Nombres complexes

Ce chapitre introduit la notion de nombres complexes et donne l'interprétation géométrique.

1 Nombres complexes

1.1 Forme algébrique

DÉFINITION — **Forme algébrique**

Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b sont deux nombres réels. Cette expression s'appelle la ***forme algébrique*** *de z. Les nombres a et b sont uniques et sont appelés respectivement* ***partie réelle*** *et* ***partie imaginaire****, on note*

$$\Re e(z) = a \quad \text{et} \quad \Im m(z) = b.$$

Vocabulaire. Lorsque la partie réelle est nulle, on dit que le nombre est un **imaginaire pur**.

Remarque. D'après l'unicité de la forme algébrique, un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

PROPOSITION — **Règles de calcul sur les parties réelles et imaginaires**

Soient z et z' deux nombres complexes et α un nombre réel, on a

$$\left.\begin{array}{rcl} \Re e(z+z') & = & \Re e(z) + \Re e(z') \\ \Im m(z+z') & = & \Im m(z) + \Im m(z') \end{array}\right\} \text{(addition)} \qquad \left.\begin{array}{rcl} \Re e(\alpha z) & = & \alpha \Re e(z) \\ \Im m(\alpha z) & = & \alpha \Im m(z) \end{array}\right\} \text{(multiplication par un réel)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \Re e(zz') & = & \Re e(z)\Re e(z') - \Im m(z)\Im m(z') \\ \Im m(zz') & = & \Re e(z)\Im m(z') + \Im m(z)\Re e(z') \end{array}\right\} \text{(produit).}$$

Remarque. On a la propriété d'intégrité : comme dans le cas réel, un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Autrement dit,

$$zz' = 0 \iff \big(z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0\big).$$

DÉFINITION — **Nombre conjugué**

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un complexe sous forme algébrique, on définit le ***conjugué*** *de z, noté $\overline{z}$, par la formule*

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b.$$

Pour z_1 et z_2 deux nombres complexes ($z_2 \neq 0$ dans le dernier cas), on prouve

$$\overline{\overline{z_1}} = z_1, \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \text{et} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

On gardera toujours à l'esprit les formules : $\boxed{\Re e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \Im m(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.}$

Méthode

Comment calculer la forme algébrique d'un quotient de complexes ?

On multiplie et on divise par **l'expression conjuguée** du dénominateur. Par exemple

$$\frac{7-\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} = \frac{(7-\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})}{(4+3\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})} = \frac{28-21\mathrm{i}-4\mathrm{i}-3}{4^2+3^2} = \frac{25-25\mathrm{i}}{25} = 1-\mathrm{i}.$$

Exercice 1

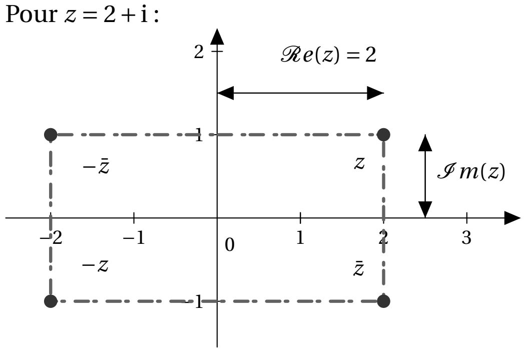
✦ Réduire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

$$\frac{\mathrm{i}^4+2\mathrm{i}^3+5\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}+6}{\mathrm{i}}, \quad (1+2\mathrm{i})^2, \quad (1+\mathrm{i})^3, \quad \frac{8-6\mathrm{i}}{7+\mathrm{i}}, \quad \mathrm{i}^{-77}, \quad \left(\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^4 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{777!}.$$

Par définition, $777! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 776 \times 777$.

Représentation graphique des nombres complexes

Dans la suite, on se place dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
À tout point du plan M d'abscisse x et d'ordonnée y, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$.
z est dit l'**affixe** du point M. Et inversement, à tout nombre complexe z, on peut associer un point du plan.
Pour $z = 2 + \mathrm{i}$:



De plus,

- Le point d'affixe $-z$ est le symétrique de M par la symétrie centrale de centre l'origine ;
- Le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par la symétrie axiale suivant l'axe des abscisses ;
- Le point d'affixe $-\bar{z}$ est le symétrique de M par la symétrie axiale suivant l'axe des ordonnées.

1.2 Formes trigonométrique et exponentielle

La représentation graphique précédente justifie une nouvelle caractérisation d'un nombre complexe par la distance à l'origine et l'angle formé avec l'axe $(\mathrm{O}x)$. Ce qui justifie les définitions suivantes.

DÉFINITION — **Module et argument**

Pour tout nombre complexe z, on pose :

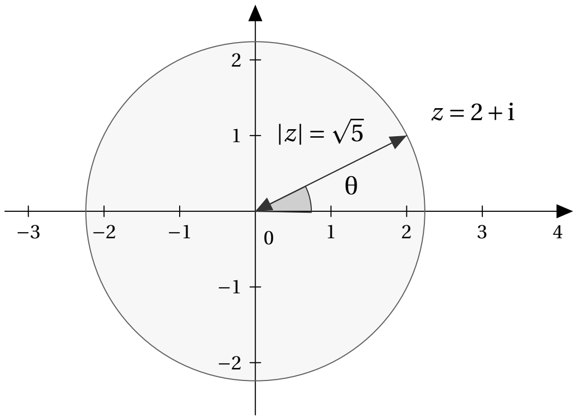
- *Le **module** de z, noté $|z|$, comme la distance entre le point* M *d'affixe z et l'origine,*

$$|z| = \sqrt{\Re e(z)^2 + \Im m(z)^2} \qquad \text{(Théorème de Pythagore).}$$

- ***L'argument** de $z \neq 0$, noté* $\arg(z)$, *toute mesure (définie modulo 2π) de l'angle entre l'axe* $(\mathrm{O}x)$ *et la droite* (OM).

• On ne peut pas parler de l'argument de 0.
• Dans la suite, $a = b\,[2\pi]$ si, et seulement si, il existe un entier k pour lequel $a = b + 2k\pi$. On n'oubliera pas qu'un argument est toujours défini modulo 2π.

Exemple. On a $z \in \mathbb{R}^*$ si et seulement si $\arg(z) = 0\,[\pi]$, et z est un imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.



Remarques. • Comme le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue, il n'y a pas de contradiction à utiliser la même notation.
• Pour $z \in \mathbb{C}$, on a aussi $|\Re e(z)| \leqslant |z|$ et $|\Im m(z)| \leqslant |z|$.
• Retenons que si A et B sont deux points du plan d'affixe respective z_A et z_B alors :

$$\boxed{\text{La distance AB est égale à } |z_B - z_A|.}$$

Exercice 2

✦ *Représentation graphique.*

1. Représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

a) $\mathscr{R}e(z) \geqslant 1$ et $\Im m(z) \geqslant 1$;
b) $|z| \leqslant 9$;
c) $|z - 1 + \mathrm{i}| < 1$;
d) $\Im m(z^2) = 0$.
e) $\Im m(z^2) = 2$.
f) $\Re e\big((z-1)^2\big) = 0$.

2. ✦ Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose que α n'est pas réel. Justifier l'équivalence :

$$|z - \alpha| = |z - \overline{\alpha}| \iff z \in \mathbb{R}.$$

Comment interpréter géométriquement cette équivalence ?

PROPOSITION **Règles de calcul pour le module**

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2, on a :

→ $|z| \geqslant 0$ *avec égalité si et seulement si* $z = 0$;
→ $|\overline{z}| = |z|$ *et* $z\overline{z} = |z|^2$;
→ $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. *En particulier, pour tout entier naturel n,* $|z^n| = |z|^n$;
→ *Pour* $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Preuve. • Un module représente une distance, un module est donc toujours positif. De plus, pour $z \in \mathbb{C}$ fixé,

$$|z| = 0 \iff \Re e(z)^2 + \Im m(z)^2 = 0 \iff \Re e(z) = 0 \text{ et } \Im m(z) = 0 \iff z = 0.$$

• Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un complexe sous forme algébrique. On a $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$

$$|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

De plus, $$z\overline{z} = (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 - (\mathrm{i}b)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

- Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. En utilisant le résultat précédent : $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1\overline{z_1} z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$.

Comme les modules sont positifs $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. Par récurrence, on prouve que pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$.
- La preuve pour le quotient est similaire au produit.

■

Exercice 3

✧ *Identité du parallélogramme.*
Soient z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, justifier l'égalité : $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

⚠ **Attention.**
- Il n'existe pas de relation d'ordre sur les nombres complexes. Pour comparer des complexes, on peut comparer leurs modules.
- En général, $|z_1+z_2| \neq |z_1| + |z_2|$. Par exemple $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2} \neq |1| + |\mathrm{i}|$. Toutefois, on a une inégalité.

