DS 5 - sujet A

THÈMES : CALCULS DIFFÉRENTIELS, VECTEURS ALÉATOIRES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. (Pas de bonus dans l'entête à chaque fois ;)). Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

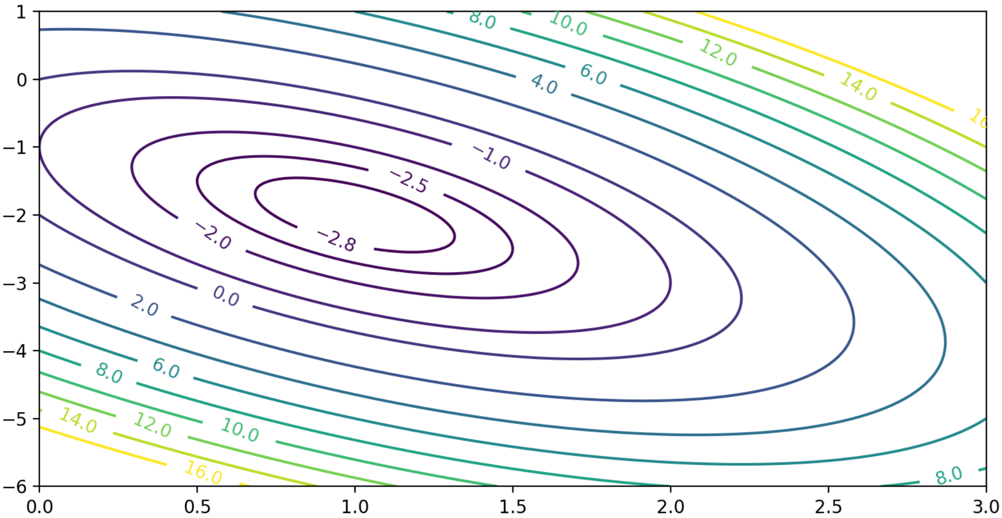
Exercice 1
Calculs de points critiques

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. **a)** Calculer le ou les points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y.$$

b) Que peut-on conjecturer sur ce(s) point(s) critique(s) à l'aide des lignes de niveau suivantes ?



2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^n$ par

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Vérifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer son unique point critique.

Exercice 2
Exemples de somme et minimum de variables aléatoires

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(X = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$$

où a est un réel strictement positif fixé.

1. Vérifier que l'on a bien défini une loi de probabilité.
Il faut vérifier que les valeurs sont bien positives et que la somme vaut 1.

-
2. Simulation python
3. **a)** Écrire un programme qui prend en arguments $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_*^+$ puis renvoie la somme $\mathrm{S}(n, a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}$.
   b) Adapter le programme précédent pour construire une fonction python qui prend en arguments a et un réel $x \in]0;1[$ puis le plus petit entier N tel que
$$x < \sum_{k=0}^{\mathrm{N}+1} \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}.$$
   c) Soit U, une variable aléatoire de loi uniforme continue sur $]0;1[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on définit
$$\mathrm{N_U}(\omega) = \max\left\{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{U}(\omega) < \mathrm{S}(n+1, a)\right\}.$$
   On admet que $\mathrm{N_U}$ est une variable aléatoire de même loi que X. Donner une fonction python qui prend en argument a, puis simule X.

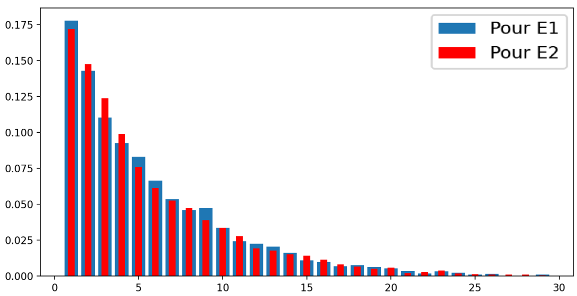
   Dans toute la suite, on désigne par Y une variable aléatoire indépendante de X, définie sur le même espace probabilisé, et suivant la même loi que X.

- **Loi d'une somme**

4. On considère la variable aléatoire $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$.
   a) Déterminer la loi de Z.
   b) Trouver l'espérance de la variable aléatoire $\mathrm{S} = \frac{1}{1+\mathrm{Z}}$.
   c) Après avoir justifié l'existence de l'espérance, comparer $\mathbf{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{1+\mathrm{Z}}\right)$ et $\mathbf{E}\left(\frac{\mathrm{Y}}{1+\mathrm{Z}}\right)$.
   d) En déduire $\mathbf{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{1+\mathrm{Z}}\right)$.

- **Loi du minimum**

5. On considère maintenant la variable aléatoire $\mathrm{T} = \min(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, définie par : pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathrm{T}(\omega) = \min(\mathrm{X}(\omega), \mathrm{Y}(\omega))$.
   a) Déterminer $\mathbf{P}(\mathrm{X} > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) Prouver que la loi de T est donnée par $\mathrm{T}(\Omega) = \mathbb{N}$ et :
$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(\mathrm{T} = m) = \frac{1+2a}{(1+a)^2}\left(\frac{a}{1+a}\right)^{2m}.$$
   c) Commenter ce code Python :



Editeur

```
m=5000, a=10, p=1-(a/(1+a))**2
E1=np.zeros(m)
E2=np.zeros(m)
for i in range(m):
    E1[i]=min(simuX(a)+1,simuX(a)+1)
    E2[i]=rd.geometric(p)
classe=np.linspace(1,30,30)-0.5
plt.hist(E1,classe,rwidth=0.8,
    density=True)
plt.hist(E2,classe,rwidth=0.4,
    density=True,color='red')
plt.legend()
plt.show()
```

Exercice 3
Optimisation d'une fonction de 2 variables

Pour tout réel a strictement positif, on considère la fonction f_a de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_a(x, y) = \left(1 + y + xy + ax^2\right)\mathrm{e}^y.$$

Partie I. Étude des extrema de f_a

1. En considérant $f_a(0,y)$, justifier que f_a n'admet pas de maximum global.
   Dans la suite, on admet que f_a admet un minimum global.
2. Justifier que f_a est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières de f_a.
3. En déduire que f_a possède deux points critiques, notés A et B avec $f_a(\mathrm{A}) < 0 < f_a(\mathrm{B})$.
4. Donner la valeur du minimum global.

Partie II. Étude d'un fonction définie à l'aide de f_a

5. Soit $x \in \mathbb{R}$, justifier la convergence et le calcul de
$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y.$$
6. Pour tout réel x, justifier que l'intégrale $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} y\mathrm{e}^y \,\mathrm{d}y$ converge et donner sa valeur.
7. Déduire des deux questions précédentes que l'on définit bien une fonction F_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en posant
$$\mathrm{F}_a(x) = \int_{-\infty}^{x} f_a(x,y)\,\mathrm{d}y.$$
   Exprimer $\mathrm{F}_a(x)$ en fonction de a et de x.
8. Donner le tableau de variations de F_a.

Problème I

Tirage dans une urne, matrice de variance-covariance

PARTIE A

On considère, dans cette partie des entiers naturels non nuls n, u, d, t et b, vérifiant
$$u + d + t = b.$$
Une urne $\mathscr{U}$ contient b boules, parmi lesquelles u boules portent le numéro 1, d le numéro 2 et t le numéro 3.
Une expérience consiste en n tirages successifs d'une boule de l'urne $\mathscr{U}$ avec remise. À chaque tirage, toutes les boules de l'urne $\mathscr{U}$ ont même probabilité d'être tirées.
Le modèle choisi pour cette expérience est l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ dans lequel l'univers Ω est l'ensemble $\{1,2,3\}^n$ des n-uplets d'éléments de l'ensemble $\{1,2,3\}$, et l'ensemble des événements $\mathscr{A}$ est l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω, la probabilité $\mathbf{P}$ se déduisant naturellement des hypothèses qui ont été ou seront formulées.

Aucun tirage n'influe sur les autres en cela que, si une suite quelconque $(\mathrm{V}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ est telle que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la valeur de V_k ne dépend que du résultat du k-ième tirage, alors les variables $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \ldots, \mathrm{V}_n$ sont mutuellement indépendantes.

On note U (respectivement D, T) la variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ dont la valeur est le nombre de boules numérotées 1 (respectivement 2, 3) tirées au cours de l'expérience.

- **Python**

1. Écrire un programme python qui prend en argument n, u, d, t et renvoie une simulation du vecteur aléatoire $(\mathrm{U}, \mathrm{D}, \mathrm{T})$.

2. Montrer que la variable aléatoire U suit une loi usuelle (à préciser), donner son espérance et sa variance. Donner, de même, les lois des variables aléatoires D et T, respectivement.
3. Les variables aléatoires U et D sont-elles indépendantes ? Justifiez votre réponse.
4. Vérifier, sans calcul superflu, que
$$\mathbf{E}(\mathrm{U}+\mathrm{D}) = n\frac{u+d}{b} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathrm{U}+\mathrm{D}) = n\frac{(u+d)t}{b^2}.$$
5. En déduire que la covariance du couple (U, D) est égale à $-\dfrac{nud}{b^2}$.

   Dans toute la suite, m, i et j étant des entiers naturels, on note :
$$\begin{pmatrix} m \\ i,j \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{m!}{i!j!(m-i-j)!} & \text{si } i+j \leqslant m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. On considère deux entiers naturels k et ℓ vérifiant $k+\ell \leqslant n$. Soit $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un élément donné de Ω comportant exactement k « 1 » et ℓ « 2 ».
Quelle est la probabilité $\mathbf{P}(\{\omega\})$ de l'événement élémentaire $\{\omega\}$?
Dénombrer les n-uplets appartenant à l'ensemble Ω et comportant exactement k " 1 " et ℓ " 2 ". En déduire que :

$$\mathbf{P}([\mathrm{U}=k] \cap [\mathrm{D}=\ell]) = \begin{pmatrix} n \\ k, \ell \end{pmatrix} \frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n}.$$

Pourquoi ce résultat reste encore vrai si $k+\ell > n$?

PARTIE B : lois marginales d'un couple aléatoire de loi trinomiale

On considère, dans cette partie, un entier naturel n et l'ensemble I_n défini par

$$\mathrm{I}_n = \left\{(k,\ell) \mid k \in [[0,n]] \text{ et } \ell \in [[0,n]] \quad k+\ell \leqslant n\right\}.$$

Un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ étant donné, ainsi que trois réels strictement positifs p, q et r vérifiant $p+q+r=1$, on considère un couple aléatoire $(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n)$ défini sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans I_n, et tel que, pour tout couple $(k,\ell) \in \mathrm{I}_n$:

$$\mathbf{P}([\mathrm{X}_n = k] \cap [\mathrm{Y}_n = \ell]) = \begin{pmatrix} n \\ k, \ell \end{pmatrix} p^k q^\ell r^{n-k-\ell}.$$

7. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{(k,\ell) \in \mathrm{I}_n} \begin{pmatrix} n \\ k, \ell \end{pmatrix} p^k q^\ell r^{n-k-\ell} = 1.$
8. Montrer que les variables aléatoires X_n et Y_n suivent toutes deux une loi binomiale (en préciser les paramètres respectifs).
- On se propose dans les 3 prochaines questions de calculer la covariance du couple $(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n)$.

9. On suppose que $n \geqslant 2$. Prouver que, pour tout couple $(k,\ell) \in \mathrm{I}_n$ vérifiant $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$, on a :

$$k\ell \begin{pmatrix} n \\ k, \ell \end{pmatrix} = n(n-1) \begin{pmatrix} n-2 \\ k-1, \ell-1 \end{pmatrix}$$

En déduire que $\mathbf{E}(\mathrm{X}_n \mathrm{Y}_n) = n(n-1)pq$.
10. Cette relation est-elle encore vraie si $n=0$? si $n=1$?
11. En déduire que

$$\operatorname{Cov}(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n) = -npq.$$

12. Les variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?

PARTIE C : Étude de la matrice de variance-covariance

- **Cas général**

Soit $\mathrm{S} = (\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_n)$, un vecteur aléatoire dont chaque variable aléatoire admet un moment d'ordre 2. On définit les matrices S et Σ_S par

$$\Sigma_\mathrm{S} = \begin{bmatrix} \mathrm{V}(\mathrm{S}_1) & \operatorname{Cov}(\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2) & \cdots & \operatorname{Cov}(\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_n) \\ \operatorname{Cov}(\mathrm{S}_2,\mathrm{S}_1) & \mathrm{V}(\mathrm{S}_2) & \cdots & \operatorname{Cov}(\mathrm{S}_2,\mathrm{S}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}(\mathrm{S}_n,\mathrm{S}_1) & \operatorname{Cov}(\mathrm{S}_n,\mathrm{S}_2) & \cdots & \mathrm{V}(\mathrm{S}_n) \end{bmatrix}.$$

13. Justifier que la matrice Σ_S est diagonalisable.
14. Soit $\mathrm{X} = {}^t\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$, une matrice colonne. On note Z la variable aléatoire réelle définie par $\mathrm{Z} = \sum_{i=1}^n x_i \mathrm{S}_i$.
   a) Justifier que
   $$\mathbf{V}(\mathrm{Z}) = {}^t\mathrm{X}\Sigma_\mathrm{S}\mathrm{X}.$$
   b) En déduire que $\operatorname{Sp}(\Sigma_\mathrm{S}) \subset \mathbb{R}^+$.

