

L'art des mathématiques consiste à trouver le cas particulier qui contient tous les germes de la généralité.

DAVID HILBERT
Mathématicien allemand (1862-1943)

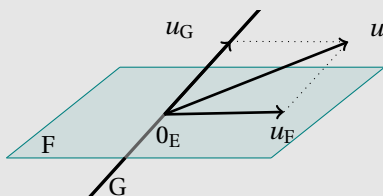
1 Rappels : projecteur et orthogonal d'un sous-espace

1.1 Les projecteurs

DÉFINITION (RAPPEL)

projecteur

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.



Ainsi, pour tout $u \in E$, il existe une unique décomposition $u = u_F + u_G$ où $(u_F, u_G) \in F \times G$. On pose

$$p : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ u & \mapsto & u_F. \end{cases}$$

Cette application est linéaire, elle est appelée le **projecteur** sur F parallèlement à G .

Remarque. Rappelons que $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(p)$. En particulier, on a

$$E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p).$$

Si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à cette décomposition en supplémentaire, on obtient une base de diagonalisation avec

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\text{rg } A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\dim \text{Ker } A}.$$

De plus, $\text{id}_E - p$ est le projecteur sur G parallèlement à F .

THÉORÈME (RAPPEL)

caractérisation d'un projecteur

Soit $p : E \rightarrow E$ une application. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- i) L'application p est un projecteur.
- ii) L'application p est linéaire et $p \circ p = p$.

Exercice 1



1. Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E .
 - a) Donner les puissances de p , puis celles de $2\text{id}_E + p$.
 - b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, simplifier $(\lambda p + \mu \text{id}_E) \circ (2\text{id}_E + p)$. En déduire que $2\text{id}_E + p$ est un isomorphisme. p. 15
2. Considérons deux projecteurs p et q qui commutent.
Montrer que $p \circ q$ est un projecteur et justifier que $\text{Ker}(p) + \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p \circ q)$.

PO1

1.2 Les sous-espaces orthogonaux

Soit F un sous-espace vectoriel de E . On appelle orthogonal de F , et on note $F^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F , c'est-à-dire :

$$F^\perp = \{u \in E \mid \forall v \in F, \langle u, v \rangle = 0\}.$$

PROPOSITION (RAPPEL)

espaces supplémentaires orthogonaux

Soit F , un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Alors

$$E = F \oplus F^\perp.$$

En particulier

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E.$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}_{2n}[x]$, on considère le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ et F le sous-espace vectoriel des polynômes impairs. On a $F = \text{Vect}(x, x^3, x^5, \dots, x^{2n+1})$. On vérifie que $F^\perp$ est le sous-espace des polynômes pairs.

Remarque. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F que l'on complète par $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$, une base orthonormée de E . On a

$$F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p), \quad F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n).$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, considérons $u = (1, 0, 1)$ et $F = \text{Vect}(u)$, la droite vectorielle engendrée par u . Déterminons une base de $F^\perp$.

- Rédaction 1. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} X \in \text{Vect}(u)^\perp &\iff \langle x, u \rangle = 0 \\ &\iff 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 0 \\ &\iff x = -z \\ &\iff X = (x, y, -x) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0). \end{aligned}$$

Si on pose $v = (1, 0, -1)$ et $w = (0, 1, 0)$, on obtient

$$\text{Vect}(u)^\perp = \text{Vect}(v, w).$$

Comme v et w sont non colinéaires, ils forment une base de $F^\perp$.

- Rédaction 2. Notons que

$$\dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim F = 2.$$

On vérifie que si on pose $v = (1, 0, -1)$ et $w = (0, 1, 0)$,

$$\langle v, u \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle w, u \rangle = 0.$$

On a donc $v, w \in F^\perp$, puis $\text{Vect}(v, w) \subset F^\perp$. Or (v, w) est une famille libre contenant autant de vecteurs que la dimension, c'est une base de $F^\perp$.

Exercice 2



Les questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère les plans F et G d'équations respectives :

$$x + 2y + 3z = 0 \quad \text{et} \quad x - y - z = 0.$$

p. 15

Déterminer une base de $F^\perp$ puis de $(F \cap G)^\perp$.

2. Soit $\mathbb{R}_3[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. On pose $F = \mathbb{R}_1[x]$.
Déterminer une base de $F^\perp$.

