

DS 6

THÈME : COMPLÉMENTS SUR LES VARIABLES À DENSITÉ

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème I

Maximum de loi exponentielle

Toutes les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire, rappelons que :

- F_X désigne sa fonction de répartition définie par : $\forall t \in \mathbb{R}, F_X(t) = \mathbf{P}(X \leq t)$.
- X suit la loi exponentielle de paramètre $a \in]0, +\infty[$ si et seulement si sa fonction de répartition est définie par :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp(-at) & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi exponentielle de paramètre a . Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n et Z_n les deux variables aléatoires définies respectivement par :

$$Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \dots + \frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i}$$

où $\max(X_1 \dots X_n)$ désigne le maximum des valeurs de $X_1, \dots, X_n$. Pour finir, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_n(t) &= 0 & \text{si } t < 0 \\ f_n(t) &= n \exp(-t) (1 - \exp(-t))^{n-1} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

• Préliminaires.

1.  Si U suit une loi uniforme sur $]0; 1[$, reconnaître la loi de $X = -\ln(U)/a$ où $a \in \mathbb{R}_*^+$.
2.  Si V suit une loi exponentielle de paramètre 1 et $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$, donner la loi de V/λ .

• Simulation.

3. Recopier et compléter la fonction Python suivante, qui prend en argument un entier naturel non nul n , un réel strictement positif a et renvoie une réalisation de la variable Y_n .

Editeur

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd

def SimulationYn( ... ):
    u=rd.random(n)
    # crée un échantillon de n réels pris au hasard dans ]0;1[
    Yn= ...
    return ...
```

4. Adapter le programme précédent pour écrire un programme `SimulationZn` qui simule la variable Z_n .

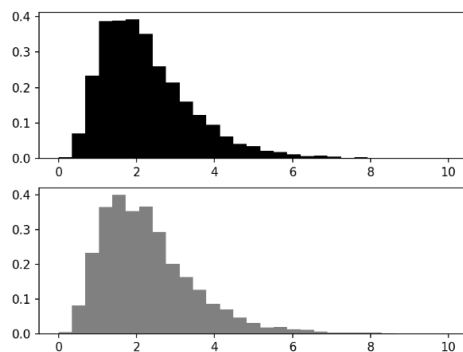
5. Expliquer le programme suivant. Que peut-on conjecturer sur les lois de Y_n et Z_n ?

Editeur

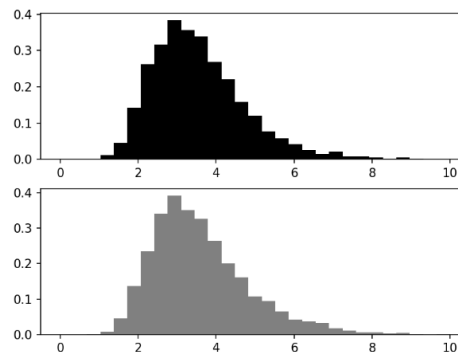
```
def testYnZn(n,a) :
    m=5000
    echY=np.zeros(m)
    echZ=np.zeros(m)
    for i in range(m):
        echY[i]=SimulationYn(n,a)
        echZ[i]=SimulationZn(n,a)

