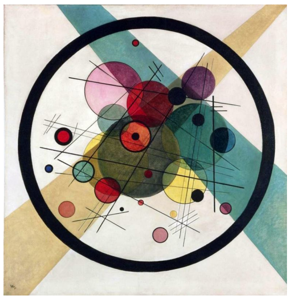
CHAPITRE 14

Endomorphismes symétriques



Cercles dans un cercle,
1923, VASSILY KANDINSKY

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude de la réduction des matrices et endomorphismes symétriques par l'intermédiaire du théorème spectral.

1 Matrices et endomorphismes symétriques

1.1 Les définitions et exemples

DÉFINITION (RAPPEL) **matrice symétrique**

On dit qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est* ***symétrique*** *si* ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$.
Autrement dit, si $(a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]}$ *sont les coefficients de la matrice* A *:* $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad a_{i,j} = a_{j,i}$.

Exercice 1

✦ ✎ Donner la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ défini comme le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

p. 18

AS1

Rappels. À partir de la décomposition

$$\forall \mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{M} = \frac{\mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}}{2} + \frac{\mathrm{M} - {}^t\mathrm{M}}{2},$$

on démontre que les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

DÉFINITION **endomorphisme symétrique**

Soient, E *un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *et* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
On dit que φ *est un* ***endomorphisme symétrique*** *si*

$$\forall\, u,\, v \in \mathrm{E}, \qquad \langle\varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

Exemples.

- On définit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-6y, -6x-7y). \end{array} \right.$$

Pour $u = \left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2$, $v = \left(x',y'\right) \in \mathbb{R}^2$ et avec le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$

$$\langle\varphi(u), v\rangle = (2x-6y)x' + (-6x-7y)y' = x\left(2x'-6y'\right) + y\left(-6x'-7y'\right) = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

L'endomorphisme φ est symétrique.

- Soient E, un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $u_0 \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}^+$, on définit l'endomorphisme $\varphi_a : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ par

$$\varphi_a(u) = u + a\,\langle u, u_0\rangle\, u_0.$$

Justifions que φ_a est symétrique. Soient u, $v \in \mathrm{E}$

$$\begin{array}{rll} \left\langle\varphi_a(u), v\right\rangle & = \left\langle u + a\langle u, u_0\rangle u_0, v\right\rangle & = \langle u, v\rangle + a\left\langle u, u_0\right\rangle\langle u_0, v\rangle \\ & = \langle u, v\rangle + \langle u, a\,\langle u_0, v\rangle\, u_0\rangle & = \langle u, v + a\,\langle u_0, v\rangle\, u_0\rangle \\ & = \left\langle u, \varphi_a(v)\right\rangle. & \end{array}$$

- On pourra consulter l'exercice 25, p. 13, pour un exemple d'endomorphisme symétrique en dimension infinie.

Exercice 2

✦✦ Soient $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien et f, g deux endomorphismes symétriques de E.

1. Justifier que si f et g commutent alors $f \circ g$ est symétrique.
2. On souhaite prouver la réciproque. On suppose donc $f \circ g$ symétrique. p. 18
   a) Simplifier pour tous u, $v \in \mathrm{E}$, $\left\langle u, f\circ g(v) - g \circ f(v)\right\rangle$.
   b) En déduire que f et g commutent.

AS2

1.2 Premières propriétés

LEMME **caractérisation via une famille génératrice**

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une famille génératrice de* E *et* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. *Les deux énoncés suivants sont équivalents.*

i) *L'endomorphisme* φ *est symétrique.*

ii) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad \left\langle\varphi\left(e_i\right), e_j\right\rangle = \left\langle e_i, \varphi\left(e_j\right)\right\rangle.$

Preuve. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si l'endomorphisme φ est symétrique :

$$\forall\, u,\, v \in \mathrm{E}, \qquad \langle\varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.$$

On obtient directement le résultat avec $u = e_i$ et $v = e_j$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, supposons l'énoncé **ii)** vrai.
Soient u, $v \in \mathrm{E}$. Par définition d'une famille génératrice de E, il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j.$$

Par linéarité de φ : $$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) \quad \text{et} \quad \varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \varphi(e_j).$$

Puis, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\langle \varphi(u), v\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \left\langle \varphi(e_i), e_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \left\langle e_i, \varphi(e_j)\right\rangle \qquad \text{condition } \textbf{ii)}\\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j \varphi_j(e_j) \right\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle.\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'énoncé **i**).

■

Théorème — **lien avec les matrices**

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ où $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien. Les trois énoncés suivants sont équivalents.

- **i**) *L'endomorphisme φ est un endomorphisme symétrique de* E.
- **ii**) *Il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de* E *telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ soit une matrice symétrique.*
- **iii**) *Pour toutes les bases orthonormées $\mathscr{B}$ de* E, *la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est une matrice symétrique.*

Preuve. Rappelons que pour une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \varphi(e_j)\right\rangle e_i.$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire, il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \langle e_1, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_1, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_1, \varphi(e_n)\rangle \\ \langle e_2, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_2, \varphi(e_n)\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle e_n, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_n, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_n)\rangle \end{bmatrix}.$$

Par définition de la transposée

$${}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \langle e_1, \varphi(e_1)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_1)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_1)\rangle \\ \langle e_1, \varphi(e_2)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_2)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_2)\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle e_1, \varphi(e_n)\rangle & \langle e_2, \varphi(e_n)\rangle & \cdots & \langle e_n, \varphi(e_n)\rangle \end{bmatrix}.$$

Le lemme précédent justifie alors directement les équivalences **i**)⇔**ii**) et **i**)⇔**iii**).