THÉORÈME — **Inégalité triangulaire**

Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 : $|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Preuve. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re e\left(z_1\overline{z_2}\right). \end{aligned}$$

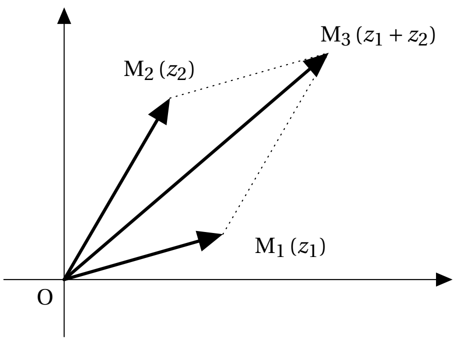
Or on a vu que pour tout complexe Z, on a $\Re e(\mathrm{Z}) \leqslant |\mathrm{Z}|$. Pour $\mathrm{Z} = z_1\overline{z_2}$, il vient

$$|z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |\overline{z_2}| = \left(|z_1| + |z_2|\right)^2.$$

Comme les modules sont positifs, on a bien prouvé l'inégalité.

■

Interprétation géométrique



Si M_1, M_2 et M_3 sont trois points du plan d'affixe respective z_1, z_2 et z_1+z_2, alors

$$\mathrm{OM}_3 \leqslant \mathrm{OM}_1 + \mathrm{OM}_2.$$

La distance entre M_3 et l'origine est inférieure à la somme des distances de M_1 et M_2 à l'origine.
Autrement dit, la somme des longueurs côtés adjacents d'un parallélogramme est inférieure à la longueur des diagonales.

Exercice 4

✦ *Applications de l'inégalité triangulaire.*

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-4| \leqslant 3$ et $|z-2\mathrm{i}| \leqslant 7$. Montrer que $\left|z-(2+\mathrm{i})\right| \leqslant 5$.
   Faire un dessin pour illustrer cette inégalité.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1/2| \leqslant 1/2$. Montrer que $|z(1-z)-1/2| \leqslant 1/2$.
3. Justifier que pour tous nombres complexes z_1, z_2, $\left||z_1|-|z_2|\right| \leqslant |z_1+z_2|$.

PROPOSITION **Forme trigonométrique**

Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme

$$z = r\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta) \quad \textit{avec} \quad r \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Si $z = 0$, on peut choisir $r = 0$ et tout réel θ.
Dans la suite, z est un nombre complexe non nul. Notons $z = a + \mathrm{i}b$ la forme algébrique. On écrit :

$$z = a + \mathrm{i}b = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \mathrm{i}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

De plus, $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1;1]$, ce nombre est donc compris entre $\cos(\pi) = -1$ et $\cos(0) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (la fonction cosinus est continue), il existe un réel $\theta \in [0;\pi]$ tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Le théorème de Pythagore impose : $$\sin(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}.$$

Quitte à remplacer θ par $-\theta$, on peut prendre θ du même signe que b. Ainsi, on a bien

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On conclut : $$z = \sqrt{a^2+b^2}\,\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}r\sin(\theta)\big).$$

■

Remarque. Pour z *non nul*, r est unique et s'identifie au module, θ ne l'est pas, il s'identifie (modulo 2π) à l'argument. Pour que θ soit défini de manière unique, on peut imposer en plus $\theta \in [0;2\pi[$, on parle alors d'**argument principal**.

Rappels de quelques valeurs importantes :

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

PROPOSITION **Règles de calcul pour l'argument**

Pour tous nombres complexes z, z_1, z_2 non nuls :

- *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, $\arg(\lambda z) = \arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$, *en particulier, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$.

Idée de la preuve. • Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et M le point d'affixe z. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, le point d'affixe λz se situe sur la même demi-droite que O et M. On a donc le même argument (modulo 2π).
• Le second point découle directement du fait que M′ d'affixe $\bar{z}$ s'obtient par symétrie axiale d'axe $(\mathrm{O}x)$ à partir de M d'affixe z.
• D'après le premier point, on peut supposer z_1 et z_2 de module 1. Ainsi, il existe θ_1, θ_2 tels que

$$z_1 = \cos(\theta_1) + \mathrm{i}\sin(\theta_1) \quad \text{et} \quad z_2 = \cos(\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_2)$$

$$\Rightarrow \quad z_1 z_2 = \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \mathrm{i}\big(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\big)$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2).$$

D'où, $\quad \arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi].$

Le cas particulier s'obtient par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour n entier négatif, on écrit

$$0 = \arg(z^n \cdot z^{-n}) = \arg(z^n) + \arg(z^{-n}) = \arg(z^n) - n\arg(z),$$

puisque $-n \in \mathbb{N}$. D'où le résultat.
- Le dernier point est une conséquence du second et du troisième points.

DÉFINITION — Exponentielle complexe et forme exponentielle

Pour tout nombre réel θ, on pose $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.
Ainsi, tout nombre complexe z s'écrit sous la forme (dite exponentielle)

$$z = re^{\mathrm{i}\theta} \quad \textit{avec} \quad r \geqslant 0 \quad \textit{et} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Exemples. • Une des relations les plus connues en mathématiques est : $\boxed{e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0.}$

• Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{\mathrm{i}\theta} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = 2k\pi.$$

Exercice 5

✦ Chercher l'erreur : $\quad -1 = e^{\mathrm{i}\pi} = e^{\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{i}\pi} = \left(e^{2\mathrm{i}\pi}\right)^{1/2} = 1^{1/2} = \sqrt{1} = 1.$

PROPOSITION — Règles de calcul pour les complexes de module 1

- *Soit $z \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence entre les énoncés :*

  $i)$ z est de module 1 ; $\qquad$ *$ii)$ Il existe un réel θ tel que $z = e^{\mathrm{i}\theta}$.*

- *Pour tous réels θ, θ',* $\quad \overline{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta}, \quad e^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} \quad$ *et* $\quad \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}.$

Preuve. • Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit z sous forme exponentielle $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. D'après le théorème de Pythagore :

$$|e^{\mathrm{i}\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1.$$

Ainsi,

$$|z| = \left|re^{\mathrm{i}\theta}\right| = |r| \cdot |e^{\mathrm{i}\theta}| = r.$$

Finalement, z est de module 1 si et seulement si $r = 1$, si et seulement si $z = e^{\mathrm{i}\theta}$.
- En utilisant le fait que la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus paire, on a aussi pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\overline{e^{\mathrm{i}\theta}} = \overline{\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)} = \cos(\theta) - \mathrm{i}\sin(\theta) = \cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta) = e^{-\mathrm{i}\theta}.$$

\- Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\theta'} = \big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)\big(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta')\big)$$
$$= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}\big(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')\big).$$

En utilisant les formules trigonométriques, $\quad e^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\theta'} = \cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta') = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}.$

- En particulier pour θ fixé et $\theta' = -\theta$, on trouve $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^0 = 1$. Cela implique $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$. Finalement, pour tous réels θ, θ' fixés, on a

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i\theta}e^{-i\theta'} = e^{i(\theta-\theta')}.$$

■

Exercice 6

✦ Donner la forme exponentielle des nombres suivants :

$$-3, \quad 1/(1-i), \quad 2\sqrt{3}-2i, \quad i^{42}\frac{(2-2i)^2}{(\sqrt{3}+i)^8}, \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}.$$

PROPOSITION — **Formules d'Euler**

Pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Preuve. Pour rappel, si $z \in \mathbb{C}$, alors

$$\Re e(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \Im m(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos(\theta) = \Re e\left(e^{i\theta}\right) = \frac{e^{i\theta}+\overline{e^{i\theta}}}{2} = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}.$$

De même,
$$\sin(\theta) = \Im m\left(e^{i\theta}\right) = \frac{e^{i\theta}-\overline{e^{i\theta}}}{2i} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

■

La notation complexe permet de *retrouver* rapidement les formules trigonométriques sur $\cos(a \pm b)$ et $\sin(a \pm b)$. Pour la première, on écrit :

$$\begin{aligned}
\cos(a+b)+i\sin(a+b) &= e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} \\
&= \big(\cos(a)+i\sin(a)\big)\big(\cos(b)+i\sin(b)\big) \\
\cos(a+b)+i\sin(a+b) &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)+i(\underbrace{\cdots\cdots}_{\in\mathbb{R}}).
\end{aligned}$$

Par unicité de la partie réelle, $\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b).}$ ♣

De même, par unicité de la partie imaginaire, $\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b).}$ ♣

Ces relations étant vraies pour tout $b \in \mathbb{R}$, on en déduit directement

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b).}$$ ♣

Méthode

Les formules d'Euler et l'arc-moitié.

