

CHAPITRE 1

Espaces préhilbertiens

Ἀγεωμέτρητος μηδὲὶς εἰσίτω

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre.

Inscription que Platon aurait fait graver à l'entrée de l'Académie, son école d'Athènes.

1

Espaces euclidiens (rappels d'ECG2)

1.1

Formes bilinéaires, produit scalaire

DÉFINITION

forme bilinéaire

Soient E un espace vectoriel et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que φ est une **forme bilinéaire** si elle est

→ linéaire à droite

$$\forall u, v, w \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \varphi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \varphi(u, v) + \mu \varphi(u, w).$$

→ linéaire à gauche

$$\forall u, v, w \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda v + \mu w, u) = \lambda \varphi(v, u) + \mu \varphi(w, u).$$

DÉFINITION

produit scalaire

Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est un **produit scalaire** si :

→ φ est une forme bilinéaire.

→ φ est symétrique : $\forall u, v \in E, \quad \varphi(u, v) = \varphi(v, u).$

→ φ est positive : $\forall u \in E, \quad \varphi(u, u) \geq 0.$

→ φ est définie : $\forall u \in E, \quad \varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0_E.$

Remarque. Si φ est linéaire à droite et symétrique alors φ est linéaire à gauche et donc bilinéaire. En pratique, on démontre donc d'abord la symétrie et une linéarité (à gauche ou droite) pour obtenir la condition de bilinéarité.

Notation. On écrit souvent $\langle u, v \rangle$ au lieu de $\varphi(u, v)$.

Exemples. Nous en donnons plusieurs pour illustrer la diversité des situations.

- Dans $\mathbb{R}^n$.

Pour tous $u = (x_1, \dots, x_n)$ et $v = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, posons $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé **produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$** .

Preuve. Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On pose

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad v = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \text{et} \quad w = (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

→ **Symétrie.**

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \langle v, u \rangle.$$

→ **Bilinéarité.** Commençons par la linéarité à droite.

$$\langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i (\lambda y_i + \mu z_i) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \mu \sum_{i=1}^n x_i z_i = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle.$$

Puis, par symétrie, on a la linéarité à gauche et donc la bilinéarité.

→ **Définie positive.**

$$\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0.$$

Avec égalité si et seulement si pour chaque indice i , $x_i = 0$. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. On a donc

$$\langle u, u \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad u = (x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Conclusion. On a bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. ■

- Dans $\mathbb{R}_n[x]$.

» Voir exercice 4.

Donnons deux exemples dans le cas polynomial.

→ Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, n+1$ réels deux à deux distincts. L'application suivante est un produit scalaire

$$(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(a_i) Q(a_i).$$

→ On peut aussi poser pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$

$$(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t) Q(t) dt.$$

- Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

L'application $\varphi : (X, Y) \mapsto {}^tXY$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On l'appelle produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Noter, comme souvent, qu'on identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.

- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

» Voir exercice 9.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB).$$

- Dans $\mathcal{C}^0([a; b])$ avec $a < b$.

Pour $f, g \in \mathcal{C}^0([a; b])$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

DÉFINITION

norme

Soit E , un espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ . L'application

$$N : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R} \\ u & \mapsto N(u) = \sqrt{\varphi(u, u)} \end{cases}$$

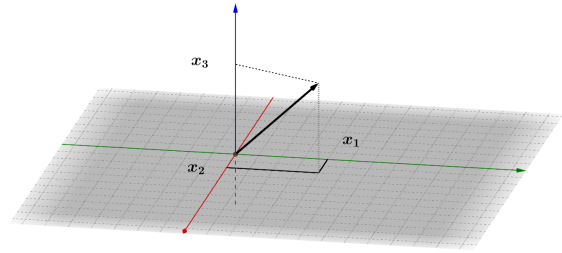
est appelée **norme associée au produit scalaire φ** .

Notation. On note souvent $\|\cdot\|$ au lieu de N .

Exemple. Dans $\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique est définie par :

$$\forall u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on constate que la norme représente la distance à l'origine, ou encore la longueur du vecteur.



Remarque. Par extension, pour $u, v \in E$, $\|u\|$ représente la « longueur » du vecteur u alors que $\|u - v\|$ correspond à la « distance » entre les deux vecteurs.

PROPOSITION

règles de calcul

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont $\|\cdot\|$ est la norme associée.

- $\forall u \in E, \quad \|u\| = 0 \iff u = 0_E.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|.$
- $\forall u, v \in E, \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$

Preuve. • Raisonnons par équivalence en utilisant le fait qu'un produit scalaire est défini. Soit $u \in E$

$$\|u\| = 0 \iff \langle u, u \rangle = \|u\|^2 = 0 \iff u = 0_E.$$

- Soient $u \in E, \lambda \in \mathbb{R}$. Comme le produit scalaire est bilinéaire

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle u, u \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle u, u \rangle} = |\lambda| \cdot \|u\|.$$

- Soient $u, v \in E$

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle && \text{bilinéarité} \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle && \text{symétrie} \\ \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Exercice 1



◆ Identité du parallélogramme et formule de polarisation

Montrer que pour tous $u, v \in E$,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \text{et} \quad \langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

AB1

THÉORÈME

inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dont $\|\cdot\|$ est la norme associée.

$$\forall u, v \in E, \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si la famille (u, v) est liée.

Exercice 2



◆◆ Preuve

1. Justifier que si la famille (u, v) est liée alors $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.
2. Dans la suite, on suppose la famille (u, v) libre. À l'aide de l'application P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(\lambda) = \|\lambda u + v\|^2$, justifier que

$$|\langle u, v \rangle| < \|u\| \cdot \|v\|.$$

AB2

Exemple. En reprenant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient

$$\forall (x_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (y_i)_{i \in [1, n]} \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

PROPOSITION

inégalité triangulaire

Pour tous $u, v \in E$,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Preuve. Soient $u, v \in E$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

D'où le résultat car la fonction racine carrée est croissante et la norme positive. ■

Exercice 3



◆◆ Soient E un espace euclidien et $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$.

1. Soient $u, v \in E$.
Que peut-on dire de u et v si on a le cas d'égalité $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$?
2. 🔍 Démontrer que B est une partie strictement convexe de E , c'est-à-dire que, pour tous $x, y \in B$ avec $x \neq y$, tout $t \in]0; 1[$, on a $\|tx + (1-t)y\| < 1$.
3. Illustrer ce résultat dans $\mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire canonique.

AB5

Remarque. Par récurrence, on montre que pour toute famille finie $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ de vecteurs de E

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p \|u_i\|.$$

Orthogonalité et vecteurs

DÉFINITION

vecteurs orthogonaux

Soient E , un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Deux vecteurs u et v de E sont dits **orthogonaux**, noté $u \perp v$, si $\langle u, v \rangle = 0$.

Remarque. Le seul vecteur de E qui soit orthogonal à tous les autres vecteurs de E est le vecteur nul. Autrement dit, pour tout $u \in E$, on a l'équivalence :

$$(\forall v \in E, \quad \langle u, v \rangle = 0) \iff u = 0_E.$$

Preuve. En effet, prouvons ce point par double-implication.

⇒ Pour $v = u$, on a directement $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = 0$, puis $u = 0_E$ car le produit scalaire est défini.

⇐ Par linéarité à gauche du produit scalaire, pour tout $v \in E$,

$$\langle 0_E, v \rangle = \langle 0 \cdot 0_E, v \rangle = 0 \cdot \langle 0_E, v \rangle = 0.$$

! Attention. La notion d'orthogonalité est relative au produit scalaire.

Exercice 4



◆◆ Deux produits scalaires sur $\mathbb{R}_2[x]$

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$, on pose

$$\varphi_1(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \quad \text{et} \quad \varphi_2(P, Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

1. Vérifier que φ_1 et φ_2 définissent deux produits scalaires sur $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Notons P_1 le polynôme d'expression $P_1(x) = x$.
Donner un vecteur orthogonal à P_1 relativement à φ_1 mais non orthogonal pour φ_2 et inversement.

AB6

THÉORÈME

de Pythagore

Deux vecteurs u et v sont **orthogonaux** si et seulement si

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Preuve. Il suffit de rappeler que pour tous $u, v \in E$

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle.$$

DÉFINITIONS

famille normée, orthogonale, orthonormée

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

- La famille est dite **normée** si pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\|u_i\| = 1$.
- La famille est dite **orthogonale** si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, $u_i \perp u_j$.
- La famille est dite une famille **orthonormée** (ou orthonormale) si c'est une famille orthogonale et normée.

Exercice 5



◇ Pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$, on pose $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

1. a) Montrer que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.
b) Vérifier que la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
En déduire une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

2. Généralisation.

Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$ on considère maintenant $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

- a) Vérifier que ceci définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- b) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[x]$ pour ce produit scalaire.

AB8

Exercice 6



d'après ESCP 2001

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[x]$ tel que pour tout x réel : $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.

1. Montrer que l'application : $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.
2. Montrer que la famille $(T_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[x]$ muni de ce produit scalaire.
3. Comment obtenir une base orthonormée?

AB9

Remarques. Autrement dit, la famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est orthonormée si et seulement si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \quad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Une des implications du théorème de Pythagore se généralise, si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs de E , alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2.$$

La réciproque est fautive : ce n'est pas parce que cette égalité est vérifiée que la famille est orthogonale.

Preuve. Procédons par récurrence sur p .

→ *Initialisation.* Pour $p = 1$, l'énoncé est directement vrai.

→ *Hérédité.* Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang p . Si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_{p+1})$ est orthogonale. En particulier $u_1 + \dots + u_p$ est orthogonal à u_{p+1} car

$$\left\langle \sum_{i=1}^p u_i, u_{p+1} \right\rangle = \sum_{i=1}^p \underbrace{\langle u_i, u_{p+1} \rangle}_0 = 0.$$

Par application du théorème de Pythagore (avec deux vecteurs)

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{p+1} u_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^p u_i + u_{p+1} \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^p u_i \right\|^2 + \|u_{p+1}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^p \|u_i\|^2 + \|u_{p+1}\|^2 = \sum_{i=1}^{p+1} \|u_i\|^2 \end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang suivant.