■

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier que $\mathscr{B}$ doit être une base orthonormée !

Exemple. Si on reprend l'exemple de φ défini sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = (2x - 6y, -6x - 7y)$, la matrice de φ dans la base canonique est bien symétrique

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Remarque. Donnons une seconde justification de l'implication **ii**) ⇒ **iii**).
Soit $\mathscr{B}$, une base orthonormée telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ soit symétrique. Soit $\mathscr{C}$, une seconde base orthonormée de E. Montrons que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$ est symétrique. Par la formule de changement de base, il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}{}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$$

et la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$ est orthogonale (c'est-à-dire ${P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1} = {}^tP_{\mathscr{B}\mathscr{C}}$). Ensuite,

$$\begin{aligned}
{}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) &= {}^t\left({P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\right) \\
&= {}^tP_{\mathscr{B}\mathscr{C}}\,{}^t\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)\,{}^t\left({P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1}\right) \\
&= {P_{\mathscr{B}\mathscr{C}}}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)P_{\mathscr{B}\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi).
\end{aligned}$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$ est bien symétrique.

Exercice 3

✦✦

1. Justifier que l'ensemble $\mathscr{S}(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Si E est de dimension finie, pouvez-vous préciser sa dimension?

p. 18

AS3

2 Réduction

2.1 Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Premières propriétés

PROPOSITION — **espace stable**

Soient φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ et F un sous-espace vectoriel de E.

Si F *est stable par* φ,

alors $F^\perp$ *est également stable par* φ.

Preuve. Rappelons que

$$F^\perp = \left\{ v \in E \mid \forall\, u \in F,\ \ \langle u, v\rangle = 0 \right\}.$$

Soit $v \in F^\perp$, montrons que $\varphi(v) \in F^\perp$.
Soit $u \in F$. L'endomorphisme φ étant symétrique

$$\langle \varphi(v), u\rangle = \langle v, \varphi(u)\rangle = 0$$

car $v \in F^\perp$ et $\varphi(u) \in F$. Ainsi, pour tout $u \in F$, $\varphi(v)$ est orthogonal à u, c'est-à-dire $\varphi(v) \in F^\perp$.
En conclusion, $F^\perp$ est stable par φ.

■

PROPOSITION — **vecteurs propres orthogonaux**

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $\left(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$.

Si *u et v sont deux vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres distinctes,*

alors *les vecteurs u et v sont orthogonaux.*

Preuve. Soient u, v deux vecteurs propres de φ associés respectivement aux valeurs propres λ et μ (distinctes).

$$\begin{aligned}
\lambda\langle u, v\rangle &= \langle \lambda u, v\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle \\
&= \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \mu\langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

Or $\lambda \neq \mu$, nécessairement $\langle u, v\rangle = 0$. Les vecteurs u et v sont orthogonaux.

■

Remarque. On a la généralisation suivante. Si $e_1, \dots, e_p$ sont des vecteurs propres de φ associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors la famille $\left(e_1, \dots, e_p\right)$ est orthogonale.

On en déduit directement le résultat suivant.

COROLLAIRE — **sous-espaces propres orthogonaux**

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $\big(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$.
Alors les sous-espaces propres de φ sont deux à deux orthogonaux.

Exemple. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{AB})$. On vérifie que $\varphi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un endomorphisme symétrique. L'endomorphisme φ possède deux valeurs propres : -1 et 1 où $\mathrm{E}_1(\varphi)$, $\mathrm{E}_{-1}(\varphi)$ désigne respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques. Ces sous-espaces sont donc orthogonaux.

Le théorème spectral

THÉORÈME — **spectral**

Soit φ un endomorphisme d'un espace euclidien $\big(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$.

Si *φ est un endomorphisme symétrique,*

alors
- *L'endomorphisme φ est diagonalisable.*
- *Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de φ.*

⚠ **Attention.** Il ne faut pas oublier le second point du théorème : la base des vecteurs propres peut être choisie orthonormée.

Preuve. On admet que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une valeur propre réelle (voir exercice **??**, p. **??** sur le quotient de Rayleigh pour une preuve).

On raisonne par récurrence forte sur la propriété :

$\mathscr{P}(k)$: Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension k est diagonalisable dans une base orthonormée.

- *Initialisation.* $\mathscr{P}(1)$ est claire puisque la linéarité impose dans ce cas que tout endomorphisme est de la forme $\lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$.