    abscisse=np.linspace(0,10,30)
    plt.subplot(211) # permet de séparer les graphes
    plt.hist(echY,bins=abscisse,density=True,color='black')
    plt.subplot(212)
    plt.hist(echZ,bins=abscisse,density=True,color='gray')
    plt.show()
```

>>> # script executed
>>> testYnZn(5,1)



>>> # script executed
>>> testYnZn(20,1)



Dans la suite, on suppose $a = 1$.

• Calcul de la loi de Y_n

6. Pour tout réel t , exprimer le réel $F_{Y_n}(t)$ à l'aide du réel $F_{X_1}(t)$.
Donner ensuite l'expression de $F_{Y_n}(t)$ en fonction de n et t en distinguant le cas $t < 0$ et le cas $t \geq 0$.
7. Vérifier alors que la fonction f_n est une densité de probabilité de la variable aléatoire Y_n .

• Calcul de la loi de Z_n

8. Vérifier que $\frac{X_{n+1}}{n+1}$ est une variable aléatoire à densité et proposer une densité d_{n+1} .
9. Pour tout réel x , vérifier que : $\int_0^x n \exp(nt)(1 - \exp(-t))^{n-1} dt = (\exp(x) - 1)^n$.
10.
 - a) Rappeler le théorème de sommation des variables aléatoires à densité.
 - b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité.
 - c) Conclure sur la conjecture de la question 5.
11. Est-ce que le résultat est encore vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$?

Problème II

Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie, deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi. Pour tout ω de Ω , on considère le polynôme Q_ω défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q_\omega(t) = t^2 + X_1(\omega)t + X_0(\omega).$$

On désigne par $M(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω . On admet que l'application M qui, à tout ω de Ω associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

• Cas particulier d'une loi de Bernoulli

Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On suppose dans les cinq prochaines questions que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z - 1$.

1. Préciser la loi de X_0 .
2.  Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

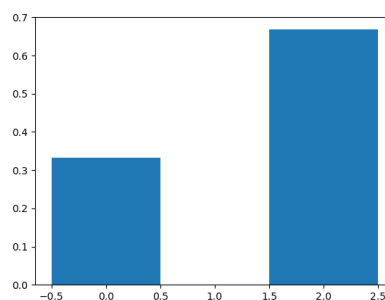
Simulation

3. Écrire une fonction Python qui prend en argument deux réels a et b et renvoie le nombre racines du polynôme d'expression $Q(x) = x^2 + ax + b$.
4. Que renvoie la commande `np.random.rand()` p. En déduire une fonction `SimuM` qui prend en argument p et simule la variable aléatoire M .
5. Que fait le code suivant? Est-ce en accord avec les résultats des questions précédentes.

Le programme renvoie l'histogramme

Editeur

```
Ech=np.zeros(20000)
s=0
for i in range(20000):
    Ech[i]=simuM(1/3)
    s+=Ech[i]
plt.hist(Ech, [-0.5, 0.5, 1.5, 2.5],
         density=True)
plt.show()
print(s/20000)
```



et la valeur `>>> 1.3394`

• Cas particulier d'une loi exponentielle

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 et X_1 suivent une même loi exponentielle de paramètre $1/2$. On pose :

$$Y_0 = -4X_0, \quad Y_1 = X_1^2, \quad Y = Y_1 + Y_0,$$

et on note F_{Y_0} , F_{Y_1} et F_Y , les fonctions de répartition de Y_0 , Y_1 et Y , respectivement.

6. Montrer que l'on a, pour tout x réel :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1 .

7.  Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{++}$ par $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{4} + \sqrt{t}\right)\right]$.
Établir la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(t) dt$.

8.  En déduire qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout x réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{32} e^{x/8} \int_x^{+\infty} g(t) dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

9. On désigne par Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$, vérifier que

$$\int_0^{+\infty} g(t) dt = 4\sqrt{e} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv,$$

Donner ensuite, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ .

10. Montrer que, pour tout réel x positif, on a

$$f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) \right].$$

11. Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Exercice (bonus)

Exercice 1. VeA34 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le code suivant permet de simuler une variable aléatoire X :

Editeur

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

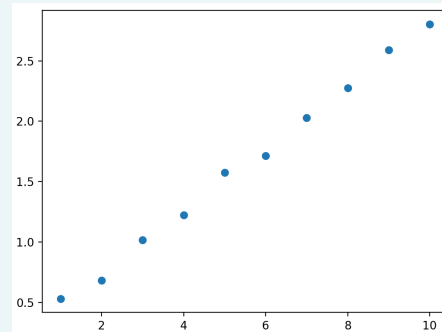
def X(p):
    N=1+np.floor(p*rd.random())    # floor(.) renvoie la partie entière
    x=0
    i=0
    while i < N:
        x+=(rd.random() < 0.5)
        i+=1
    return x
```

1. Reconnaître la loi suivie par la variable N ?
2. Calculer $E(X)$.
3. Tester la cohérence du calcul grâce au code et résultat suivants :

Editeur

```
import matplotlib.pyplot as plt

N=500
Y=np.zeros(10)
for p in range(1,11):
    s=0
    for i in range(N):
        s+=X(p)
    Y[p-1]=s/N
plt.plot(np.linspace(1,10,10),Y,'o')
plt.show()
```



– FIN –

Indications - sujet A

🔍 Indication de l'exercice ??

p. ??

quera que

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}.$$

1. Justifier rapidement que si U suit une loi uniforme sur $]0; 1[$, alors $X = -\ln(U)/a$ suit une loi exponentielle de paramètre a .
2. Justifier que V/λ suit une loi exponentielle de paramètre λ .
8. Utiliser le préliminaire.
- 10.b) Procéder par récurrence. Pour l'hérédité, on remar-

11. Prouver que c'est vrai à l'aide du préliminaire.

🔍 Indication de l'exercice ??

p. ??

