_0$ est vérifié.

→ *Hérédité.* Soit $k \in [\![0, 2n-2]\!]$. Supposons que $\mathscr{Q}_k$ est vraie. Alors il existe des réels

$$t_{1,k} < t_{2,k} < \cdots < t_{2n-k,k}$$

tels que pour tout $i \in [\![1, 2n-k]\!]$,

$$h^{(k)}\left(t_{i,k}\right) = 0.$$

Or $h^{(k)}$ est dérivable, car h est de classe $\mathscr{C}^{2n-1}$. Pour tout $i \in [\![1, 2n-k-1]\!]$, on peut appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $\left[t_{i,k}, t_{i+1,k}\right]$.
Donc il existe $t_{i,k+1} \in]t_{i,k}, t_{i+1,k}[$ tel que

$$h^{(k+1)}\left(t_{i,k+1}\right) = h^{(k)\prime}\left(t_{i,k+1}\right) = 0.$$

Étant sur des intervalles disjoints, les nombres $\left(t_{i,k+1}\right)_{i \in [\![1;2n-k-1]\!]}$ sont différents.
La propriété $\mathscr{Q}_{k+1}$ est vraie.

→ *Conclusion.* Pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, $\mathscr{Q}_k$ est vraie. Le résultat est donné pour $k = 2n-1$.

32.a) On reconnaît l'expression d'un taux d'accroissement entre x et x_i. Comme L_n est dérivable en x_i, ce taux d'accroissement admet une limite lorsque $x \to x_i$. On obtient :

$$\begin{aligned} M_i(x) &= \frac{L_n(x)}{(x-x_i)L_n'(x_i)} = \frac{L_n(x) - L_n(x_i)}{x - x_i} \cdot \frac{1}{L_n'(x_i)} \\ &\xrightarrow[x\to x_i]{} \frac{L_n'(x_i)}{L_n'(x_i)} = 1. \end{aligned}$$

La fonction M_i est prolongeable par continuité en x_i.
Pour $x \neq x_i$, $M_i(x)$ s'écrit sous forme $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ Par continuité, la formule s'étend par passage à la limite $(x \to x_i)$ à $x = x_i$. La fonction M_i est donc bien polynomiale.

32.b) On vérifie que $M_i(x_j) = \delta_{i,j}$. C'est-à-dire nul si $i \neq j$ et valant 1 si $i = j$.

33. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ell_i = 0_{E_n}.$$

$$\text{D'où} \qquad \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[x], \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i(P) = 0$$

Avec le choix $P = M_k$, on obtient directement $\lambda_k = 0$. La famille est libre.

34. Comme $\dim E_n = \dim \alpha(\mathbb{R}_{n-1}[x], \mathbb{R}) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[x]) \times 1 = n$, et la famille $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ de E_n est libre avec n éléments. Dès lors la famille est une base de E_n. Comme $\psi \in E_n$, il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tel que

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell_i$$

c'est-à-dire

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[x], \quad \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \psi(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i(P) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(i)$$

35. Notons que les réels $(x_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ étant les racines de L_n

$$P(x_i) = Q(x_i)\underbrace{L_n(x_i)}_{=0} + R(x_i) = R(x_i).$$

De plus, $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$ impose $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} P(t)\,dt &= \int_{-1}^{1} Q(t)L_n(t) + R(t)\,dt \\ &= \langle Q, L_n \rangle + \int_{-1}^{1} R(t)\,dt. \end{aligned}$$

Or $L_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^{\perp}$ donc $\langle Q, L_n \rangle = 0$;
et $R \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, la relation $(\star\star)$ s'applique

$$\int_{-1}^{1} R(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k R(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P(x_k).$$

On a bien
$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{P}(x_k).$$

36.a) Comme $\mathrm{M}_i' \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ et $\mathrm{L}_n \in \mathbb{R}_{n-1}[x]^{\perp}$ on a bien
$$\langle \mathrm{M}_i', \mathrm{L}_n\rangle = 0.$$

Puis par intégration par parties
$$0 = \langle \mathrm{M}_i', \mathrm{L}_n\rangle = [\mathrm{M}_i\mathrm{L}_n]_{-1}^{1} - \langle \mathrm{M}_i, \mathrm{L}_n'\rangle$$

Or $\qquad [\mathrm{M}_i\mathrm{L}_n]_{-1}^{1} = \mathrm{M}_i(1)\mathrm{L}_n(1) - \mathrm{M}_i(-1)\mathrm{L}_n(-1)$

et $\mathrm{M}_i\mathrm{L}_n' \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$ et la relation $(\star\star)$ donne
$$\begin{aligned}\langle \mathrm{M}_i\mathrm{L}_n'\rangle &= \int_{-1}^{1} \mathrm{M}_i\mathrm{L}_n'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{M}_i(x_k)\mathrm{L}_n'(x_k) = \alpha_i \mathrm{L}_n'(x_i)\end{aligned}$$

D'où le résultat.