- *Hérédité.* Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \ldots, \mathscr{P}(k)$ vraies et démontrons $\mathscr{P}(k+1)$. Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension $k+1$. D'après la remarque préliminaire, il existe une valeur propre λ à φ. Notons $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.
  - Si $\mathrm{E} = \mathrm{E}_\lambda(\varphi)$, alors $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ et φ est directement diagonalisable dans une b.o.n de E.
  - Si $\mathrm{E}_\lambda(\varphi) \neq \mathrm{E}$. Alors $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)$ est stable par φ et d'après la première proposition de cette section, $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)^\perp \neq \{0_\mathrm{E}\}$ est aussi stable par φ. On peut donc considérer l'endomorphisme $\tilde{\varphi}$ obtenu par la restriction de φ à $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)^\perp$. Comme φ est symétrique, $\tilde{\varphi}$ l'est aussi pour l'espace euclidien $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)^\perp$ muni du produit scalaire restreint.
  $$\forall\, u, v \in \mathrm{E}_\lambda(\varphi)^\perp, \qquad \langle u, \tilde{\varphi}(v)\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle \tilde{\varphi}(u), v\rangle.$$
  Or $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)^\perp$ est de dimension comprise entre 1 et k. D'après l'hypothèse de récurrence, $\tilde{\varphi}$ est diagonalisable dans une b.o.n de $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)^\perp$. Soit $\tilde{\mathscr{B}}$ une telle base. Noter que les vecteurs de $\tilde{\mathscr{B}}$ constituent aussi des vecteurs propres de φ. Soit aussi $\mathscr{B}_\lambda$, une base de $\mathrm{E}_\lambda(\varphi)$. Les vecteurs de $\mathscr{B}_\lambda$ sont des vecteurs propres de φ (associés à la valeurs propres λ). Comme
  $$\mathrm{E}_\lambda(\varphi) \underset{\perp}{\oplus} \mathrm{E}_\lambda(\varphi)^\perp = \mathrm{E},$$
  on peut concaténer les familles $\mathscr{B}_\lambda$ et $\tilde{\mathscr{B}}$ respectivement en une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E. On obtient ainsi une b.o.n de E constituée de vecteurs propres de φ. L'endomorphisme φ est diagonalisable dans une b.o.n.
  Si $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \ldots, \mathscr{P}(k)$ sont vraies, $\mathscr{P}(k+1)$ l'est aussi.
- *Conclusion.* Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. ■

Remarque. La réciproque est vraie mais elle est beaucoup moins utile.

Exemples. Vérifions le théorème sur les deux premiers exemples du chapitre (page p.2).
• La matrice de φ dans la base canonique est

$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminons les valeurs propres par un calcul de déterminant.

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3) &= \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -6 \\ -6 & -7-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-7-\lambda) - 36 \\ &= \lambda^2 + 5\lambda - 50 \\ \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_3) &= (\lambda+10)(\lambda-5). \end{aligned}$$

Il y a deux valeurs propres -10 et 5. Précisons les espaces propres. Soit $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{AX} = 5\mathrm{X} \iff \begin{cases} 2x - 6y = 5x \\ -6x - 7y = 5y \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 6y = 0 \\ 6x + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\iff x + 2y = 0 \iff x = \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\qquad \mathrm{E}_5(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_1) \quad$ où $\quad u_1 = (-2, 1).$

De même, on trouve

$$\mathrm{E}_{-10}(\varphi) = \mathrm{Vect}(u_2) \quad \text{où} \quad u_2 = (1, 2).$$

Il est clair que u_1 et u_2 sont orthogonaux, $\mathrm{E}_5(\varphi)$ et $\mathrm{E}_{-10}(\varphi)$ le sont aussi.

• Reprenons l'exemple de φ_a du début de chapitre. On constate que

$$\varphi_a(u_0) = u_0 + a\langle u_0, u_0\rangle u_0 = \left(1 + a\|u_0\|^2\right) u_0.$$

→ Comme $u_0 \neq 0_{\mathrm{E}}$, u_0 est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 1 + a\|u_0\|^2 \neq 0$ (car $a \geqslant 0$).
→ De plus, pour tout $u \in \mathrm{Vect}(u_0)^{\perp}$, on a

$$\varphi_a(u) = u + a\overbrace{\langle u, u_0\rangle}^{=0} u_0 = u.$$

Le réel 1 est donc une seconde valeur propre pour φ_a. Précisons que $\mathrm{Vect}(u_0)^{\perp}$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathrm{E}}\}$ car $\dim \mathrm{E} \geqslant 2$. De plus,

$$\dim \mathrm{Vect}(u_0) = 1 \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Vect}(u_0)^{\perp} = n - 1.$$

D'où $\qquad \dim \mathrm{E}_1(\varphi_a) + \dim \mathrm{E}_\lambda(\varphi_a) \geqslant n.$

Nécessairement, il y a égalité des dimensions et même $\mathrm{E}_\lambda(\varphi_a) \oplus \mathrm{E}_1(\varphi_a) = \mathrm{E}$. L'endomorphisme φ_a est diagonalisable dans une b.o.n de E. Pour trouver un telle base, on peut ajouter le vecteur normée $u_0/\|u_0\|$ à une b.o.n de $\mathrm{E}_1(\varphi_a)$.

Exercice 4

✦✦ ✎ *Les questions sont indépendantes.*

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Que dire de φ si pour tout $u \in \mathrm{E}$, $\langle u, \varphi(u)\rangle = 0$?
2. Justifier que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^+$ si et seulement si φ vérifie

$$\forall u \in \mathrm{E}, \quad \langle u, \varphi(u)\rangle \geqslant 0 \quad (\bullet)$$

p. 19

AS4

Exercice 5

✧ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Justifier que l'application linéaire

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$

p. 19

est aussi diagonalisable.
On pourra introduire le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> *En mathématiques, les noms sont arbitraires. Libre à chacun d'appeler un opérateur auto-adjoint un éléphant" et une décomposition spectrale une "trompe". On peut alors démontrer un théorème suivant lequel "tout éléphant a une trompe". Mais on n'a pas le droit de laisser croire que ce résultat a quelque chose à voir avec de gros animaux gris.*
>
> GERALD SUSSMAN
> spécialiste en intelligence artificielle (1947).