2. Vérifier que $M/2$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p .
7. Remarquer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 g(t) = 0$.
8. Appliquer le théorème de sommation en distinguant $x \geq 0$ et $x < 0$.

Indications sur le barème

Quelques remarques :

- Être bienveillant.
- Si la méthode est bonne, on met au moins la moitié des points à la question sauf si le résultat est clairement incohérent. Dans ce dernier cas, on met 0 avec la mention « BOUHHH ».
- On pénalise toute confusion entre fonction f et expression $f(x)$.
- On pénalise fortement toute égalité entre des objets de nature différente.
- On met 0 si on sent une arnaque et on ne tolère aucune approximation par la suite.

• Problème 1

1. Très classique. On pénalise fortement si $X(\Omega)$ n'est pas donné explicitement (-2/4). -1/4 si oublie la stricte croissance de l'exponentielle.
2. On demande une preuve. Une réponse du type "d'après le cours on a ..." est refusée. On pénalise (-1/4) si l'étudiant ne traite pas le cas négatif.
3. Bienveillance sur le python.
4. Au moins 1/4 pour toute tentative.
5. On ne met pas de point si l'étudiant se contente d'expliquer le code ligne par ligne sans vue d'ensemble. 2/4 pour l'explication du code et 2/4 pour la conjecture avec explication.
6. On met 0 et on conspue l'étudiant si la fonction de répartition n'est pas croissante, de limite nulle en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. 1/4 pour F_{Y_n} à l'aide de $F_{X_1}(t)$. 3/4 pour le reste de la question.
7. Avant de dériver, on veut une explication du fait que Y_n soit à densité (fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points, 2/4).
8. Notation binaire 4/4 si tout ok, 0 sinon.
9. Attention aux potentielles arnaques sur cette question. On rappelle que lorsque le résultat est donné, il faut bien mettre les détails.
- 10.a) Notation binaire, on met 0 s'il manque la moindre hypothèse à l'énoncé.
- 10.b) On met des points s'il y a une ébauche de récurrence.
11. On met 2/4 s'il y a une ébauche qui cite le préliminaire.

• Problème 2

1. Question facile, on note de manière binaire.
2. 2/4 pour la loi de M dont 1/4 si on donne $M(\Omega)$, +2/4 pour l'espérance.
3. Au moins 2/4 si l'étudiant essaie de calculer un discriminant avec un if.
4. 1/4 pour la commande `np.random.rand()` < p et +3/4 pour le reste de la question.
5. 2/4 pour l'explication du code. 2/4 pour la vérification de la cohérence du résultat avec la question précédente.
6. 1/4 pour Y_1 , 1/4 pour Y_0 et +2/4 pour les densités.
7. Rédaction classique (on est donc peu bienveillant sur les maladroesses de rédaction) 1/4 pour la continuité de l'intégrande, 1/4 pour Riemann avec positivité de $1/t^2$, 1/4 si on cite le critère. 4/4 si tout ok. On pénalise fortement (-2/4) si on voit $\int_0^{+\infty} 1/t^2 dt$ converge (problème en 0).
9. -2/4 si les hypothèses du changements de variable ne sont pas clairement énoncées. 2/4 pour la première partie de la question, 2/4 pour la seconde partie.
10. On accepte si l'étudiant fait référence à la question précédente.
11. C'est la dernière question 2/4 pour une ébauche. 3/4 si une expression de $E(M)$ a peu près cohérente.