→ *Conclusion.* La propriété est vérifiée pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

PROPOSITION

orthogonalité implique liberté

Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E .

- Si $\mathcal{F}$ est orthogonale, et si aucun des vecteurs de $\mathcal{F}$ n'est le vecteur nul, **alors** $\mathcal{F}$ est libre.
- Si $\mathcal{F}$ est orthonormée, **alors** $\mathcal{F}$ est libre.

Remarque. Les réciproques sont fausses.

Preuve. • Prouvons le premier point. Notons $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j u_j = 0_E.$$

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, par linéarité à gauche du produit scalaire

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^p \lambda_j u_j, u_i \right\rangle = \sum_{j=1}^p \lambda_j \langle u_j, u_i \rangle = \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle = \lambda_i \|u_i\|^2.$$

Ainsi, $\lambda_i = 0$ car $\|u_i\|^2 \neq 0$, u_i est non nul. Ce calcul étant vérifié pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la famille $\mathcal{F}$ est libre.

- Le second point est une conséquence directe du premier puisque les vecteurs de norme 1 sont non nuls.

Exercice 7



♦ Soit $E = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi])$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt.$$

- Justifier que la famille $(x \mapsto \cos(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est orthogonale. Est-elle orthonormée?
- En déduire que les familles $(x \mapsto \cos(kx))_{1 \leq k \leq n}$ et $(x \mapsto \sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ sont des familles libres de E .
- Est-ce que la famille $(x \mapsto \cos(kx), x \mapsto \sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est aussi une famille libre de E ?

AB11

Orthogonalité et sous-espaces vectoriels

DÉFINITION

sous-espaces orthogonaux

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **orthogonaux** si

$$\forall u \in F, \quad \forall v \in G, \quad u \perp v.$$

Remarque. Soient $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ et $(\varepsilon_j)_{j \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ deux familles respectivement de F et G . Si les familles sont génératrices, alors le sous espace vectoriel F est orthogonal à G si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad e_i \perp \varepsilon_j.$$

Preuve. Soit $u \in F$. Il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Soit $v \in G$. Il existe $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}$ tels que $v = \sum_{j=1}^p \mu_j \varepsilon_j$.

Par bilinéarité du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^p \mu_j \varepsilon_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_i \mu_j \underbrace{\langle e_i, \varepsilon_j \rangle}_0 = 0.$$

Par suite $u \perp v$. Ceci étant valable pour tous $u, v \in E$, les sous-espaces F et G sont orthogonaux.

Exercice 8



♦ Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on pose $u = (1, 2, 3)$ et

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(u).$$

- Donner une famille génératrice de F .
- Vérifier que F et G sont orthogonaux.

AB12

Exercice 9



♦ Exemple dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^t B)$ est un produit scalaire.
- Notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$), l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

AB13

DÉFINITION - PROPOSITION

le s.e.v orthogonal

Soit F une partie de E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Posons

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

Alors :

- L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Les sous-espaces F et $F^\perp$ sont orthogonaux.

Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ s'appelle **l'orthogonal** de F dans E .

Preuve. Soient $u, v \in F^\perp$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit $w \in F$. Par bilinéarité

$$\begin{aligned}\langle \lambda u + \mu v, w \rangle &= \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

D'où $\lambda u + \mu v \in F^\perp$. Comme $0_E \in F^\perp$, $F^\perp$ est non vide et stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de E . Soient $u \in F$, $v \in F^\perp$. Par définition, $\langle u, v \rangle = 0$. Les sous-espaces F et $F^\perp$ sont orthogonaux. ■

Exemples. On a $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Remarques.

- Si G est un s.e.v de E tel que G est orthogonal à F , alors $G \subset F^\perp$. Autrement dit, $F^\perp$ est le plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E qui soit orthogonal à F .
- Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$.

Soit $u \in G^\perp$. Montrons que $u \in F^\perp$.

Soit $v \in F$. Par hypothèse, $v \in G$ et par définition $\langle u, v \rangle = 0$ d'où $u \perp v$ et $G^\perp \subset F^\perp$.

Exercice 10



♦ Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Prouver les énoncés suivants.

1. $F \subset (F^\perp)^\perp$.
2. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
3. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
4. $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.

AB14

1.2 Espaces euclidiens et bases orthonormées

DÉFINITION

espaces euclidiens

Un **espace euclidien** est la donnée :

- d'un espace vectoriel E de dimension finie,
- d'un produit scalaire sur E .

On note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Exemples. Reprenons les exemples étudiés précédemment.

- $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$.
- $\mathbb{R}_n[x]$ muni d'un produit scalaire.
- $\mathcal{C}^0([a, b])$ n'est pas un espace euclidien.

En première année, on a vu qu'une famille $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base d'un espace vectoriel E si tout vecteur de E s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire de la famille. Le caractère générateur de la famille justifiant l'existence de la décomposition, le caractère libre justifiant l'unicité de cette décomposition. Toutefois, il reste une question : comment calculer efficacement et sans erreur les coefficients de la décomposition ? Voici une des motivations des bases orthonormées.

Définitions, exemples et coordonnées

Comme son nom l'indique une famille $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une **base orthonormée** (abrégié en b.o.n) si c'est à la fois :

- une base : $\forall u \in E, \exists ! (\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}, u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$
- une famille orthonormée : $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Exemples.

- Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont des b.o.n pour les produits scalaires canoniques.
- On définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$ en posant, pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_2[x]$

$$\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

On vérifie que si l'on pose $L_0(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $L_1(x) = -x(x-2)$ et $L_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$, alors la famille (L_0, L_1, L_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ pour le produit scalaire précédent.

Exercice 11



◇ Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier que la famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ définie par

$$\varepsilon_1 = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2, \quad \varepsilon_2 = \sin(\theta)e_1 - \cos(\theta)e_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = e_3$$

reste une base orthonormée pour le produit scalaire canonique. Donner une interprétation graphique.

AB15

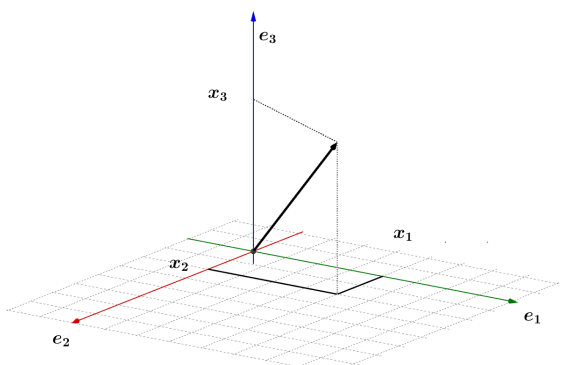
THÉORÈME

coordonnées dans une b.o.n

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée.
Pour tout vecteur $u \in E$,

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i.$$

Autrement dit, les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ sont les réels $\langle u, e_1 \rangle, \dots, \langle u, e_n \rangle$.



Preuve. Soit $u \in E$. La famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , il existe donc $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a par linéarité à gauche du produit scalaire

$$\langle u, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle.$$

Comme la famille est orthonormée, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ dès que $i \neq j$ et $\langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1$. Il vient $\langle u, e_j \rangle = \lambda_j$ et la formule est finalement prouvée. ■



Attention. Il ne faut pas oublier l'hypothèse "base orthonormée".

PROPOSITION

norme et b.o.n

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, une base orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Pour tous $u, v \in E$,

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle \quad \text{et} \quad \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle^2.$$

Preuve. Soient $u, v \in E$. D'après le théorème précédent et la bilinéarité du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^n \langle v, e_j \rangle e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle u, e_i \rangle \langle v, e_j \rangle \langle e_i, e_j \rangle.$$

Comme $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$, la somme se simplifie

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{=1} = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle.$$

La seconde formule s'en déduit avec $v = u$ car $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$. ■

Théorèmes d'existence d'une b.o.n et procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$, une base quelconque d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Prouvons qu'il existe une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que :

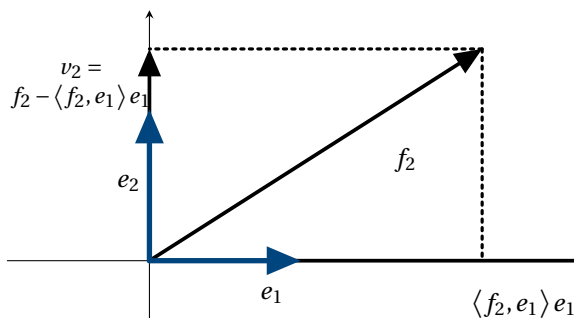
- i) $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.
- ii) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{vect}(f_1, f_2, \dots, f_k)$.

La preuve s'effectue par récurrence et donne un procédé de construction de la base $\mathcal{B}$ à partir de la base $\mathcal{C}$.

→ **Initialisation.** On pose $v_1 = f_1$ et $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$.

→ Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $e_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$ où $v_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k, e_i \rangle e_i$.

Avant de faire la preuve, commençons par détailler le procédé d'orthonormalisation de Schmidt sur une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.



Posons

$$f_1 = (1, 2, 1), \quad f_2 = (3, 1, 1) \quad \text{et} \quad f_3 = (-2, 1, 6).$$

Avec les notations $v_1 = f_1$ et $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$.

Puis $v_2 = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1 = f_2 - \frac{1}{\|v_1\|^2} \langle f_2, v_1 \rangle v_1$.