AS5

2.2 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Théorème spectral dans le cas matriciel

THÉORÈME — **spectral, version matricielle**

Si A *est une matrice symétrique réelle,*

alors
- *La matrice* A *est diagonalisable.*
- *Il existe une matrice orthogonale* P *et une matrice diagonale réelle* D *telles que*

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP.$$

Preuve. Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Comme la base canonique est une b.o.n pour le produit scalaire canonique, φ est un endomorphisme symétrique en dimension finie. D'après ce qui précède φ est diagonalisable dans une b.o.n. (notée $\mathscr{C}$). Précisons que la matrice de passage, notée P, entre la base canonique et la base $\mathscr{C}$ est orthogonale (puisque les deux bases sont orthonormées). La formule de changement de base donne alors

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varphi) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)P^{-1} = P\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)\,{}^tP.$$

D'où le résultat avec $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi)$ qui est bien diagonale. ■

Remarques.
- Les colonnes de la matrice P forment une b.o.n de vecteurs propres de A.
- La réciproque, qui est bien moins utile, est vraie. S'il existe P orthogonale et D diagonale telles que $A = PD\,{}^tP$ alors la matrice A est symétrique puisque

$${}^tA = {}^t\left(P\,{}^tDP\right) = {}^t\left({}^tP\right){}^tD\,{}^tP = PD\,{}^tP = A.$$

Exercice 6

Les questions sont indépendantes.

1. ✦ On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   Justifier que A est diagonalisable. Calculer A^2. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1; 1\}$.
2. ✦✦ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + {}^tM$ soit nilpotente.
   Montrer que la matrice M est antisymétrique.

p. 19

AS6

Exercice 7

✦ Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1;n]\!]}$ une matrice symétrique réelle, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées sans multiplicité (c'est-à-dire que l'on prend en compte les éventuelles répétitions). Grâce au calcul de $\mathrm{Tr}\left({}^t\!AA\right)$, démontrer que

$$\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} {a_{i,j}}^2 = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2.$$

p. 19

AS7

Proposition **décomposition d'une matrice symétrique**

Soit A *une matrice symétrique de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons
- $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *les valeurs propres de* A.
- $(X_1, \dots, X_n)$ *une b.o.n de vecteurs propres de* A *telle que* $AX_i = \lambda_i X_i$ *pour tout* $i \in [\![1;n]\!]$.

Alors

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^t\!X_i = \lambda_1 X_1 {}^t\!X_1 + \cdots + \lambda_n X_n {}^t\!X_n.$$

Preuve. Posons $B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^t\!X_i$ de sorte que, pour $j \in [\![1;n]\!]$,

$$BX_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i {}^t\!X_i\right) X_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i \left({}^t\!X_i X_j\right).$$

Or la famille $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est orthonormée

$${}^t\!X_i X_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La somme précédente se simplifie, et on obtient

$$BX_j = \lambda_j X_j = AX_j.$$

Les endomorphismes canoniquement associés à A et B sont donc égaux sur la base $(X_1, \dots, X_n)$, ils sont donc égaux et $A = B$. ■

Remarque. En particulier, A est combinaison linéaire de n matrices de projecteurs de rang 1.

Exercice 8

✦ Justifier que les matrices $X_i {}^t\!X_i$ pour $i \in [\![1;n]\!]$ sont des matrices de projection dont on déterminera les éléments caractéristiques (ici, une base du noyau et de l'image).

p. 20

AS8

Exercice 9

✦ On reprend les notations de l'énoncé précédent et on suppose en plus les réels λ_i positifs.

1. Montrer que la matrice $L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} X_i {}^t\!X_i$ est symétrique à valeurs propres positive et vérifie l'égalité $L^2 = A$. Prouver que L commute avec A.
2. On admet que c'est la seule matrice symétrique avec des valeurs propres dont le carré vaut A et on la note $\sqrt{A}$. Montrer que si A est de plus inversible, alors on a $(\sqrt{A})^{-1} = \sqrt{A^{-1}}$.

p. 20

AS9

Pratique de la réduction des matrices symétriques

Méthode

Comment obtenir une b.o.n de vecteurs propres d'une matrice/endomorphisme symétrique ?

- Déterminer les valeurs propres.
  (Par un calcul du rang, un polynôme annulateur, le déterminant ...)
- Pour chaque valeur propre, déterminer une base de vecteurs propres.
- À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Schmidt, déterminer une base orthonormée pour chacun des sous-espaces propres.
- On obtient une base de vecteurs propres par concaténation des bases orthonormées de chacun des sous-espaces propres.

Exemple. Partons de la matrice symétrique

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Le spectre est donné par $\mathrm{Sp}(A) = \{1;4\}$. Pour s'en convaincre, on remarque que $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$, donc 1 est valeur propre, l'espace propre associé est de dimension 2. Pour trouver la dernière valeur propre, on considère la trace.
- On vérifie que $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est une base de E_4 et une base de E_1 est donnée par les deux vecteurs colonnes

$$X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Comme E_4 est de dimension 1, il suffit de renormaliser X_1 pour obtenir une base orthonormée de E_4.

$$\|X_1\|^2 = 3 \quad \text{et} \quad E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} X_1.$$

  Par contre, X_2 et X_3 ne sont pas orthogonaux. On pose donc

$$E_2 = \frac{X_2}{\|X_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} X_2.$$

  Puis

$$V_2 = X_3 - \langle X_3, E_2 \rangle\, E_2 = X_3 - \frac{\langle X_3, X_2 \rangle}{\|X_2\|^2} X_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

  Et

$$E_3 = \frac{V_2}{\|V_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Finalement, une b.o.n de vecteurs propres de A est donnée par la famille

$$(E_1, E_2, E_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Exercice 10

✦ Diagonaliser dans une b.o.n chacune des matrices symétriques suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

p. 20

AS10

Exercice 11

✦ On considère la matrice carrée d'ordre 3 : *d'après EMLyon 2007 E*

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

p. 20

1. Montrer, sans calcul, que A est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible et symétrique P, de première ligne $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et de deuxième ligne $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$.