DS 6- solution

Problème I

Maximum de loi exponentielle

1. La variable X est à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$. Si F désigne sa fonction de répartition

$$F(t) = 0 \quad \text{pour } t \leq 0.$$

Soit $t \in \mathbb{R}_*^+$, on a par croissance de la fonction exponentielle

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathbf{P}(-\ln(U)/a \leq t) \\ &= \mathbf{P}(U \geq e^{-at}) \\ &= 1 - \mathbf{P}(U < e^{-at}) \\ &= 1 - \mathbf{P}(U \leq e^{-at}) \quad (\text{densité}) \\ &= 1 - F_U(e^{-at}) \\ &= 1 - e^{-at} \quad \text{car } e^{-at} \in [0; 1]. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre a . Comme la fonction de répartition caractérise la loi

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(a).$$

2. Si V suit une loi exponentielle de paramètre 1 et en reprenant le calcul précédent $U = e^{-V}$ suit une loi uniforme. Dès lors, avec le résultat précédent,

$$\frac{V}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \ln(U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

3.

```
def SimulationYn(n,a):
    u=np.random.rand(n)
    Yn=max(-np.log(u)/a)
    return Yn
```

Donnons une seconde solution moins coûteuse en terme de nombre d'opérations

```
def SimulationYn(n,a):
    u=np.random.rand(n)
    Yn=-np.log(min(u)/a)
    return Yn
```

4.

```
def SimulationZn(n,a):

    u=np.random.rand(n)
    X=-np.log(u)/a

    s=0
    for i in range(n):
        s+=X[i]/(i+1)

    return s
```

5. Le programme trace les histogrammes des échantillons de taille 5000 obtenus en simulation les variables Y_n et Z_n (pour $a = 1$). On constate que les histogrammes sont très proches, ce qui suggère que les densités associées aux variables Y_n et Z_n sont identiques et les variables Y_n et Z_n ont même loi.

6. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= \mathbf{P}(Y_n \leq t) \\ &= \mathbf{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t) \\ &= \mathbf{P}([X_1 \leq t] \cap \dots \cap [X_n \leq t]) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leq t) \dots \mathbf{P}(X_n \leq t) \quad \text{indépendance} \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leq t)^n \quad \text{même loi} \\ F_{Y_n}(t) &= F_{X_1}(t)^n. \end{aligned}$$

À l'aide du rappel en début d'énoncé, pour $t < 0$,

$$F_{Y_n}(t) = 0.$$

Pour $t \geq 0$,

$$F_{Y_n}(t) = (1 - e^{-at})^n.$$

7. La fonction F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (éventuellement privé de 0) avec, pour $t < 0$, $F'_{Y_n}(t) = 0$ et pour $t > 0$

$$F'_{Y_n}(t) = ae^{-at} \cdot n(1 - e^{-at})^{n-1}.$$

Comme $a = 1$, on constate bien qu'une densité est donnée sur $\mathbb{R}$ par f_n .

8. À l'aide de la seconde question, on peut affirmer que $X_{n+1}/(n+1)$ suit une loi exponentielle de paramètre $n+1$. Une densité est donnée

$$d_{n+1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (n+1)e^{-(n+1)t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} ne^{nt}(1 - e^{-t})^{n-1} &= ne^t e^{(n-1)t} (1 - e^{-t})^{n-1} \\ &= ne^t (e^t (1 - e^{-t}))^{n-1} \\ &= ne^t (e^t - 1)^{n-1} \end{aligned}$$

On en déduit une primitive de l'intégrande

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (e^t - 1)^n$$

Ce qui conclut.

- 10.a) Cours.

- 10.b) $\rightarrow$ Initialisation. Dans ce cas, $Z_1 = Y_1$, donc f_1 est bien une densité de Z_1 .

→ *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que Z_n est une variable aléatoire dont f_n est une densité. On a

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}.$$

Appliquons le théorème de sommation.

- Z_n est indépendante de $X_{n+1}/(n+1)$ car Z_n est fonction de $X_1 \dots X_n$ et $(X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$ sont mutuellement indépendantes.

- Soient $x, t \in \mathbb{R}$

$$f_n(t)d_{n+1}(x-t) \neq 0 \iff \begin{cases} t \geq 0 \\ x-t > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 \leq t \\ \leq t \leq x. \end{cases}$$

Distinguons deux cas.