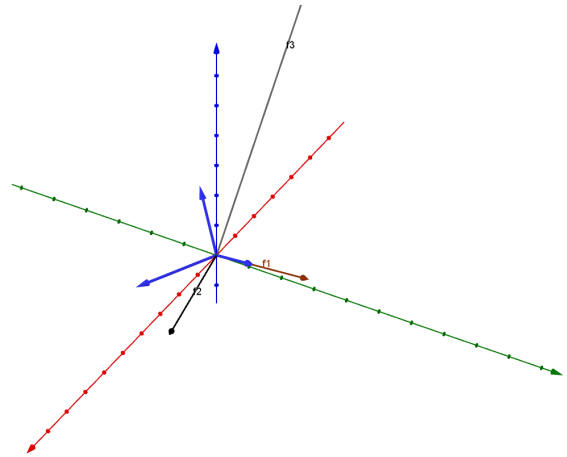
Après simplifications, on trouve

$$v_2 = (2, -1, 0) \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0).$$

Ensuite

$$v_3 = f_3 - \langle f_3, e_2 \rangle e_2 - \langle f_3, e_1 \rangle e_1 = f_3 - \frac{\langle f_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle f_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1.$$

$$\text{Il vient } v_3 = (-1, -2, 5) \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1, -2, 5).$$



Preuve. Prouvons le cas général en raisonnant par récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \left| \begin{array}{l} (e_1, \dots, e_k) \text{ est une famille orthonormée} \\ \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_k). \end{array} \right. \quad \text{où} \quad k \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

→ **Initialisation.** Comme $e_1 = f_1 / \|f_1\| \neq 0_E$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

→ **Hérédité.** Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(k+1)$. Notons que v_{k+1} est non nul puisque par hypothèse, la famille $\mathcal{C}$ est libre. Le vecteur e_{k+1} est donc bien défini. Pour tout $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$, on a par linéarité à gauche du produit scalaire

$$\begin{aligned} \langle v_{k+1}, e_j \rangle &= \langle f_{k+1}, e_j \rangle - \sum_{i=1}^k \langle f_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle f_{k+1}, e_j \rangle - \langle f_{k+1}, e_j \rangle \quad \text{car, pour } i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0 \\ \langle v_{k+1}, e_j \rangle &= 0. \end{aligned}$$

D'où $v_{k+1} \perp e_j$. Comme e_{k+1} est colinéaire à v_{k+1} , on a aussi $e_{k+1} \perp e_j$ pour tout $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$. Précisons de plus que, par construction, e_{k+1} est normée. Comme la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est orthonormée, la famille $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$ l'est aussi. Justifions le second point.

$$\begin{aligned} \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, v_{k+1}) \\ &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, f_{k+1} - u) \quad \text{où} \quad u = \sum_{i=1}^k \langle f_{k+1}, e_i \rangle e_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \\ &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, f_{k+1}) \\ &= \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) + \text{Vect}(f_{k+1}) \\ &= \text{Vect}(f_1, \dots, f_k) + \text{Vect}(f_{k+1}) \\ \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) &= \text{Vect}(f_1, \dots, f_k, f_{k+1}). \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie si $\mathcal{P}(k)$ l'est.

→ **Conclusion.** Les propriétés $\mathcal{P}(k)$ sont vraies pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. L'énoncé s'obtient avec $\mathcal{P}(n)$ en rappelant qu'une famille libre avec autant de vecteurs que la dimension est une base. ■

Exercice 12



◆◆ Q Exemples

1. On considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Orthonormaliser la base $((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$.
2. Orthonormaliser la base $(1, x, x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

COROLLAIRE

existence d'une base orthonormée

Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Preuve. Comme l'espace est euclidien, il est de dimension finie et admet au moins une base. Il suffit alors d'appliquer le procédé d'orthonormalisation décrit précédemment à cette base pour obtenir une base orthonormée. ■

COROLLAIRE

base orthonormée incomplète

Toute famille orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ peut être complétée en une base orthonormée de E . Autrement dit, si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une famille orthonormée de E de dimension n , il existe des vecteurs $e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n$ tels que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E .

Preuve. D'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_n$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$ soit une base de E . En reprenant le procédé d'orthogonalisation, on peut obtenir une base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ sans modifier les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$. D'où le résultat. ■

Bases orthonormées et matrices

PROPOSITION

expression du produit scalaire avec les matrices colonnes

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u, v \in E$.

Si on note

- $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
- $V = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.

Alors $\langle u, v \rangle = {}^tUV$ et $\|u\|^2 = {}^tUU$.

Preuve. D'après le théorème précédent

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} \langle u, e_1 \rangle \\ \langle u, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, e_n \rangle \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

De même pour le vecteur v . Il suffit alors de poser le calcul

$${}^tUV = [\langle u, e_1 \rangle \langle u, e_2 \rangle \cdots \langle u, e_n \rangle] \begin{bmatrix} \langle v, e_1 \rangle \\ \langle v, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, e_n \rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \langle v, e_i \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Le second point s'en déduit avec $v = u$. ■



Attention. Rappelons que ces énoncés ne sont valables que dans le cadre d'une base orthonormée.

DÉFINITION

matrice orthogonale

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est une **matrice orthogonale** si M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

Remarque. D'après les résultats sur les matrices, M est orthogonale si et seulement si ${}^tMM = I_n$ ou $M{}^tM = I_n$.

Exemple. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ est orthogonale. En effet,

$$\begin{aligned} R_\theta {}^tR_\theta &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 & -\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) \\ -\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) & \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Remarques.

• Les colonnes d'une matrice M orthogonale sont non nulles et forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique. En effet, si on écrit $M = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n]$, alors

$${}^tM = \begin{bmatrix} {}^tC_1 \\ {}^tC_2 \\ \vdots \\ {}^tC_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tMM = \begin{bmatrix} {}^tC_1 \\ {}^tC_2 \\ \vdots \\ {}^tC_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tC_1C_1 & {}^tC_1C_2 & \dots & {}^tC_1C_n \\ {}^tC_2C_1 & {}^tC_2C_2 & \dots & {}^tC_2C_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^tC_nC_1 & {}^tC_nC_2 & \dots & {}^tC_nC_n \end{bmatrix}.$$

Dès lors, la matrice M est orthogonale si et seulement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$${}^tC_iC_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette dernière condition traduit le fait que la famille des matrices colonnes $(C_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est orthonormée. Comme cette famille contient autant de vecteurs que la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

• **Structure de l'ensemble $\mathcal{O}_n$ des matrices orthogonales de taille (n, n)**

- Présence d'un élément neutre : $I_n \in \mathcal{O}_n$.
- Stabilité par passage à l'inverse : $\forall P \in \mathcal{O}_n, \quad P^{-1} \in \mathcal{O}_n$.
- Stabilité par produit : $\forall P, Q \in \mathcal{O}_n, \quad PQ \in \mathcal{O}_n$.

Exercice 13



Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes

- ◇ 1. Justifier les trois points de la remarque précédente.
- ◇ 2. Que dire d'une matrice diagonale et orthogonale?
- ◆◆ 3. Montrer que si $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est orthogonale avec $\det(P) > 0$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $P = R_\theta$.

AB17

PROPOSITION

matrice de passage orthogonale

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soit $\mathcal{C}$ une autre base de E . On a équivalence entre les énoncés :

- i) La base $\mathcal{C}$ est orthonormée.
- ii) La matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ est une matrice orthogonale.

Preuve. Pour une matrice A , notons $[A]_{ij}$ son coefficient en position (i, j) . Notons aussi $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \varepsilon_i = \sum_{k=1}^n \langle \varepsilon_i, e_k \rangle e_k.$$

Par définition de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$

$$[P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}]_{ik} = \langle \varepsilon_i, e_k \rangle.$$

Puis, par définition de la transposée

$$[{}^tP_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}]_{kj} = [P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}]_{jk} = \langle \varepsilon_j, e_k \rangle.$$

Enfin, par la définition du produit matriciel

$$\begin{aligned} [P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} {}^t P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}]_{ij} &= \sum_{k=1}^n [P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}]_{ik} [{}^t P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \varepsilon_i, e_k \rangle \langle \varepsilon_j, e_k \rangle \\ [P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} {}^t P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}]_{ij} &= \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle \quad \text{voir proposition page 10.} \end{aligned}$$

Raisonnons par équivalence. La matrice $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ est orthogonale si et seulement si

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} {}^t P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = I_n &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad [P_{\mathcal{B}\mathcal{C}} {}^t P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}]_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ &\iff \forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, $P_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ est orthogonale si et seulement si la base $\mathcal{C}$ est orthonormée. ■

1.3 Le supplémentaire orthogonal

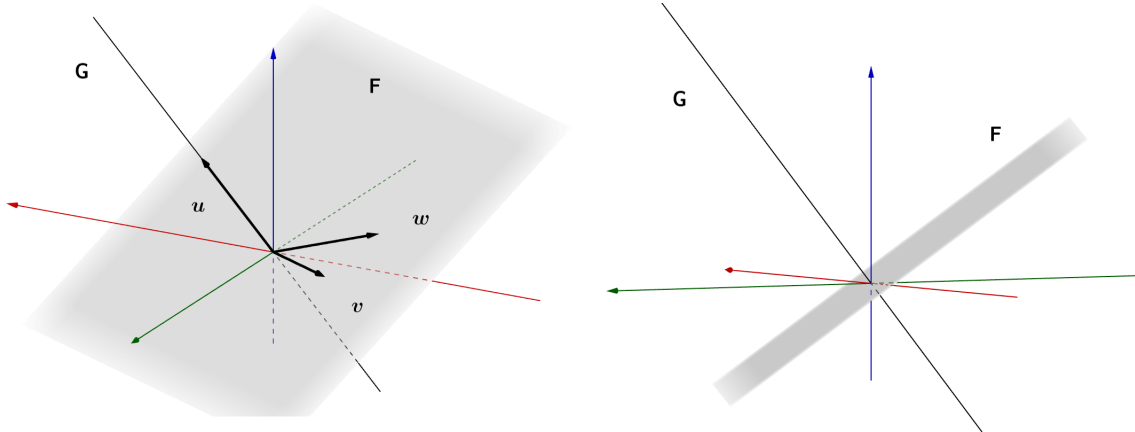
Tout s.e.v d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ admet un supplémentaire orthogonal.

Autrement dit, si F est un s.e.v de E , il existe un s.e.v G de E tel que

$$F \oplus G = E \quad \text{et} \quad \forall u \in F, \quad \forall v \in G, \quad u \perp v.$$

En effet, si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F , alors on peut choisir $(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ une complétion en une base orthonormée de E . Dans ce cas, $\text{Vect}(e_{p+1}, e_{p+2}, \dots, e_n)$ fournit un supplémentaire orthogonal.