PO2

Exercice 3



- Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels.
Justifier que F et G sont supplémentaires si et seulement si $F^\perp$ et $G^\perp$ sont supplémentaires.

p. 16

PO3

PROPOSITION

condition nécessaire et suffisante d'appartenance à l'orthogonal

Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ un sous-espace vectoriel de E . On a

$$u \in F^\perp \iff \forall i \in [1; k], \quad \langle u, e_i \rangle = 0.$$

Exercice 4



Vecteur normal à un hyperplan

Soit F un hyperplan d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

1. Montrer qu'il existe $u_0 \in E$ tel que pour tout $v \in E$: $v \in F \iff \langle u_0, v \rangle = 0$.
2. Exemples

p. 16

- a) On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et l'hyperplan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$. Déterminer un vecteur normal à F .
b) Soit maintenant $E = \mathbb{R}_3[x]$ et le produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$. Déterminer un vecteur normal à $\mathbb{R}_2[x]$.

PO4

2

Projecteurs orthogonaux

2.1

Définitions et exemples

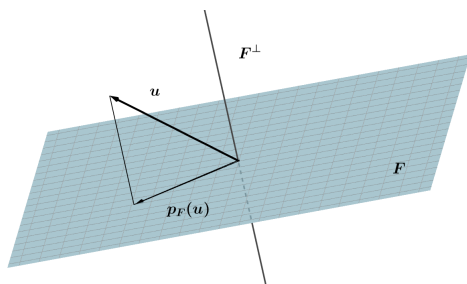
DÉFINITION

projecteur orthogonal

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien.

On appelle **projection orthogonale** sur F , notée p_F , la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Pour tout $u \in E$, $p_F(u)$ est appelé le **projeté orthogonal de u sur F** .



Retenons

$$v = p_F(u) \iff \begin{cases} v \in F \\ u - v \in F^\perp. \end{cases}$$

Remarque. D'après le rappel du début de chapitre, un projecteur p est orthogonal si et seulement si $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux, si et seulement si $E_0(p)$ et $E_1(p)$ sont des supplémentaires orthogonaux de E .

Exercice 5



✧ Soit p un projecteur orthogonal. Justifier que pour tout $u \in E$

$$\langle p(u), u \rangle = \|p(u)\|^2. \quad \text{p. 16}$$

PO5

Exercice 6



Exemple

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$. On définit l'application

$$p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad p(M) = \frac{M + {}^tM}{2}. \quad \text{p. 16}$$

1. Vérifier que p est un projecteur. Préciser le noyau et l'image de p .
2. Est-ce que p est un projecteur orthogonal?

PO6

PROPOSITION

caractérisation

Soit p , un projecteur d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On a l'équivalence entre les énoncés suivants.

- i) Le projecteur p est orthogonal.
- ii) L'endomorphisme p est symétrique.

Preuve. Raisonnons par double implication.

⇒ Supposons que p est orthogonal. Soient $u, v \in E$. Il existe $u_K, v_K \in \text{Ker } p$, $u_I, v_I \in \text{Im } p$ tels que

$$u = u_K + u_I \quad \text{et} \quad v = v_K + v_I.$$

En particulier, on a $p(u_K) = 0 = p(v_K)$, $p(u) = u_I$ et $p(v) = v_I$. Comme $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont orthogonaux

$$\begin{aligned} \langle p(u), v \rangle &= \langle u_I, v_K + v_I \rangle \\ &= \langle u_I, v_K \rangle + \langle u_I, v_I \rangle \\ &= \langle u_I, v_I \rangle \end{aligned}$$

et de même $\langle u, p(v) \rangle = \langle u_I, v_I \rangle$.

D'où l'égalité $\langle p(u), v \rangle = \langle u, p(v) \rangle$. Le projecteur p est orthogonal.

⇐ Supposons que p est symétrique. Soient $u \in \text{Ker } p$ et $v \in \text{Im } p$. On a

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle u, p(v) \rangle && \text{car } v \in \text{Im } p = E_1(p) \\ &= \langle p(u), v \rangle && \text{symétrie} \\ &= \langle 0, v \rangle && \text{car } u \in \text{Ker } p \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où, le noyau et l'image sont des espaces orthogonaux et p est un projecteur orthogonal. ■

PROPOSITION

caractérisation matricielle

Soient E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E , p un endomorphisme et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$. On a l'équivalence entre :

- i) L'endomorphisme p est un projecteur orthogonal.
- ii) La matrice A est symétrique et $A^2 = A$.

Preuve. D'après ce qui précède, un endomorphisme p est un projecteur orthogonal si et seulement si on a les deux conditions :

$$\text{I. } p \circ p = p \quad \text{II. } p \text{ est symétrique.}$$

Matriciellement, la condition I équivaut à $A^2 = A$. La condition II équivaut à ${}^tA = A$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. ■

 **Attention.** Il ne faut pas oublier la condition : $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

Exemples.