Lorsqu'on dispose, dans une somme ou un produit, d'une expression du type $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$, on peut essayer de factoriser par $e^{i(\theta+\theta')/2}$ et d'utiliser les formules d'Euler. Précisons par l'exemple.

Méthode

- *Exemple 1.* Calculons le module de $1+e^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

On a $$1+e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\theta/2}\left(e^{-\mathrm{i}\theta/2}+e^{\mathrm{i}\theta/2}\right) = 2\cos(\theta/2)e^{\mathrm{i}\theta/2}.$$

On en déduit le module : $$\left|1+e^{\mathrm{i}\theta}\right| = |2\cos(\theta/2)|\cdot\left|e^{\mathrm{i}\theta/2}\right| = 2|\cos(\theta/2)|.$$

- *Exemple 2.* Soient p, q deux réels. On a

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}p}+e^{\mathrm{i}q} &= e^{\mathrm{i}(p+q)/2}\left(e^{\mathrm{i}(p-q)/2}+e^{-\mathrm{i}(p-q)/2}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)e^{\mathrm{i}(p+q)/2} \\ &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Par unicité de la partie imaginaire et réelle, on trouve :

$$\sin(p)+\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right), \quad \cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).$$

Exercice 7

Exemples. *Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.*

1. Soient θ, φ deux réels. Calculer le module de $e^{2\mathrm{i}\theta}-e^{2\mathrm{i}\varphi}$.
2. ✦ Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{2\mathrm{i}\pi k/n}$. Justifier que $(1+\omega)^n \in \mathbb{R}$.
3. ✦ Soit θ un réel distinct de π modulo 2π. On pose $Z = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta/2}-e^{-\mathrm{i}\theta/2}}{e^{\mathrm{i}\theta/2}+e^{-\mathrm{i}\theta/2}}$.
   - **a)** Vérifier que $Z = \mathrm{i}\tan(\theta/2)$.
   - **b)** En calculant $(1+Z^2)/(1-Z^2)$, prouver que $\cos(\theta) = \dfrac{1-\tan(\theta/2)^2}{1+\tan(\theta/2)^2}$.

PROPOSITION — **Formule de Moivre**

Pour tout réel θ, pour tout entier relatif n, on a :

$$\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta) = \left(\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)\right)^n.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que pour un entier n, $\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}n\theta}$. ■

Exercice 8

✦ Justifier que pour tout réel θ, $\cos(3\theta) = 4\cos(\theta)^3-3\cos(\theta)$.

2 Applications à la résolution des équations polynomiales

2.1 Résolution des équations polynomiales de degré 2

Racines carrées dans le cas complexe

Soit Z un nombre complexe, on appelle racine carrée de Z toute solution complexe z de

$$z^2 = Z.$$

⚠ **Attention.** Précisons tout de suite que contrairement au cas réel, on n'emploie pas la notation $\sqrt{\cdot}$ pour un nombre complexe. En effet, si z est racine, $-z$ est aussi racine. Il n'y a donc pas unicité. On ne peut donc pas parler de *la* racine carrée d'un nombre complexe (non nul). Dans le cas réel, on rappelle que l'on choisit la racine comme la solution positive. Mais un nombre complexe n'a pas de signe.

Il est aisé d'avoir la racine carrée d'un nombre complexe si on connaît sa forme exponentielle.
Soit $Z = R\exp(i\Theta)$, sous forme exponentielle ($R \in \mathbb{R}^+$, $\Theta \in \mathbb{R}$). On vérifie que **pour** $Z \neq 0$**, il y a exactement deux racines carrées** données par

$$z_1 = \sqrt{R}\exp(i\Theta/2) \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{R}\exp(i\Theta/2) = \sqrt{R}\exp(i\Theta/2 + i\pi).$$

Exemples. • Donnons les deux racines carrées de 2i. On a $2i = 2e^{i\pi/2}$. Les racines sont :

$$\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i \quad \text{et} \quad -\sqrt{2}e^{i\pi/4} = -1 - i.$$

• De même, les racines carrées de $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ sont *sous forme exponentielle* :

$$2^{1/4}e^{i\pi/8} \quad \text{et} \quad -2^{1/4}e^{i\pi/4} = 2^{1/4}e^{i9\pi/8}.$$

Toutefois, cette façon de procéder ne donne pas une bonne méthode pratique. En effet, à part pour des nombres complexes particuliers, il est difficile d'obtenir une expression simple de la forme exponentielle à cause de l'argument.

Méthode

Calcul des racines carrées d'un complexe sous forme algébrique.

Soit $Z = X + iY \in \mathbb{C}$ avec $X, Y \in \mathbb{R}$. On cherche les solutions complexes z de $z^2 = Z$.
On écrit la forme algébrique $z = x + iy$. Une astuce consiste à rajouter à l'équation $z^2 = Z$, l'équation sur les modules $|z|^2 = |Z|$. Ainsi

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \iff \begin{cases} (x+iy)^2 = X + iY \\ |x+iy|^2 = |X+iY| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = X + iY \\ |x+iy|^2 = |X+iY| \end{cases} \underset{\substack{\text{Unicité}\\ \text{partie réelle}\\ \text{et imaginaire}}}{\iff} \begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2}. \end{cases}$$

Dès lors, on en déduit x^2 et y^2. Pour en déduire le signe, on utilise la seconde relation. Notons qu'on obtient pour $Z \neq 0$, exactement deux solutions.
• Donnons un exemple, avec $Z = 1 + i$.

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ xy \geqslant 0 \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}. \end{cases}$$

Ainsi x et y sont de même signe, on trouve les racines carrées *sous forme algébrique* :

$$z = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

Exercice 9

✦ *Calculs de racines carrées.*

1. **a)** Donner les formes algébriques des racines carrées de $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$.

b) Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ à l'aide de racines carrées.

2. Donner les formes algébriques des racines carrées des nombres complexes suivants :

$$-4,\quad 16e^{\frac{4\pi \mathrm{i}}{3}}\quad \text{et}\quad 3+4\mathrm{i},\quad 3-4\mathrm{i},\quad 24-10\mathrm{i}.$$

Le discriminant d'une équation polynomiale de degré 2

On cherche maintenant à résoudre les équations polynomiales de degré 2, c'est-à-dire on cherche les solutions complexes z de l'équation :

$$az^2+bz+c=0 \quad \text{avec} \quad a,b,c\in\mathbb{C},\quad a\neq 0.$$

La méthode de résolution suit la méthode déjà vue les années précédentes : on écrit la forme canonique

$$az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{1}{4}(b^2-4ac)\right].$$

Si on pose $\Delta=b^2-4ac$, **le discriminant**, on trouve :

$$az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4}\right].$$

D'après l'étude précédente, le discriminant admet au moins une racine carrée. Il existe donc $\delta\in\mathbb{C}$ tel que $\delta^2=\Delta$:

$$az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right]=\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2}\right).$$

En définitive, on retiendra que si δ est *une* racine carrée du discriminant Δ :

$$\boxed{az^2+bz+c=0 \iff z=\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z=\frac{-b+\delta}{2a}.}$$

Exercice 10

✦ Trouver les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$z^2-(1+2\mathrm{i})z-1+\mathrm{i}=0 \quad \text{et} \quad z^2-(5\mathrm{i}+14)z+2(5\mathrm{i}+12)=0.$$

Exercice 11

✦✦ *Le cas bicarré.*
Trouver les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4+(3-6\mathrm{i})z^2-8-6\mathrm{i}=0$.

2.2 Théorème de D'Alembert-Gauss

On appelle équation polynomiale de degré $n\in\mathbb{N}$ toute équation de la forme

$$a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0 \quad \text{avec} \quad a_n\neq 0.$$

Les solutions z sont les **racines**.

THÉORÈME **Majoration du nombre de racines**

Toute équation polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n solutions.

Idée de la preuve. Considérons l'équation polynomiale $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0$ de degré n. Soit z_0 une solution.

La preuve est une conséquence de la formule :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad z^k - z_0^k = (z - z_0)\left(\sum_{p=0}^{k-1} z^p z_0^{k-1-p}\right).$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k z^k &= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(z^k - z_0^k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k (z - z_0)\left(\sum_{p=0}^{k-1} z^p z_0^{k-1-p}\right) = (z - z_0)\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k-1} a_k z^p z_0^{k-1-p}\right).\end{aligned}$$

Dit autrement, il existe n complexes $b_0, b_1, \cdots b_{n-1}$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = (z - z_0)\left(\sum_{p=0}^{n-1} b_p z^p\right).$$

Par conséquent, on constate que si z_0 est une solution d'une équation polynomiale de degré n, alors on peut factoriser l'expression par $(z - z_0)$. Si z_1 est une seconde solution distinctes de z_0, alors z_1 est solution d'une équation polynomiale de degré $n-1$.