Exemple. Reprenons F et G de l'exercice 8, p. 7. Les vecteurs $v = (-2, 1, 0)$ et $w = (-3, 0, 1)$ forment une base du plan F et $u = (1, 2, 3)$, une base de la droite vectorielle G . On constate que F et G sont supplémentaires et orthogonaux.



PROPOSITION

propriétés

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E .
- $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Preuve. • Soit $u \in E$. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de F orthonormée que l'on complète en une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ orthonormée de E . On a

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i}_{:= u_F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^n \langle u, e_i \rangle e_i}_{:= u_\perp}.$$

F est un s.e.v stable par combinaison linéaire et pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $e_i \in F$, donc $u_F \in F$. De plus, pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\langle u_\perp, e_j \rangle = \sum_{i=p+1}^n \langle u, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \text{d'où} \quad u_\perp \in F^\perp.$$

On a donc $E = F + F^\perp$. De plus, pour $v \in F \cap F^\perp$. Le vecteur v est orthogonal à lui-même, c'est donc le vecteur nul. Ainsi, $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Par la caractérisation des supplémentaires, $F \oplus F^\perp = E$.

- Pour le second point, il suffit d'écrire

$$F \oplus F^\perp = E \Rightarrow \dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim E.$$



Attention. Il n'y a pas unicité du supplémentaire, mais unicité du supplémentaire orthogonal.

En effet, si G est un supplémentaire orthogonal de F , on a $G \subset F^\perp$ puisque $F^\perp$ est le plus grand, au sens de l'inclusion, s.e.v de E orthogonal à F . Or, avec le second point, on a automatiquement $\dim(G) = \dim(F^\perp)$. Nécessairement $G = F^\perp$. Dans l'exemple précédent, on constate qu'il n'y a qu'une droite vectorielle orthogonale à F .

Exemples.

- Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Posons $u = (1, 1, 1)$ et $F = \text{Vect}(u)$. Déterminons une base de $F^\perp$. Tout d'abord, $F^\perp$ est de dimension $3 - 1 = 2$. Pour déterminer une base de $F^\perp$, il suffit de donner deux vecteurs de $F^\perp$ qui forment une famille libre (donc ici, non colinéaires). Par exemple,

$$v = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad w = (0, 1, -1).$$

- Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Donnons une base de l'orthogonal de $F = \mathbb{R}_1[x]$. Comme F est de dimension 1, il suffit de trouver un polynôme de degré au plus 2, orthogonal à 1 et x . Or, pour $P = ax^2 + bx + c$, on montre que

$$\langle P(x), 1 \rangle = 2a + 3c \quad \text{et} \quad \langle P(x), x \rangle = 2b.$$

On constate que $P = 3x^2 - 2$ convient.

- Dans le cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, on montre (en reprenant les idées de l'exercice 9 que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n$).

Exercice 14



Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Les questions sont indépendantes

1. Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.
2. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ puis $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

AB18

Exercice 15



Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[x]$. Considérons F et G les sous-espaces vectoriels de E constitués des polynômes pairs (resp. impairs). Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux de E pour le produit scalaire

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

AB19

2.1 Formes polaires, formes quadratiques

Soient E un espace vectoriel et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On rappelle que φ est symétrique si

$$\forall u, v \in E, \quad \varphi(u, v) = \varphi(v, u).$$

DÉFINITION - PROPOSITION

forme quadratique, forme polaire

Soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que Φ est une **forme quadratique** s'il existe une forme bilinéaire φ telle que

$$\forall x \in E, \quad \Phi(x) = \varphi(x, x) \quad (\star)$$

Il existe une unique forme bilinéaire symétrique vérifiant $(\star)$, on dit que φ est la **forme polaire de Φ** .

• Règles de calculs

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) &= \frac{1}{2} (\Phi(x, y) - \Phi(x) - \Phi(y)) \\ \varphi(x, y) &= \frac{1}{4} (\Phi(x + y) - \Phi(x - y)) \\ \Phi(\lambda x + y) &= \lambda^2 \Phi(x) + \lambda \varphi(x, y) + \Phi(y). \end{aligned}$$

Notons un point intéressant avec la première (ou la seconde formule) : la connaissance de la formule quadratique Φ suffit pour retrouver la forme polaire φ . On prouve ainsi l'existence et l'unicité évoquées dans la définition.

Représentation matricielle de la forme polaire en dimension finie

PROPOSITION

lien matrice/forme bilinéaire

Soient φ une forme bilinéaire et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une base de E . Alors il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = {}^t X A Y$$

où X (resp. Y) désigne la matrice de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$. La matrice A est telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \quad \varphi(e_i, e_j) = a_{ij}.$$

Remarque. On définit ainsi un isomorphisme entre $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note alors $A = \text{Mat}(\varphi, \mathcal{B})$.

Exercice 16



1. Prouver la proposition précédente.
2. Vérifier que $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$ est de dimension finie et donner sa dimension à l'aide de celle de E .
3. Faire de même avec $\mathcal{L}_2^S(E, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur E .

ABdd1

Formes positives, définies positives

DÉFINITION

Formes quadratiques définies, positives

Soit Φ , une forme quadratique sur E .

On dit que Φ est :

- **définie** sur E si : $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad \Phi(x) \neq 0$;
- **positive** sur E si : $\forall x \in E, \quad \Phi(x) \geq 0$;
- **négative** sur E si : $\forall x \in E, \quad \Phi(x) \leq 0$.

Exercice 17



Les questions sont indépendantes

1. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce que la forme polaire $(A, B) \in E^2 \mapsto \text{Tr}(AB) \in \mathbb{R}$ est positive? négative? définie?
2. Justifier que toute forme quadratique définie est soit définie positive, soit définie négative.

ABdd2

En reprenant la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz page 4, on peut l'adapter avec ce nouveau vocabulaire :

PROPOSITION

Inégalité de Schwarz

Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et Φ une forme quadratique positive sur E de forme polaire associée φ . On a

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (\varphi(x, y))^2 \leq \Phi(x)\Phi(y).$$

Noter qu'on ne peut rien dire sur le cas d'égalité, la forme quadratique n'est pas supposée définie. Par contre, si on suppose que la forme quadratique est définie positive, on a égalité si et seulement si les vecteurs (x, y) sont liés.

2.2 Espaces préhilbertiens réels

DÉFINITION

espaces préhilbertiens réels

Un **espace préhilbertien réel** est la donnée :

- d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E ,
- d'un produit scalaire φ sur E , c'est-à-dire d'une forme bilinéaire définie positive sur E .

On note (E, φ) .

Exemple. On note E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-à-dire les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n^2$ converge. Montrons que E est un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire

$$\varphi : (u, v) \in E^2 \mapsto \varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \in \mathbb{R}.$$

Preuve. On vérifie dans un premier temps que E est un s.e.v de l'espace vectoriel des suites réelles :

- Précisons que $E \neq \emptyset$ (la suite nulle appartenant à E).
- Ensuite, on sait que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Ainsi pour $u, v \in E$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n v_n| \leq \frac{u_n^2 + v_n^2}{2}.$$

Comme la série $\sum (u_n^2 + v_n^2)/2$ converge, on en déduit, par le critère de majoration, la convergence absolue de $\sum u_n v_n$ puis la convergence. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on en déduit par combinaison linéaire que la série de terme général

$$(u_n + \lambda v_n)^2 = u_n^2 + \lambda u_n v_n + v_n^2$$

est une série convergente. C'est-à-dire $u + \lambda v \in E$.

- Justifions maintenant que φ est un produit scalaire :

- L'application φ est bien posée d'après le résultat sur la convergence de $\sum u_n v_n$.
- Il est clair que φ est symétrique et bilinéaire.
- Soit $u \in E$.

$$\varphi(u, u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

De plus, la somme étant à termes positifs

$$\varphi(u, u) = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 = 0 \Rightarrow u = 0_E.$$

En conclusion, φ est un produit scalaire sur E .

2.3 Orthogonalité en dimension infinie

Commençons par un exemple afin d'illustrer les différences possibles par rapport au cas de la dimension finie.

Exercice 18. ♦♦♦ Orthogonal d'un hyperplan

AB61

On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par : $\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$

Considérons le sous-ensemble A de E , constitué des applications qui s'annulent en 0 et le sous-ensemble B de E , constitué des applications dont l'intégrale sur $[0; 1]$ est nulle.

Préciser $A^\perp$ et $B^\perp$. A-t-on encore

$$A \oplus A^\perp = E \quad \text{et} \quad B \oplus B^\perp = E \quad ?$$

PROPOSITION

Supplémentaire orthogonal d'un s.e.v de dimension finie

Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel.

Si → F est de dimension finie de E .

Alors | → $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E orthogonal à F et c'est même le seul.
→ $(F^\perp)^\perp = F$.

Remarque. On l'appelle par conséquent le **supplémentaire orthogonal** de F dans E . Pour résumer, on écrit souvent les choses ainsi : $E = F \oplus F^\perp$.

3 Espaces préhilbertiens complexes

3.1 Formes sesquilineaires et hermitienne

DÉFINITION

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que φ est une **forme sesquilinéaire** si :

- L'application φ est **semi-linéaire**. C'est-à-dire linéaire par rapport à la première variable :
 $\forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(x + \lambda x_1, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda \varphi(x_2, y);$
- L'application φ est linéaire par rapport à la deuxième variable, c'est-à-dire
 $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varphi(x, y_1 + \lambda y_2) = \varphi(x, y_1) + \lambda \varphi(x, y_2).$

- De plus, une forme sesquilinéaire est appelée **forme hermitienne** si elle vérifie en plus la propriété de symétrie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}.$$

Remarque. Les formes hermitiennes sont l'analogue pour les $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels des formes bilinéaires symétriques des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. En particulier, la condition de symétrie hermitienne permet d'imposer à $\varphi(x, x)$ d'être réel pour tout $x \in E$. En effet, on a alors $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$.