- Soient $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n u_i^2 = 1$ et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On vérifie que ${}^tUU = 1$ et $U{}^tU$ est une matrice de rang 1 qui est la matrice du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u)$.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et J_n , la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des $1/n$. On vérifie que $J_n^2 = J_n$ et J_n est symétrique. C'est donc la matrice d'un projecteur orthogonal dans la base canonique. Comme $\text{rg}(J_n) = 1$ (le noyau est donc de dimension $n - 1$) et $J_n U = U$ (où U est la matrice colonne ne contenant que des 1), on peut donc affirmer que J_n est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(1, 1, \dots, 1)$.

2.2 Expression et calcul explicite du projeté

THÉORÈME

expression du projeté dans une b.o.n

Soit F , un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et p_F , le projecteur orthogonal sur F .

Si $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F ,

alors $\forall u \in E, \quad p_F(u) = \sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i.$

Preuve. On peut compléter $\mathcal{B}_F$ en une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E . Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Soit $u \in E$.

• Rédaction 1.

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^n \langle u, e_i \rangle e_i}_{\in F^\perp}.$$

Par définition de projecteur orthogonal, p projette sur F parallèlement à $F^\perp$,

$$p_F(u) = \sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i.$$

• Rédaction 2.

$$\begin{aligned} p_F(u) &= \sum_{i=1}^n \langle p_F(u), e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle u, p_F(e_i) \rangle e_i \quad \text{car } p_F \text{ est symétrique} \\ &= \sum_{i=1}^p \langle u, p_F(e_i) \rangle e_i + \sum_{i=p+1}^n \langle u, p_F(e_i) \rangle e_i \\ p_F(u) &= \sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i. \end{aligned}$$

En effet, par définition du projecteur, si $i \in [1; p]$, $p_F(e_i) = e_i$ et si $i \in [p+1; n]$, $p_F(e_i) = 0_E$. ■

Exemples.

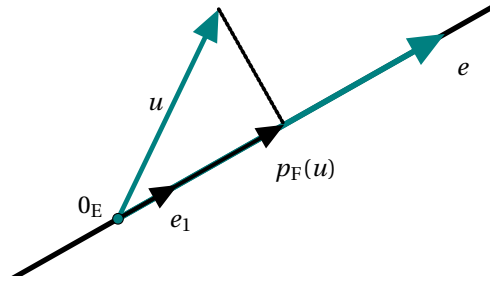
- **Projection sur une droite vectorielle**

Considérons le cas où F est une droite vectorielle. Il existe donc $e \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$F = \text{Vect}(e).$$

La famille constituée d'un unique vecteur $(e_1) = (e/\|e\|)$ est une base de F et d'après ce qui précède

$$p_F(u) = \langle u, e_1 \rangle e_1 = \frac{\langle u, e \rangle}{\|e\|^2} e.$$



- **Projection sur un hyperplan**

Soit H un hyperplan de E . L'orthogonal $H^\perp$ est donc de dimension 1 et on peut considérer u_0 , un vecteur non nul unitaire de $H^\perp$ (u_0 est un vecteur normal à H , voir exercice 4).

Soit q le projecteur sur la droite vectorielle $\text{Vect}(u_0) = H^\perp$ orthogonal. D'après ce que précède

$$\forall u \in E, \quad q(u) = \langle u, u_0 \rangle u_0.$$

Or $p_H = \text{id}_E - q$ est le projecteur orthogonal sur H . Donc

$$\forall u \in E, \quad p_H(u) = u - \langle u, u_0 \rangle u_0.$$

Remarque. Retour sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

→ *Orthonormalisation de deux vecteurs.*

Considérons les deux vecteurs u_1, u_2 non colinéaires. Posons p_1 le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u_1)$ puis

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad v_2 = u_2 - p_1(u_2), \quad e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

Alors les vecteurs (e_1, e_2) forment une base orthonormée de $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

→ *Cas général de n vecteurs.*

Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E non nécessairement orthonormée. Pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, posons p_k , le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. On définit ensuite la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E par la récurrence

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket, \quad e_{k+1} = \frac{u_{k+1} - p_k(u_{k+1})}{\|u_{k+1} - p_k(u_{k+1})\|}$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est bien définie, elle constitue une base orthonormée de E avec

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

En pratique, pour le calcul du projeté, on préfère toutefois la méthode suivante qui ne nécessite pas le calcul en amont d'une base orthonormée.

Comment calculer un projeté?

Soient $u \in E$ et F , un sous-espace vectoriel de E . Calculons $p_F(u)$, le projeté orthogonal de u sur F .

- *Étape 1*

On trouve une base $(u_1, \dots, u_p)$ de F (non nécessairement orthonormée).