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_k {z_1}^k = \underbrace{(z_1 - z_0)}_{\neq 0}\left(\sum_{p=0}^{n-1} b_p {z_1}^p\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{p=0}^{n-1} b_p {z_1}^p = 0.$$

Par récurrence, on montre qu'il ne peut avoir plus de n solutions. ■

Nous pouvons maintenant conclure sur le théorème important du chapitre. Ce théorème justifie à lui seul l'emploi des nombres complexes.

THÉORÈME **de D'Alembert-Gauss**

Toute équation polynomiale complexe de degré $n \in \mathbb{N}^*$ admet au moins une solution.

— *Preuve admise* —

Remarque. Nous verrons plus tard que les équations polynomiales de degré n admettent, en un certain sens, exactement n solutions complexes.

2.3 Application : les racines n-ièmes de l'unité

DÉFINITION **Racines n-ièmes de l'unité**

Pour tout entier n non nul, on appelle ***racine n-ième de l'unité*** *toute solution complexe z de l'équation $z^n = 1$.*

Exemples. ± 1 sont les racines 2-ièmes de l'unité, i est une racine 4-ième de l'unité. Le nombre

$$j = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

est une racine cubique de l'unité.

PROPOSITION **Expression des racines n-ièmes**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité, données par

$$\omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}} \quad \text{où} \quad k \in [\![0; n-1]\!].$$

Plus généralement, il existe pour tout complexe α non nul, exactement n solutions à l'équation

$$z^n = \alpha.$$

Exercice 12

✦✦ Détaillons la preuve de cette proposition.

1. Soit ω une solution de $z^n = 1$. On pose $\omega = re^{i\theta}$ sous forme exponentielle.
   - **a)** Justifier que $r = 1$ et l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = 2\pi k/n\,[2\pi]$.
   - **b)** Démontrer qu'il y a au plus n solutions.
   - **c)** Vérifier que ω_k est solution.
2. Soit $\alpha = ae^{i\rho}$, sous forme exponentielle.
   - **a)** Justifier que $\beta = \sqrt[n]{a}e^{i\rho/n}$ est une solution de $z^n = \alpha$.
   - **b)** En déduire la preuve du second point.

Exercice 13

✧

1. Donner les racines quatrièmes de -4 (c'est-à-dire les solutions de $z^4 = -4$).
   On précisera les formes trigonométriques et algébriques.
2. Donner les solutions de $(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0$ sous forme algébrique.

La quadrature du cercle **Le saviez-vous**

Peut-on construire un carré de même aire qu'un disque donné à l'aide d'une règle et d'un compas ?

On montre que c'est équivalent à : en partant d'un segment d'une unité, peut-on construire un segment de longueur π en utilisant seulement une règle (non graduée) et un compas ?
Ce problème est un des problèmes mathématiques les plus anciens, il a résisté trois millénaires !
La réponse en trois actes :

I. En 1844, Joseph Liouville démontre qu'il existe des nombres qui ne sont solutions d'aucune équation polynomiale dont les coefficients sont entiers.

$$\text{Il existe} \qquad z \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad a_p z^p + a^{p-1} z^{p-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \neq 0 \quad \text{avec} \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

On dit que le nombre est transcendant. 3, $\sqrt{2}$, i ne sont pas transcendants. Ils sont solutions de

$$z - 3 = 0, \qquad z^2 - 2 = 0 \quad \text{et} \quad z^2 + 1 = 0.$$

Par contre, on démontre que $e = \exp(1)$ l'est.

II. On « algébrise » le problème, c'est-à-dire, on réduit le problème de type géométrique à un problème de calcul algébrique. On prouve que la quadrature du cercle est possible si et seulement si π est une solution d'une équation polynomiale se ramenant à une succession d'équations polynomiales du second degré à coefficients entiers. Il faut donc que π ne soit pas transcendant.

III. Ferdinand von Lindemann conclut en 1882. Il démontre que si a, b sont des entiers et z_1, z_2 sont des nombres non transcendants, alors

$$ae^{z_1} + be^{z_2} \neq 0.$$

Or, π vérifie : $$e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0.$$

Nécessairement, π est transcendent. Finalement :

La quadrature du cercle est impossible !

Ce problème a donné naissance à l'expression « chercher la quadrature du cercle », lorsqu'on tente de résoudre un problème insoluble.

Exercices

Exercice 14. ✦ Trouver tous les couples (a, b) de nombres complexes tels que :

$$a+b=4+2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad ab=2+4\mathrm{i}.$$

Exercice 15. ✦ Trouver tous les nombres complexes z tels que z, $1/z$ et $1-z$ soient de même module.

Exercice 16. **Équations**. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $2z+3\overline{z}=5-2\mathrm{i}$ et $z^2+|z|^2=18+6\mathrm{i}$. ✦
2. $z^n=\overline{z}$, où $n\in\mathbb{N}^*$. ✦✦
3. $(z+\mathrm{i})^{2n}-(z-\mathrm{i})^{2n}=0$. ✦✦✦

Indication. Pour le troisième point, on utilisera les résultats sur les racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 17. ✦ Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.
Montrer que $\dfrac{1+\overline{z}}{1-z}\in\mathbb{R}$ si et seulement si z est un réel ou un imaginaire pur.

Exercice 18. ✦✦ **Linéarisation.**

1. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Exprimer $\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3$ en fonction de $\sin(\theta)$, $\sin(3\theta)$ et $\sin(5\theta)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(t)^2\sin(t)^3\,\mathrm{d}t$.

Exercice 19. ✦ Déterminons les solutions complexes z de

$$z^4-5z^3+6z^2-5z+1=0 \qquad (\bullet).$$

1. Justifier que z est solution de $(\bullet)$ si et seulement si z est solution de

$$z^2+\frac{1}{z^2}-5z-5\frac{1}{z}+6=0 \qquad (\bullet\bullet).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\quad z^2-z+1=0$ et $z^2-4z+1=0$.
3. En posant $Z=z+\dfrac{1}{z}$, en déduire l'ensemble des solutions de $(\bullet)$.
4. Comparer la somme et le produit des solutions de $(\bullet)$ avec les coefficients de l'équation polynomiale $(\bullet)$.

Indications et solutions

Solution 1, **page 2.**

- On a :

$$\frac{i^4+2i^3+5i^2+2i+6}{i}=\frac{1-2i-5+2i+6}{i}=-2i.$$

- $$(1+2i)^2=\boxed{-3+4i.}$$

- En utilisant le développement de $(a+b)^3$ (ou en écrivant $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)$), on trouve :

$$\begin{aligned}(1+i)^3 &= 1^3+3\cdot1\cdot i^2+3\cdot1^2\cdot i+i^3\\ &= 1-3+3i-i=\boxed{-2+2i.}\end{aligned}$$

- En utilisant l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{8-6i}{7+i} &= \frac{(8-6i)(7-i)}{(7+i)(7-i)}=\frac{56-8i-42i-6}{49+1}\\ &= \boxed{1-i.}\end{aligned}$$

- Sachant que $i^4=1$ et $77=19\times4+1$,

$$i^{77}=i\cdot\left(i^4\right)^{19}=i\cdot1^{19}=i.$$

Puis, $$\boxed{i^{-77}=1/i=-i.}$$

- $$\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1+i.$$

Or, $(1+i)^2=2i$,

$$\left(\frac{2i}{1+i}\right)^4=(1+i)^4=\left((1+i)^2\right)^2=\boxed{-4.}$$

- Dans un premier temps,

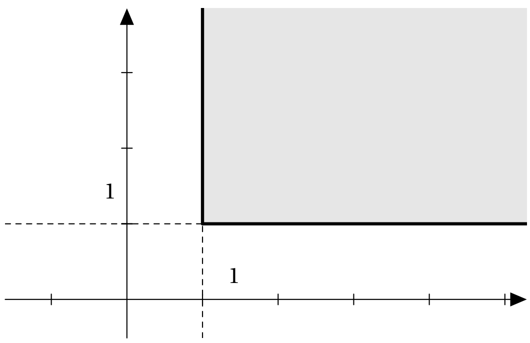
$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i.$$

De plus, $777!=1\times2\times3\times\mathbf{4}\times\cdots\times777=4p$ où $p\in\mathbb{N}$. Par conséquent,

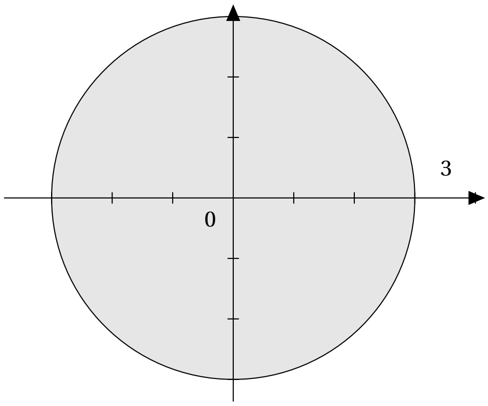
$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{777!}=i^{777!}=(i^4)^p=1^p=\boxed{1.}$$

Solution 2 **page 3.**

1.(a) On a un quart de plan (avec le bord).