AS11

3 Formes quadratiques associées à une matrice

Définition et exemples

DÉFINITION **forme quadratique d'une matrice symétrique**

*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique. La **forme quadratique associée à** A est l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$q(h) = {}^t\mathrm{HAH}$$

où H est la matrice des coordonnées de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple. Si on pose $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, la forme quadratique associée est définie pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned} q(h) &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2h_1 + 3h_2 \\ 3h_1 - h_2 \end{bmatrix} \\ &= h_1(2h_1 + 3h_2) + h_2(3h_1 - h_2) = 2h_1^2 + 6h_1h_2 - h_2^2 = \begin{array}{cc} \mathbf{2}h_1^2 + & \mathbf{3}h_1h_2 \\ +\mathbf{3}h_2h_1 + & -\mathbf{1}h_2^2 \end{array}. \end{aligned}$$

Remarque. En généralisant le calcul précédent, on constate que pour $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$ et $h = (h_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$

$$q(h) = \sum_{i,j\in[\![1;n]\!]} a_{ij} h_i h_j.$$

Par symétrie de A, on peut réécrire cette expression

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} h_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij} h_i h_j.$$

En particulier, si A est diagonale avec $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, on a simplement

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i^2.$$

Exercice 12

✦ **Forme quadratique associée à un endomorphisme symétrique**
On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soient φ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice de φ dans la base canonique.
Justifier que si q est la forme quadratique associée à A alors

p. 20

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad q(h) = \langle h, \varphi(h) \rangle.$$

AS12

Expression de la forme quadratique dans une b.o.n

THÉORÈME — **expression dans une b.o.n**

Soit q, une forme quadratique associée à une matrice symétrique A. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que si h a pour coordonnées $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n$ dans $\mathscr{B}$, on a

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{h}_i^{\,2}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

Preuve. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PD}^t\mathrm{P}$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} q(h) &= {}^t\mathrm{HAH} \\ &= {}^t\mathrm{HPD}^t\mathrm{PH}. \\ q(h) &= {}^t\tilde{\mathrm{H}}\mathrm{D}\tilde{\mathrm{H}} \qquad \text{où} \quad \tilde{\mathrm{H}} = {}^t\mathrm{PH}. \end{aligned}$$

Il existe une base $\mathscr{B}$ telle que ${}^t\mathrm{P}$ soit la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. Si $\left(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_n\right)$ sont les coordonnées de H dans cette nouvelle base

$$\tilde{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \vdots \\ \tilde{h}_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad q(h) = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 & \ldots & \tilde{h}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \vdots \\ \tilde{h}_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{h}_i^{\,2}.$$

■

Application. ✎ **L'encadrement de Rayleigh**
Si on pose $\alpha = \min \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et $\beta = \max \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, montrons que

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad \alpha \leqslant \frac{q(h)}{\|h\|^2} \leqslant \beta.$$

Il suffit de reprendre l'expression obtenue précédemment

$$q(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tilde{h}_i^{\,2} \quad \text{puis,} \quad \alpha \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i^{\,2} \leqslant q(h) \leqslant \beta \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i^{\,2}.$$

On conclut en rappelant que pour une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ orthonormée, on a $\sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \langle h, e_i \rangle^2 = \|h\|^2$.

Signe d'une forme quadratique

Exercice 13

✧ ✎ À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur le spectre de A, a-t-on

i) $\forall\, u \in \mathrm{E}, \qquad q(u) \geqslant 0\,?$

ii) $\forall\, u \in \mathrm{E}, \qquad q(u) \leqslant 0\,?$

iii) $\forall\, u \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}, \qquad q(u) > 0\,?$

iv) $\forall\, u \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}, \qquad q(u) < 0\,?$

p. 20

AS13

Exercices

Matrices symétriques

Exercice 14. ✦ Soit $n \geqslant 3$. On note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 sauf le coefficient en position (n,n) qui vaut 0. # AS14

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. Vérifier que A est semblable à une matrice diagonale de la forme $D = \mathrm{diag}(0,\dots,0,a,b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
3. En calculant de deux manières la trace de A et celle de A^2, déterminer a et b.

≫ Solution p. 20

Exercice 15. ✦✦ Soient A et B deux matrice symétriques réelles telles que les formes quadratiques associées q_A et q_B soient égales. Justifier que $A = B$. # AS15

≫ Solution p. 20

Exercice 16. ✦ **Rayon spectral, exemple de convergence de suite de matrices** # AS16
On munit $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique défini par $\langle M, N\rangle = {}^t MN$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit A, une matrice symétrique de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On pose $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

1. Justifier que pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant \rho(A)\|X\|$.
2. Établir l'équivalence entre les énoncés :

   i) $\rho(A) < 1$ **ii)** Pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\left\|A^n X\right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

≫ Solution p. 21

Exercice 17. ✦✦ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres positives. Trouver une solution de l'équation $X^6 = A$, où $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A-t-on unicité de la solution ? # AS17

≫ Solution p. 21

Matrices symétriques positives, définies positives

Exercice 18. ✦ **Définitions des symétriques définies positives et équivalences** # AS18
On dit qu'une matrice symétrique M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a ${}^t XMX > 0$. Montrer l'équivalence des quatre énoncés suivants :

i) M est une matrice symétrique définie positive.
ii) Les valeurs propres de M sont strictement positives.
iii) Il existe P orthogonale, D diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $M = PD\,{}^t P$.
iv) Il existe une matrice R inversible et symétrique telle que $M = R^2$.