- *Étape 2*

Comme $p_F(u) \in F$, il existe un unique p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $p_F(u) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$. On remarque ensuite que

$$\begin{cases} \langle u - p_F(u), u_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p_F(u), u_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle u - p_F(u), u_p \rangle = 0. \end{cases}$$

On explicite alors le système linéaire d'inconnues $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$

$$\begin{cases} \langle u, u_1 \rangle = \langle p_F(u), u_1 \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle = \langle p_F(u), u_2 \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, u_p \rangle = \langle p_F(u), u_p \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_p \rangle. \end{cases}$$

- *Étape 3*

On résout le système linéaire précédent à p équations pour trouver les p inconnues $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$. On conclut par le calcul de $p_F(u) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminons le projeté de $u = (0, -1, 4)$ sur l'espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}.$$

- *Étape 1.* Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in F &\iff x - 2y + 3z = 0 &\iff x = 2y - 3z \\ &\iff X = (2y - 3z, y, z) = y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-3, 0, 1) \\ &\iff X = y \cdot u_1 + z \cdot u_2. \end{aligned}$$

Où on a posé $u_1 = (2, 1, 0)$ et $u_2 = (-3, 0, 1)$. Ainsi,

$$X \in F \iff X \in \text{Vect}(u_1, u_2).$$

On conclut, (u_1, u_2) est une famille génératrice de F . Les vecteurs u_1 et u_2 sont non colinéaires, la famille (u_1, u_2) est libre. Par conséquent, (u_1, u_2) est une base de F .

- *Étape 2.* Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $p_F(u) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Précisons que

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle &= -6, \quad \langle u_1, u_1 \rangle = 5 \quad \langle u_2, u_2 \rangle = 10 \quad \text{et} \quad \langle u, u_1 \rangle = -1, \quad \langle u, u_2 \rangle = 4, \\ \langle p_F(u), u_1 \rangle &= 5\lambda_1 - 6\lambda_2 \quad \langle p_F(u), u_2 \rangle = -6\lambda_1 + 10\lambda_2. \end{aligned}$$

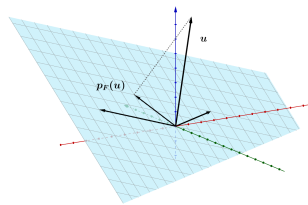
On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} \langle u - p_F(u), u_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p_F(u), u_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle p_F(u), u_1 \rangle = \langle u, u_1 \rangle \\ \langle p_F(u), u_2 \rangle = \langle u, u_2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} 5\lambda_1 - 6\lambda_2 = -1 \\ -6\lambda_1 + 10\lambda_2 = 4. \end{cases}$$

- *Étape 3.* On constate que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ est l'unique solution et

$$p_F(u) = u_1 + u_2 = (-1, 1, 1).$$

Le schéma ci-contre représente le plan F , le vecteur u et son projeté.



Exercice 7



◆ Exemple

Soient $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ et $F = \mathbb{R}_1[x]$.
Donner l'expression du projeté orthogonal de $Q(x) = 1 + x + x^2$ sur F .

p. 17

PO7

3

Applications à l'optimisation

3.1 Distance à un sous-espace vectoriel

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $u \in E$. On définit (sous réserve d'existence), la distance du vecteur u à F par

$$d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\|.$$

Notons que $u \in F$ si et seulement si $d(u, F) = 0$.

THÉORÈME

caractérisation du projeté par minimisation de la norme

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, p_F la projection orthogonale sur F et $u \in E$. Alors la distance $d(u, F)$ est bien définie et

$$d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\| = \|u - p_F(u)\|.$$

De plus, le minimum est atteint seulement pour $v = p_F(u)$.

Preuve. Soient $u \in E$ et $v \in F$,

$$u - v = (u - p(u)) + (p(u) - v).$$

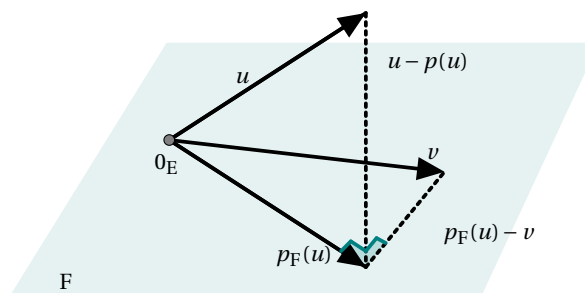
Or, $u - p(u)$ est orthogonal à F , donc $u - p(u)$ est orthogonal à $p(u) - v \in F$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\|u - v\|^2 = \|u - p(u)\|^2 + \|p(u) - v\|^2 \geq \|u - p(u)\|^2.$$

D'où l'inégalité avec égalité si et seulement si

$$\|p(u) - v\| = 0,$$

c'est-à-dire $v = p(u)$. ■



Remarques.