1.(b) On a un disque fermé (le cercle et son intérieur) de centre l'origine et de rayon 3.



1.(c) On a un disque ouvert (l'intérieur du cercle sans le bord) de centre $A(1,-1)$ et de rayon 1.
En effet, si on note z l'affixe de M et z_A l'affixe de A.

$$|z-1+i|<1 \iff |z-z_A|<1.$$

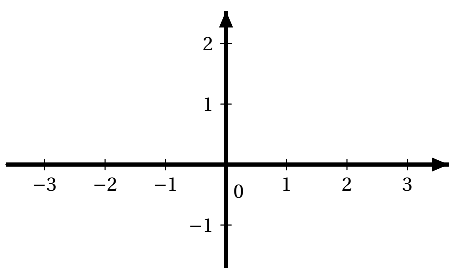
Dit autrement, la distance AM est strictement inférieure à 1.

1.(d) Soit $z=x+iy$ sous forme algébrique.

$$z^2=(x+iy)^2=\underbrace{(x^2-y^2)}_{\in\mathbb{R}}+i\underbrace{(2xy)}_{\in\mathbb{R}}.$$

Ainsi, $\Re e(z^2)=x^2-y^2$ et $\Im m(z^2)=2xy$.

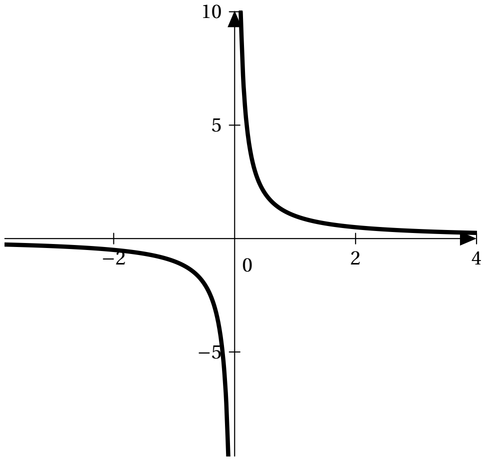
Par conséquent, la condition $\Im m(z^2)=0$ équivaut à $xy=0$. C'est-à-dire, $x=0$ ou $y=0$. Graphiquement, ce sont les deux axes principaux du plan complexe.



1.(e) D'après ce qui précède :

$$\Im m(z^2)=2 \iff xy=1.$$

Comme x ne peut être nul, c'est équivalent à $y=1/x$. Graphiquement, on a une hyperbole :



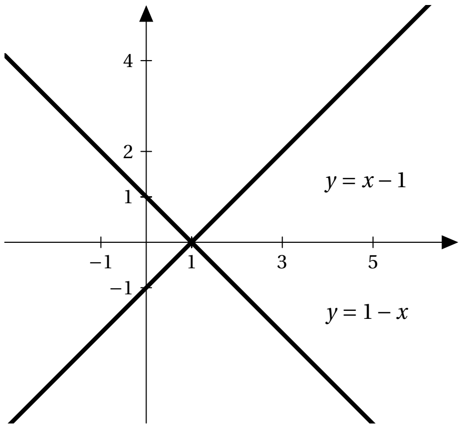
1.(f) En reprenant le calcul de la question 1.d, si $z = x + iy$ est sous forme algébrique

$$\Re e\big((z-1)^2\big) = (x-1)^2 - y^2.$$

Ainsi la condition devient :

$$(x-1)^2 = y^2 \iff y = x-1 \text{ ou } y = -(x-1).$$

Graphiquement, on a deux droites.



2.• Soit $z \in \mathbb{C}$.
Exprimons α et z sous forme algébrique : $\alpha = a + ib$ et $z = x + iy$ de sorte que :

$$|z-\overline{\alpha}|^2 = (x-a)^2 + (y+b)^2,$$

et, $$|z-\alpha| = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

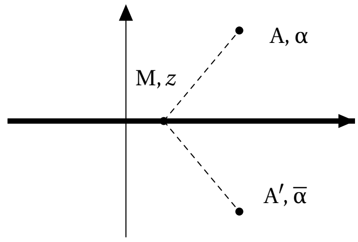
Comme les modules sont des réels positifs :

$$|z-\overline{\alpha}| = |z-\alpha| \iff |z-\overline{\alpha}|^2 = |z-\alpha|^2 \iff$$
$$(y-b)^2 = (y+b)^2 \iff 0 = (y+b)^2 - (y-b)^2$$
$$\iff 2y \cdot 2b = 0.$$

Comme α n'est pas réel, $b \neq 0$. Finalement,

$$\begin{aligned} |z-\overline{\alpha}| = |z-\alpha| &\iff y = 0 \\ &\iff \boxed{z \text{ est un réel.}} \end{aligned}$$

• Graphiquement, si A et M sont les deux points du plan d'affixe α et z. Notons A′, le symétrique de A par rapport à l'axe (Ox). A′ a pour affixe $\overline{\alpha}$. L'égalité des modules ($|z-\overline{\alpha}| = |z-\alpha|$) traduit l'égalité des distances A′M = AM. Dit autrement, M est sur la médiatrice du segment [AA′]. Or, cette dernière est justement l'axe des réels.



Solution 3 **page 4.**

Soient z_1, z_2 deux nombres complexes.

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2}. \end{aligned}$$

Il vient $$|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2.$$

De même $$|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2.$$

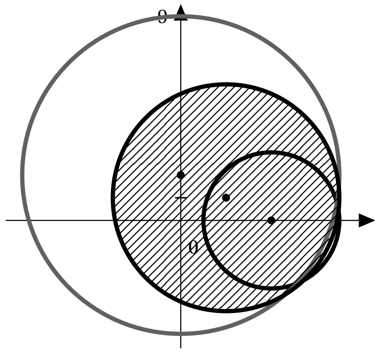
La somme donne

$$\boxed{|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.}$$

Solution 4, **page 4.**

1. On a pour un tel complexe z :

$$\begin{aligned} |z-(2+i)| &= \frac{1}{2}|z-4+z-2i| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|z-4| + \frac{1}{2}|z-2i| \\ |z-(2+i)| &\leqslant \frac{1}{2}(3+7) = 5. \end{aligned}$$



Graphiquement, si M le point d'affixe z se situe à l'intérieur des disques de centre respectif (4, 0), (0, 2) et de rayon 3, 7, alors M se situe dans le disque de centre (2, 1) et de rayon 5.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Passons par la forme canonique :

$$z(1-z) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \big(z - \frac{1}{2}\big)^2.$$

Par *l'inégalité triangulaire* :

$$\begin{array}{rcl} \left|z(1-z)-1/2\right| & = & \left|-\frac{1}{4}-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\right| \\ & \leqslant & \left|\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\right|+\frac{1}{4} \\ & \leqslant & \left|z-\frac{1}{2}\right|^2+\frac{1}{4} \\ \left|z(1-z)-1/2\right| & \leqslant & \left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}. \end{array}$$

3. Pour justifier cette inégalité, on utilise *l'inégalité triangulaire*. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rrcl} & |z_1| & = & \left|(z_1-z_2)+z_2\right| \\ & & \leqslant & |z_1-z_2|+|z_2| \\ \Rightarrow & |z_1|-|z_2| & \leqslant & |z_1-z_2|. \end{array}$$

De plus, z_1 et z_2 ont un rôle symétrique

$$|z_2|-|z_1| \leqslant |z_2-z_1| = |z_1-z_2|.$$

En résumé, $\boxed{\left||z_1|-|z_2|\right| \leqslant |z_1-z_2|.}$

Solution 5, **page 6.**

Le passage $e^{\frac{1}{2}\cdot 2i\pi} = \left(e^{2i\pi}\right)^{1/2}$ est faux. En effet, si z est un nombre complexe, $z^{1/2}$ n'est pas défini. Il y a deux explications :

• $z^{1/2}$ peut signifier $\sqrt{z}$. Or, on ne peut pas parler de *la* racine carrée d'un nombre complexe. Pour rappel, si x est un réel positif, $\sqrt{x}$ est *le réel positif* dont le carré vaut x.