3.2 Espaces préhilbertiens complexes

DÉFINITION

espace préhilbertien complexe

Un **espace préhilbertien complexe** est la donnée :

- d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E ,
- d'une forme sesquilinéaire hermitienne φ telle que

$$\forall x \in E, \quad x \neq 0_E \Rightarrow \varphi(x, x) > 0.$$

Remarques. • On dit que la forme hermitienne φ est définie positive. On parle encore de produit scalaire dans ce contexte.

- On note alors $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$.
- On a maintenant pour tous $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \varphi(x + y, x + y) \\ &= \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) \\ &= \|x\|^2 + \varphi(x, y) + \overline{\varphi(x, y)} + \|y\|^2 \\ \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\Re(\varphi(x, y)) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Exercice 19



♦ Identité de polarisation

Prouver que dans un espace préhilbertien complexe :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2 \right).$$

ABdd3

Exemple. Si E désigne les suites complexes de carrée sommable (c'est-à-dire, $u \in E$ si et seulement si $\sum |u_n|^2$ converge), alors l'application

$$(u, v) \in E^2 \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \overline{v_n}$$

est un espace préhilbertien complexe.

De nouveau, on peut énoncer une inégalité de Cauchy-Schwarz. L'énoncé est similaire, seule la preuve diffère véritablement.

PROPOSITION

Inégalité de Cauchy-Schwarz (version hermitienne)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Alors on a

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Exercice 20



♦ **Preuve.** Soient $u, v \in E$.

1. On suppose dans cette question que $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$.

a) Justifier que si la famille (u, v) est liée alors $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$.

b) Dans la suite, on suppose la famille (u, v) libre. À l'aide de l'application P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(\lambda) = \|\lambda u + v\|^2$, justifier que

$$|\langle u, v \rangle| < \|u\| \cdot \|v\|.$$

2. Traiter le cas général où $\langle u, v \rangle$ n'est pas nécessairement un réel.

ABdd4

Remarque. On en déduit de nouveau l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Un exemple à retenir : $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, 2π -périodiques et continues. On vérifie alors qu'un produit scalaire est donné par :

$$\varphi : (f, g) \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2 \mapsto \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Le caractère hermitien de la forme est assez clair. Pour le caractère défini, on note que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

$$\varphi(f, f) = \int_0^{2\pi} f(t) \overline{f(t)} dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(t)|^2}_{\in \mathbb{R}^+} dt \geq 0.$$

La fonction $t \in [0; 2\pi] \mapsto |f(t)|^2 \in \mathbb{R}$ est continue et positive. Ainsi

$$\forall t \in [0; 2\pi], \quad |f(t)|^2 = 0 \quad \text{puis} \quad f(t) = 0.$$

Dès lors, f est nulle sur $[0; 2\pi]$. Comme f est 2π -périodique, f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ce qui conclut.

4

Projecteurs orthogonaux, distance à un s.e.v (rappel ECG2)

4.1 Projecteurs

On rappelle qu'une application p sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un projecteur s'il existe deux sous-espaces vectoriels F, G de E tels que F et G soit supplémentaires et

$$\forall x \in E, \quad x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}, \quad p(x) = x_F.$$

DÉFINITION

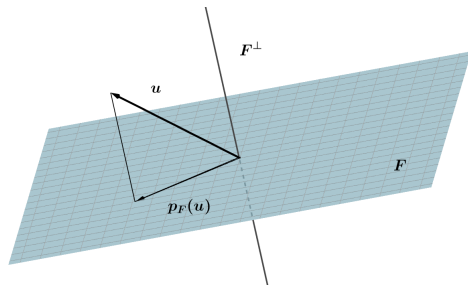
projecteur orthogonal

Soit E un espace préhilbertien (réel ou complexe).

On dit que p est une **projection orthogonale** sur F , notée p_F , si p projette sur F parallèlement à $F^\perp$.

Pour tout $u \in E$, $p_F(u)$ est appelé le **projeté orthogonal de u sur F** .

Remarque. La définition suppose que F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E . C'est par exemple le cas si F est de dimension finie.



Retenons

$$v = p_F(u) \iff \begin{cases} v \in F \\ u - v \in F^\perp. \end{cases}$$

Exercice 21



◆ Exemple

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$. On définit l'application

$$p: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad p(M) = \frac{M + {}^tM}{2}.$$

1. Vérifier que p est un projecteur. Préciser le noyau et l'image de p .
2. Est-ce que p est un projecteur orthogonal?

PO6

Remarque. Dans le cas où E est un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E , p un endomorphisme et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

On a l'équivalence entre :

- i) L'endomorphisme p est un projecteur orthogonal.
- ii) La matrice A est symétrique et $A^2 = A$.

PROPOSITION

caractérisation par la norme

Soient E un espace préhilbertien et p un projecteur sur E . On a l'équivalence entre :

- i) L'endomorphisme p est un projecteur orthogonal.
- ii) Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Preuve.

i) implique ii).

Par le théorème de Pythagore avec x orthogonal à $p(x)$

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

Puis $\|x\|^2 - \|p(x)\|^2 \geq 0$, d'où l'énoncé.

ii) implique i).

Soient $x \in \text{Ker } p$, $y \in \text{Im } p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|\lambda x + y\|^2 \geq \|p(\lambda x + y)\|^2 = \|y\|^2$$

En développant le membre de gauche

$$\lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle \geq 0.$$

Nécessairement $\langle x, y \rangle = 0$ si on veut que l'inégalité soit valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet pour $\lambda \rightarrow 0$ et $\langle x, y \rangle \neq 0$ on aurait

$$\lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} 2\lambda \langle x, y \rangle$$

et un changement de signe. De nouveau, on en déduit que le noyau est orthogonal à l'image. Cela suffit pour dire que le projecteur est orthogonal.

4.2 Expression et calcul explicite du projeté

THÉORÈME

expression du projeté dans une b.o.n

Soit F , un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et p_F , le projecteur orthogonal sur F .

Si $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F ,

alors $\forall u \in E, \quad p_F(u) = \sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i.$

Preuve. On peut compléter $\mathcal{B}_F$ en une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E . Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$. Soit $u \in E$.

• Rédaction 1.

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i = \underbrace{\sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i}_{\in F} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^n \langle u, e_i \rangle e_i}_{\in F^\perp}.$$

Par définition de projecteur orthogonal, p projette sur F parallèlement à $F^\perp$,

$$p_F(u) = \sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i.$$

• Rédaction 2.

$$\begin{aligned} p_F(u) &= \sum_{i=1}^n \langle p_F(u), e_i \rangle e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle u, p_F(e_i) \rangle e_i \quad \text{car } p_F \text{ est symétrique} \\ &= \sum_{i=1}^p \langle u, p_F(e_i) \rangle e_i + \sum_{i=p+1}^n \langle u, p_F(e_i) \rangle e_i \\ p_F(u) &= \sum_{i=1}^p \langle u, e_i \rangle e_i. \end{aligned}$$

En effet, par définition du projecteur, si $i \in [1; p]$, $p_F(e_i) = e_i$ et si $i \in [p+1; n]$, $p_F(e_i) = 0_E$. ■

Exemples.

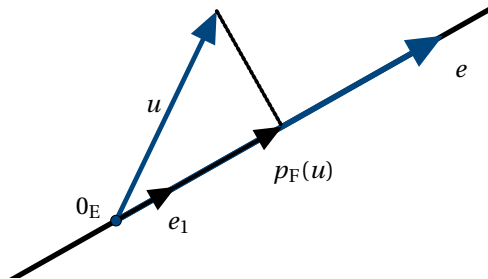
• Projection sur une droite vectorielle

Considérons le cas où F est une droite vectorielle. Il existe donc $e \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$F = \text{Vect}(e).$$

La famille constituée d'un unique vecteur $(e_1) = (e/\|e\|)$ est une base de F et d'après ce qui précède

$$p_F(u) = \langle u, e_1 \rangle e_1 = \frac{\langle u, e \rangle}{\|e\|^2} e.$$



• Projection sur un hyperplan

Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E . L'orthogonal $H^\perp$ est donc de dimension 1 et on peut considérer u_0 , un vecteur non nul unitaire de $H^\perp$ (u_0 est un vecteur normal à H).

Soit q le projecteur sur la droite vectorielle $\text{Vect}(u_0) = H^\perp$ orthogonal. D'après ce que précède

$$\forall u \in E, \quad q(u) = \langle u, u_0 \rangle u_0.$$

Or $p_H = \text{id}_E - q$ est le projecteur orthogonal sur H . Donc

$$\forall u \in E, \quad p_H(u) = u - \langle u, u_0 \rangle u_0.$$

Remarque. Retour sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

→ *Orthonormalisation de deux vecteurs.*

Considérons les deux vecteurs u_1, u_2 non colinéaires. Posons p_1 le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u_1)$ puis

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad v_2 = u_2 - p_1(u_2), \quad e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

Alors les vecteurs (e_1, e_2) forment une base orthonormée de $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(u, v)$.

→ *Cas général de n vecteurs.*

Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E non nécessairement orthonormée. Pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, posons p_k , le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. On définit ensuite la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E par la récurrence

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket, \quad e_{k+1} = \frac{u_{k+1} - p_k(u_{k+1})}{\|u_{k+1} - p_k(u_{k+1})\|}$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est bien définie, elle constitue une base orthonormée de E avec

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \text{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

En pratique, pour le calcul du projeté, on préfère toutefois la méthode suivante qui ne nécessite pas le calcul en amont d'une base orthonormée.

Comment calculer un projeté?

Soient $u \in E$ et F , un sous-espace vectoriel de E . Calculons $p_F(u)$, le projeté orthogonal de u sur F .

- *Étape 1*

On trouve une base $(u_1, \dots, u_p)$ de F (non nécessairement orthonormée).