- Le projeté orthogonal de u sur F est caractérisé par

$$\forall v \in F, \quad \|u - v\| \geq \|u - p(u)\|.$$

Autrement dit : pour tout $u \in E$,

$$v = p_F(u) \iff \left(v \in F \text{ et } \|u - v\| = \min_{w \in F} \|u - w\| \right).$$

- Les vecteurs $u - p(u)$ et $p(u)$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\|u - p(u)\|^2 + \|p(u)\|^2 = \|u\|^2 \quad \text{d'où} \quad d(u, F)^2 = \|u - p(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|p(u)\|^2.$$

Exercice 8



◆ Exemples

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien, $u_0 \in E \setminus \{0_E\}$ et un hyperplan H .

1. Exprimer la distance d'un vecteur x à la droite $\text{Vect}(u_0)$.
2. Faire de même avec la distance à H . On exprimera le résultat à l'aide d'un vecteur $u_0 \in H^\perp$ (un vecteur normal).

p. 17

PO8

Exemple. Justifions que la fonction de deux variables

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 4(x-1)^2 + (x+y)^2 + (x-2y+1)^2$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$. Considérons dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\|\cdot\|$ associée. On a

$$f(x, y) = \left\| (2(x-1), x+y, x-2y+1) \right\|^2 = \left\| (2x, x+y, x-2y) - (2, 0, -1) \right\|^2.$$

Si on pose $u = (2, 0, -1)$ et si on définit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{ (2x, x+y, x-2y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(u_1, u_2) \quad \text{où} \quad \begin{cases} u_1 = (2, 1, 1) \\ u_2 = (0, 1, -2), \end{cases}$$

alors on a $f(x, y) = \|v - u\|^2$ avec $v = (2x, x+y, x-2y) \in F$. Le théorème de minimisation s'applique, il existe donc bien un minimum, il est atteint pour $v = p_F(u)$ où p_F est le projecteur orthogonal sur F .

Calculons le projeté $p_F(u) = xu_1 + yu_2$ et

$$\begin{cases} \langle u - p_F(u), u_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p_F(u), u_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle u, u_1 \rangle = \langle p_F(u), u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle = \langle p_F(u), u_2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} 3 = 6x + (-1)y \\ 2 = (-1)x + 5y \end{cases}$$

car $\langle u, u_1 \rangle = 3, \quad \langle u, u_2 \rangle = 2, \quad \langle u_1, u_2 \rangle = -1, \quad \langle u_1, u_1 \rangle = 6 \quad \text{et} \quad \langle u_2, u_2 \rangle = 5.$

La résolution de ce système donne $x = 17/29$ et $y = 15/29$ pour un minimum global qui vaut $f(17/29, 15/29) \simeq 2,2$.

Exercice 9



◆◆ Justifier que la quantité suivante est bien définie et la calculer.

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

p. 17

PO9

3.2 Problème des moindres carrés, droite de régression

Projeté sur l'image et moindres carrés

Soit f une application linéaire $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, b un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. Lorsque f n'est pas surjective ($p < n$), il se peut que b n'appartienne pas à l'image de f et l'équation $f(x) = b$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^p$, n'admet pas de solution. On cherche alors un vecteur x dont l'image « est la plus proche » de b . Plus précisément, on munit l'espace d'arrivée de sa structure euclidienne canonique et on veut justifier l'existence de

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} \|f(x) - b\|$$

et trouver un (le?) vecteur x réalisant le minimum. On constate qu'il s'agit de rechercher

$$\min_{y \in \text{Im } f} \|y - b\|.$$

Comme $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de E , le théorème de minimisation prouve l'existence du minimum qui est atteint en un unique point :

$$y = p(b) \quad \text{où } p \text{ désigne le projecteur orthogonal sur } \text{Im } f.$$

Précisons que si f est injectif (le rang de f est alors p), y étant unique, on a bien un unique antécédent x tel que $f(x)$ soit « le plus proche » de b . Noter que y est unique mais si f n'est pas injective, x n'est pas unique. Tout vecteur $x + x_K$ avec $x_K \in \text{Ker } f$ convient.