≫ Solution p. 21

Exercice 19. ✦✦✦ **Racine carrée d'une matrice de $\mathscr{S}_n^+$** # AS19
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+$.

1. Montrer qu'il existe $R \in \mathscr{S}_n^+$ telle que $A = R^2$. On dit que R est une racine carrée de A.
2. Soient R_1 et R_2 deux racines carrées de A appartenant à $\mathscr{S}_n^+$.
   Montrer que R_1 et R_2 ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres. En déduire que la matrice A admet une unique racine carrée dans $\mathscr{S}_n^+$ notée dans la suite $\sqrt{A}$.
3. *Expression de $\sqrt{A}$ via les polynômes de Lagrange.*
   Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, les p valeurs propres de A deux à deux distinctes. Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on définit le polynôme :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i \in [\![1;p]\!] \\ i \neq j}} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}.$$

a) Montrer que $\mathscr{B} = (L_1, \ldots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[x]$. En déduire l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[x]$ tel que, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

b) Exprimer $\sqrt{A}$ comme un polynôme en A.

4. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. vérifier que A est dans S_n^+ et déterminer $\sqrt{A}$.

≫ Solution p. 22

Exercice 20. ✦✦ Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n dont les valeurs propres sont strictement positives. # AS20

1. Montrer l'équivalence : $A = B \iff A^2 = B^2$.

2. Est-ce encore vrai si on suppose les valeurs propres positives ou nulles ?

≫ Solution p. ??

Exercice 21. ✦✦✦ **Matrices symétriques positives et définies positives** # AS21

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S = \left(a_{ij}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \quad a_{ij} > 0.$$

On note β la plus grande valeur propre de S et V le sous-espace propre de S associé à β. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et de la norme associée $\|\cdot\|$.

1. Soit $X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in V \setminus \{0\}$. On note $|X_0| = \begin{bmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{bmatrix}$.

a) Montrer ${}^tX_0SX_0 \leqslant {}^t|X_0|S|X_0|$ et en déduire : $|X_0| \in V$.

b) Montrer que les coordonnées de $S|X_0|$ sont toutes strictement positives et en déduire que X_0 n'a aucune coordonnée nulle.

c) Montrer : ${}^tX_0SX_0 = {}^t|X_0|S|X_0|$ et en déduire que les coordonnées de X_0 sont toutes de même signe.

2. a) En déduire qu'il n'existe pas deux vecteurs de $V \setminus \{0\}$ orthogonaux entre eux.

b) Conclure : $\dim(V) = 1$.

≫ Solution p. ??

Endomorphismes symétriques

Exercice 22. ✦ Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et φ un endomorphisme symétrique de E. Démontrer que Ker(φ) et Im(φ) sont supplémentaires orthogonaux. # AS22

≫ Solution p. 22

Exercice 23. ✧ **Vrai ou faux ?** # AS23

Si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien, alors $\mathscr{B}$ est une base orthogonale.

≫ Solution p. 23

Exercice 24. ✦✦ **La symétrie implique la linéarité** # AS24

Soit $\varphi : E \to E$ tel que, pour tous $u, v \in E$, on a $\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle$. Justifier que φ est un endomorphisme.

≫ Solution p. 23

Exercice 25. ✦ **Exemple d'endomorphisme symétrique en dimension infinie** *D'après EMLyon 2011* # AS25

On note $E = \mathscr{C}^\infty([0;1];\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par :

$$\forall f, g \in E, \qquad \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

et, pour toute fonction $f \in E$, on pose

$$T(f) : \left\{ \begin{array}{ccl} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(x^2 - x\right) f''(x) + (2x-1) f'(x). \end{array} \right.$$

Montrer que T est un endomorphisme symétrique de E.

≫ Solution p. 23

Exercice 26. ✦ **Endomorphisme symétrique et produit scalaire** *d'après EDHEC 2015* # AS27

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ qui est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, symétrique, dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

1. Justifier l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, formée de vecteurs propres de f.

2. **a)** Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a : $\langle x, f(x) \rangle \geqslant 0$.

b) Vérifier que l'égalité $\langle x, f(x) \rangle = 0$ a lieu si et seulement si $x = 0$.

c) En déduire que l'application φ, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\varphi(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

3. **a)** En utilisant $\mathscr{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^n$, symétrique pour le produit scalaire canonique, dont les valeurs propres sont strictement positives, et tel que $g^2 = f$.

b) Établir que g est bijectif.

c) Montrer que la famille $\left(g^{-1}(e_1), g^{-1}(e_2), \dots, g^{-1}(e_n)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire φ.

≫ Solution p. 23

Exercice 27. ✦✦ *D'après ESCP 2011.* # AS28

Soit n un entier naturel non nul. On désigne par E un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

1. **a)** L'application f est-elle un endomorphisme de E ?

b) L'application f est-elle injective ? surjective ?

c) L'application f est-elle un endomorphisme symétrique de E ?

d) Caractériser les bases $(e_1, \dots, e_n)$ telles que f soit un projecteur.