→ Si $x < 0$, alors la condition précédente est impossible et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)d_{n+1}(x-t) dt = 0.$$

→ Si $x > 0$, la condition devient $t \in [0; x]$. On obtient la convergence est claire puisque la condition permet de simplifier les bornes.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)d_{n+1}(x-t) dt \\ &= (n+1) \int_0^x f_n(t)d_{n+1}(x-t) dt \\ &= (n+1) \int_0^x ne^{-t}(1-e^{-t})^{n-1}e^{-(n+1)(x-t)} dt \\ &= (n+1)ne^{-(n+1)x} \int_0^x e^{nt}(1-e^{-t})^{n-1} dt \\ &= e^{-(n+1)x}(e^x-1)^n(n+1) \\ &= (n+1)e^{-x}(e^x-1)^n \\ &= e^{-x}(1-e^{-x})^n(n+1) = f_{n+1}(t). \end{aligned}$$

Le théorème de sommation justifie $\mathcal{P}(n+1)$.

→ *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable à densité dont f_n est une densité.

10.c) Y_n et Z_n ont une densité commune, elles ont donc bien même loi.

11. Le résultat est bien valable pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$. En effet si les variables X_i suivent une loi exponentielle de paramètre a , alors les variables X_i suivent une loi exponentielle de paramètre 1. D'après ce qui précède

$$\max(aX_1, aX_2, \dots, aX_n) = a \max(X_1, X_2, \dots, X_n) = aY_n$$

et

$$\frac{aX_1}{1} + \frac{aX_2}{2} + \dots + \frac{aX_n}{n} = a \left(\frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \dots + \frac{X_n}{n} \right) = aZ_n$$

ont même loi. On vérifie alors que Y_n et Z_n ont même loi.

Problème II

Nombre de racines d'un polynôme aléatoire

1. On a $X_0(\Omega) = \{-1; 1\}$ et

$$\mathbf{P}(X_0 = -1) = \mathbf{P}(Z = 0) = 1 - p.$$

$$\mathbf{P}(X_0 = 1) = \mathbf{P}(Z = 1) = p.$$

2. On a $M(\Omega) = \{0; 1; 2\}$. Le nombre de racines dépend du discriminant

$$\Delta = X_1^2 - 4X_0.$$

Distinguons plusieurs cas :

	$[X_0 = -1]$	$[X_0 = 1]$
$[X_1 = -1]$	$[M = 2]$	$[M = 0]$
$[X_1 = 1]$	$[M = 2]$	$[M = 0]$

On constate que

$$\mathbf{P}(M = 0) = \mathbf{P}(X_0 = 1) = p$$

$$\mathbf{P}(M = 1) = 0$$

$$\mathbf{P}(M = 2) = 1 - p.$$

La variable $M/2$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - p$. Donc

$$\mathbf{E}(M/2) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(M) = 2(1 - p).$$

3, 4. La commande `np.random() < p` permet de simuler une loi de Bernoulli de paramètre p en identifiant True avec 1 et False avec 0.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def delta(a,b):
    Delta=a**2-4*b
    if Delta>0:
        return 2
    elif Delta==0:
        return 1
    else :
        return 0