- *Étape 2*

Comme $p_F(u) \in F$, il existe un unique p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $p_F(u) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$. On remarque ensuite que

$$\begin{cases} \langle u - p_F(u), u_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p_F(u), u_2 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle u - p_F(u), u_p \rangle = 0. \end{cases}$$

On explicite alors le système linéaire d'inconnues $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$

$$\begin{cases} \langle u, u_1 \rangle = \langle p_F(u), u_1 \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle = \langle p_F(u), u_2 \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, u_p \rangle = \langle p_F(u), u_p \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle u_i, u_p \rangle. \end{cases}$$

- *Étape 3*

On résout le système linéaire précédent à p équations pour trouver les p inconnues $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$. On conclut par le calcul de $p_F(u) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminons le projeté de $u = (0, -1, 4)$ sur l'espace vectoriel

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}.$$

- *Étape 1.* Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in F &\iff x - 2y + 3z = 0 &\iff x = 2y - 3z \\ &\iff X = (2y - 3z, y, z) = y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-3, 0, 1) \\ &\iff X = y \cdot u_1 + z \cdot u_2. \end{aligned}$$

Où on a posé $u_1 = (2, 1, 0)$ et $u_2 = (-3, 0, 1)$. Ainsi,

$$X \in F \iff X \in \text{Vect}(u_1, u_2).$$

On conclut, (u_1, u_2) est une famille génératrice de F . Les vecteurs u_1 et u_2 sont non colinéaires, la famille (u_1, u_2) est libre. Par conséquent, (u_1, u_2) est une base de F .

- *Étape 2.* Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $p_F(u) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Précisons que

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle &= -6, \quad \langle u_1, u_1 \rangle = 5 \quad \langle u_2, u_2 \rangle = 10 \quad \text{et} \quad \langle u, u_1 \rangle = -1, \quad \langle u, u_2 \rangle = 4, \\ \langle p_F(u), u_1 \rangle &= 5\lambda_1 - 6\lambda_2 \quad \langle p_F(u), u_2 \rangle = -6\lambda_1 + 10\lambda_2. \end{aligned}$$

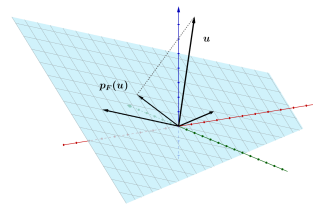
On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} \langle u - p_F(u), u_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p_F(u), u_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle p_F(u), u_1 \rangle = \langle u, u_1 \rangle \\ \langle p_F(u), u_2 \rangle = \langle u, u_2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} 5\lambda_1 - 6\lambda_2 = -1 \\ -6\lambda_1 + 10\lambda_2 = 4. \end{cases}$$

- *Étape 3.* On constate que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ est l'unique solution et

$$p_F(u) = u_1 + u_2 = (-1, 1, 1).$$

Le schéma ci-contre représente le plan F , le vecteur u et son projeté.



Exercice 22



◆ Exemple

Soient $\mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ et $F = \mathbb{R}_1[x]$.
Donner l'expression du projeté orthogonal de $Q(x) = 1 + x + x^2$ sur F .

PO7

4.3 Distance à un sous-espace vectoriel

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $u \in E$. On définit (sous réserve d'existence), la distance du vecteur u à F par

$$d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\|.$$

Notons que $u \in F$ si et seulement si $d(u, F) = 0$.

THÉORÈME

caractérisation du projeté par minimisation de la norme

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace hilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension finie, p_F la projection orthogonale sur F et $u \in E$. Alors la distance $d(u, F)$ est bien définie et

$$d(u, F) = \min_{v \in F} \|u - v\| = \|u - p_F(u)\|.$$

De plus, le minimum est atteint seulement pour $v = p_F(u)$.

Preuve. Soient $u \in E$ et $v \in F$,

$$u - v = (u - p(u)) + (p(u) - v).$$

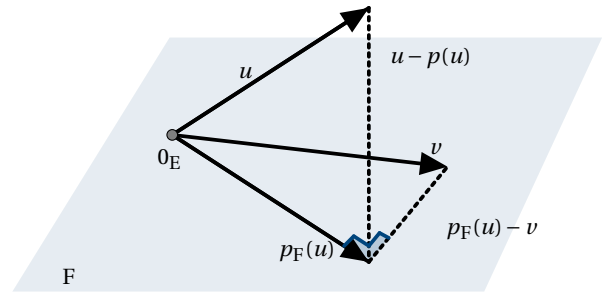
Or, $u - p(u)$ est orthogonal à F , donc $u - p(u)$ est orthogonal à $p(u) - v \in F$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\|u - v\|^2 = \|u - p(u)\|^2 + \|p(u) - v\|^2 \geq \|u - p(u)\|^2.$$

D'où l'inégalité avec égalité si et seulement si

$$\|p(u) - v\| = 0,$$

c'est-à-dire $v = p(u)$. ■



Remarques.

- Le projeté orthogonal de u sur F est caractérisé par

$$\forall v \in F, \quad \|u - v\| \geq \|u - p(u)\|.$$

Autrement dit : pour tout $u \in E$,

$$v = p_F(u) \iff \left(v \in F \text{ et } \|u - v\| = \min_{w \in F} \|u - w\| \right).$$

- Les vecteurs $u - p(u)$ et $p(u)$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore,

$$\|u - p(u)\|^2 + \|p(u)\|^2 = \|u\|^2 \quad \text{d'où} \quad d(u, F)^2 = \|u - p(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|p(u)\|^2.$$

Exercice 23



◆ Exemples

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien, $u_0 \in E \setminus \{0_E\}$ et un hyperplan H .

- Exprimer la distance d'un vecteur x à la droite $\text{Vect}(u_0)$.
- Faire de même avec la distance à H . On exprimera le résultat à l'aide d'un vecteur $u_0 \in H^\perp$ (un vecteur normal).

PO8

Exemple. Justifions que la fonction de deux variables

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 4(x - 1)^2 + (x + y)^2 + (x - 2y + 1)^2$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$. Considérons dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\|\cdot\|$ associée. On a

$$f(x, y) = \left\| (2(x - 1), x + y, x - 2y + 1) \right\|^2 = \left\| (2x, x + y, x - 2y) - (2, 0, -1) \right\|^2.$$

Si on pose $u = (2, 0, -1)$ et si on définit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

$$F = \{ (2x, x + y, x - 2y) \mid x, y \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(u_1, u_2) \quad \text{où} \quad \begin{cases} u_1 = (2, 1, 1) \\ u_2 = (0, 1, -2), \end{cases}$$

alors on a $f(x, y) = \|v - u\|^2$ avec $v = (2x, x + y, x - 2y) \in F$. Le théorème de minimisation s'applique, il existe donc bien un minimum, il est atteint pour $v = p_F(u)$ où p_F est le projecteur orthogonal sur F .

Calculons le projeté $p_F(u) = xu_1 + yu_2$ et

$$\begin{cases} \langle u - p_F(u), u_1 \rangle = 0 \\ \langle u - p_F(u), u_2 \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle u, u_1 \rangle = \langle p_F(u), u_1 \rangle \\ \langle u, u_2 \rangle = \langle p_F(u), u_2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} 3 = 6x + (-1)y \\ 2 = (-1)x + 5y \end{cases}$$

car $\langle u, u_1 \rangle = 3, \quad \langle u, u_2 \rangle = 2, \quad \langle u_1, u_2 \rangle = -1, \quad \langle u_1, u_1 \rangle = 6 \quad \text{et} \quad \langle u_2, u_2 \rangle = 5.$

La résolution de ce système donne $x = 17/29$ et $y = 15/29$ pour un minimum global qui vaut $f(17/29, 15/29) \simeq 2,2$.

Exercice 24



◆◆ Justifier que la quantité suivante est bien définie et la calculer.

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

PO9

4.4 Application : Inégalité de Bessel

PROPOSITION

Inégalité de Bessel

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^n |\langle e_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\star)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum |\langle e_i, x \rangle|^2$ et

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |\langle e_i, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\star\star)$$

Preuve. • Soient $n \in \mathbb{N}^*$, F le sous-espace vectoriel de E de dimension finie engendré par la famille $\mathcal{B}_n = (e_1, \dots, e_n)$ et p le projecteur orthogonal sur F . La famille $\mathcal{B}_n$ est une base orthonormée de F et on sait alors que pour tout $x \in E$,

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i \quad \text{et} \quad \|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle^2.$$

D'après la proposition sur la caractérisation par la normée, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Ce qui donne la première inégalité par passage au carré.

• La suite des sommes partielles $(\sum_{i=1}^n |\langle e_i, x \rangle|^2)$ est croissante et majorée, elle converge. Par passage à la limite, on obtient la seconde inégalité.

Exercice 25



◆ Seconde preuve

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille orthonormée de E .

1. Montrer que pour tout $x \in E$ et tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

2. En déduire l'inégalité de Bessel.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité ait lieu dans $(\star)$.

ABdd5

Exemple. On considère l'espace préhilbertien réel

$$E = \left\{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n^2 \text{ converge} \right\}, \quad \text{avec} \quad \langle u, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n v_n.$$

On note $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la base canonique de ℓ^2 définie par $e_n = (\delta_{k,n})_{k \in \mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2n-1} + e_{2n})$.

Exercice 26



1. Montrer que la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormée.

2. Que donne l'inégalité de Bessel dans ce contexte?

ABdd6



Exercices



Exercice 27. ♦ Soient E un espace vectoriel préhilbertien complexe et f un endomorphisme de E vérifiant :

ABdd7

$$\forall u \in E, \quad f(u) \perp u.$$

- Vérifier que tous vecteurs $u, v \in E$, on a $f(u)$ orthogonal à v .
 - En déduire que f est l'application nulle.
- On suppose maintenant que E est un espace euclidien. Soient $\mathcal{B}$, une base orthonormée de E et f un endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est antisymétrique. Calculer $\langle f(u), u \rangle$ pour tout $u \in E$. Commenter.

Exercice 28. ♦♦ Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes tels que

ABdd8

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \deg P_n = n.$$

Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille P_n est orthonormée.

Exercice 29. ♦

ABdd9

- Justifier que l'application suivante définie bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{P(p)Q(p)}{2^p}.$$

- En déduire que l'ensemble $\left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} (p^2 - ap - b)^2 : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ possède un minimum.

Exercice 30. ♦♦♦  **Matrices de Gram et valeurs propres**

AB59

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . On pose

$$G = \left(\langle u_i, u_j \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad \text{et} \quad M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E .