15. On admet [1] qu'il existe une matrice P, orthogonale et une matrice D diagonale telles que $\Sigma_\mathrm{S} = \mathrm{PD}\,{}^t\mathrm{P} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
   a) Justifier l'existence d'une matrice M telle que ${}^t\mathrm{MM} = \Sigma_\mathrm{S}$.
   On pourra commencer par exhiber une matrice diagonale T *telle que* $\mathrm{T}^2 = \mathrm{D}$.
   b) En déduire que $\mathrm{X} \in \operatorname{Ker}(\Sigma_\mathrm{S})$ si et seulement si $\mathbf{V}(\mathrm{Z}) = 0$.

- **Cas particulier de la partie A**

On suppose dans la suite que le vecteur aléatoire est défini par $\mathrm{S} = (\mathrm{U}, \mathrm{D}, \mathrm{T})$ où les variables U, D et T sont définies à la partie A.

1. mais on pourra le démontrer avec le théorème spectral dans sa version généralisée.

16. En notant $p_1 = u/b, p_2 = d/b, p_3 = t/b$, vérifier que

$$\Sigma_{(\mathrm{U,D,T})} = n\begin{bmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1p_2 & -p_1p_3 \\ -p_1p_2 & p_2(1-p_2) & -p_2p_3 \\ -p_1p_3 & -p_2p_3 & p_3(1-p_3) \end{bmatrix}.$$

17. À l'aide de $\mathrm{U}+\mathrm{D}+\mathrm{T}$, justifier que 0 est valeur propre de $\Sigma_{(\mathrm{U,D,T})}$.
18. Soient λ, μ les deux autres valeurs de $\Sigma_{(\mathrm{U,D,T})}$. On note $s_1 = \mathrm{Tr}(\Sigma_{(\mathrm{U,D,T})})$ et $s_2 = \mathrm{Tr}(\Sigma_{(\mathrm{U,D,T})}{}^2)$. Exprimer s_1 et s_2 à l'aide de λ et μ, puis λ, μ à l'aide de s_1 et s_2.

Problème II

Étude d'un point critique de la fonction $(x, y) \mapsto x^y - y^x$

On considère :

- La fonction φ définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \varphi(t) = \dfrac{\exp(t)-1}{t} - t\left(\exp\left(\dfrac{1}{t}\right)-1\right);$
- la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \psi(t) = t - \dfrac{1}{t} - \ln(t);$
- La partie U de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\quad \mathrm{U} = (]0;+\infty[)^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0 \text{ et } y>0\right\};$
- La fonction $f : \mathrm{U} \mapsto \mathbb{R}$ définie sur U et à valeurs réelles par :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{U}, \quad f(x,y) = x^y - y^x = \exp\left(y\ln(x)\right) - \exp\left(x\ln(y)\right).$$

L'objectif de la suite est de prouver que la fonction f n'admet aucun extremum sur U.
On admet que les résultats vus en cours dans $\mathbb{R}^n$ *sont ainsi valables pour la partie* U.

1. Étudier les variations de ψ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $\psi(1)$ et en déduire le signe de ψ.
2. Prouver la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.
3. Soit $t \in \mathbb{R}_*^+$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ et exprimer sa somme en fonction de $\varphi(t)$ et $\ln(t)$.
4. En déduire :
$$\forall t \in]0;1[, \quad \varphi(t) < \ln(t) \quad \text{et} \quad \forall t \in]1;+\infty[, \quad \varphi(t) > \ln(t).$$
5. Soit $(x,y) \in \mathrm{U}$. Montrer que (x,y) est un point critique de f si et seulement si :
$$\begin{cases} x>1, & y>1 \\ \ln(x)\ln(y) = 1 \\ y^{x-1} = x^{y-1}\ln(x). \end{cases}$$
6. Soit $(x,y) \in \mathrm{U}$ un point critique de f. Justifier l'existence d'un réel $t \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :
$$\begin{cases} x = \exp(t), & y = \exp\left(\frac{1}{t}\right) \\ \varphi(t) = \ln(t). \end{cases}$$
7. Prouver que (e,e) est l'unique point critique de f.
8. En étudiant les signes des fonctions $t \mapsto f(\mathrm{e},\mathrm{e}+t)$ et $t \mapsto f(\mathrm{e}+t,\mathrm{e})$, justifier que f n'admet aucun extremum sur U.

– JOYEUSES FÊTES ! –

❄ DS 5 ❄

THÈMES : CALCULS DIFFÉRENTIELS, VECTEURS ALÉATOIRES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. (Pas de bonus dans l'entête à chaque fois;)). Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème I

De l'algèbre, de l'analyse, des probabilités et du python...

Dans la suite, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit n variables aléatoires $X_1, X_2 \dots, X_n$ telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i $(0 < p_i < 1)$. On suppose que $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

Pour toute matrice colonne $X = {}^t\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$, on note Z_X la variable aléatoire définie par

$$Z_X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i.$$

Dans la suite, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les questions 3, 4, 5 et 6 sont largement indépendantes.

1. Que vaut $\sum_{i=1}^{n} p_i$?

2. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, justifier que $\mathbf{E}\left(X_i X_j\right) = 0$.

- **Étude de la matrice des covariances**

3. Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est tel que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = \mathrm{Cov}\left(X_i, X_j\right).$$

a) Expliciter la matrice A en distinguant coefficients diagonaux et non-diagonaux.

b) Justifier que $\mathbf{V}(Z_X) = {}^tXAX$. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.

c) On admet [2] qu'il existe une matrice P, orthogonale et une matrice D diagonale telles que $A = PD{}^tP = PDP^{-1}$.

i) Justifier l'existence d'une matrice M telle que ${}^tMM = A$.
On pourra commencer par exhiber une matrice diagonale T *telle que* $T^2 = D$.

ii) En déduire que $X \in \mathrm{Ker}(A)$ si et seulement si $\mathbf{V}(Z_X) = 0$.

d) À l'aide du résultat précédent, justifier que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(U)$ où $U = {}^t[1, 1, \dots, 1] \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pourra raisonner par double-inclusion.

- **Un problème d'optimisation**

4. Soit $X = {}^t\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Quelle relation doivent satisfaire les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ pour que $\mathbf{E}\left(Z_X\right) = 1$?

b) On suppose dans la suite que $\mathbf{E}\left(Z_X\right) = 1$. Établir la relation : $\mathbf{V}\left(Z_X\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i\right) - 1$.

c) On introduit la fonction de plusieurs variables

$$f_n : (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i {x_i}^2\right) - 1 + \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right)^2 / p_n.$$

Déterminer l'unique point critique de f_n.

2. mais on pourra le démontrer avec le théorème spectral dans sa version généralisée.

d) En utilisant une inégalité du cours, justifier que

$$\forall (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n,\qquad \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n p_i\right)\times\left(\sum_{i=1}^n {\alpha_i}^2 p_i\right).$$

En déduire la nature du point critique.

e) Montrer qu'il existe un unique $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on déterminera, qui vérifie les deux conditions suivantes : $\mathbf{E}\left(Z_X\right)=1$ et $\mathbf{V}\left(Z_X\right)$ minimale.

f) Retrouver directement ce résultat à l'aide de la question 3.d).

- **Python**

5. L'objectif de cette question est de simuler le vecteur aléatoire $(X_1,\ldots,X_n)$ sachant $P=(p_i)_{i\in[[1;n]]}$ connu. On pose $S_{-1}=0$ et pour tout $k\in[[0;n]]$

$$S_k=\sum_{i=0}^k p_i$$

a) Écrire un programme python qui prend en arguments $u\in[0;1]$ et P (sous forme de matrice ligne) puis renvoie l'entier k tel que

$$S_{k-1}\leqslant u<S_k.$$

b) Soit U, une variable aléatoire de loi uniforme continue sur $]0;1[$. On pose

$$N=\min\left\{k\in[[0;n]]\,[\,U<S_k\right\}.$$

On admet que N est une variable aléatoire. Vérifier que pour tout $k\in[[0;n]]$, $\mathbf{P}(N=k)=p_k$.

c) Simuler la variable N puis en déduire un programme qui simule le vecteur aléatoire $(X_1,\ldots,X_n)$.

- **Compléments avec deux vecteurs aléatoires**

6. Soient n variables aléatoires $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ qui vérifient les propriétés suivantes :
  - $\sum_{i=1}^n Y_i=1$;
  - pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, les variables aléatoires X_i et Y_i sont de même loi ;
  - pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, les variables aléatoires X_i et Y_j sont indépendantes.

Soit T_n la variable aléatoire définie par : $T_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{(X_i-Y_i)^2}{p_i(1-p_i)}$.

a) Déterminer la loi de T_n.

b) Calculer $\mathbf{E}(T_n)$.

Problème II

Distance à une partie de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

On définit $(M,N)\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2\mapsto\langle M,N\rangle=\mathrm{Tr}\left({}^tMN\right)$. On admet dans la suite que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$, la norme associée à ce produit scalaire.

- **L'ensemble $\mathscr{T}$**

On note $\mathscr{T}$ l'ensemble des matrices réelles M de taille $(2,2)$ telles que :
  - M est symétrique.
  - M est de rang inférieur ou égal à 1.
  - M a des valeurs propres positives ou nulles.

- **Python**

1. a) Comment tester simplement avec Python si une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est symétrique ?

b) Sans utiliser de fonction préprogrammée, comment tester simplement avec Python si une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de rang inférieur ou égal à 1 ?

c) Soit $M=(m_{i,j})\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est symétrique. Justifier que M a des valeurs propres positives ou nulles si son déterminant est positif et $m_{1,1}\geqslant 0$.

d) En déduire un code qui prend en argument une matrice $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et qui renvoie 1 si elle appartient à $\mathscr{T}$ et 0 sinon.

2. Soient X_1, X_2, X_3 et X_4, 4 variables aléatoires de loi uniforme discrètes sur $[[-2;2]]$. Donner une approximation de la probabilité que la matrice

$$\begin{bmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{bmatrix}\quad\text{appartienne à }\mathscr{T}.$$

Bonus Comment avoir une valeur exacte de cette probabilité avec python ?

- **Étude théorique de $\mathcal{T}$.**

3. Justifier que

$$\left\{V\,{}^tV \mid V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right\} \subset \mathcal{T}.$$

4. Soit $M \in \mathcal{T}$, non nulle.

a) Justifier l'existence de $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(X)$.
En déduire que l'existence de $Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, non nulle, telle que $M = X\,{}^tY$.

b) Justifier l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $Y = \lambda X$.

c) En déduire l'existence de $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $M = V\,{}^tV$.

- **Recherche de la distance minimale**

On considère dans cette question deux nombres réels p, q tels que $0 < p < q < 1$ et $p + q = 1$ et la matrice symétrique A définie par :

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}.$$

L'objectif de cette partie est de trouver les matrices M appartenant à $\mathcal{T}$ qui minimisent l'expression $\|A - M\|$.

5. La matrice A appartient-elle à $\mathcal{T}$?

6. On désigne par x, y les composantes de la matrice colonne V. On pose $F(x, y) = \|A - V \cdot {}^tV\|^2$. Vérifier que

$$F(x, y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2 + 2q(x - y)^2 + (q - p)^2.$$

7. Justifier que la fonction F ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser son gradient au point (x, y).

8. Déterminer les points critiques de F.

9. En déduire le minimum de l'expression $\|A - V\,{}^tV\|$ lorsque V décrit l'ensemble $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Préciser les matrices qui réalisent ce minimum.

10. Prouver enfin qu'il existe une matrice M appartenant à $\mathcal{T}$ et une seule qui minimise l'expression $\|A - M\|$.
On précisera la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à cette matrice M.

Problème III
Inégalité de Cramer-Rao

Soit n, un entier supérieur à 2.
Dans la suite, $X_1, \ldots, X_n$ désignent n variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé et de même loi de Poisson de paramètre $\theta \in \mathbb{R}_*^+$. On définit pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ la variable aléatoire Y_i par

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis on note
$$\overline{Y_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Partie I

1. a) Donner la loi de $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$. En déduire que $\mathbf{E}\left(\overline{Y_n}\right) = \exp(-\theta)$.
On dira dans ce cas que $\overline{Y_n}$ *est un estimateur sans biais de* $\exp(-\theta)$.

b) Donner $\mathbf{V}\left(\overline{Y_n}\right)$.

2. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on définit $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$.
Rappeler sans démonstration la loi de S_k pour tout k élément de $[\![1; n]\!]$.

3. On définit jusqu'à la fin de cette partie I pour tout j entier naturel : $\varphi(j) = \mathbf{P}_{[S_n = j]}(X_1 = 0)$.

Montrer que pour tout j entier naturel
$$\varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j.$$

Dans la suite, on s'intéresse à la variable aléatoire : $\varphi(S_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$.

4. Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance avec $\mathbf{E}\left(\varphi(S_n)\right) = \exp(-\theta)$.
De nouveau, on dira dans ce cas que $\varphi(S_n)$ *est un estimateur sans biais de* $\exp(-\theta)$.

5. Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une variance vérifiant

$$\mathbf{V}(\varphi(S_n)) = \exp(-2\theta)\left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1\right).$$

6. On souhaite comparer les variances de $\overline{Y_n}$ et $\varphi(S_n)$.

a) On considère la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = t\exp(\theta) + (1-t) - \exp(t\theta)$. Justifier qu'il existe $\tilde{t} \in [0;1]$ tel que

$$\forall\, t \in [0;1], \qquad h'(t) = \theta\left(e^{\tilde{t}\theta} - e^{t\theta}\right).$$

En déduire les variations et le signe de h.

b) Montrer que

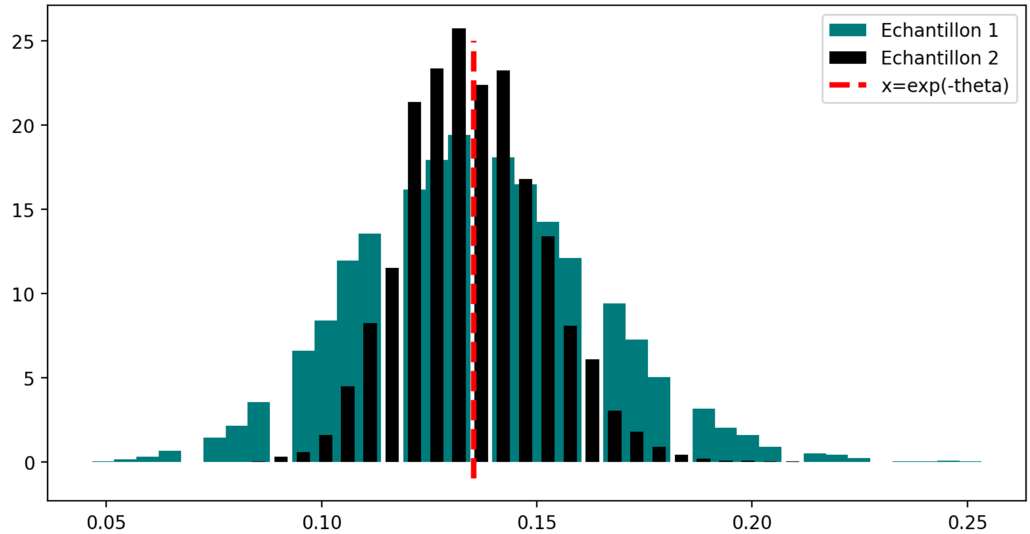
$$\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \leqslant \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n} \quad \text{puis} \quad \mathbf{V}(\varphi(S_n)) \leqslant \mathbf{V}\left(\overline{Y_n}\right).$$

- **Simulation Python**

7. **a)** Écrire un programme qui prend en arguments n et θ puis simule la variable $\overline{Y_n}$.

b) Faire de même avec $\varphi(S_n)$.

c) On a tracé ci-dessous deux histogrammes : l'un construit à partir de simulation de $\overline{Y_n}$, l'autre de $\varphi(S_n)$. Associer à chaque histogramme sa variable aléatoire. Justifier.



On reprendra à la fin de la partie III l'étude de $\varphi(S_n)$.

III. Information de Fisher

- **A. Cas discret**

Dans cette section II.A, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $\theta \in I$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ($X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$). On suppose qu'il existe une fonction p définie sur $I \times X(\Omega)$ telle que pour tout k élément de $X(\Omega)$

$$\mathbf{P}(X = k) = p(\theta, k)$$

et vérifiant pour tout k de $X(\Omega)$: $\theta \mapsto p(\theta, k)$ dérivable sur I.
On définit sous réserve d'existence l'information de Fisher de X par

$$I_X(\theta) = \sum_{k \in X(\Omega)} \left(\partial_1 \ln p(\theta, k)\right)^2 p(\theta, k)$$

où $\partial_1 \ln p(\theta, k)$ désigne la dérivée partielle de la fonction $\ln \circ p$ par rapport à θ au point (θ, k).

- **Exemples**

8. Dans cette question, on considère X variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre θ (avec $\theta \in]0,1[$).
On a alors $X(\Omega) = \{0,1\}$, $\mathbf{P}(X=1) = p(\theta,1) = \theta$, $\mathbf{P}(X=0) = p(\theta,0) = 1-\theta$ et

$$I_X(\theta) = \left(\partial_1 \ln p(\theta,1)\right)^2 p(\theta,1) + \left(\partial_1 \ln p(\theta,0)\right)^2 p(\theta,0)$$

Montrer que
$$I_X(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}.$$

9. Dans cette question, on considère X variable aléatoire de loi binomiale de paramètres N et θ (avec $N \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in]0,1[$).

a) Montrer que

$$I_X(\theta) = \frac{1}{(\theta(1-\theta))^2} \sum_{k=0}^{N} (k - N\theta)^2 \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{N-k}$$

b) En déduire que $I_X(\theta) = \dfrac{\mathbf{V}(X)}{(\theta(1-\theta))^2}$ puis donner la valeur de $I_X(\theta)$.

10. Dans cette question, on considère X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre θ (avec $\theta \in]0,+\infty[$). Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a sous réserve de convergence

$$I_X(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\partial_1 \ln p(\theta,k)\right)^2 p(\theta,k).$$

a) Montrer que la série de terme général $\left(\partial_1 \ln p(\theta,k)\right)^2 p(\theta,k)$ converge et montrer que $I_X(\theta) = 1/\theta$.

b) Justifier que

$$I_X(\theta) = \mathbf{E}\left(\left(\partial_1 \ln p(\theta,X)\right)^2\right)$$

- **B. Cas continu avec une variable gaussienne**

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\theta,1)$. La densité continue sur $\mathbb{R}$ est notée $x \in \mathbb{R} \mapsto f(\theta,x)$. On définit sous réserve de convergence l'information de Fisher de X par

$$I_X(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_1 \ln(f(\theta,x))\right)^2 f(\theta,x)\,dx.$$

11. a) Montrer que sous réserve de convergence $\quad I_X(\theta) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\theta)^2 f(\theta,x)\,dx.$

b) En déduire l'existence et la valeur de $I_X(\theta)$.

c) Justifier que $\qquad I_X(\theta) = \mathbf{E}\left(\left(\partial_1 \ln(f(\theta,X))\right)^2\right).$

IV. Minoration de la variance

- **A. Inégalité de Cramer-Rao**

Dans cette section III.A, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, θ un paramètre inconnu de I et X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{0,\dots,N\} (N \in \mathbb{N})$. On suppose qu'il existe une fonction p définie sur $I \times X(\Omega)$ telle que pour tout $k \in \{0,\dots,N\}$

$$\mathbf{P}(X = k) = p(\theta,k)$$

et vérifiant :

→ Pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $\theta \mapsto p(\theta,k)$ dérivable sur I ;

→ L'information de Fisher de X notée $I_X(\theta)$ définie dans la partie III est non nulle pour tout $\theta \in I$.

Le but de la section III.A est de démontrer l'inégalité suivante due à Cramer et Rao.

THÉORÈME — **Théorème de Cramer-Rao**

Soit $f(X)$ une variable aléatoire admettant une espérance avec $\mathbf{E}(f(X)) = g(\theta)$ où g est dérivable sur I. On a alors

$$\mathbf{V}\left(f(X)\right) \geqslant \frac{\left(g'(\theta)\right)^2}{I_X(\theta)}.$$

12. Montrer que pour tout θ élément de I, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \partial_1 p(\theta,k) = 0$.

13. En déduire que pour tout θ élément de I

$$\mathbf{E}\left(\partial_1 \ln(p(\theta,X))\right) = 0$$

14. En dérivant partiellement par rapport à θ les deux membres de l'égalité précédente, montrer que pour tout $\theta \in I$

$$\mathbf{E}\left(\partial^2_{1,1} \ln(p(\theta,X))\right) = -\mathbf{E}\left(\left(\partial_1 \ln(p(\theta,X))\right)^2\right)$$

où $\partial^2_{1,1} \ln(p(\theta,x))$ désigne la dérivée seconde de la fonction $\theta \in I \mapsto \ln(p(\theta,x))$.

15. Montrer que pour tout θ élément de I

$$g'(\theta) = \sum_{k=0}^{N} f(k) \left(\partial_1 \ln(p(\theta,k))\right) p(\theta,k)$$

puis que $\qquad g'(\theta) = \mathbf{E}\left((f(X) - g(\theta))\partial_1 \ln(p(\theta,X))\right).$

16. On pose pour tout t réel $\mathrm{L}(t) = \mathbf{E}\left(\left((f(\mathrm{X}) - g(\theta)) + t\partial_1 \ln(p(\theta,\mathrm{X}))\right)^2\right)$.

a) Vérifier que L est une fonction polynomiale de degré au plus 2.

b) En déduire l'inégalité de Cramer-Rao.

- **B. Extension du théorème de Cramer-Rao**

On reprend dans cette section III.B les notations et hypothèses de la partie II. On admet que, dans ce contexte, le théorème de Cramer-Rao peut se généraliser comme suit :

THÉORÈME **Théorème de Cramer-Rao (version généralisée)**

Soient $(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$, *$n$ variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson.*
Soit $\mathrm{T}_n = f(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$ *une variable aléatoire telle que* $\mathbf{E}\left(f(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)\right) = g(\theta)$ *où g est dérivable sur* $]0,+\infty[$. *On a alors*

$$\mathbf{V}(\mathrm{T}_n) \geqslant \frac{\left(g'(\theta)\right)^2}{n\mathrm{I}_{\mathrm{X}_1}(\theta)}$$

où $\mathrm{I}_{\mathrm{X}_1}(\theta)$ *est l'information de Fisher d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre* θ *définie et calculée à la partie II.*

Il s'agit dans cette section d'exploiter cette nouvelle inégalité de Cramer-Rao. On note

$$\overline{\mathrm{X}_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i.$$

17. Calculer $\mathbf{E}\left(\overline{\mathrm{X}_n}\right)$ et $\mathbf{V}\left(\overline{\mathrm{X}_n}\right)$.

18. Déduire de la généralisation de Cramer-Rao, que $\overline{\mathrm{X}_n}$ a la plus petite variance parmi les estimateurs sans biais de θ.

19. Montrer que pour $g(\theta) = \exp(-\theta)$ où $\theta \in]0,+\infty[$

$$\mathbf{V}\left(\varphi(\mathrm{S}_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(g'(\theta)\right)^2}{n\mathrm{I}_{\mathrm{X}_1}(\theta)}.$$

20. Que prouve ce résultat en terme d'optimalité de $\varphi(\mathrm{S}_n)$ dans l'estimation de $\exp(-\theta)$?

21. À la lumière de la partie I, peut-on conclure que lorsque n est grand $\varphi(\mathrm{S}_n)$ est le meilleur estimateur de $\exp(-\theta)$ en terme de variance ?

– JOYEUSES FÊTES ! –

DS 5 A - solution

Exercice 1
Calculs de points critiques

1.a) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ car polynomiale, avec pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\partial_1 f(x,y) = 6x+2y-2 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = 2y+2x+2.$$

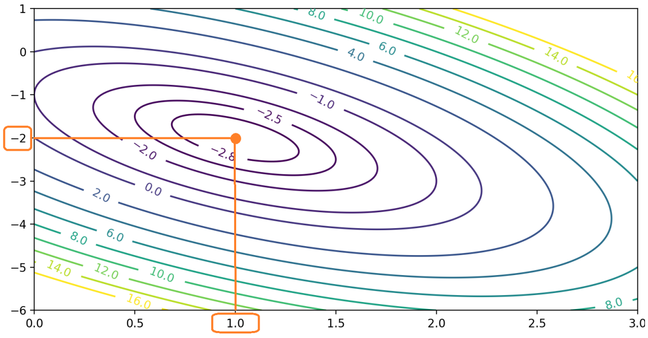
La résolution du système (linéaire dans ce cas)

$$\partial_1 f(x,y) = 0 = \partial_2 f(x,y)$$

donne une unique solution, un unique point critique

$$a = (1,-2).$$

1.a) On retrouve bien le point critique :



De plus, on constate que les lignes de niveau sont associées à des hauteurs plus grandes que $f(a) = -3$. On conjecture un minimum local et plus généralement global.

2. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ car polynomiale, avec pour tout $x=(x_i)\in\mathbb{R}^n$, tout indice $i\in[\![1;n]\!]$

$$\partial_i g(x) = 2\left(x_i-1\right)+2\sum_{k=1}^n x_k - 2 = 2\left(x_i+\sum_{k=1}^n x_k - 2\right).$$

Le point x est critique si et seulement si pour tout indice $i\in[\![1;n]\!]$:

$$x_i + \sum_{k=1}^n x_k - 2 = 0 \qquad (\star)$$

On constate que pour $i, j \in [\![1;n]\!]$

$$x_i = 2 - \sum_{k=1}^n x_k = x_j.$$

Toutes les coordonnées de x sont égales. En reprenant $(\star)$ pour $i=1$, on détermine cette valeur commune

$$0 = x_1 + \sum_{k=1}^n x_k - 2 = x_1 + nx_1 - 2,$$

d'où $$x_1 = \frac{2}{n-1}.$$

Finalement, il y a bien un unique point critique :

$$\left(\frac{2}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{2}{n-1}\right).$$

Exercice 2
Exemples de somme et minimum de variables aléatoires

1. La positivité est évidente. En utilisant les résultats sur les sommes géométriques (la raison est ici $a/(1+a)\in]-1;1[$), on a convergence et l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} = \frac{1}{1+a}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{1+a}\right)^k = \frac{1}{1+a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{a}{1+a}} = 1.$$

On peut noter que la variable $X+1$ est alors géométrique de raison $1/(1+a)$.

2. Dans la suite, on suppose importé :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

2.a)

```
def somme(n,a):
    s=0
    for k in range(n+1):
        s+=a**k/(1+a)**(k+1)
    return s
```

Une seconde version qui nécessite moins de calculs sur les puissances :

```
    def somme2(n,a):
    s=0
    p=a/(1+a)
    P=1/(1+a)
    for k in range(n+1):
        s+=P
        P*=p
    return s
```

2.b)

```
def Entier(a,x):
    s=0
    n=0
    while x>s:
        s+=a**n/(1+a)**(n+1)
        n=n+1
    return n
```

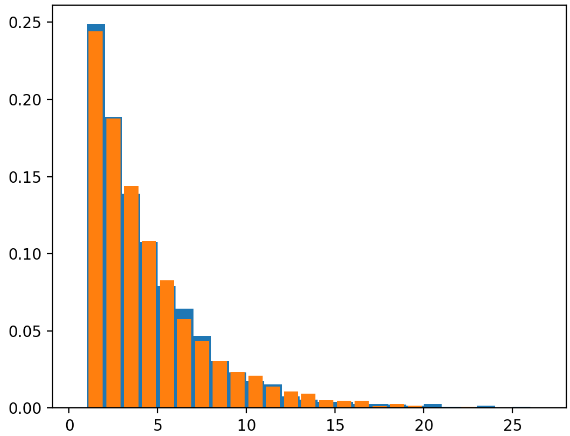
2.c)

```python
def simuX(a):
    u=rd.random()
    return Entier(a,u)
```

Comme $X+1$ suit une loi géométrique de raison $1/(1+a)$, on peut tester ce code avec :

```python
    m=5000
a=3
Ech=np.zeros(m)
Ech2=np.zeros(m)
for i in range(m):
    Ech[i]=simuX(a)
    Ech2[i]=rd.geometric(1/(1+a))-1
ma=int(max(max(Ech),max(Ech2)))
classe=np.linspace(1,ma,ma)
plt.hist(Ech,classe,density=True)
plt.hist(Ech2,classe,rwidth=0.8,density=
    True)
plt.show()
```

On constate bien que les histogrammes sont très proches. Ils proviennent d'une même loi mère.



3.a) On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Ainsi $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant le système complet d'événements $([Y = n])_{n\in\mathbb{N}}$, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Z = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([Z = k] \cap [Y = n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}([X = k-n] \cap [Y = n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k-n)\mathbf{P}(Y = n) \quad \text{(indépendance)} \\
&= \sum_{n=0}^{k} \mathbf{P}(X = k-n)\mathbf{P}(Y = n) \quad \text{car } \mathbf{P}(X < 0) = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{k} \frac{a^{k-n}}{(1+a)^{k-n+1}} \cdot \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}, \\
&= \sum_{n=0}^{k} \frac{a^k}{(1+a)^{k+2}} \\
\mathbf{P}(Z = k) &= \frac{(1+k)a^k}{(1+a)^{k+2}} \quad \text{(termes indépendants de } n).
\end{aligned}$$

3.b) D'après la formule de transfert, S admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum \frac{1}{1+k}\mathbf{P}(Z = k)$$

converge absolument. Comme le terme général est positif, on peut se contenter de la convergence. Or

$$\frac{1}{k+1}\mathbf{P}(Z = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+2}} = \frac{1}{(1+a)^2} \cdot \left(\frac{a}{1+a}\right)^k.$$

À une constante près, on a le terme général d'une suite géométrique de raison $a/(1+a) \in]-1;1[$. On a convergence et l'égalité

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(S) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1}\mathbf{P}(Z = k) \\
&= \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^k \\
&= \frac{1}{(1+a)^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{a}{1+a}} \\
\mathbf{E}(S) &= \frac{1}{1+a}.
\end{aligned}$$

3.c) Comme $Z \geqslant 0$, on a

$$0 \leqslant \frac{X}{1+Z} \leqslant \frac{X}{1+X+Y} \leqslant \frac{1}{1+Z} \leqslant 1.$$

Par le théorème de domination $X/(1+Z)$ admet une espérance. Il en va de même de $Y/(1+Z)$. De plus, X et Y sont indépendantes et de même loi, les couples

$$(X, Y) \quad \text{et} \quad (Y, X)$$

ont même loi.

Pour s'en convaincre, on peut écrire pour tous réel x, y

$$\begin{aligned}
F_{(X,Y)}(x, y) &= \mathbf{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) \\
&= \mathbf{P}(X \leqslant x)\mathbf{P}(Y \leqslant y) \text{ (indépendance)} \\
&= \mathbf{P}(Y \leqslant x)\mathbf{P}(X \leqslant y) \text{ (égalité en loi)} \\
&= \mathbf{P}([Y \leqslant x] \cap [X \leqslant y]) \text{ (indépendance)} \\
F_{(X,Y)}(x, y) &= F_{(Y,X)}(x, y).
\end{aligned}$$

La fonction $g : (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto x/(1+x+y)$ est continue par quotient de polynômes. D'après le théorème d'égalité en loi

$$g(X, Y) = \frac{X}{1+Z} \quad \text{et} \quad g(Y, X) = \frac{Y}{1+Z}$$

ont même loi. En particulier, même espérance :

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{1+Z}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{Y}{1+Z}\right).$$

3.d) Notons que par linéarité

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\frac{X}{1+Z}\right) + \mathbf{E}\left(\frac{Y}{1+Z}\right) &= \mathbf{E}\left(\frac{Z}{1+Z}\right) \\
&= 1 - \mathbf{E}\left(\frac{1}{1+Z}\right) = 1 - \mathbf{E}(S).
\end{aligned}$$

D'après la question précédente

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{1+Z}\right) = \frac{1-\mathbf{E}(S)}{2} = \frac{a}{2(1+a)}.$$

4.a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} \\
&= \sum_{u=k-(n+1)}^{+\infty} \frac{a^{u+(n+1)}}{(1+a)^{u+(n+2)}} \\
&= \frac{a^{n+1}}{(1+a)^{n+2}} \sum_{u=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^u \\
&= \frac{a^{n+1}}{(1+a)^{n+2}} \frac{1}{1-\frac{a}{1+a}} \text{ (géométrique)} \\
\mathbf{P}(X > n) &= \left(\frac{a}{1+a}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

4.b) On a bien $T(\Omega) = \mathbb{N}$ car $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T > n) &= \mathbf{P}([X > n] \cap [Y > n]) \\
&= \mathbf{P}(X > n)\mathbf{P}(Y > n) && \text{(indépendance)} \\
&= \mathbf{P}(X > n)^2 && \text{(égalité en loi)} \\
\mathbf{P}(T > n) &= \alpha^{n+1} && \text{où} \quad \alpha = \left(\frac{a}{1+a}\right)^2.
\end{aligned}$$

Formule valable aussi pour $n = -1$. Ensuite

$$[T = m] = [T > m-1] \setminus [T > m] \quad \text{avec} [T > m] \subset [T > m-1].$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T = m) &= \mathbf{P}(T > m-1) - \mathbf{P}(T > m) \\
&= \alpha^m - \alpha^{m+1} \\
\mathbf{P}(T = m) &= \alpha^m(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Sachant que

$$\begin{aligned}
1 - a = 1 - \frac{a^2}{(1+a)^2} &= \frac{(1+a)^2 - a^2}{(1+a)^2} \\
&= \frac{(1+a+a)(1+a-a)}{(1+a)^2} = \frac{1+2a}{(1+a)^2},
\end{aligned}$$

on a bien

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(T = m) = \frac{1+2a}{(1+a)^2}\left(\frac{a}{1+a}\right)^{2m}.$$

4.c) Le code affiche un histogramme de T ainsi qu'un histogramme de

$$Y - 1 \quad \text{où} \quad Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - \frac{a^2}{(1+a)^2}\right).$$

Les deux histogrammes sont très proches, en effet, les deux variables ont même loi. En résumé, à un décalage d'une unité près, T suit une loi géométrique.

Exercice 3

Optimisation d'une fonction de 2 variables

1. On a $f_a(0, y) = y\mathrm{e}^y \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc f_a ne peut avoir de maximum global.

2. La fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction d'une variable $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^t$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Par composition $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathrm{e}^y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
De plus $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(1 + y + xy + ax^2\right)$ est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ donc continue.
De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\partial_1 f_a(x, y) &= (y + 2ax)\mathrm{e}^y \\
\partial_2 f_a(x, y) &= (1 + x)\mathrm{e}^y + \left(1 + y + xy + ax^2\right)\mathrm{e}^y \\
&= \left(2 + y + x + xy + ax^2\right)\mathrm{e}^y.
\end{aligned}$$

3. (x, y) est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} \partial_1 f_a(x, y) = 0 \\ \partial_2 f_a(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2ax = 0 & L_1 \\ 2 + y + x + xy + ax^2 = 0 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2ax \\ 2 - 2ax + x - 2ax^2 + ax^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2ax \\ 2 + (1-2a)x - ax^2 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation est polynomiale de degré 2. On constate que le discriminant est

$$\Delta = (1 + 2a)^2 > 0.$$

On a donc deux racines données par

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{2a-1+(1+2a)}{-2a} = -2 && \left(\text{puis } y_1 = 4a\right) \\
x_2 &= \tfrac{2a-1-(1+2a)}{-2a} = \tfrac{1}{a} && \left(\text{puis } y_2 = -2\right)
\end{aligned}$$

Utilisons la ligne L_2 pour calculer les images

$$\begin{aligned}
f_a\left(x_1, y_1\right) &= \left(-(1 + x_1) + \underbrace{(2 + x_1 + y_1 + x_1y_1 + ax_1^2}_{=0}\right)\mathrm{e}^{y_1} \\
&= -(1 + x_1)\,\mathrm{e}^{y_1} \\
&= \mathrm{e}^{4a} \\
f_a\left(x_2, y_2\right) &= -(1 + x_2)\,\mathrm{e}^{y_2} \\
&= -\left(1 + \frac{1}{a}\right)\mathrm{e}^{-2}.
\end{aligned}$$

On a

$$f_a\left(x_2, y_2\right) < 0 < f_a\left(x_1, y_1\right)$$

On peut donc poser

$$B = (-2, 4a) \quad \text{et} \quad A = \left(\frac{1}{a}, -2\right).$$

4. D'après l'énoncé f_a admet un minimum global, il est donc atteint en un point critique sur $\mathbb{R}^2$. Comme $f_a(A) < f_b(B)$, f_a admet $f_a(A)$ comme minimum global.