Donnons une version matricielle :

THÉORÈME

problème des moindres carrés, pseudo-solution

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq p$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors il existe un unique vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|AX - B\|$ où $\|\cdot\|$ désigne ici la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Preuve. Considérons l'application

$$f: \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX. \end{cases}$$

L'application f est clairement linéaire. De plus, la formule du rang donne

$$\dim(\text{Ker } f) = \dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) - \text{rg}(f) = p - \text{rg}(A) = 0.$$

On en déduit que le noyau est trivial et l'application f est injective. Ensuite, pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$\|AX - B\| = \|f(X) - B\|.$$

Le théorème précédent conclut. Il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $f(X_0)$ minimise la norme avec

$$f(X_0) = p_{\text{Im } f}(B).$$

Le vecteur $f(X_0)$ est unique, puis par injectivité de f , X_0 est unique. ■

Remarque. Le second exercice qui suit permet de justifier que le vecteur X_0 est l'unique solution du système de Cramer ${}^t AAX = {}^t AB$. On parle alors de **pseudo-solution**.

Exercice 10



◆ Exemple

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

p. 17

Justifier et calculer l'unique matrice colonne X telle que la norme $\|AX - B\|$ soit minimale.

PO10

Exercice 11



◆◆ Reprenons les notations du théorème et justifions la remarque précédente.

1. a) Justifier que $\text{Ker}({}^t AA) = \text{Ker}(A)$, puis $\text{rg}({}^t AA) = \text{rg}(A)$.

b) En déduire que ${}^t AA$ est une matrice inversible.

2. a) Vérifier que pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, {}^t A(AX_0 - B) \rangle = 0$.

p. 18

b) En déduire que ${}^t AAX_0 = {}^t AB$.

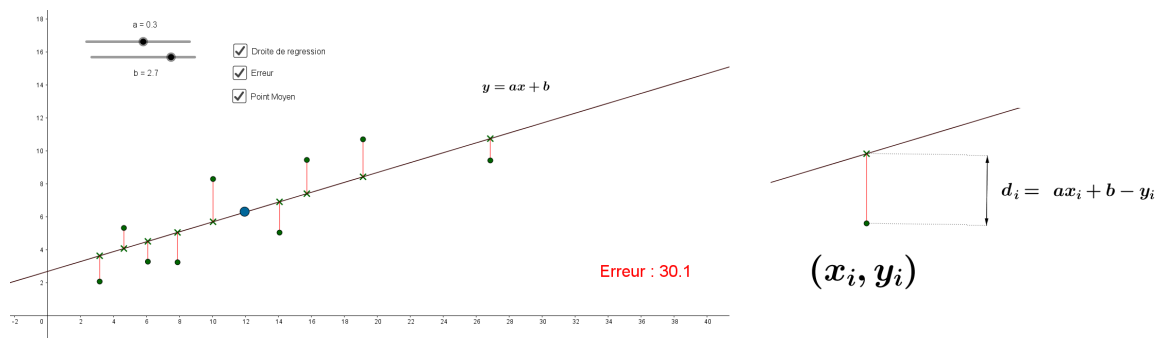
On a donc bien une unique solution donnée par $X_0 = ({}^t AA)^{-1} {}^t AB$. Pour une seconde démonstration, voir l'exercice 19, p.13, partie II.

PO11

Régression linéaire

Considérons n points de $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ non alignés verticalement. On cherche la droite qui « approxime » au mieux ces n points. Si on note $y = ax + b$, l'équation d'une droite, on cherche à minimiser l'erreur

$$E_r = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$



Traduisons matriciellement le problème. Posons

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{de sorte que} \quad AX - B = \begin{bmatrix} ax_1 + b - y_1 \\ ax_2 + b - y_2 \\ \vdots \\ ax_n + b - y_n \end{bmatrix}.$$

Si on considère le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la norme associée

$$E_r = \|AX - B\|^2.$$

Les deux colonnes de la matrice A forment une famille libre (les points ne sont pas alignés verticalement). La matrice A est donc de rang 2. D'après le théorème précédent, il existe un seul vecteur minimisant $\|AX - B\|$. Calculons ce vecteur X_0 à l'aide de la remarque. On a

$${}^tAA = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Justifions que tAA est inversible.

$$\det({}^tAA) = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ aux vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $u_0 = (1, \dots, 1)$, il vient :

$$\langle u_0, x \rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Cette inégalité est en fait stricte car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Le déterminant est donc non nul et la matrice tAA est inversible. L'inverse est donné par

$$({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \begin{bmatrix} n & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}.$$

De plus, on calcule

$${}^tAB = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{bmatrix}.$$

Ceci permet d'expliciter le vecteur X, puis ses composantes a et b :

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

Si $\bar{x}$ (resp. $\bar{y}$) et σ_x (resp. σ_y) désignent la moyenne et l'écart-type empirique de la série statistique $\{x_i \mid i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ (resp. $\{y_i \mid i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$), $\text{Cov}(x, y)$ désigne la covariance empirique de x et y et $\rho_{x,y}$ désigne le coefficient de corrélation empirique, alors la droite de régression linéaire de y en x a pour équation :

$$y - \bar{y} = \rho_{x,y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x^2} (x - \bar{x}).$$

Remarque. Nous verrons une seconde démonstration de ce résultat par le calcul différentiel.