- Vérifier que $G = {}^tMM$.
- En déduire que $\ker(G) = \ker(M)$, puis $\text{rg}(G) = \text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_n)$.
Indication. Considérer tXGX pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Vérifier que G est inversible si et seulement si la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E .
- Justifier que les valeurs propres de G sont positives ou nulles.
 - Justifier que les valeurs propres sont majorées par $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.

Exercice 31. ♦♦♦ Soit $\omega : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit l'application

AB64

$$\varphi_\omega : (f, g) \in \mathcal{C}^0([0; 1])^2 \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\omega(t) dt.$$

-  On suppose dans un premier temps que ω est positive (pour tout $t \in [0; 1]$, $\omega(t) \geq 0$). Est-ce que φ_ω est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0; 1])$ si ω s'annule une fois? un nombre fini de fois? sur un intervalle $[a; b] \subset [0; 1]$ où $0 < a < b < 1$?
 - Est-ce que φ_ω peut-être un produit scalaire s'il existe $t_0 \in [0; 1]$ tel que $\omega(t_0) < 0$?
- Reprendre la question 1.a) en considérant l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ au lieu de $\mathcal{C}^0([0; 1])$.

Exercice 32. ♦♦♦ Peut-on trouver une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout entier m ,

ABdd10

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^m = m \quad ?$$

Indication. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz!!



Indications et solutions



Indication de l'exercice 3

- Prouver dans un premier temps que si $x, y \in B$, $tx + (1-t)y \in B$. C'est-à-dire $\|tx + (1-t)y\| \leq 1$. Traiter ensuite le cas d'égalité avec la question précédente.
- Dans $\mathbb{R}^2$, B correspond à un disque.

Indication de l'exercice 12

Détaillons les différentes étapes.

Notons f_1, f_2, f_3 les 3 vecteurs.

- Étape 1 : calcul de e_1 .

Normaliser f_1 pour obtenir e_1 .

- Étape 2 : calcul de e_2 .

Poser $v_2 = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1$ et calculer

$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

- Étape 3 : calcul de e_3 .

Poser $v_3 = f_3 - \langle f_3, e_1 \rangle e_1 - \langle f_3, e_2 \rangle e_2$, puis calculer

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}.$$

Indication de l'exercice 31

- Si ω s'annule une fois ou même un nombre fini de fois, φ_ω est un produit scalaire. Par contre, ce n'est pas un produit scalaire si ω s'annule sur un intervalle. Pour cela, on pourra considérer une fonction f qui s'annule sur $[0; 1] \setminus [a; b]$.

Exercice 1

Soient $u, v \in E$

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\quad + \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \\ &\quad - (\|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2) \\ &= 4\langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

Exercice 2

- Si u est nul, l'égalité est vérifiée. Sinon, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$. On a

$$|\langle u, v \rangle| = |\lambda \langle u, u \rangle| = |\lambda| \cdot \|u\|^2$$

$$\text{et} \quad \|u\| \cdot \|v\| = |\lambda| \cdot \|u\|^2.$$

On a bien égalité.

- D'après les règles de calculs sur la norme et le produit scalaire

$$P(\lambda) = \lambda^2 \|u\|^2 + 2\lambda \langle u, v \rangle + \|v\|^2.$$

Comme la famille est libre, $u \neq 0_E$, puis $\|u\| \neq 0$ et P est un polynôme de degré 2. Son discriminant est

$$\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \leq 0.$$

Or P n'admet pas de racine. En effet, s'il existe un réel t_0 tel que $P(t_0) = 0$, on en déduirait que $t_0 u + v = 0$. Absurde, on suppose la famille (u, v) libre. Le discriminant Δ est donc strictement négatif. D'où

$$\langle u, v \rangle^2 < \|u\|^2 \cdot \|v\|^2.$$

On a donc bien montré l'inégalité avec son cas d'égalité.

Exercice 3

- En reprenant la démonstration de l'inégalité triangulaire, il y a égalité si et seulement $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\|$. On a donc deux conditions :

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \quad \text{et} \quad \langle u, v \rangle \geq 0.$$

La première égalité correspond au cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La famille (u, v) est liée. Soit v est nul, soit $u = \lambda v$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La seconde condition équivaut à

$$\underbrace{\lambda \|u\|^2}_{\geq 0} = \langle u, \lambda u \rangle = \langle u, v \rangle \geq 0.$$

On peut résumer par : soit v est nul, soit il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $u = \lambda v$.

- Rédaction 1.

D'après l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in \mathcal{B}$ et $t \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y\| &\leq |t| \cdot \|x\| + |1-t| \cdot \|y\| \\ &\leq t\|x\| + (1-t) \cdot \|y\| \\ &\leq t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ tel que

$$tx = \lambda(1-t)y$$

Par conséquent, x et y sont colinéaires et de même norme. On a de nouveau le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz et

$$\begin{aligned} \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \\ &= (\|x\| - \|y\|)^2 = 0 \quad \text{d'où} \quad x = y. \end{aligned}$$

Rédaction 2.

On a par l'inégalité triangulaire

$$\|tx + (1-t)y\| \leq \|tx\| + \|(1-t)y\| \quad (L_1)$$

$$\leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \quad (L_2)$$

$$\leq t \times 1 + (1-t) \times 1 \quad (L_3)$$

$$\leq 1$$

Justifions maintenant que l'inégalité est stricte. Raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\|tx + (1-t)y\| = 1.$$

Le passage entre la ligne L_2 et L_3 impose

$$\|x\| = 1, \quad \|y\| = 1.$$

D'après la question 1, le cas d'égalité dans l'inégalité de la ligne L_1 impose l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$tx = \lambda(1-t)y \quad (\bullet)$$

En particulier, on a l'égalité des normes :

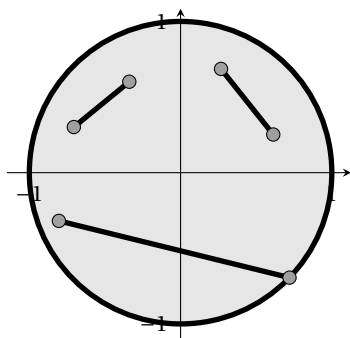
$$t = \|tx\| = \|\lambda(1-t)y\| = \lambda(1-t).$$

Précisons que $t \neq 0$, $\lambda(1-t) \neq 0$. En revenant à $(\bullet)$, on en déduit alors que $x = y$. Cas exclu par hypothèse. L'inégalité est stricte.

3. Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble B correspond au disque unité avec son bord. La condition de convexité

$$\forall t \in [0; 1], \quad tx + (1-t)y \in B$$

se traduit géométriquement : pour tous éléments x, y de B , le segment $[x, y]$ est inclus dans B .



De plus, la condition stricte

$$\|tx + (1-t)y\| < 1$$

illustre le fait que le seul moyen pour que $z = tx + (1-t)y$ soit sur le bord est que $z = x$ ($t = 0$) ou $z = y$ ($t = 1$).

Exercice 4

1. → Symétrie

L'application φ_1 est bien symétrique

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[x], \quad \varphi_1(P, Q) = \varphi_1(Q, P).$$

→ Bilinéarité

φ_1 est linéaire à gauche. Pour $Q, P, S \in \mathbb{R}_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi_1(P + \lambda Q, S) &= \sum_{i=0}^2 (P + \lambda Q)(i)S(i) \\ &= \sum_{i=0}^2 P(i)S(i) + \lambda \sum_{i=0}^2 Q(i)S(i) \\ \varphi_1(P + \lambda Q, S) &= \varphi_1(P, S) + \lambda \varphi_1(Q, S). \end{aligned}$$

Par symétrie, φ_1 est aussi linéaire à droite et donc bilinéaire.

→ Positivité

Pour $P \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\varphi_1(P, P) = \underbrace{P(0)^2}_{\geq 0} + \underbrace{P(1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{P(2)^2}_{\geq 0} \geq 0.$$

→ Définie

De plus si $\varphi_1(P, P) = 0$ alors $P(0) = P(1) = P(2) = 0$ (somme de termes positifs). Le polynôme P admet donc au moins 3 racines tout en appartenant à $\mathbb{R}_2[x]$, nécessairement $P = 0$. Finalement, φ_1 est un produit scalaire.

- De même, on vérifie que φ_2 est symétrique et bilinéaire. Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$. Par croissance de l'intégrale

$$\forall t \in [-1; 1], \quad P(t)^2 \geq 0$$

donc
$$\varphi_2(P, P) = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0.$$

De plus si $\int_{-1}^1 P(t)^2 dt = 0$ alors

$$\forall t \in [-1; 1], \quad P(t)^2 = 0$$

car $t \mapsto P(t)^2$ est continue positive sur $[-1; 1]$. Le polynôme P admet une infinité de racines (tous les réels de $[-1; 1]$) donc $P = 0$.

Remarque. Ce passage est le plus délicat de la preuve, le correcteur sera particulièrement vigilant sur ce point. Il convient de bien le maîtriser.

Finalement, φ_2 est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.

2. Soit $Q = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$

$$\begin{aligned} \varphi_1(P, Q) &= 0 + 1 \times (a + b + c) + 2(4a + 2b + c) \\ &= 9a + 5b + 2c. \end{aligned}$$

$$\varphi_2(P_1, Q) = \int_{-1}^1 ax^3 + bx^2 + cx dx = \frac{2b}{3}.$$

Ainsi pour $Q_1 = 2x - 5$, on a Q_1 orthogonale à P_1 pour le produit scalaire φ_1 mais pas pour φ_2 .

Pour $Q_2 = x^2$, Q_2 est orthogonal pour P_1 pour le produit scalaire φ_2 mais pas pour φ_1 .

Exercice 5

...

Exercice 6

...

Exercice 7

1. Soient a et b deux réels. D'après les identités trigonométriques,

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \text{donc } \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(\ell x) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos((k+\ell)x) + \cos((k-\ell)x)) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos((k+\ell)x) dx + \int_0^{2\pi} \cos((k-\ell)x) dx\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

→ Si $n \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{2\pi} = 0.$$

→ Si $n = 0$,

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi.$$

En conclusion

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(\ell x) dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

La famille est bien orthogonale mais non orthonormée.