5. On a

$$\int_t^x \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = [\mathrm{e}^y]_t^x = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^t.$$

Pour $t \to -\infty$, il y a convergence et

$$\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x.$$

6. Les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^1$. Intégrons par parties. Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_t^x y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y &= [y\mathrm{e}^y]_t^x - \int_t^x 1\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y. \\
&= [y\mathrm{e}^y]_t^x - [\mathrm{e}^y]_t^x \\
&= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t.
\end{aligned}$$

pour $t \to -\infty$, on a bien convergence et

$$J = \int_{-\infty}^{x} y e^{y}\, dy = (x-1)e^{x}.$$

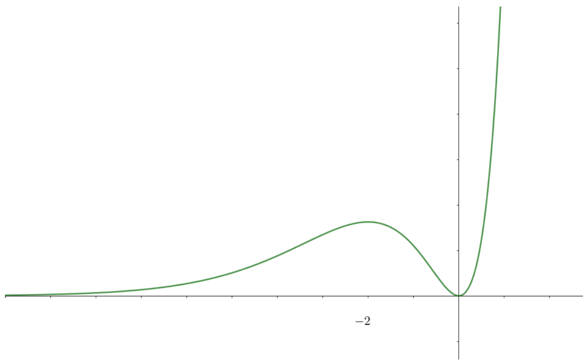
7. Par linéarité d'intégrales convergentes, on a convergence de $F_a(x)$ et

$$\begin{aligned}F_a(x) &= \int_{-\infty}^{x} \left(1+ax^2\right) e^{y} + (1+x) y e^{y}\, dy.\\ &= \left(1+ax^2\right) \int_{-\infty}^{x} e^{y}\, dy + (1+x) \int_{-\infty}^{x} y e^{y}\, dy\\ &= \left(1+ax^2\right) e^{x} + (1+x)(x-1)e^{x}\\ &= \left(1+ax^2+x^2-1\right) e^{x}\\ &= (1+a)x^2 e^{x}.\end{aligned}$$

8. F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad F_a'(x) &= (1+a)\left(2x+x^2\right)e^{x}\\ &= (1+a)x(2+x)e^{x}.\end{aligned}$$

On en déduit les variations :



Problème I

Tirage dans une urne, matrice de variance-covariance

d'après ESCP 2005

1. Une idée pour le code est de re-numérotée les boules : de 0 à $u-1$, on associe le chiffre 1, de u à $u+d-1$, on associé le chiffre 2 et le chiffre 3 aux t dernières. Un code possible est alors :

```
def SimuVectAlea(n,u,d,t):
    b=u+d+t
    Compteur1=0
    Compteur2=0
    # pas besoin de compteur pour 3
    for i in range(n):
        boule=rd.randint(b)
        if boule<u:
            Compteur1+=1
        elif boule<u+d:
            Compteur2+=1
    Compteur3=n- Compteur1-Compteur2
    return (Compteur1,Compteur2,Compteur3)
```

2. La variable U compte le nombre de succès dans n réalisations d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. Donc

$$U \hookrightarrow \mathscr{B}(n, u/b)$$

car u/b correspond à la probabilité de succès. De même

$$D \hookrightarrow \mathscr{B}(n, d/b) \quad \text{et} \quad T \hookrightarrow \mathscr{B}(n, t/b).$$

3. Non.
Par exemple, si n boules numérotées 1 sont tirées, il ne peut avoir de boule 2. Par exemple

$$\mathbf{P}([U=n] \cap [D=n]) = 0$$

alors que $\qquad \mathbf{P}([U=n])\mathbf{P}(D=n) \neq 0.$

4. Par linéarité de l'espérance et sachant que U et D suivent des lois binomiales

$$\mathbf{E}(U+D) = \mathbf{E}(U) + \mathbf{E}(D) = \frac{nu}{b} + \frac{nd}{b} = n\frac{(u+d)}{b}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(U+D) &= \mathbf{V}(n-T)\\ &= (-1)^2\mathbf{V}(T) = n\left(1-\frac{t}{b}\right)\frac{t}{b}\\ &= \frac{n(b-t)t}{b^2} = \frac{n(u+d)t}{b^2}.\end{aligned}$$

5. On a

$$\mathbf{V}(U+D) = \mathbf{V}(U) + \mathbf{V}(D) + 2\operatorname{cov}(U,D).$$

$$\mathbf{V}(U) = \frac{n}{b^2}(b-u)u \quad \mathbf{V}(D) = \frac{n}{b^2}(b-d)d.$$

D'où

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(U,D) &= \frac{1}{2}(\mathbf{V}(U+D) - \mathbf{V}(U) - V(D))\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(u+d)t}{b^2} - \frac{n(b-u)u}{b^2} - \frac{n(b-d)d}{b^2}\right)\\ &= \frac{n}{2b^2}((u+d)t - (b-v)u - (b-d)d)\\ &= \frac{n}{2b^2}((u+d)(b-u+d) - (b-u)u - (b-d)d)\\ &= -\frac{nud}{b^2}.\end{aligned}$$

6. Pour réaliser $\{\omega\}$, il faut tirer k « 1 », cela arrive avec une probabilité $\left(\frac{u}{b}\right)^k$, puis ℓ « 2 », avec probabilité $\left(\frac{d}{b}\right)^\ell$ et aussi $n-\ell-k$ « 3 », avec probabilité $\left(\frac{t}{b}\right)^{n-\ell-k}$. Par indépendance des tirages,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\{\omega\}) &= \left(\frac{u}{b}\right)^k \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^\ell \left(\frac{t}{b}\right)^{n-\ell-k}\\ &= \frac{u^k d^\ell t^{n-\ell-k}}{b^n}.\end{aligned}$$

Ensuite, il y a $\binom{n}{k}$ choix pour les k « 1 », puis parmi les places restantes, il y a $\binom{n-k}{\ell}$ choix pour les ℓ « 2 ». On compte donc $\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}$ choix. Or, on a aussi l'égalité (avec $k+\ell \leqslant n$)

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k-\ell)!\ell!} = \binom{n}{k,\ell}.$$

Ensuite, notons $\Omega_{k,\ell}$ les n-uplets de Ω ne comportant exactement k « 1 » et ℓ « 2 ». Ainsi :

$$[U=k] \cap [D=\ell] = \bigcup_{\omega \in \Omega_{k,\ell}} \{\omega\}.$$

L'union étant disjointe, on obtient une somme

$$\begin{aligned}\mathbf{P}([U=k]\cap[D=\ell]) &= \sum_{\omega\in\Omega_{k,\ell}} \mathbf{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega_{k,\ell}} \frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n} \\ &= \operatorname{Card}\left(\Omega_{k,\ell}\right)\frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n} \\ \mathbf{P}([U=k]\cap[D=\ell]) &= \binom{n}{k,\ell}\frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n}.\end{aligned}$$

- Vrai car par convention

$$\binom{n}{k,\ell}=0$$

et $\mathbf{P}([U=k]\cap[D=\ell])=\mathbf{P}(\varnothing)=0.$

7. On a un système complet d'événements formé par les événements $[X_n=k]\cap[Y_n=\ell]$ lorsque $(k,\ell)\in I_n$,

$$\begin{aligned}&\sum_{(k,l)\in I_n}\binom{n}{k,\ell}\frac{u^k d^\ell t^{n-k-\ell}}{b^n} \\ &= \sum_{(k,\ell)\in I_n}\mathbf{P}([X_n=k]\cap[Y_n=\ell]) \\ &= \sum_{\substack{k\in X_n(\Omega)\\ \ell\in Y_n(\Omega)}}\mathbf{P}([X_n=k]\cap[Y_n=\ell])=1.\end{aligned}$$

8. X_n est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$.
Soit $k\in[\![0;n]\!]$. À l'aide de la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n=k) &= \sum_{\ell=0}^{n}\mathbf{P}([X_n=k]\cap[Y_n=\ell]) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n}{k,\ell}p^k q^\ell r^{n-k-\ell}.\end{aligned}$$

Or on a vu que

$$\binom{n}{k,\ell}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell}$$

et par la formule du binôme de Newton donne

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_n=k) &= \binom{n}{k}p^k\sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}q^\ell r^{n-k-\ell} \\ &= \binom{n}{k}p^k(q+r)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$X_n\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p).$$

De même

$$Y_n\hookrightarrow\mathscr{B}(n,q).$$

9. Si $k+\ell>n$, la relation est directement vérifiée puisque chaque membre est nul.
Si $k+\ell\leqslant n$, alors $(k-1)+(\ell-1)\leqslant n-2$ et

$$\begin{aligned}k\ell\binom{n}{k,\ell} &= \frac{k\ell}{k!\ell!}\cdot\frac{n!}{(n-k-\ell)!} \\ &= \frac{1}{(k-1)!(\ell-1)!}\,\frac{1}{(n-2-(k-1)-(\ell-1)!} \\ &= n(n-1)\binom{n-2}{k-1,\ell-1}.\end{aligned}$$

Posons

$$I_n^*=\left\{(k,\ell)\mid k\in[\![1,n]\!]\text{ et }\ell\in[\![1,n]\!]\ \ k+\ell\leqslant n\right\}.$$

Par définition de l'espérance

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_nY_n) &= \sum_{(k,\ell)\in I_n}k\ell\,\mathbf{P}([X_n=k]\cap[Y_n=\ell]) \\ &= \sum_{(k,\ell)\in I_n^*}k\ell\,\mathbf{P}([X_n=k]\cap[Y_n=\ell]) \\ &= \sum_{(k,\ell)\in I_n^*}k\ell\binom{n}{k,\ell}p^kq^\ell r^{n-k-\ell} \\ &= \sum_{(k,\ell)\in I_n^*}n(n-1)\binom{n-2}{k-1,\ell-1}p^kq^\ell r^{n-k-\ell} \\ &= n(n-1)pq\sum_{(k,\ell)\in I_n^*}\binom{n-2}{k-1,\ell-1}p^{k-1}q^{\ell-1}r^{n-2-(k-1)-(\ell-1)}\end{aligned}$$

On effectue le changement d'indices $k'=k-1$, $\ell'=\ell-1$ pour obtenir

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(X_nY_n) \\ &= n(n-1)pq\sum_{(k',\ell')\in I_{n-2}}\binom{n-2}{k',\ell'}p^{k'}q^{\ell'}r^{n-2-k'-\ell'}\end{aligned}$$

La question question 17 permet de simplifier la somme, il reste

$$\mathbf{E}(X_nY_n)=n(n-1)pq.$$

10. Vrai.
Si $n=0$, alors $X_n=0$ et la relation est bien vérifiée.
Si $n=1$, (X_n,Y_n) ne peut prendre que trois couples possibles $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$.
Dans ce cas, on a bien $\mathbf{E}(X_nY_n)=0$.

11. D'après la formule de Huygens

$$\operatorname{Cov}(X_n,Y_n)=\mathbf{E}(X_nY_n)-\mathbf{E}(X_n)\,\mathbf{E}(Y_n).$$

Comme X_n et Y_n suivent des lois binomiales $\mathscr{B}(n,p)$,

$$\mathbf{E}(X_n)=np\quad\text{et}\quad\mathbf{E}(Y_n)=nq.$$

D'où

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X_n,Y_n) &= n(n-1)pq-np\cdot nq. \\ &= -npq.\end{aligned}$$

12. Non, car les variables sont corrélées.

13. La matrice Σ_S est symétrique à coefficients réels. Elle est donc diagonalisable.

14.a) Appliquons la formule du produit matriciel :

$$\begin{aligned}\left[{}^tX\Sigma_SX\right]_{11} &= \sum_{i=1}^{n}\left[{}^tX\right]_{1i}\left[\Sigma_SX\right]_{i1} \\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}\left[\Sigma_S\right]_{ij}[X]_{j1} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\operatorname{Cov}\left(S_i,S_j\right) \\ &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iS_i,\sum_{j=1}^{n}x_jS_j\right) \\ \left[{}^tX\Sigma_SX\right]_{11} &= \operatorname{Cov}(Z,Z)=\mathbf{V}(Z)\end{aligned}$$

par bilinéarité de la covariance. En identifiant $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a le résultat demandé.

14.b) Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ

$$\Sigma_S X = \lambda X \quad \text{avec} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

Dans ce cas

$$\mathbf{V}(Z) = {}^t X \Sigma_S X = \lambda\, {}^t XX = \lambda \|X\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $\|X\| \neq 0$ donne

$$\lambda = \frac{\mathbf{V}(Z)}{\|X\|^2} \geqslant 0.$$

15.a) Comme D est diagonale à coefficients positifs (la diagonale est exactement les valeurs propres de A), on peut poser

$$T = \operatorname{diag}\left(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}\right) \quad \text{où} \quad D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Ainsi $T^2 = D$. On pose ensuite

$$M = PT\,{}^tP$$

de sorte que

$$\begin{aligned} {}^tMM &= {}^t\left(PT\,{}^tP\right)\left(PT\,{}^tP\right) \\ &= P\,{}^tT \underbrace{{}^tPP}_{=I_n} T\,{}^tP = PT^2\,{}^tP = \Sigma_S. \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

15.b) Raisonnons par double implication.

→ Si $X \in \operatorname{Ker} \Sigma_S$ alors

$$\mathbf{V}(Z) = {}^tX\Sigma_S X = {}^tX \cdot 0_{n,1} = 0.$$

→ Réciproquement si $\mathbf{V}(Z) = 0$ alors

$$\begin{aligned} \|MX\|^2 &= {}^t(MX)MX \\ &= {}^tX\,{}^tMMX \\ &= {}^tX\Sigma_S X = 0. \end{aligned}$$

D'où $MX = 0$ et $\Sigma_S X = {}^tM \underbrace{MX}_{=0} = 0$. On a bien $X \in \operatorname{Ker} \Sigma_S$.