36.b) On montre par récurrence double à partir de $(\bullet)$ que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{L}_n(1) = 1.$$

On peut aussi utiliser la formule de Leibniz à partir de $\mathrm{U}_n^{(n)} = (x-1)^{(n)}(x+1)^{(n)}$.

De plus, par parité de U_n, on prouve que la fonction L_n est soit paire, soit impaire. Par conséquent
$$1 = \mathrm{L}_(1)^2 = \mathrm{L}_n(-1)^2.$$

Ainsi
$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{\mathrm{M}_i(1)\mathrm{L}_n(1)}{\mathrm{L}_n'(x_i)} - \frac{\mathrm{M}_i(-1)\mathrm{L}_n(-1)}{\mathrm{L}_n'(x_i)} \\ &= \frac{\mathrm{L}_n(1)^2}{(1-x_i)\mathrm{L}_n'(x_i)^2} - \frac{\mathrm{L}_n(-1)^2}{(-1-x_i)\mathrm{L}_n'(x_i)^2} \\ &= \left(\frac{1}{1-x_i} + \frac{1}{1+x_i}\right)\cdot\frac{1}{\mathrm{L}_n'(x_i)^2} \\ &= \frac{2}{\left(1-x_i^2\right)\mathrm{L}_n'(x_i)^2}.\end{aligned}$$

37.a) Si $\mathrm{P} \in \operatorname{Ker}\varphi$, on a pour tout $i \in [[1;n]]$:
$$\mathrm{P}(x_i) = \mathrm{P}'(x_i) = 0.$$

Le polynôme P a donc n racines de multiplicité au moins 2 alors qu'il est de degré au plus $2n-1$. Nécessairement P est le polynôme nul. On obtient $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ et φ est injective.

37.b) L'endomorphisme en dimension finie φ est donc bijectif. Comme le problème posé est équivalent à
$$\mathrm{H} \in \mathbb{R}_{2n-1}[x] \quad \varphi(\mathrm{P}) = \left(f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots f'(x_n)\right)$$

il y a un bien une unique solution donnée par
$$\mathrm{H} = \varphi^{-1}\left(\left(f(x_1)\dots, f(x_n), f'(x_1)\dots f'(x_n)\right)\right).$$

37.c) On a bien $\mathrm{T}_n \in \mathbb{R}_{2_{n-1}}[x]$ et on vérifie que
$$\varphi(\mathrm{T}_n) = \left(\left(f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n)\right)\right).$$

Donc $\mathrm{T}_n = \mathrm{H}$, le polynôme recherché à la question précédente.

38. Soit $x \in [-1,1]$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!], x \neq x_i$.
Considérons
$$g : [-1,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t) - \mathrm{H}_n(t) - \frac{\mathrm{A}_n(t)^2}{(2n)!}\mathrm{K}$$

avec $\qquad \mathrm{K} = \dfrac{2n!}{\mathrm{A}_n(x)}\left[f(x) - \mathrm{H}_n(x)\right].$

K existe bien car $\mathrm{A}_n(x) \neq 0$, puisque $x \neq x_i$.

- $g(x) = f(x) - \mathrm{H}_n(x) - \dfrac{\mathrm{A}_n(x)}{2n!}\mathrm{K} = f(x) - \mathrm{H}(x) - 1[f(x) - \mathrm{H}(x)] = 0$;
- Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,
$$g(x_i) = [f(x_i) - \mathrm{H}(x_i)] - \frac{\mathrm{A}(x_i)^2}{2n!}\mathrm{K} = 0.$$