def simuM(p):
    z0=np.random.rand()<p
    x0=2*z0-1
    z1=np.random.rand()<p
    x1=2*z1-1
    return delta(x1,x0)
```

5. Oui, le programme crée un échantillon de la variable M et renvoie l'histogramme de l'échantillon. Ces simulations donnent

$$\mathbf{P}(M = 0) \simeq \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(M = 2) \simeq \frac{2}{3}.$$

Ce qui est cohérent (il y a même égalité) avec la loi de M . La variable s est une moyenne arithmétique des simulations, elle donne donc une approximation de l'espérance. Ce qui est bien le cas car pour $p = \frac{1}{3}$, il vient

$$\mathbf{E}(M) = \frac{4}{3} \simeq 1,3394.$$

6. Y_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc pour $x \in \mathbb{R}_*^-$

$$F_{Y_1}(x) = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} F_{Y_1}(x) &= \mathbf{P}(Y_1 \leq x) \\ &= \mathbf{P}(X_1^2 \leq x) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \leq \sqrt{x}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{Y_0}(x) &= \mathbf{P}(Y_0 \leq x) \\ &= \mathbf{P}(-4X_0 \leq x) \\ &= \mathbf{P}\left(X_0 \geq -\frac{x}{4}\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(X_0 < -\frac{x}{4}\right) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(X_0 \leq -\frac{x}{4}\right) \text{ densité} \\ &= 1 - F_{X_0}\left(-\frac{x}{4}\right). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Les densités sont obtenues par dérivation

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{Y_1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{Y_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{8} e^{x/8} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

7. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$, on a donc une intégrale généralisée en 0 et $+\infty$.

→ Étude en 0

$$g(t) \sim_0 \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{1/2}} \text{ avec } 1/2 < t.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est convergente. Par le critère d'équivalence pour des intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 g(t) dt$ est convergente.

→ Étude en $+\infty$.

Par les croissances comparées, on vérifie que

$$g(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente, on conclut sur la convergence de $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ par le critère de négligeabilité.

Finalement, $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ est convergente.

8. Appliquons la théorème de sommation de variables à densité.

→ Par le lemme des coalitions, l'indépendance de X_0 et X_1 implique celle de Y_1 et Y_0 .

→ Vérifions la convergence du produit de convolution des densités.

Soient $x, t \in \mathbb{R}$.

$$f_{Y_1}(t) f_{Y_0}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ x-t \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \geq x. \end{cases}$$

Distinguons deux cas.

Si $x \geq 0$, la condition de vient $t \geq x$.

On a une simplification des bornes

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(t) f_{Y_0}(x-t) dt \\ &= \int_x^{+\infty} f_{Y_1}(t) f_{Y_0}(x-t) dt \\ &= \frac{1}{32} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} e^{(x-t)/8} dt = \frac{e^{x/8}}{32} \int_x^{+\infty} g(t) dt. \end{aligned}$$

En particulier, on a bien convergence d'après la question précédente.

La calcul est similaire si $x < 0$.

9. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$, croissant et bijectif avec $u = \sqrt{t}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$. Les intégrales restent convergentes et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} g(t) dt &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-1/2(\frac{t}{4} + \sqrt{t})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-1/2(\frac{u^2}{4} + u)} du \\ &= 2e^{1/2} \int_0^{+\infty} e^{-1/2(\frac{u^2}{4} + u + 1)} du \\ &= 2e^{1/2} \int_0^{+\infty} e^{-1/2(\frac{u}{2} + 1)^2} du. \end{aligned}$$

On effectue ensuite le changement de variable affine

$$v = \frac{u}{2} + 1, \quad dv = \frac{1}{2} du,$$

Pour $x \in \mathbb{R}^-$, on a donc

$$f_Y(x) = \frac{1}{32} e^{x/8} \int_0^{+\infty} g(t) dt = \frac{\sqrt{e}}{8} e^{x/8} \int_1^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv.$$

Si on pose, $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$, une densité de la loi normale réduite, on a

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{-v^2/2} dv &= \sqrt{2\pi} \int_1^{+\infty} h(t) dt \\ &= \sqrt{2\pi} \left(1 - \int_{-\infty}^1 h(t) dt \right) \\ &= \sqrt{2\pi} (1 - \Phi(1)). \end{aligned}$$

Finalement

$$f_Y(x) = \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} e^{x/8} (1 - \Phi(1)).$$

10. Il suffit de reprendre le calcul précédent avec les bornes $x, +\infty$.

11. On a $M(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ avec

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M=0) &= \mathbf{P}(X_1^2 - 4X_0 < 0) \\ &= \mathbf{P}(Y_1 + Y_0 < 0) \\ &= \int_{-\infty}^0 f_Y(x) dx. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 f_Y(x) dx &= \frac{\sqrt{2\pi e}}{8} (1 - \Phi(1)) \int_{-\infty}^0 e^{x/8} dx \\ &= \sqrt{2\pi e} (1 - \Phi(1)). \end{aligned}$$

$\mathbf{P}(M = 1) = \mathbf{P}(Y = 0) = 0$ car Y est une variable à densité.
Enfin

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M = 2) &= 1 - \mathbf{P}(M = 1) - \mathbf{P}(M = 0) \\ &= 1 - \sqrt{2\pi}e(1 - \Phi(1)).\end{aligned}$$

Pour l'espérance, par définition

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(M) &= 0 \times \mathbf{P}(M = 0) + 1 \times \mathbf{P}(M = 1) + 2\mathbf{P}(M = 2) \\ &= 2(1 - \sqrt{2\pi}e(1 - \Phi(1))).\end{aligned}$$