16. Direct avec les questions 2 et 5.

17. Comme la variable $U + D + T$ est constante égale à b, on a

$$\mathbf{V}(U + D + T) = 0,$$

on sait d'après la question précédente que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}(\Sigma_S).$$

Ainsi l'espace propre associé à la valeur propre 0 n'est pas réduit à l'espace nul :

$$0 \in \operatorname{Sp}(\Sigma_S).$$

18. La matrice $\Sigma_{(U,V,T)}$ est semblable à la matrice $D = \operatorname{diag}(0; \lambda; \mu)$. Puis, ${\Sigma_{(U,V,T)}}^2$ est semblable à $D^2 = \operatorname{diag}(0; \lambda^2; \mu^2)$. Par invariance de la trace par similitude, on a

$$s_1 = \lambda + \mu \quad \text{et} \quad s_2 = \lambda^2 + \mu^2.$$

Inversons ces relations. Pour cela , on remarque que

$$\begin{aligned} s_1^2 &= (\lambda + \mu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \\ &= s_2 + 2\lambda\mu. \end{aligned}$$

D'où
$$\lambda\mu = \frac{1}{2}\left(s_1^2 - s_2\right).$$

On dispose donc de la somme et du produit des valeurs propres :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = s_1 \\ \lambda\mu = \frac{1}{2}\left(s_1^2 - s_2\right) \end{cases}$$

On sait alors que λ et μ sont racines du polynôme de degré 2

$$\begin{aligned} (x - \lambda)(x - \mu) &= x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu \\ &= x^2 - s_1 x + \frac{1}{2}\left(s_1^2 - s_2\right). \end{aligned}$$

Dont le discriminant est :

$$\Delta = s_1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\left(s_1^2 - s_2\right) = 2s_2 - s_1$$

Comme il y a bien deux racines, deux valeurs propres, on sait que le discriminant est positif et

$$\{\lambda; \mu\} = \left\{\frac{1}{2}\left(s_1 \pm \sqrt{2s_2 - s_1}\right)\right\}.$$

Problème II
Étude d'un point critique de la fonction $(x, y) \mapsto x^y - y^x$

D'après ECRICOME 2011

1. La fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, et avec pour tout réel $t > 0$

$$\psi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2}.$$

Par un calcul de discriminant ou avec la forme canonique, on a

$$t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Dès lors, la dérivée est strictement positive, la fonction ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$. De plus, $\psi(1) = 0$, et donc

$$\forall t \in]0; 1], \qquad \psi(t) \leqslant 0$$

et
$$\forall t \in [1; +\infty[, \qquad \psi(t) \geqslant 0.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a par télescopage

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(1-1)!} - \frac{1}{N!} = 1 - \frac{1}{N!}.$$

On en déduit la convergence des sommes partielles avec $N \to +\infty$. La série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = 1.$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_*^+$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\psi\left(t^{n-1}\right)}{n!} &= \frac{t^{n-1}}{n!} - \frac{\frac{1}{t^{n-1}}}{n!} - \frac{n-1}{n!}\ln t \\ &= \frac{1}{t}\frac{t^n}{n!} - t\frac{(1/t^n)}{n!} - \frac{n-1}{n!}\ln(t).\end{aligned}$$

Or les séries exponentielles

$$\sum \frac{t^n}{n!} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(1/t^n)}{n!}$$

sont convergentes et d'après la question 2, la série

$$\sum \frac{n-1}{n!}$$

est aussi convergentes. Par combinaison linéaire de séries convergentes, on prouve la convergence de la série

$$\sum \frac{\psi\left(t^{n-1}\right)}{n!}.$$

On peut même préciser la somme car

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = \mathrm{e}^t - 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/t^n)}{n!} = \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - 1$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} = 1.$$

Finalement, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi\left(t^{n-1}\right)}{n!} = \varphi(t) - \ln(t).$$

4. Soit $t \in]0;1[$

$$\ln(t) - \varphi(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\overbrace{\psi\left(t^{n-1}\right)}^{<0}}{n!} > 0.$$

D'où la première inégalité.
Et pour $t \in]1;+\infty[$, $t^{n-1} > 1$, et donc $\psi\left(t^{n-1}\right) > 0$ et

$$\varphi(t) - \ln(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\overbrace{\psi\left(t^{n-1}\right)}^{>0}}{n!} > 0.$$

Ce qui conclut sur la seconde inégalité.

5. Le point (x, y) est critique si et seulement si

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \frac{y}{x}\mathrm{e}^{y\ln(x)} - \ln(y)\mathrm{e}^{x\ln(y)} = 0 \\ \ln(x)\mathrm{e}^{y\ln(x)} - \frac{x}{y}\mathrm{e}^{x\ln(y)} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{y}{x}x^y = \ln(y)y^x \\ \frac{x}{y} = y^x \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \ln(y) = \frac{y^{x-1}}{x^{y-1}} \\ \ln(x) = \frac{y^{x-1}}{x^{y-1}} \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(x) > 0 \text{ et } \ln(y) > 0 \\ \ln(x)\ln(y) = 1 \\ \ln(x) = \frac{y^{x-1}}{x^{y-1}} \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} x > 1 \text{ et } y > 1 \\ \ln(x)\ln(y) = 1 \\ \ln(x)x^{y-1} = y^{x-1} \end{cases} \quad (L_3)\end{aligned}$$

6. Notons $t = \ln(x)$. Comme $x > 1$, $t > 0$ et

$$y = \mathrm{e}^{\ln(y)} = \mathrm{e}^{1/\ln(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}.$$

En appliquant le logarithme sur chaque membre de l'égalité (L_3), on obtient

$$(x-1)\ln(y) = (y-1)\ln(x) + \ln(\ln(x))$$

D'où $\left(\mathrm{e}^t - 1\right)\frac{1}{t} = \left(\mathrm{e}^{1/t} - 1\right)t + \ln(t) \iff \varphi(t) = \ln(t).$

7. D'après la question 4,

$$\varphi(t) = \ln(t) \iff t = 1.$$

On en déduit l'unicité du point critique. Dans ce cas $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}$ et la condition $\ln(x)\ln(y) = 1$, impose $x = \mathrm{e}$. En résumé, l'unique point critique est

$$(x, y) = (\mathrm{e}, \mathrm{e}).$$

8. D'une part, on a pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&f(\mathrm{e}, \mathrm{e}+t) - f(\mathrm{e}, \mathrm{e}) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}(1+\ln(1+t/\mathrm{e}))} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}+t} - 0 \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}+t}\Big(\exp\Big(\mathrm{e}\big(1 + \ln(1+t/\mathrm{e}) - (\mathrm{e}+t\,\mathrm{e})\big)\Big) - 1\Big) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}+t}\Big(\exp\Big(\mathrm{e}\big(\ln(1+t/\mathrm{e}) - t\,\mathrm{e}\big)\Big) - 1\Big).\end{aligned}$$

À l'aide de l'inégalité de concavité du logarithme :

$$\forall u \in]-1;+\infty[, \qquad \ln(1+u) \geqslant u,$$

on montre que

$$\exp\Big(\mathrm{e}\big(\ln(1+t/\mathrm{e}) - t\,\mathrm{e}\big)\Big) \geqslant 1,$$

ce qui donne finalement

$$f(\mathrm{e}, \mathrm{e}+t) - f(\mathrm{e}, \mathrm{e}) \geqslant 0.$$

D'autre part, pour $t \in \mathbb{R}$, on montre de même que

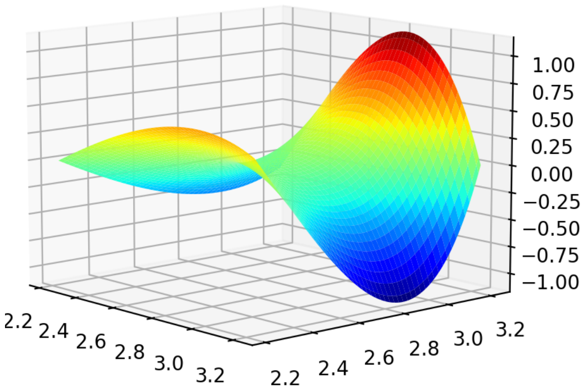
$$f(\mathrm{e}+t, \mathrm{e}) - f(\mathrm{e}, \mathrm{e}) \leqslant 0.$$

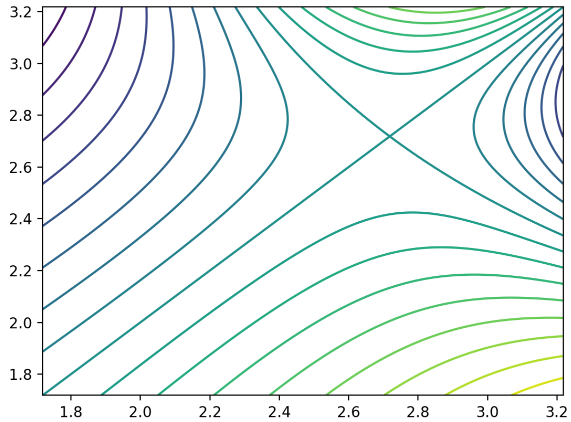
En conclusion, $f(\mathrm{e}, \mathrm{e})$ est un point selle.

Ci-dessous, le code python pour afficher la surface de la fonction. On rajoute ensuite les lignes de niveau.

```
def f(x,y):

    return x**y-y**x

plt.clf()
e=np.exp(1)
x = np.linspace(e-0.5, e+0.5, 100)
 # 100 valeurs pour la variable x espacées
 # régulièrement entre -1 et 1
y = np.linspace(e-0.5, e+0.5, 100)
 # De même pour la variable y

X, Y = np.meshgrid(x, y)
 # Tableau contenant les points (xi,yi) où
 xi
 # et yi sont calculés précédemment
Z = f(X,Y)
```

```
# Calcul des images pour tous les points
    (xi,yi)

ax = plt.axes(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z,cmap='jet')
plt.show()

## Pour les lignes de niveau
graphe = plt.contour(X,Y,f(X,Y),20)
```





DS 5* - solution

Problème I
De tout...

Adapté du sujet HEC B/L 2018

1. On a par linéarité de l'espérance

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(X_i\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathbf{E}(1) = 1.$$

2. Comme $X_i(\Omega) = X_j(\Omega) = \{0;1\}$, on a $X_iX_j(\Omega) = \{0;1\}$. Or la condition $\sum_{k=1}^{n} X_k = 1$ interdit le fait que $X_i = 1$ et $X_j = 1$ simultanément. Dès lors, $X_iX_j = 0$ et l'espérance s'en déduit.

3.a) Si $i = j$

$$a_{ii} = \operatorname{Cov}\left(X_i, X_i\right) = \mathbf{V}\left(X_i\right) = p_i\left(1 - p_i\right).$$

Si $i \neq j$, la formule de Huygens impose

$$\begin{aligned} a_{ij} = \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right) &= \overbrace{\mathbf{E}\left(X_iX_j\right)}^{=0} - \mathbf{E}\left(X_i\right)\mathbf{E}\left(X_j\right) \\ &= -p_ip_j. \end{aligned}$$

3.b) Appliquons la formule du produit matriciel :

$$\begin{aligned} \left[{}^t XAX\right]_{11} &= \sum_{i=1}^{n} \left[{}^t X\right]_{1i} [AX]_{i1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} [A]_{ij} [X]_{j1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right) \\ &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} x_iX_i, \sum_{j=1}^{n} x_jX_j\right) \\ \left[{}^t XAX\right]_{11} &= \operatorname{Cov}(Z_X, Z_X) = \mathbf{V}(Z_X) \end{aligned}$$

par bilinéarité de la covariance. En identifiant $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a le résultat demandé.

- Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ

$$AX = \lambda X \quad \text{avec} \quad X \neq 0_{n,1}.$$

Dans ce cas

$$\mathbf{V}(Z_X) = {}^t XAX = \lambda\, {}^t XX = \lambda \|X\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi $\|X\| \neq 0$ donne

$$\lambda = \frac{\mathbf{V}(Z_X)}{\|X\|^2} \geqslant 0.$$

3.c)i) Comme D est diagonale à coefficients positifs (la diagonale est exactement les valeurs propres de A), on peut poser

$$T = \operatorname{diag}\left(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}\right) \quad \text{où} \quad D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Ainsi $T^2 = D$. On pose ensuite

$$M = PT\,{}^tP$$

de sorte que

$$\begin{aligned} {}^t MM &= {}^t\left(PT\,{}^tP\right)\left(PT\,{}^tP\right) \\ &= P\,{}^tT \underbrace{{}^tPP}_{=I_n} T\,{}^tP = PT^2\,{}^tP = A. \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

3.c)ii) Raisonnons par double implication.

→ Si $X \in \operatorname{Ker} A$ alors

$$\mathbf{V}(Z_X) = {}^t XAX = {}^t X \cdot 0_{n,1} = 0.$$

→ Réciproquement si $\mathbf{V}(Z_X) = 0$ alors

$$\begin{aligned} \|MX\|^2 &= {}^t(MX)MX \\ &= {}^t X\,{}^t MMX \\ &= {}^t XAX = 0. \end{aligned}$$

D'où $MX = 0$ et $AX = {}^tM \underbrace{MX}_{=0} = 0$. On a bien $X \in \operatorname{Ker} A$.

3.d) D'après ce qui précède

$$\begin{aligned} X \in \ker A \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} x_iX_i\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} x_iX_i \text{ est presque sûrement constante.} \end{aligned}$$

Notons c cette constante. On note $\mathscr{A}$ l'événement

$$\mathscr{A} = \left\{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{n} x_iX_i(\omega) = c\right\}, \quad \mathbf{P}(\mathscr{A}) = 1.$$

→ Soit $X \in \operatorname{Ker}(A)$.
Soit $k \in [\![1;n]\!]$, il existe $\omega \in A$ tel que $X_k(\omega) \neq 0$, sinon X_k serait presque surement nulle. Comme $\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) = 1$, on a nécessairement

$$\forall i \neq k, \qquad X_i(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad X_k(\omega) = 1.$$

Dans ce cas,

$$c = \sum_{i=1}^{n} x_iX_i(\omega) = x_k.$$

On en déduit que

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \qquad x_k = c \quad \text{soit } X = cU.$$

D'où $\qquad \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$.