2. **a)** Montrer que les valeurs propres de f sont strictement positives.

b) Montrer qu'il existe un isomorphisme symétrique s de E à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ f)^{-1}$.

c) Montrer que $(s(e_1), \dots, s(e_n))$ est une base orthonormée de E.

d) Que dire de f si la matrice de s dans $\mathscr{B}$ est une matrice orthogonale ?

≫ Solution p. 24

Exercice 28. ✦✦ ✎ # AS36

Soient $\left(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ un espace euclidien de dimension n, et f un endomorphisme symétrique de E. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres telles que $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p$, montrer que

$$\forall x \in E, \qquad \lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x \rangle \leqslant \lambda_p \|x\|^2.$$

≫ Solution p. 25

Exercice 29. ✦✦✦ *Oraux HEC 2009* # AS29

Soient $\left(E, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ un espace euclidien de dimension n et f, g deux endomorphismes de E symétriques et ayant des valeurs propres strictement positives.

1. Prouver qu'il existe un endomorphisme φ de E ayant des valeurs propres positives tel que $f = \varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

2. Montrer que : $\operatorname{Ker}(f + g) = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

≫ Solution p. 25

Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

Exercice 30. ✦ **Et le cas antisymétrique ?** # AS30

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est 0.

2. Montrer que $B = A^2$ est une matrice symétrique réelle.

3. Quel est le signe des valeurs propres non nulles de B ?

≫ Solution p. 25

Exercice 31. ✦ **Un exemple d'endomorphisme antisymétrique** # AS31

Soit n un entier au moins égal à 3. On travaille dans l'espace $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. On considère deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 et orthogonaux. On définit sur E l'application f par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.

2. **a)** Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

b) Vérifier que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

3. Montrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$$

4. En déduire que $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique.

5. À quelle condition sur l'entier naturel k, l'endomorphisme f^k est diagonalisable.

≫ Solution p. 26

Exercice 32. ✦✦ Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. On note S (resp. T) la matrice de f (resp. g) dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E. On suppose que S est symétrique et T antisymétrique. Montrer que : # AS32

$$\forall x \in E, \qquad \|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|.$$

≫ Solution p. 26

Exercice 33. ✦ ✎ **Adjoint u^* d'un endomorphisme u et endomorphismes normaux** *d'après EDHEC 2019* # AS33

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n et φ un endomorphisme de E. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

- *Définition de l'adjoint d'un endomorphisme de* E

  Pour tout $y \in E$, on pose $\varphi^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle \varphi(e_i), y\rangle e_i$.

1. Vérifier que φ^* est un endomorphisme de E et : $\quad \forall x, y \in E, \qquad \langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi^*(y)\rangle$.

2. 🔍 Que dire de $(\varphi^*)^*$?

3. 🔍 Comparer les matrices de φ et φ^* dans la base $\mathscr{B}$. En déduire que $\varphi \circ \varphi^*$ est diagonalisable.

- *Étude des endomorphismes normaux*

  Dans la suite, on suppose que φ est un endomorphisme normal, c'est-à-dire φ commute avec φ^* :

$$\varphi \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \varphi.$$

4. Montrer que : $\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\| = \|\varphi^*(x)\|$.

5. En déduire que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\varphi^*)$.

6. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par φ, alors $F^\perp$ est stable par φ^*.

7. On suppose que φ possède une valeur propre λ et on note $E_\lambda(\varphi)$ le sous espace propre associé. Montrer que $E_\lambda(\varphi)$ est stable par φ^*, puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par φ.

≫ *Pour aller plus loin, HEC 2019 Maths I, Essec 2014*

≫ Solution p. 26

Compléments

Exercice 34. ✦✦✦ **Une descente de gradient** *D'après ESCP 2012* # AS34

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$, la norme associée, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique réelle dont les valeurs propres sont toutes strictement positives.

On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée et on pose, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(X) = {}^tXAX.$$

1. Soit B un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'équation $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^n$ admet une unique solution qu'on notera R.

2. Montrer qu'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que pour tout X de $\mathbb{R}^n$

$$\alpha\|X\|^2 \leqslant \Phi(X) \leqslant \beta\|X\|^2.$$

3. Dans la suite de l'exercice, on pose pour $X \in \mathbb{R}^n$: $F(X) = \Phi(X) - 2\,{}^t BX$.

 a) Déterminer le gradient ∇F_X de F en X.

 b) Soient X et H deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$F(X+H) = F(X) + \langle \nabla F_X, H\rangle + \Phi(H).$$

 c) En déduire que F possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$. En quel point est-il atteint ?

4. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, $X \neq 0$. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ de façon à ce que $F(X - \alpha \nabla F_X)$ soit minimal. Calculer ce minimum.

5. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \nabla F_{X_k}, \text{ où } \alpha_k = \frac{\|\nabla F_{X_k}\|^2}{2\Phi(X_k)} \text{ si } X_k \neq R \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

 a) Montrer que la suite $(F(X_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

 b) Exprimer $F(X_{k+1}) - F(X_k)$ en fonction de α_k et de ∇F_{X_k}.

6. Une suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sera dite convergente vers un vecteur $Z \in \mathbb{R}^n$ si $\lim\limits_{k\to+\infty} \|Y_k - Z\| = 0$, ce qui revient à dire que les coordonnées de Y_k convergent vers les coordonnées correspondantes de Z.

 a) Montrer que la suite $(\nabla F_{X_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

 b) En déduire la limite de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

≫ Solution p. ??