• Par définition de la puissance

$$x^{\alpha} = \exp\left(\alpha \ln(x)\right).$$

Cette définition n'a de sens que pour x un réel strictement positif. $\ln(z)$ n'est pas défini lorsque z est complexe.

Solution 6, **page 7.**

• $$\boxed{-3 = 3\,e^{i\pi}.}$$

N'oublier pas que le module est toujours un nombre positif.

• Comme $1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$, on a

$$\boxed{\frac{1}{1-i} = \frac{1}{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}.}$$

• À l'aide du cercle trigonométrique :

$$2\sqrt{3}-2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \boxed{4e^{-i\pi/6}.}$$

• On a $i^{42} = i^2\cdot(i^4)^{10} = -1 = e^{i\pi}$, et

$$2-2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

puis, $$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\pi/6}.$$

Finalement, par produit et quotient :

$$i^{42}\frac{(2-2i)^2}{(\sqrt{3}+i)^8} = e^{i\pi}\cdot\frac{2^3 e^{-i\pi/2}}{2^8 e^{i8\pi/6}} = \boxed{\frac{1}{32}e^{-i5\pi/6}.}$$

• De même, on exprime sous forme exponentielle chacun des facteurs :

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\pi/3},$$

et, $$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

D'où, $$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i7\pi/12}.$$

Conclusion : $$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12} = \boxed{64e^{i\pi}.}$$

Solution 7, **page 8.**

1. Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. D'après *les formules d'Euler,*

$$\begin{array}{rcl} e^{2i\theta}-e^{2i\varphi} & = & e^{i(\theta+\varphi)}\left(e^{i(\theta-\varphi)}-e^{-i(\theta-\varphi)}\right) \\ & = & e^{i(\theta+\varphi)}\cdot 2i\sin(\theta-\varphi). \end{array}$$

Par conséquent,

$$\left|e^{2i\theta}-e^{2i\varphi}\right| = \left|e^{i(\theta+\varphi)}\right|\cdot 2|i|\cdot\left|\sin(\theta-\varphi)\right|.$$

C'est-à-dire : $\boxed{\left|e^{2i\theta}-e^{2i\varphi}\right| = 2\left|\sin(\theta-\varphi)\right|.}$

2. On a

$$\begin{array}{rcl} 1+\omega & = & 1+e^{2i\pi k/n} \\ & = & e^{i\pi k/n}\left(e^{-i\pi k/n}+e^{i\pi k/n}\right) \\ & = & e^{i\pi k/n}\cdot 2\cos(k\pi/n). \end{array}$$

Puis,

$$\begin{array}{rcl} (1+\omega)^n & = & e^{i\pi k}\left(2\cos(k\pi/n)\right)^n \\ & = & (-1)^k\left(2\cos(k\pi/n)\right)^n \in \mathbb{R}. \end{array}$$

3.(a) Par *les formules d'Euler* :

$$e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2} = 2i\sin(\theta/2),$$

et, $$e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2} = 2\cos(\theta/2).$$

D'où $$\boxed{Z = i\tan(\theta/2).}$$

3.(b) On a

$$Z^2 = \frac{\left(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}\right)^2}{\left(e^{i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right)^2} = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}+2}.$$

Puis,

$$\begin{array}{rcl} 1+Z^2 & = & 1+\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}-2}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}+2} \\ & = & \frac{2\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}+2} \\ 1+Z^2 & = & \frac{4\cos(\theta)}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}+2}. \end{array}$$

De même, $$1-Z^2 = \frac{4}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}+2}.$$

Par quotient, il vient : $$\frac{1+Z^2}{1-Z^2}=\cos(\theta).$$

On conclut à l'aide de la question 3.(a),

$$Z^2=-\tan(\theta/2)^2,$$

$$\boxed{\cos(\theta)=\frac{1-\tan(\theta/2)^2}{1+\tan(\theta/2)^2}.}$$

Solution 8, page 8.

Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Par *la formule de Moivre,*

$$\begin{array}{rl} & \cos(3\theta)+i\sin(3\theta)\\ = & \big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big)^3\\ = & \cos(\theta)^3+3\cos(\theta)\big(i\sin(\theta)\big)^2\\ & \quad +3i\sin(\theta)\cos(\theta)^2+\big(i\sin(\theta)\big)^3\\ = & \cos(\theta)^3-3\cos(\theta)\sin(\theta)^2\\ & \quad +3i\sin(\theta)\cos(\theta)^2-i\sin(\theta)^3\\ = & \cos(\theta)^3-3\cos(\theta)\sin(\theta)^2\\ & \quad +i\big(3\sin(\theta)\cos(\theta)^2-\sin(\theta)^3\big). \end{array}$$

Par unicité de la partie réelle,

$$\cos(3\theta)=\cos(\theta)^3-3\cos(\theta)\sin(\theta)^2.$$

Puis par *la relation de Pythagore,*

$$\begin{array}{rcl} \cos(3\theta) & = & \cos(\theta)^3-3\cos(\theta)\big(1-\cos(\theta)^2\big)\\ & = & \boxed{4\cos(\theta)^3-3\cos(\theta).} \end{array}$$

Solution 9, page 10.

1.(a) Reprenons la méthode. Posons $Z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$.
Soit $z=x+iy$ un nombre complexe sous forme algébrique.

$$z^2=Z \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2 & = & \sqrt{3}/2\\ 2xy & = & 1/2\\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & (2+\sqrt{3})/4\\ xy & \geqslant & 0\\ y^2 & = & (2-\sqrt{3})/4. \end{array}\right.$$

x et y sont de même signe. Les racines carrées sont

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},\\ z_2=-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}. \end{array}}$$

1.(b) Posons

$$Z_0=e^{i\pi/12}=\cos\Big(\frac{\pi}{12}\Big)+i\sin\Big(\frac{\pi}{12}\Big).$$

On constate que $${Z_0}^2=e^{i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

Z_0 est une racine carrée de $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$. Comme il y a uniquement deux racines carrées données par z_1 et z_2,

$$Z_0=z_1 \quad \text{ou} \quad Z_0=z_2.$$

Or, à l'aide du cercle trigonométrique, on sait que

$$\cos\Big(\frac{\pi}{12}\Big)>0 \quad \text{et} \quad \sin\Big(\frac{\pi}{12}\Big)>0.$$

Nécessairement, $Z_0=z_1$. En identifiant partie réelle et imaginaire, il vient :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\Big(\dfrac{\pi}{12}\Big)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\\ \sin\Big(\dfrac{\pi}{12}\Big)=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}. \end{array}}$$

2. • Les racines carrées de -4 sont

$$\boxed{2i \quad \text{et} \quad -2i.}$$

• Les racines carrées de $16e^{4\pi i/3}$ sont, sous forme exponentielle :

$$4e^{2\pi i/3} \quad \text{et} \quad -4e^{2\pi i/3}=4e^{2\pi i/3+\pi}.$$

Sous forme algébrique :

$$\boxed{-2+2\sqrt{3}i \quad \text{et} \quad 2-2\sqrt{3}i.}$$

• En reprenant la méthode, les racines carrées de $3+4i$ sont

$$\boxed{2+i \quad \text{et} \quad -2-i.}$$

• Soit $z\in\mathbb{C}$. Utilisons le résultat précédent :

$$z^2=3-4i \iff \bar{z}^2=3+4i.$$

D'après ce qui précède, $\bar{z}=\pm(2+i)$. Les racines carrées de $3-4i$ sont

$$\boxed{2-i \quad \text{et} \quad -2+i.}$$

• De même, on montre que les racines carrées de $24-10i$ sont

$$\boxed{5-i \quad \text{et} \quad -5+i.}$$

Solution 10, page 10.

• On a une équation polynomiale de degré 2. Le discriminant est $\Delta=1$. Les solutions s'en déduisent :

$$\boxed{z_1=i \quad \text{et} \quad z_2=1+i.}$$

• On a une équation polynomiale de degré 2. Le discriminant est

$$\Delta=25(3+4i)=5^2(3+4i).$$

En reprenant le résultat de l'exercice précédent (ex. 9), *une* racine de $3+4i$ est $2+i$.
Une racine carrée du discriminant est donc :

$$\delta=5(2+i)=10+5i.$$

Les solutions s'en déduisent :

$$\boxed{z_1=2 \quad \text{et} \quad z_2=12+5i.}$$

Solution 11, page 10.