→ Réciproquement $\mathrm{Z_U} = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \mathrm{X}_i = 1$ donc

$$\mathbf{V}(\mathrm{Z_U}) = 0$$

et d'après la question précédente $\mathrm{U} \in \mathrm{Ker}\, \mathrm{A}$.

4.a) Par linéarité de l'espérance

$$1 = \mathbf{E}(\mathrm{Z_X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{E}(\mathrm{X}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

4.b)

4.c) La fonction f_n est $\mathscr{C}^1$ car polynomiale. Soit $k \in [\![1;n]\!]$

$$\partial_k f(x) = 2p_k x_k - \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right) \frac{p_k}{p_n}.$$

Le point X est un point critique si et seulement si

$$2p_k x_k = \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right) \frac{p_k}{p_n}.$$

Avec $p_k \neq 0$:

$$x_k = \frac{1}{2p_n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right) \qquad (\star)$$

On constate que x_k est indépendant de l'indice k

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1}.$$

En reprenant l'équation $(\star)$ et remplaçant chaque x_k par x_1, on obtient

$$x_1 = \frac{1}{2p_n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_1\right) = \frac{1}{2p_n}\big(1 - x_1(1-p_n)\big).$$

On trouve $x_1 = 1$, la valeur commune. Il y a donc bien un unique point critique donné par

$$a = (1, 1, \ldots, 1).$$

Dans ce cas $f_n(a) = 0$.
En identifiant $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $a = \mathrm{U}$ où U est défini à la question 3.d).

4.d) Le premier point est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique :

$$\forall\, (a_i),\ (b_i) \in \mathbb{R}^n, \qquad \big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\big)^2 \leqslant \big(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\big)\big(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\big)$$

avec $a_i = \alpha_i \sqrt{p_i}$ et $b_i = \sqrt{b_i}$.
Notons ensuite que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, d'où

$$\forall\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 p_i\right).$$

- Posons x_n de sorte que

$$p_n x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_n(a) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^2\Big) - 1 \\ &\geqslant \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\right)^2}_{=1} - 1 = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $f_n(a)$ est un minimum global de la fonction.

4.e) Il suffit de remarque que si $\mathbf{E}(\mathrm{Z_X}) = 1$

$$\mathbf{V}(\mathrm{Z_X}) = f_n(\mathrm{X}).$$

4.f) On sait que pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{V}(\mathrm{Z_X}) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\mathrm{Z_U}) = 0.$$

Ainsi la variance a bien un minimum donnée par 0. D'après la question 3.d) , on a même l'égalité

$$\mathbf{V}(\mathrm{Z_X}) = 0 \iff \exists\, c \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{X} = c\mathrm{U}.$$

Or la condition $\mathbf{E}(\mathrm{Z_X}) = 1$ impose $c = 1$. En résumé, il y a bien une unique matrice qui vérifie les deux conditions. Elle est donnée par U.

5.a) La suite de terme général (S_k) est strictement croissante, on peut donc se contenter de trouver le plus petit entier k tel que

$$u < \mathrm{S}_k.$$

Pour cela, on utilise une structure conditionnelle while.

```
def som(u,P):
    s=P[0]
    k=0
    while u>s:
        k+=1
        s+=P[k]
    return k
```

5.b) Soit $k \in [\![1;n]\!]$

$$\mathbf{P}(\mathrm{N} = k) = \mathbf{P}(\mathrm{S}_{k-1} \leqslant \mathrm{U} < \mathrm{S}_k) = \mathrm{F_U}(\mathrm{S}_k) - \mathrm{F_U}(\mathrm{S}_{k-1})$$

où $\mathrm{F_U}$ désigne la loi uniforme sur $[0;1]$. Comme $\mathrm{S}_i \in [0;1]$, pour tout indice i, on a

$$\mathbf{P}(\mathrm{N} = k) = \mathrm{S}_k - \mathrm{S}_{k-1} = p_k.$$

5.c)

```
def simuN(P):
    U=rd.random()
    return som(U,P)

def simuVect(P):
    n=len(P)
    X=np.zeros(n)
    k=simuN(P)
    X[k]=1
    return X
```

6.a) Notons que les conditions

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{j=1}^{n} Y_j = 1$$

impose que pour chaque $\omega \in \Omega$, il existe un unique couple (i_ω, j_ω) tel que

$$X_k(\omega) = \delta_{i_\omega,k} \quad \text{et} \quad Y_k(\omega) = \delta_{j_\omega,k}.$$

On distingue deux sous-cas :
→ Si $i_\omega \neq j_\omega$, alors (en omettant les indices ω)

$$\begin{aligned} T_n(\omega) &= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{p_i(1-pi)} + \frac{(-1)^2}{p_j\left(1-p_j\right)}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p_i\left(1-p_i\right)} + \frac{1}{p_j\left(1-p_j\right)}\right). \end{aligned}$$

Notons $t_{i,j}$ cette dernière valeur.
→ Si $i_\omega = j_\omega$, alors

$$T_n(\omega) = 0.$$

- Résumons.

Soit $i, j \in [\![1;n]\!]$, avec $i \neq j$

$$\mathbf{P}(T_n = t_{i,j}) = \mathbf{P}\Big(([X_i = 1]\cap[Y_j = 1])\sqcup([X_j = 1]\cap[Y_i = 1]\Big) = 2p_p j$$

en utilisant l'indépendance. Ensuite, par indépendance et union disjointe

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(T_n = 0) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 1] \cap [Y_i = 1]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(X_i = 1\right) \times \mathbf{P}\left(Y_i = 1\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i^2. \end{aligned}$$

6.b) On développe en utilisant la linéarité de l'espérance et le fait que les variables X_i et Y_i soient indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(T_n\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{E}\left(X_i^2 - 2X_iY_i + Y_i^2\right)}{p_i\left(1-p_i\right)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{E}\left(X_i^2\right) - 2\mathbf{E}\left(X_i\right) \times \mathbf{E}\left(Y_i\right) + \mathbf{E}\left(Y_i^2\right)}{p_i\left(1-p_i\right)}. \end{aligned}$$

Or si X suit une loi de Bernoulli $X^2 = X$ presque surement. On en déduit la simplification

$$\mathbf{E}\left(T_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i - 2{p_i}^2 + p_i}{p_i\left(1-p_i\right)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{2p_i\left(1-p_i\right)}{p_i\left(1-p_i\right)} = 2.$$

Problème II
Distance à une partie de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

1.a)

```
def testSym(M):
    # attention décalage d'indice en
        python
    if M[0,1]==M[1,0]:
        return True
    return False
```

1.b) Une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de rang inférieur ou égal à 1 si son déterminant est nul.

```
def testrang(M):
    d=M[0,0]*M[1,1]-   M[0,1]*M[1,0]
    if d==0:
        return False
    return True
```

1.c) Pour une matrice symétrique donc diagonalisable avec deux valeurs propres, on montre que

$$\det(M) = \lambda\mu \quad \text{et} \quad \operatorname{Tr}(M) = \lambda + \mu.$$

Ce qui permet de conclure.

1.d)

```
def test_appartenance(M):
    if M[0,1]!=M[1,0]:
        return False
    d=M[0,0]*M[1,1]- M[0,1]*M[1,0]
    if d!=0:
        return False
    if M[0,0]<0:
        return False
    return True
```

2.

```
compteur=0
m=5000
for i in range(m):
    m11=rd.randint(-2,3)
    m21=rd.randint(-2,3)
    m12=rd.randint(-2,3)
    m22=rd.randint(-2,3)
    M=np.array([[m11,m12],[m21,m22]])
    compteur+=test_appartenance(M)
print(compteur/m)

>>> 0.0166
```

Bonus. On utilise le fait que dans un cas d'équiprobabilité

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)}.$$

```
compteur2=0
for m11 in range(-2,3):
    for m12 in range(-2,3):
        for m22 in range(-2,3):
            M=np.array([[m11,m12],[m12
                ,m22]])
            compteur2+=
                test_appartenance(M)
print(compteur2/(5*5*5*5))

>>> 0.0176
```

3. Soit $M = V^tV$ où $V \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Pour

$$V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

il vient

$$M = \begin{bmatrix} xV & yV \end{bmatrix}.$$

Les deux colonnes sont colinéaires et $\operatorname{rg}(M) \leqslant 1$.
On a aussi M symétrique car

$${}^tM = {}^t\left(V^tV\right) = V^tV = M.$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Il existe $X \neq 0_{2,1}$ telle que
$$MX = \lambda X.$$
Puis
$$^tXMX = {}^tXV^tVX = {}^t({}^tVX)\left({}^tVX\right) = \|{}^tVX\|^2,$$
où $\|\cdot\|$ désigne la norme canonique sur $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Or
$$^tXMX = \lambda {}^tXX = \|X\|^2.$$
D'où $\lambda \geqslant 0$ car $\|X\| > 0$.

Remarque. On peut aussi noter que 0 est valeur propre (M n'est pas inversible), l'autre valeur propre est donnée par la trace
$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(V^tV) = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} x^2 & * \\ * & y^2 \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

4.a) M est de rang 1. L'image est donc une droite vectorielle. Tout vecteur X non nul de l'image convient.
Si C_1, C_2 désignent les colonnes de M, alors $C_1, C_2 \in \mathrm{Vect}(X)$. Il existe $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tels que $C_1 = y_1X$ et $C_2 = y_2X$ et la matrice colonne
$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ convient.}$$

4.b) Posons
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
Par symétrie de M, on a $x_2y_1 = x_1y_2$ car
$$X^tY = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{bmatrix}.$$
D'où
$$x_2\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_1 \\ x_2y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_2 \\ x_2y_2 \end{bmatrix} = y_2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
Puis $x_2Y = y_2X$.
Si $x_2 \neq 0$, alors $\lambda = y_2/x_2$ convient.
→ Si $x_2 = 0$. On a deux cas, si $x_1 = 0$ alors $M = 0$ et $Y = X = 0$ convient. Si $x_1 \neq 0$ alors $y_2 = 0$ et
$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
qui sont bien colinéaire.
Précisons que λ est bien positif. En effet, on a
$$MX = X^tYX = \lambda X^tXX = \lambda\|X\|^2X.$$
Comme X est non nul, $\lambda\|X\|^2$ est valeur propre de M qui est donc positive.

4.c) Vérifier que $V = \sqrt{\lambda}X$ convient.

5. On a
$$\det(A) = p^2 - q^2 = (p-q)(p+q) \neq 0.$$
Donc $\mathrm{rg}(A) = 2 \neq 1$ et $A \notin \mathscr{T}$.

6. On a
$$V^tV = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix}$$
puis
$$A - V^tV = \begin{bmatrix} p-x^2 & q-xy \\ q-xy & p-y^2 \end{bmatrix}.$$
$$\|A - V^tV\|^2 = \left(p-x^2\right)^2 + \left(p-y^2\right)^2 + 2(q-xy)^2$$
Il ne reste plus qu'à développer pour obtenir l'égalité.

7. La fonction F est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$. Notons la symétrie
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = F(y,x).$$
De plus, les dérivées partielles sont données par
$$\begin{cases} \partial_1 F(x,y) = 4x\left(x^2+y^2-1\right) + 4q(x-y) \\ \partial_2 F(x,y) = 4y\left(x^2+y^2-1\right) + 4q(y-x) \end{cases}$$
Rappelons que le gradient est
$$\nabla f(x,y) = \left(\partial_1 F(x,y), \partial_2 F(x,y)\right).$$

8. (x,y) est un point critique si et seulement si
$$\begin{cases} \partial_1 F(x,y) = 4x\left(x^2+y^2-1\right) + 4q(x-y) = 0 \\ \partial_2 F(x,y) = 4y\left(x^2+y^2-1\right) + 4q(y-x) = 0 \end{cases}$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\iff} \begin{cases} x\left(x^2+y^2-1\right) + 4q(x-y) = 0 \\ 4(x+y)\left(x^2+y^2-1\right) = 0 \end{cases}$$
Raisonnons par disjonction :
→ Si $x^2+y^2-1 = 0$ alors on a $4q(x-y) = 0$ puis $x = y$ et on a deux couples solutions
$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$
→ Si $x + y = 0$, il vient
$$x\left(2x^2-1\right) + 8qx = 0$$
puis $x\left(2x^2-1+8q\right) = 0$.
Comme $q > \frac{1}{2}$, $-1+8q > 0$ et $x = 0$. On obtient un troisième point critique
$$C = (0,0).$$

9. On a
$$F(A) = F(B) = (q-p)^2 < 1 + (q-p)^2 = F(C).$$
De plus, avec l'expression de la question 7
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) \geqslant (q-p)^2 = F(A) = F(B).$$
On a un minimum atteint on des points critiques A et B. Comme
$$\|A - {}^tVV\| = \sqrt{F(x,y)}$$
et la racine carrée est strictement croissante, un minimum de $\|A - {}^tVV\|$ existe et atteint en
$$V_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V_B = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

10. D'après les questions 3 et 4,
$$\left\{V^tV \mid V \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right\} = \mathscr{T}.$$

Comme $V_A{}^tV_A = V_B{}^tV_B$, on a un unique minimum atteint en une unique matrice

$$M = V_A{}^tV_A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

C'est la matrice d'un projecteur.