Ainsi g admet $n+1$ racines distinctes : $x, x_1, \dots x_n$.
On ne sait pas où est x exactement. On ordonne ces $n+1$ racines en les notant $y_1, y_2, \dots y_{n+1}$ En appliquant le théorème de Rolle sur chacun des n intervalles $[\ y_i, y_{i+1}\ ]$, comme g est dérivable, il existe $z_i \in [y_i, y_{i+1}]$ tel que $g'(z_i) = 0$.
Par ailleurs, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^{2n}$ et pour tout $t \in [-1,1]$ (par linéarité) :
$$g'(t) = f'(t) - \mathrm{H}_n'(t) - f(t) - \mathrm{H}_n(t) - 2\frac{\mathrm{A}_n'(t)\mathrm{A}_n(t)}{(2n)!}\mathrm{K}$$

Donc $g'(x_i) = 0$, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$. Ainsi g' est de classe $\mathscr{C}^{2n-1}$ avec $n+n$ racines distinctes : $x_1, \dots x_n$ et $z_1, \dots z_n$. On peut donc appliquer le résultat de la première question : il existe $c \in [y_1, y_{n+1}] \subset [-1,1]$ tel que $g^{(2n)}(c) = 0$. Or H est un polynôme de degré au plus $2n-1$,A est de degré $2n$ de coefficient 1 , donc $\mathrm{H}^{(2n)} = 0$ et $\mathrm{A}^{(2n)} = (2n)!$. Donc par linéarité de la dérivation ($2n$ fois) :
$$g^{(2n)}(c) = 0 = f^{(2n)}(c) - \mathrm{K} \Longrightarrow \mathrm{K} = f^{(2n)}(c)$$
$$\exists c \in [-1,1], f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{\mathrm{A}_n(x)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c)$$

39.a) Avec $y \notin \{x_1, \dots x_n\}$, on peut exploiter le résultat de la question précédente. Si $y = x_i$, alors $f(y) - \mathrm{H}(y) = f(x_i) - \mathrm{H}(x_i) = 0 = \mathrm{A}_n(x_i) = \mathrm{A}_n(y)$, on prend c quelconque.
$$\forall y \in [-1,1], \exists c_y \in [-1,1], f(y) - \mathrm{H}_n(y) = \frac{\mathrm{A}_n(y)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c_y)$$

39.b) La fonction $f^{(2n)}$ est continue sur le segment $[-1,1]$ (car f est de classe $\mathscr{C}^{2n}$). Ainsi $f^{(2n)}$ est bornée sur $[-1,1]$ et atteint ses bornes. Il existe $r \in [-1,1]$ tel que $\forall t \in [-1,1], f^{(2n)}(t) \leqslant f^{(2n)}(r)$. D'où l'existence de M_{2n}.
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \left(\alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)\right) &= \Psi(f) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathrm{H}(x_k) \\ &= \Psi(f) - \Psi(\mathrm{H}).\end{aligned}$$

Car $f\left(x_i\right)=\mathrm{H}\left(x_i\right)$ et $\mathrm{H}\in\mathbb{R}_{2n-1}[x]$. Puis Ψ est linéaire :

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f\left(x_k\right)\right| &= |\Psi(f-\mathrm{H})|\\ &\leqslant \frac{1}{(2n)!}\int_{-1}^{1}\left|\mathrm{A}_n(y)^2 f^{(2n)}\left(c_y\right)\right|\mathrm{d}y\\ &\leqslant \frac{\mathrm{M}_{2n}}{(2n)!}\Psi\left(\mathrm{A}_n^2\right).\end{aligned}$$

40. On a

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{A}_n(t)^2\,\mathrm{d}t=\left\langle\frac{1}{a_n}\mathrm{L}_n,\frac{1}{a_n}\mathrm{L}_n\right\rangle=\frac{1}{a_n^2}\|\mathrm{L}_n\|^2=\left(\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}\right)^2\frac{2}{2n+1}$$

Or on a vu que

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{A}_n(t)^2\,\mathrm{d}t=\left\langle\frac{1}{a_n}\mathrm{L}_n,\frac{1}{a_n}\mathrm{L}_n\right\rangle=\frac{1}{a_n^2}\|\mathrm{L}_n\|^2=\left(\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}\right)^2\frac{2}{2n+1}.$$

Et d'après la formule de Stirling :

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim\frac{(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}}{n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}2\pi n}=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{A}_n(t)^2\,\mathrm{d}t\sim\frac{\pi n}{2^{2n}}\frac{2}{2n+1}\sim\frac{\pi}{2^{2n}}.$$