Soit $z\in\mathbb{C}$. Posons $Z=z^2$ de sorte que :

$$\begin{array}{rrcl} & z^4+(3-6i)z^2-8-6i & = & 0\\ \iff & Z^2+(3-6i)Z-8-6i & = & 0. \end{array}$$

Z est solution d'une équation polynomiale de degré 2. Le discriminant de cette dernière est

$$\Delta = 5 - 12\mathrm{i}.$$

En reprenant la méthode de recherche des racines carrées,

$$\delta = 3 - 2\mathrm{i}$$

est une racine de Δ (noter que $\sqrt{169} = 13$). Les solutions de l'équation polynomiale de degré 2 s'en déduisent :

$$Z_1 = -3 + 4\mathrm{i} \quad \text{et} \quad Z_2 = 2\mathrm{i}.$$

La recherche de racines carrées (voir exercice 9) de Z_1 et Z_2 donnent quatre solutions :

$$\boxed{\begin{array}{cc} z_1 = 2\mathrm{i}+1, & z_2 = -2\mathrm{i}+1, \\ z_3 = 1+\mathrm{i}, & z_4 = -1-\mathrm{i}. \end{array}}$$

Solution 12, **page 12.**

1.(a) Soit $\omega = re^{\mathrm{i}\theta}$ une solution sous forme exponentielle ($r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$). Par les propriétés du module $r^n = |z^n| = 1$. Comme r est un réel positif, seul $\boxed{r = 1}$ est possible. Il vient $e^{\mathrm{i}n\theta} = 1$. On doit imposer $n\theta = 0\,[2\pi]$. Dit autrement, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\boxed{\theta = 2\pi k/n.}$

1.(b) Soient $k, k' \in \mathbb{Z}$, notons que si $k' = k + np$ avec $p \in \mathbb{Z}$, on constate que

$$e^{2k'\mathrm{i}\pi/n} = e^{2k\mathrm{i}\pi/n + 2\mathrm{i}p\pi} = e^{2k\mathrm{i}\pi/n}.$$

Résumons, si ω est une solution alors on peut trouver $k \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $\omega = e^{2\pi\mathrm{i}k/n}$. Il y a au plus n solutions.

1.(c) Réciproquement, si il existe $k \in [\![0; n-1]\!]$ tel que $\omega = e^{2\pi\mathrm{i}k/n}$, alors :

$$\omega^n = e^{2\pi k\mathrm{i}} = 1.$$

Ce qui prouve le premier point.

2.(a) Pour le second point, on écrit α sous forme exponentielle $ae^{\mathrm{i}\rho}$. Comme a est un réel positif, on peut considérer $\sqrt[n]{a}$. Ainsi $\beta = \sqrt[n]{a}e^{\mathrm{i}\rho/n}$ est une solution à $z^n = \alpha$.

2.(b) Comme α est non-nul, β aussi. On constate alors que z/β est une racine n-ième de l'unité. En effet,

$$\left(\frac{z}{\beta}\right)^n = \frac{z^n}{\beta^n} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1.$$

Il y a, au final, exactement n solutions données par $\beta\omega_k$ avec $k \in [\![0; n-1]\!]$.

Solution 13, **page 12.**

1. Soit $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ sous forme exponentielle.

$$z^4 = -4 \iff r^4 e^{4\mathrm{i}\theta} = 4e^{\mathrm{i}\pi} \iff$$

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} r^4 & = & 4 \\ 4\theta & = & \pi + 2k\pi \end{array}\right. .$$

Comme $r \geqslant 0$, c'est équivalent à

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad \left\{\begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{2} \\ \theta & = & \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Comme un argument est défini modulo 2π, on peut se limiter à $k \in [\![0; 3]\!]$.
Il y a bien quatre solutions données par :

$$\boxed{\begin{array}{lclcl} z_1 & = & \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\pi/4} & = & 1+\mathrm{i}, \\ z_2 & = & \sqrt{2}\,e^{3\mathrm{i}\pi/4} & = & -1+\mathrm{i}, \\ z_3 & = & \sqrt{2}\,e^{5\mathrm{i}\pi/4} & = & -1-\mathrm{i}, \\ z_4 & = & \sqrt{2}\,e^{7\mathrm{i}\pi/4} & = & 1-\mathrm{i}. \end{array}}$$

2. Notons que $z = 1$ n'est pas solution.
Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 1$.

$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0 \iff (z+1)^4 = -4(z-1)^4$$

$$\iff \frac{(z+1)^4}{(z-1)^4} = -4 \iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4 = -4.$$

D'après ce qui précède $\dfrac{z+1}{z-1}$ est une racine quatrième de -4.
Il existe $i \in [\![1; 4]\!]$ tel que

$$\frac{z+1}{z-1} = z_i \iff z + 1 = z_i(z-1)$$

$$\iff 1 + z_i = z(z_i - 1) \iff z = \frac{z_i+1}{z_i-1}.$$

En remplaçant par les valeurs, on trouve quatre solutions :

$$\boxed{1-2\mathrm{i}, \quad 1+2\mathrm{i}, \quad \frac{1-2\mathrm{i}}{5}, \quad \frac{1+2\mathrm{i}}{5}.}$$

On peut tester la cohérence de ce résultat en remarquant que z est solution si et seulement si $\bar{z}$ est solution.

Solution 14.

a et b sont solutions de

$$0 = (z-a)(z-b) \iff$$

$$0 = z^2 - (a+b)z + ab = z^2 - (4+2\mathrm{i})z + 2 + 4\mathrm{i}.$$

Le discriminant de cette équation polynomiale de degré 2 est : $\Delta = 4$. Il y a deux couples (a, b) solution du problème :

$$\boxed{(1+\mathrm{i}, 3+\mathrm{i}), \quad (3+\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}).}$$

Solution 15.

- Soit z un nombre complexe non nul. On suppose que

$$|z| = 1/|z| = |1-z|.$$

En particulier, $|z|^2 = 1$, z est de module 1. Il s'écrit sous la forme $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$. Dans ce cas, *les formules d'Euler* donnent

$$\begin{array}{lcl} 1-z & = & 1 - e^{\mathrm{i}\theta} \\ & = & e^{-\mathrm{i}\theta/2}\left(e^{\mathrm{i}\theta/2} - e^{-\mathrm{i}\theta/2}\right) \\ 1-z & = & e^{-\mathrm{i}\theta/2}\,2\mathrm{i}\sin(\theta/2). \end{array}$$

On en déduit, $|1-z| = 2|\sin(\theta/2)| = 1$. Il y a donc deux cas :

$$\sin(\theta/2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta/2) = -\frac{1}{2}.$$

Comme $\theta/2 \in [0;\pi[$, le second cas

$$\sin(\theta/2) = -\frac{1}{2} < 0$$

est à exclure. Le premier cas équivaut à $\theta/2 = \pi/6$ ou $\theta/2 = 5\pi/6$. Ainsi, $\theta = \pi/3$ ou $\theta = 5\pi/3$
Si un tel z existe alors

$$z = e^{i\pi/3} \quad \text{ou} \quad z = e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/6}.$$

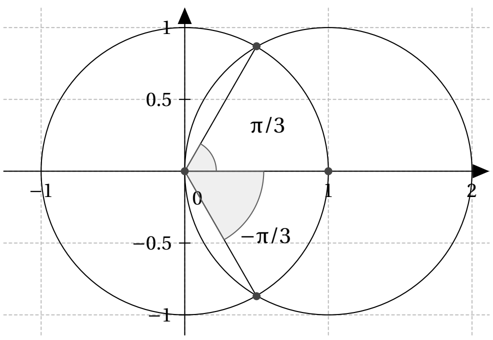
• Réciproquement, si $z = e^{i\pi/3}$ ou $z = e^{-i\pi/3}$, on a bien $|z| = 1/|z| = |1-z|$.
En conclusion, il existe deux solutions :

$$\boxed{\begin{array}{lll} z & = & e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z & = & e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{array}}$$

On peut donner une seconde preuve plus géométrique de ce résultat.
La relation $|z| = |1/z|$ traduit le fait que z est de module 1. Ainsi, les conditions deviennent

$$|z| = 1 \quad \text{et} \quad |1-z| = 1.$$

Si on note M le point d'affixe z :
- La première égalité affirme que la distance OM (avec O l'origine du repère) est égale à 1. Le point M se situe sur le cercle de centre l'origine et de rayon 1.
- La seconde égalité affirme que la distance entre M et le point A(1,0) est 1. M se situe sur le cercle de centre A et de rayon 1.
Seuls deux points vérifient ces deux conditions.



On retrouve bien les solutions

$$\boxed{\begin{array}{lll} z & = & e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z & = & e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{array}}$$

Solution 16.

1. • Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique.

$$2z + 3\overline{z} = 2(a+ib) + 3(a-ib) = 5a - ib.$$

Par unicité de la partie réelle et imaginaire,

$$2z + 3\overline{z} = 5 - 2i \iff \left\{\begin{array}{lll} 5a & = & 5 \\ -b & = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} a & = & 1 \\ b & = & 2 \end{array}\right..$$

Il y a une unique solution :

$$\boxed{z = 1 + 2i.}$$

• Soit $z = a + ib$ sous forme algébrique.

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2iab, \quad |z|^2 = a^2 + b^2.$$

Donc : $$z^2 + |z|^2 = 2a^2 + 2iab.$$

Par unicité de la partie réelle et imaginaire,

$$z^2 + |z|^2 = 18 + 6i \iff \left\{\begin{array}{lll} 2a^2 & = & 18 \\ 2ab & = & 6 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} a & = & 3 \\ b & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{lll} a & = & -3 \\ b & = & -1 \end{array}\right..$$

Il y a deux solutions :

$$\boxed{z_1 = 3 + i \quad \text{et} \quad z_2 = -3 - i.}$$

2. • Soit $z = re^{i\theta}$ sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned} z^n = \overline{z} \quad &\Rightarrow \quad |z|^n = |\overline{z}| = |z| \\ &\Rightarrow \quad r^n = r. \end{aligned}$$

Comme r est un réel positif, $r = 0$ ou $r = 1$.
Si $r = 1$, il vient

$$e^{in\theta} = e^{-i\theta} \quad \Rightarrow \quad e^{i(n+1)\theta} = 1.$$

C'est équivalent à l'existence d'un entier k tel que

$$(n+1)\theta = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2k\pi}{n+1}.$$

Comme un argument est défini modulo 2π, on peut limiter k à $[\![0;n]\!]$. En effet, si $k' = k + p(n+1)$ avec $p \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{2k'\pi}{n+1} = \frac{2(k+p(n+1))\pi}{n+1} = 2p\pi + \frac{2k\pi}{n+1}.$$

Puis, $$e^{\frac{2k'\pi}{n+1}i} = e^{\frac{2k\pi}{n+1}i}.$$

On vient de montrer que si z est solution alors $z = 0$ ou il existe $k \in [\![0;n]\!]$ tel que $z = e^{2ik\pi/(n+1)}$.

• Réciproquement, on vérifie que ces complexes sont bien solutions.

• Il y a $n+2$ solutions :

$$\boxed{0, \ e^{2ik\pi/(n+1)} \ \text{avec} \ k \in [\![0;n]\!].}$$

On trouve 0 *et les racines* $(n+1)-$*ièmes de l'unité.*

3. i n'est pas solution.
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Posons $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$.

$$(z+i)^{2n} - (z-i)^{2n} = 0 \iff (z+i)^{2n} = (z-i)^{2n}$$

$$\iff \frac{(z+i)^{2n}}{(z-i)^{2n}} = 1 \iff Z^{2n} = 1.$$

D'après les résultats sur les racines n-ièmes de l'unité (page 12), c'est équivalent à $k \in [\![0;2n-1]\!]$,

$$Z = e^{i2k\pi/(2n)} = e^{ik\pi/n}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{z+i}{z-i} = e^{ik\pi/n} &\iff z+i = e^{ik\pi/n}(z-i)\\
&\iff z\left(1-e^{ik\pi/n}\right) = -i\left(1+e^{ik\pi/n}\right)\\
&\iff \quad z = -i\frac{1+e^{ik\pi/n}}{1-e^{ik\pi/n}}\\
&\iff z = -i\frac{e^{ik\pi/(2n)}\left(e^{-ik\pi/(2n)}+e^{ik\pi/(2n)}\right)}{e^{ik\pi/(2n)}\left(e^{-ik\pi/(2n)}-e^{ik\pi/(2n)}\right)}\\
&\iff z = -i\frac{2\cos\left(k\pi/(2n)\right)}{-2i\sin\left(k\pi/(2n)\right)} = \frac{1}{\tan\left(k\pi/(2n)\right)}.
\end{aligned}$$

Concluons, z est solution si et seulement si il existe $k \in [\![0;2n-1]\!]$ tel que

$$\boxed{z = \frac{1}{\tan\left(k\pi/(2n)\right)}.}$$

Solution 17.

Soit $z \in \mathbb{C}$. $$\frac{1+\bar z}{1-z} = \frac{(1+\bar z)(1-\bar z)}{(1-z)(1-\bar z)}.$$

Or, $$(1-z)(1-\bar z) = (1-z)\overline{(1-z)} = |1-z|^2 \in \mathbb{R}.$$

Et, $$(1+\bar z)(1-\bar z) = 1-\bar z^2 = \overline{1-z^2}.$$

On a donc $$\frac{1+\bar z}{1-z} = \frac{\overline{1-z^2}}{|1-z|^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1+\bar z}{1-z} \in \mathbb{R} &\iff \overline{1-z^2} \in \mathbb{R} \iff 1-z^2 \in \mathbb{R}\\
&\iff z^2 \in \mathbb{R} \iff \Im m(z^2) = 0.
\end{aligned}$$

Or, si on note $z = x+iy$ la forme algébrique de z,

$$z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(2xy)}_{\in\mathbb{R}}.$$

En particulier, $\Im m(z^2) = 2xy$. Par conséquent le quotient est réel si et seulement si $xy = 0$, c'est-à dire :
- Soit $x = 0$, et z est un imaginaire pur.
- Soit $y = 0$, et z est un nombre réel.

Solution 18.

1. On développe à l'aide *des formules d'Euler*,

$$\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$$

$$= \frac{1}{2^5 i^3}\left(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}\right)\left(e^{3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}\right)$$

$$= \frac{i}{32}\left((e^{5i\theta}-e^{-5i\theta})-(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta})-2(e^{i\theta}-e^{i\theta})\right).$$

On trouve :

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(\theta)^2\sin(\theta)^3 =\\ &-\frac{1}{16}\sin(5\theta)+\frac{1}{16}\sin(3\theta)+\frac{1}{8}\sin(\theta).\end{aligned}}$$

2. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2}\cos(t)^2\sin(t)^3\,dt\\
= \quad & -\frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\sin(5t)\,dt + \frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\sin(3t)\,dt\\
&+\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\sin(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Or, $$\int_0^{\pi/2}\sin(5t)\,dt = \frac{1}{5}\Big[\cos(5t)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5},$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin(3t)\,dt = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2}\sin(t)\,dt = 1.$$

Finalement, $$\boxed{\int_0^{\pi/2}\cos(t)^2\sin(t)^3\,dt = \frac{2}{15}.}$$

Solution 19.

1. 0 n'est pas solution. :

$$0^4-5\cdot 0^3+6\cdot 0^2-5\cdot 0+1 = 1 \neq 0.$$

Ensuite, il suffit de diviser l'égalité (•) par z^2. C'est possible puisque 0 n'est pas solution.

2.• Le discriminant de la première équation est :

$$\Delta = -3 < 0.$$

Il y a deux solutions complexes conjuguées :

$$\boxed{z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.}$$

• Le discriminant de la seconde équation est :

$$\Delta = 12 = 2^2\cdot 3 > 0.$$

Il y a deux solutions réelles :

$$\boxed{z_3 = 2+\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_4 = 2-\sqrt{3}.}$$

3. On a

$$Z^2 = (z+z^{-1})^2 = z^2+2+z^{-2}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
z^2+\frac{1}{z^2}-5z-5\frac{1}{z}+6 &=\\
\left(z^2+\frac{1}{z^2}+2\right)-5\left(z+\frac{1}{z}\right)+4 &= Z^2-5Z+4.
\end{aligned}$$

Ainsi, z est solution de (••) si et seulement si Z est solution de

$$Z^2-5Z+4 = 0.$$

Or, cette équation polynomiale a deux solutions :

$$Z = 1 \quad \text{ou} \quad Z = 4.$$

Le premier cas donne :

$$z+\frac{1}{z}=1 \iff z^2+1=z.$$

Le second cas donne :

$$z+\frac{1}{z}=4 \iff z^2+1=4z.$$

D'après ce qui précède, on obtient quatre solutions

$$\boxed{\frac{1\pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} ; 2\pm\sqrt{3}.}$$

4. La somme et le produit des quatre solutions valent respectivement

$$5 \quad \text{et} \quad 1.$$

Ces quantités se retrouvent dans l'équation :

$$z^4-\mathbf{5}z^3+6z^2-5z+\mathbf{1}=0 \qquad (\bullet).$$

C'est un fait général, si on considère une équation polynomiale de degré p dont le coefficient dominant est 1,

$$z^p+a_{p-1}z^{p-1}+\cdots+a_1z+a_0=0.$$

Alors la somme des racines vaut $-a_{p-1}$ *et le produit* $(-1)^p a_0$.