Exercices



Exercice 12. ♦ ✎ Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel # PO12

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}.$$

>> Solution p. 18

Exercice 13. ♦ On place dans $\mathbb{R}^5$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Soit $F = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ où # PO13

$$f_1 = e_1 + e_2 - e_3, \quad f_2 = e_3 + e_5 \quad \text{et} \quad f_3 = e_2 - e_3.$$

Donner la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur F .

>> Solution p. 18

Exercice 14. ♦♦ ✎ À bonne distance d'Attila # PO14

On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB) \in \mathbb{R}.$$

Soit H , le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle.

1. Donner la dimension de $H^\perp$. Préciser une base.
2. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $\min_{A \in H} \|A - J\|$.

>> Solution p. 18

Exercice 15. ♦♦♦ CNS pour un projecteur orthogonal # PO15

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et p , un projecteur de E .

1. Montrer l'équivalence entre les énoncés :

$$\text{i) Le projecteur } p \text{ est orthogonal} \quad \text{ii) } \forall x \in E, \quad \langle x, p(x) \rangle \geq 0.$$

Indication. On pourra considérer $\lambda x + y$ où $x \in \text{Ker } p$, $y \in \text{Im } p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Même question avec les énoncés :

$$\text{i) Le projecteur } p \text{ est orthogonal} \quad \text{iii) } \forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

>> Solution p. 18

Exercice 16. ♦♦ Matrice d'un projecteur orthogonal # PO16

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien et F , un sous-espace vectoriel de E .

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $(u_1, \dots, u_p)$ une base orthonormée de F . On note $U_1, \dots, U_p$ les vecteurs colonnes des coordonnées de $u_1, \dots, u_p$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que la matrice du projeté orthogonal sur F , noté p_F , dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum_{i=1}^p U_i {}^t U_i.$$

>> Solution p. 19

Exercice 17. ♦♦♦ ✎ Deux approches pour un même problème de minimisation # PO17

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$F(x, y, z) = 24x^2 + 2y^2 + z^2 + 12xy + 2yz + 4zx - 240x - 48y - 12z.$$

1. a) Vérifier que F admet un unique point critique, noté A .
 b) On admet (par le calcul) que $F(x, y, z) = (2x + y + z - 6)^2 + (4x + y - 18)^2 + 4(x - 9)^2 - 684$.
 En déduire que F admet un minimum sur $\mathbb{R}^3$. Préciser la valeur du minimum.
 c) Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Justifier la convergence et exprimer en fonction de F, l'intégrale :

$$I(a, b, c) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt.$$

e) En déduire l'existence et la valeur de

$$I = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} I(a, b, c).$$

2. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_3[x]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$$

On vérifie que cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[x]$.

a) En utilisant la question 1, calculer la distance du polynôme $P_0(x) = x^3$ au sous-espace $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Comment retrouver ce résultat en calculant le projeté orthogonal de P_0 sur $\mathbb{R}_2[x]$?

>> Solution p. 19

Exercice 18. ♦♦♦♦ Partition de l'unité

PO18

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. Soient p, q deux projecteurs orthogonaux tels que

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\|^2 + \|q(x)\|^2 \leq \|x\|^2.$$

a) Justifier que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

b) En déduire que $p + q$ est un projecteur orthogonal.

2. Soient maintenant $p_1, p_2, \dots, p_n$ des projecteurs orthogonaux tels que $\sum_{i=1}^n p_i = \text{id}_E$.

a) Montrer que pour tout $x \in E$

$$\sum_{i=1}^n \|p_i(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

b) En déduire que pour toute partie non vide I de $\llbracket 1; n \rrbracket$ l'endomorphisme $\sum_{i \in I} p_i$ est un projecteur orthogonal.

>> Solution p. 20

Exercice 19. ♦♦♦♦ Sujet de révision

extrait de ESSEC 2012 # PO19

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Ainsi si

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),$$

le produit scalaire de X et Y s'obtient par la relation ${}^tXY = \sum_{i=1}^m x_i y_i$ et la norme euclidienne de Y par : $\|Y\|_m^2 = {}^tYY = \sum_{i=1}^m y_i^2$.

1. Question préliminaire.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k non nulle et $(U_1, U_2, \dots, U_k)$ une base orthonormée de vecteurs colonnes de F .

On envisage la projection orthogonale sur F représentée par sa matrice P dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $P = \sum_{i=1}^k U_i {}^t U_i$ et vérifier que P est une matrice symétrique.