Exercice 35. ✦✦✦ Exemple d'endomorphisme symétrique # AS35

On pose $E = \mathbb{R}_n[x]$ muni du produit scalaire définie par

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

1. Montrer que la relation $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,dt$ définit un endomorphisme u de l'espace E.

2. Vérifier que l'endomorphisme u est symétrique.

≫ Solution p. 27

Exercice 36. ✦✦✦ Décomposition spectrale, calcul et application # ASp1

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, inversible.

- **Existence de la décomposition**

1. Montrer que ${}^t MM$ est une matrice symétrique de valeurs propres strictement positives. En déduire qu'il existe une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives S telle que ${}^t MM = S^2$.

2. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale O telle que $M = OS$.

- **Unicité de la décomposition**

 Il existe un unique couple (O, S), O *orthogonale,* S *symétrique à valeurs propres strictement positives, tel que* $M = OS$. *Pour s'en convaincre, on a vu en exercice que la matrice* S *est unique (le refaire si besoin). La matrice* O *l'est donc tout autant et on a bien l'unicité du couple* (O, S).

- **Algorithme par la méthode de Newton**

 Dans la suite, on dit qu'une suite de matrices $(A_k)_k$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A si pour tout couple $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, la suite des coefficients $([A_k]_{i,j})_k$ converge vers le coefficient $[A]_{i,j}$. On admet [1] le résultat suivant :
 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. La suite $(M_k)_k$ de matrices de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$M_0 = M \quad \text{et} \quad M_{k+1} = \frac{1}{2} M_k \left(I_n + \left({}^t M_k M_k\right)^{-1}\right)$$

 est bien définie, converge vers O, où $M = OS$ est la décomposition polaire de M. De plus, la suite $\left({}^t M_k M\right)_k$ converge vers S.

3. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice M_k est inversible.

4. Proposer un programme python qui prend en argument M et renvoie une approximation du couple (O, S) obtenue par décomposition polaire.

1. mais on pourrait le démontrer (DS11 de l'année dernière).

- **Application**
  Soit $\left(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
  Un endomorphisme f de E est appelé *contraction* si pour tout x de E, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

5. Donner un exemple de contraction de E.

6. On suppose dans cette question que l'endomorphisme f est symétrique.

   a) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de f, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

   b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[x]$. Montrer que pour tout x de E :

$$\|\mathrm{P}(f)(x)\| \leqslant \sup_{\lambda\in \mathrm{Sp}(f)} |\mathrm{P}(\lambda)| \cdot \|x\|$$

   où $\mathrm{Sp}(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f.

- On suppose désormais que f est un endomorphisme bijectif de E, et on note M sa matrice associée dans une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E.

7. Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de S, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

- **Exemple**
  Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $\quad \mathrm{M}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.
  On note $(\mathrm{S}_{a,b}, \mathrm{O}_{a,b})$ le couple obtenue dans la décomposition polaire.

8. **a)** Expliciter la matrice $\mathrm{S}_{a,b}$ dans cet exemple.

   b) Justifier ensuite que $\det(\mathrm{O}_{a,b}) = 1$ et qu'il existe un réel θ tel que $\mathrm{O}_{a,b} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

9. On pose $\mathrm{J} = \mathrm{M}(0,1)$. On pose ensuite $\exp(\theta \mathrm{J}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!}(\theta \mathrm{J})^k$.

   Démontrer que $$\mathrm{O}_{a,b} = \exp(\theta \mathrm{J}).$$

Exercice 37. ✦✦✦ **Lemme du théorème spectral** # ASp2

On se propose dans la suite d'établir le résultat préliminaire et admis dans la preuve du théorème spectral : toute matrice symétrique réelle admet un valeur propre [2].

- **Résultat 1**
  Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et $\delta \in \mathbb{R}_*^+$.

1. Justifier que $\mathrm{A}^2 + \delta \mathrm{I}_n$ est une matrice inversible.

2. Soit R, un polynôme de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. Déduire de la question 1 que R(A) est inversible.

- **Résultat 2 - Polynôme minimal**

3. Justifier que toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet un polynôme annulateur non nul.

4. Démontrer qu'il existe un polynôme non nul annulateur de A de degré minimal et unitaire. Notons Π_{A}, un tel polynôme.

5. *(facultatif)*. Montrer que pour tout polynôme P annulateur de A, il existe Q polynôme tel que $\mathrm{P} = \Pi_{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{Q}$. En déduire que le polynôme Π_{A} est unique.

6. Justifier que si λ est une racine de Π_{A}, alors λ est une valeur propre de A.

- **Résultat 3**
  On rappelle que pour tout polynôme P, il existe :
  - a, un réel ;
  - des réels $\left(\lambda_i\right)_{i\in[\![1;r]\!]}$ et des entiers naturels $\left(m_i\right)_{i\in[\![1;r]\!]}$;
  - des polynômes $\left(\mathrm{R}_j\right)_{j\in[\![1;p]\!]}$ de degré 2, unitaire et de discriminant négatif

  tels que $$\mathrm{P} = a\prod_{i=1}^{r}\left(x-\lambda_i\right)^{m_i} \cdot \prod_{j=1}^{p} \mathrm{R}_j.$$

7. À l'aide des trois résultats, montrer que pour toute matrice A symétrique admet une valeur propre réelle.

On montre ainsi que la matrice admet un polynôme annulateur non nul scindé à racines simples. On a vu en exercice que cela prouve la diagonasabilité de la matrice. C'est le théorème spectral.

---
2. La preuve classique utilise les nombres complexes. Ces derniers sont hors-programme en ECG.

Table des matières