Problème III
Inégalité de Cramer-Rao

Adapté de ESSEC II voie E, 2009.

1.a) Soit $i \in [\![1;n]\!]$, $Y_i(\Omega) \in \{0;1\}$ donc Y_i suit une loi de Bernoulli Le paramètre est donné par :

$$\mathbf{P}\left(Y_i = 1\right) = \mathbf{P}\left(X_i = 0\right) = e^{-\theta}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\theta}.$$

Dès lors $\qquad Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(e^{-\theta}\right).$

Par le lemme des coalitions, l'indépendance des X_i induit l'indépendance des Y_i. On sait alors que

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, e^{-\theta}\right).$$

Par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}\left(\overline{Y_n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(Y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\theta} = e^{-\theta}.$$

1.b) On a

$$\mathbf{V}\left(\overline{Y_n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n e^{-\theta} = \frac{e^{-\theta}}{n}.$$

2. On sait que l'indépendance de X_i avec $X_i \hookrightarrow \mathscr{P}\left(e^{-\theta}\right)$ entraîne :

$$S_k \hookrightarrow \mathscr{P}\left(ke^{-\theta}\right).$$

3. Soit $j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\varphi(j) &= \frac{\mathbf{P}\left([X_1 = 0] \cap [S_n = j]\right)}{\mathbf{P}\left([S_n = j]\right)}\\ &= \frac{\mathbf{P}\left(\sum_{k=2}^{n} X_k = j\right)}{\mathbf{P}\left(S_n = j\right)}.\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=2}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{P}((n-1)\theta)$, ce qui donne :

$$\varphi(j) = \frac{e^{-(n-1)\theta}((n-1)\theta)^j/j!}{e^{-n\theta}(n\theta)^j/j!} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j..$$

D'où le résultat.

4. D'après la formule de transfert, la variable $\varphi(S_n)$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum \varphi(j)\mathbf{P}\left(S_n = j\right)$$

converge absolument. Comme les termes sont positifs, on a convergence. Or

$$\begin{aligned}\varphi(j)\mathbf{P}\left(S_{n=j}\right) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j \frac{(n\theta)^j}{j!} e^{-n\theta}\\ &= e^{-\theta}\cdot\frac{((n-1)\theta)^j}{j!} e^{-(n-1)\theta}.\end{aligned}$$

On reconnait, à une constante multiplicative près, une série exponentielle convergente. Donc $\varphi(S_n)$ a une espérance et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\varphi(S_n)\right) &= e^{-\theta}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{((n-1)\theta)^j}{j!}\right)e^{-(n-1)\theta}\\ &= e^{-\theta}\cdot 1 = e^{-\theta}.\end{aligned}$$

5. Calculons le moment d'ordre 2 (la convergence s'établit comme à la question précédente)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\varphi(S_n)^2\right) &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2j}\frac{(n\theta)^j}{j!}e^{-n\theta}\\ &= e^{-n\theta}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 n\theta}{j!}\right)^j\\ &= e^{-n\theta}\exp\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 n\theta\right).\end{aligned}$$

Or

$$-n\theta + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 n\theta = -n\theta + n\theta - 2\theta + \frac{\theta^2}{n} = -2\theta + \frac{\theta}{n}.$$

D'où $\qquad \mathbf{E}\left(\varphi(S_n)^2\right) = e^{-2\theta}\cdot e^{\theta/n}.$

D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(\varphi(S_n)\right) &= \mathbf{E}\left((\varphi(S_n))^2\right) - \mathbf{E}\left(\varphi(S_n)\right)^2\\ &= e^{-2\theta}\cdot e^{\theta/n} - e^{-2\theta} = e^{-2\theta}\left(e^{\theta/n} - 1\right).\end{aligned}$$

6. La fonction h est dérivable sur $[0;1]$ par les théorèmes généraux. Pour $t \in [0;1]$.

$$h'(t) = e^{\theta} - 1 - \theta e^{t\theta} = \theta\left(\frac{e^{\theta} - 1}{\theta - 0} - e^{t\theta}\right) \quad .$$

D'après l'égalité des accroissements fini, il existe $c \in [0;\theta]$ tel que

$$\frac{e^{\theta} - 1}{\theta - 0} = e^{c}.$$

On peut poser $\tilde{t} = c/\theta \in [0;1]$ de sorte que

$$h'(t) = \theta\left(e^{\tilde{t}\theta} - e^{t\theta}\right).$$

Comme la fonction exponentielle est strictement positif, le signe de $e^{\tilde{t}\theta} - e^{t\theta}$ et celui de $\tilde{t}\theta - t\theta$. Dès lors $h'(t)$ est positif sur $\left[\tilde{t};1\right]$, négatif sur $[0;\tilde{t}]$. La fonction h a un minimum atteint en 0 ou 1. Or

$$h(0) = 0, \qquad h(1) = 0.$$

On en déduit que h est positive.

6.b) Il suffit de prendre $t = \frac{1}{n}$ pour avoir :

$$0 \leqslant h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\exp(\theta) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \exp\left(\frac{\theta}{n}\right).$$

D'où $\qquad \exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \leqslant \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n} \leqslant \frac{\exp(\theta)}{n} + 1.$

Ensuite

$$\begin{aligned}\mathbf{V}\left(\overline{y_n}\right) - \mathbf{V}\left(\varphi\left(s_n\right)\right) &= \frac{e^{-\theta}}{n} - e^{-2\theta}\left(e^{\theta/n} - 1\right) \\ &= e^{-2\theta}\left(\frac{e^{\theta}}{n} - \left(e^{\theta/n} - 1\right)\right) \\ &\leqslant e^{-2\theta}\left(\frac{n-1}{n} - 1\right) \leqslant 0.\end{aligned}$$

D'où $\qquad \mathbf{V}\left(\varphi\left(S_n\right)\right) \leqslant \mathbf{V}\left(\varphi_n\right).$

7.a)

```
def simuY(n,theta):
    P=rd.poisson(theta,n)
    Y=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        if P[i]==0:
            Y[i]=1
    return np.mean(Y)
```

Une deuxième solution :

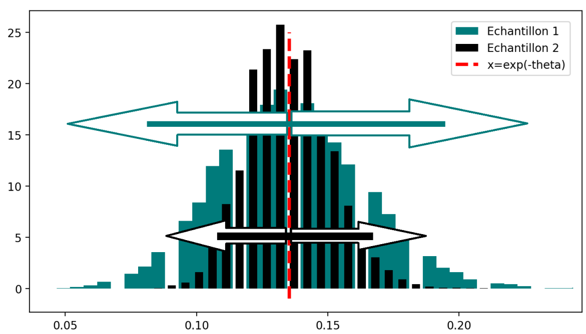
```
def simuY2(n,theta):
    P=rd.poisson(theta,n)
    s=0
    for i in range(n):
        if P[i]==0:
            s+=1
    return s/n
```

7.b)

```
def simuS(n,theta):
    P=rd.poisson(theta,n)
    return (1-1/n)**np.sum(P)
```

7.c) L'échantillon 1 est plus étalé que le second autour de la moyenne. Il est donc probablement obtenu avec une variable qu'il a une plus grande variance. On s'attend donc à :

- Échantillon 1 généré à partir de $\overline{Y_n}$;
- Échantillon 2 généré à partir de $\varphi(S_n)$.



Voici le code qui a généré les histogrammes :

```
plt.clf()
theta=2
n=150
m=10000
Ech1=np.zeros(m)
Ech2=np.zeros(m)
for i in range(m):
    Ech1[i]=simuY2(n,theta)
    Ech2[i]=simuS(n,theta)
ma=max(max(Ech1),max(Ech2))
mi=min(min(Ech1),min(Ech2))
plt.hist(Ech1,np.linspace(mi,ma,41),
    density=True,label='Echantillon 1',
    color='#007B7B')
plt.hist(Ech2,np.linspace(mi,ma,41),rwidth
    =0.6,density=True,label='Echantillon 2
    ',color='black')
plt.plot([np.exp(-theta),np.exp(-theta)
    ],[-1,25],'--',linewidth=3,color='red'
    ,label='x=exp(-theta)')
plt.legend()
plt.show()
```

8. On a

$$\partial_1 \ln p(\theta,\theta) = +\frac{1}{\theta}, \quad \partial_1 \ln p(\theta,\theta) = \frac{-1}{1-\theta}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{I_X}(\theta) &= \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 \theta + \left(-\frac{1}{1-\theta}\right)^2 (1-\theta) \\ &= \frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta} = \frac{1}{\theta(1-\theta)}.\end{aligned}$$

9.a) On a ici

$$\mathrm{I_X}(\theta) = \sum_{k=0}^{N} \left(\partial_n \ln p(\theta,k)\right)^2 p(\theta,k)$$

avec pour tout $k \in [\![0;N]\!]$

$$p(\theta,k) = \binom{N}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$

puis $\qquad \ln p(\theta,k) = \ln\binom{N}{k} + k\ln\theta + (n-k)\ln(1-\theta).$

Par les théorèmes généraux, $\theta \longmapsto \ln p(\theta,k)$ est dérivable avec

$$\begin{aligned}\partial_1 \ln p(\theta,k) &= \frac{k}{\theta} - \frac{(\alpha)-k)}{1-\theta} = \frac{k(1-\theta)-(N-k)\theta}{\theta(1-\theta)} \\ &= \frac{k-N\theta}{\theta(1-\theta)}.\end{aligned}$$

D'où

$$p(\theta,h)\left(\partial_1 \ln p(\theta,k)\right)^2 = \frac{1}{(\theta(1-\theta))^2} \cdot (k-N\theta)^2 p(\theta,k).$$

Puis par somme, on obtient le résultat.

9.b) La formule de transfert donne

$$\mathrm{I_X}(\theta) = \frac{\mathbf{E}\left((X-N\theta)^2\right)}{(\theta(1-\theta))^2}.$$

Or pour une loi binomiale $\mathbf{E}(X) = N\theta$ et par définition de la variance

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left((X-\mathbf{E}(X))^2\right) = \mathbf{E}\left((X-N\theta)^2\right).$$

Ainsi

$$\mathrm{I_X}(\theta) = \frac{\mathbf{V}(X)}{(\theta(1-\theta))^2} = \frac{N\theta(1-\theta)}{(\theta(1-\theta))^2} = \frac{N}{\theta(1-\theta)}.$$

10.a) On a pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$p(\theta,k) = \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}, \quad \ln p(\theta,k) = -\theta + k\ln(\theta) + \ln k!$$

On a bien la dérivabilité de $\theta \mapsto \ln p(\theta, k)$ avec

$$\partial_1 \ln p(\theta, k) = -1 + \frac{k}{\theta}$$

puis

$$\left(\partial_1 \ln p(\theta, k)\right)^2 p(\theta, k) = \left(\frac{k}{\theta} - 1\right)^2 e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}.$$

10.b) Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{\theta} - 1\right)^2 e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} \\
&= e^{-\theta} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k^2}{\theta^2} - \frac{2k}{\theta} + 1\right) \frac{\theta^k}{k!} \\
&= e^{-\theta} \left(\sum_{k=0}^{N} k^2 \frac{\theta^{k-2}}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{N} k \frac{\theta^{k-1}}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\theta^k}{k!}\right) \\
&= e^{-\theta} \left(\sum_{k=1}^{N} k \frac{\theta^{k-2}}{(k-1)!} - 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\theta^k}{k!}\right) \\
&= e^{-\theta} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (k+1) \frac{\theta^{k-1}}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\theta^k}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\theta^k}{k!}\right) \\
&= e^{-\theta} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\theta^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\theta^{k-1}}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\theta^k}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\theta^k}{k!}\right) \\
&= e^{-\theta} \left(\sum_{k=0}^{N-2} \frac{\theta^k}{k!} + \frac{1}{\theta} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\theta^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\theta^k}{k!} + \sum_{k=0}^{N} \frac{\theta^k}{k!}\right)
\end{aligned}$$

On reconnaît des sommes partielles de la série exponentielle. On en déduit la convergence de la série et

$$I_X(\theta) = e^{-\theta} \left(e^{\theta} + \frac{1}{\theta} e^{\theta} - 2e^{\theta} + e^{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}.$$

10.c) D'après le théorème de transfert, $\partial_1 \ln p(\theta, x)$ admet une espérance si et seulement si là série

$$\sum \left(\partial_1 \ln p(\theta, k)\right)^2 p(\theta, k)$$

converge absolument. Comme la série est à termes positifs, la convergence suffit. Or la convergence a été établie à la question précédente. Le théorème justifie alors l'existence de l'espérance et l'égalité

$$\mathbf{E}\left(\left(\partial_1 \ln(p\theta, k)\right)^2\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\partial_1 \ln p(\theta, k)\right)^2 p(\theta, k) = \frac{I}{X}(\theta).$$

La suite n'a pas été modifiée. Voir corrigé du sujet ESSEC II voie E, 2009.