2. Partie I. Décomposition spectrale de la matrice tAA associée à une matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

On envisage dans toute cette partie une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

a) Préciser la taille de la matrice tAA et vérifier que $\text{Ker } A \subset \text{Ker } {}^tAA$.

b) Montrer que si $X \in \text{Ker } {}^tAA$ alors $\|AX\|_m = 0$ et établir que $\text{Ker } A = \text{Ker } {}^tAA$. Montrer que A et tAA sont nulles simultanément.

c) Justifier l'égalité : $\text{Im } {}^tA = \text{Im } {}^tAA$.

3. a) Établir que la matrice tAA est diagonalisable et en calculant $\|AX\|_m^2$ pour X vecteur propre de la matrice tAA , montrer que ses valeurs propres sont des réels positifs.

b) On désigne par $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ la liste des valeurs propres distinctes de la matrice tAA , classée dans l'ordre croissant. On rappelle que

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}({}^tAA) \text{ où } E_{\lambda_i}({}^tAA) = \text{Ker}({}^tAA - \lambda_i I_n).$$

Pour i entier naturel compris entre 1 et p , on note P_i la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Vérifier que pour i et j distincts compris entre 1 et p , $P_i P_j$ est la matrice nulle.

Justifier les relations : $I_n = \sum_{i=1}^p P_i$ et ${}^tAA = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i$. Cette dernière écriture s'appelle la décomposition spectrale de tAA .

4. Exemples

- a) Déterminer la décomposition spectrale de tAA lorsque A est la matrice 3,3 égale à

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- b) On envisage la matrice ligne $A = (a_1 a_2 \dots a_n)$ où les réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont fixés, non tous nuls simultanément. Ainsi, $A^t A$ est un réel. Montrer que le polynôme $X^2 - (A^t A)X$ est annulateur pour la matrice tAA . Préciser la liste des valeurs propres et la décomposition spectrale de la matrice tAA .

Partie II. Pseudo solution d'une équation linéaire.

On s'intéresse dans cette partie à l'équation $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$. Une matrice X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite solution de cette équation si elle vérifie la relation $AX = B$. Elle est dite pseudo solution de cette équation si elle vérifie :

$$\forall Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|AX - B\|_m \leq \|AZ - B\|_m$$

5. On suppose que l'équation $AX = B$ admet au moins une solution. Montrer que X est une pseudo solution si et seulement si elle est solution de l'équation.
6. On suppose que X est une pseudo solution de l'équation. Montrer que, pour tout réel λ et toute matrice Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda {}^tY^t A(AX - B) \geq 0.$$

En déduire que ${}^tAAX = {}^tAB$.

7. Montrer que tout X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant la relation ${}^tAAX = {}^tAB$ est pseudo solution et en déduire qu'il existe toujours au moins une pseudo-solution de l'équation.

8. Exemple

Déterminer toutes les pseudo-solutions de l'équation $AX = B$ lorsque :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Parmi celles-ci, préciser celle dont la norme euclidienne est minimale.

9. Donner une condition sur le rang de A pour que l'équation admette une unique pseudo solution.

>> Solution p. 20

Les exotiques

Exercice 20. ♦♦♦ Dans la suite, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

PO20

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires centrées et admettant un moment d'ordre 2. On pose

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_X = \left(\text{Cov}(X_i, X_j) \right)_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Soit $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Exprimer la variance $V(\langle u, X \rangle)$ à l'aide de C_X et u .
($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne ici le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).

2. Soient H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et $u \in H^\perp$.

Montrer que l'événement $[X \in H]$ est presque sûr si et seulement si $u \in \text{Ker } C_X$.

>> Solution p. 21

Exercice 21. ♦♦♦ Soient X_1, X_2 , deux variables aléatoires indépendantes et suivant une loi normale centrée réduite. Soit M , # PO21
un point de coordonnées (X_1, X_2) . Soient $a \in \mathbb{R}$ et Δ_a la droite d'équation $y = ax$. On pose

$$Y = \inf_{u \in \Delta_a} \|M - u\|^2.$$

Justifier que Y admet une espérance et la calculer.

>> Solution p. 21

Table des matières

1	Rappels : projecteur et orthogonal d'un sous-espace	1
1.1	Les projecteurs	1
1.2	Les sous-espaces orthogonaux	2
2	Projecteurs orthogonaux	3
2.1	Définitions et exemples	3
2.2	Expression et calcul explicite du projeté	5
3	Applications à l'optimisation	8
3.1	Distance à un sous-espace vectoriel	8
3.2	Problème des moindres carrés, droite de régression	9