2. D'après le résultat précédent, la famille $(x \mapsto \cos(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est libre.

On peut procéder de même pour la seconde famille ou utiliser la dérivation. Notons $g_k : x \mapsto \sin(kx)$. Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k g_k = \mathbf{0}.$$

Par linéarité de la dérivation

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k g'_k = \mathbf{0}.$$

Donc
$$\sum_{k=1}^n k \lambda_k f_k = \mathbf{0}.$$

D'après la question précédente, la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre. Donc

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k \lambda_k = 0.$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k = 0$. Par définition, $(x \mapsto \sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est donc libre.

3. Oui!

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \cos(kx) + \sum_{i=1}^n \mu_i \sin(kx) = 0.$$

Ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \cos(kx) = - \sum_{i=1}^n \mu_i \sin(kx).$$

À droite on a l'expression d'une fonction paire et à gauche impaire. Comme la fonction nulle est la seule fonction à la fois paire et impaire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \cos(kx) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \mu_i \sin(kx) = 0.$$

Comme les familles $(x \mapsto \cos(kx))_{1 \leq k \leq n}$ et $(x \mapsto \sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ sont des familles libres de E , tous les coefficients λ_i et μ_i valent 0. La famille est bien libre.

Exercice 8

1. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \in F \iff x + 2y + 3z = 0$$

$$\iff \begin{cases} (x, y, z) \\ = (-2y - 3z, y, z) \\ = y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) \\ = yu_1 + zu_2 \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) \in \text{Vect}(u_1, u_2).$$

Les vecteurs $u_1 = (-2, 1, 0)$ et $u_2 = (-3, 0, 1)$ forment une famille génératrice de F .

2. On vérifie que $\langle u, u_1 \rangle = 0 = \langle u, u_2 \rangle$. D'après la remarque F et G sont orthogonaux.

Exercice 9

1. Par les propriétés de la trace, l'application est bien une forme bilinéaire symétrique.

- Pour $A = (a_{ij})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, vérifier que

$$\text{Tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \geq 0.$$

En particulier, si $\text{Tr}(A^t A) = 0$, on obtient une somme de termes positifs qui est nulle. Nécessairement, chaque terme est nul.

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{ij} = 0.$$

La matrice A est nulle.

2. Soient $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\langle S, A \rangle = \text{Tr}(S^t A) = -\text{Tr}(SA)$$

et $\langle A, S \rangle = \text{Tr}(A^t S) = \text{Tr}(AS) = \text{Tr}(SA)$.

D'où $\langle S, A \rangle = -\langle A, S \rangle$. Or le produit scalaire est symétrique $\langle S, A \rangle = \langle A, S \rangle$. Il vient

$$\langle A, S \rangle = 0.$$

Comme ce résultat est valable pour toutes matrices symétriques et antisymétriques. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

Exercice 10

1. Soit $u \in F$. Pour tout $v \in F^\perp$

$$\langle u, v \rangle = 0$$

donc $u \in (F^\perp)^\perp$. D'où l'inclusion.

2. Soit $w \in F^\perp + G^\perp$. Il existe $u \in F^\perp$ et $v \in G^\perp$ tels que

$$w = u + v.$$

Soit $x \in F \cap G$. Par linéarité à gauche du produit scalaire

$$\langle w, x \rangle = \langle u + v, x \rangle = \langle u, x \rangle + \langle v, x \rangle$$

Comme $x \in F$, $u \in F^\perp$, $\langle u, x \rangle = 0$.

Comme $x \in G$, $v \in G^\perp$, $\langle v, x \rangle = 0$.

Il vient $\langle w, x \rangle = 0$ et $w \in (F \cap G)^\perp$. D'où le résultat.

3. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned} u \in (F + G)^\perp &\iff \forall v \in F + G, \langle u, v \rangle = 0 \\ &\iff \forall v \in F, \langle u, v \rangle = 0 \\ &\quad \text{et } \forall w \in G, \langle u, w \rangle = 0 \\ &\iff u \in F^\perp \text{ et } u \in G^\perp \\ &\iff u \in F^\perp \cap G^\perp. \end{aligned}$$

D'où l'égalité.

4. Il suffit de procéder comme au 2.

Exercice 11

$$\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

$$\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = \cos(\theta) \sin(\theta) - \sin(\theta) \cos(\theta) = 0$$

$$\langle \varepsilon_1, \varepsilon_3 \rangle = \cos(\theta) \langle \varepsilon_1, \varepsilon_3 \rangle + \sin(\theta) \langle \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle = 0$$

car e_2 et e_3 sont orthogonaux.

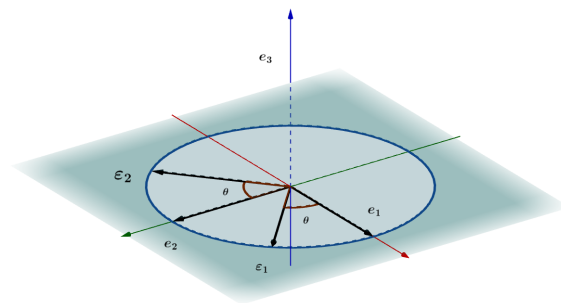
Il en va de même avec ε_2 et ε_3 . En résumé

$$\forall i, j \in \{1; 2; 3\}, \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}.$$

La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une famille orthonormée.

En particulier, la famille est libre avec autant de vecteurs que la dimension de $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Conclusion : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une b.o.n

On a fait une rotation des vecteurs (e_1, e_2) d'un angle θ pour obtenir $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. La famille reste bien une base orthonormée.



Exercice 12

1. En reprenant la démarche détaillée dans l'indication, on trouve

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2) \quad \text{et} \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

2. Vérifier que :

$$e_1 = 1, \quad e_2 = \sqrt{3}(2x - 1) \quad \text{et} \quad e_3 = \sqrt{180}(x^2 - x + 1/6).$$

Exercice 13

1. • $I_n {}^t I_n = I_n$ donc $I_n \in \mathcal{O}_n$.

- Comme pour $P \in \mathcal{O}_n$, $P {}^t P = I_n$. D'où

$${}^t(P^{-1})P^{-1} = ({}^t P)^{-1}P^{-1} = (P^{-1})^{-1}P^{-1} = PP^{-1} = I_n.$$

C'est la preuve de $P^{-1} \in \mathcal{O}_n$.

- Soient $P, Q \in \mathcal{O}_n$.

$${}^t(PQ)PQ = {}^t Q {}^t P P Q = {}^t Q I_n Q = {}^t Q Q = I_n.$$

Donc $PQ \in \mathcal{O}_n$.

2. Supposons que la matrice P est diagonale et orthogonale. Notons p_i les coefficients diagonaux. Dans ce cas ${}^t P = P$ et

$$I_n = {}^t P P = P^2 = \text{diag}(p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2).$$

Dès lors, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $p_i^2 = 1$ et $p_i \in \{-1; 1\}$.

La réciproque est claire. Finalement, les matrices diagonales et orthogonales sont les matrices diagonales avec la diagonale constituée de ± 1 .

3. Supposons P orthogonale

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

de sorte que

$$I_2 = P {}^t P = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

$$I_2 = {}^t P P = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + dc \\ ab + dc & b^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

En particulier

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 = a^2 + c^2 \\ c^2 + d^2 &= 1 = b^2 + d^2. \end{aligned}$$

On a donc $b^2 = c^2$ et $a^2 = d^2$.

De plus, $a^2 \leq 1$ et $a \in [-1; 1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$. Puis

$$b^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = \sin(\theta)^2 \iff b = \pm \sin(\theta).$$

Quitte à changer θ en $-\theta$, on peut prendre $b = \sin(\theta)$ tout en gardant $a = \cos(\theta)$. Ensuite, il existe $\varepsilon_c, \varepsilon_d \in \{-1; 1\}$ tel que

$$c = \varepsilon_c \sin(\theta) \quad (\text{car } b^2 = c^2)$$

$$d = \varepsilon_d \cos(\theta) \quad (\text{car } a^2 = d^2)$$

De plus la condition $ac + bd = 0$ donne $\varepsilon_c = -\varepsilon_d$ (qui convient aussi si $\cos(\theta)\sin(\theta) = 0$).

Le cas $\varepsilon_c = 1$ est impossible avec la contrainte sur le déterminant.

Donc $\varepsilon_c = -1$ et on obtient

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = R_\theta.$$

Exercice 14

1. On a déjà vu que $F \subset (F^\perp)^\perp$ (voir exercice 10, p. 8). De plus

$$\begin{aligned} \dim(F^\perp)^\perp &= \dim E - \dim F^\perp \\ &= \dim E - (\dim E - \dim F) = \dim F. \end{aligned}$$

On a bien l'égalité $F = (F^\perp)^\perp$.

2. La première égalité a déjà été montrée à l'exercice 10. Ce résultat étant valable pour tous sous-espaces vectoriels, on peut l'appliquer à $F^\perp$ et $G^\perp$ pour obtenir

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = F \cap G.$$

En appliquant de nouveau le résultat de la question 1, il vient bien $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 15

Soient $P \in F, Q \in G$. le polynôme PQ est une fonction impaire, donc

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt = \int_{-1}^1 (PQ)(t) dt = 0.$$

F et G sont des espaces orthogonaux. En particulier $F \cap G = \{0\}$. De plus, pour $A \in \mathbb{R}_{2n}[x]$

$$A = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k = \underbrace{\sum_{i=0}^n a_{2i} x^{2i}}_{\in F} + \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1} x^{2j+1}}_{\in G}.$$

On obtient $F + G = E$. Comme on a vu que F et G sont en somme directe, F et G sont donc supplémentaires orthogonaux de E .

Exercice 16

1.
2. L'isomorphisme donne l'égalité des dimensions :

$$\dim \mathcal{L}_2(E, \mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = (\dim E)^2.$$

3. On a maintenant

$$\dim \mathcal{L}_2(E, \mathbb{R}) = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{\dim E(\dim E - 1)}{2}.$$

Exercice 17

1. Si on pose

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on constate que

$$\Phi(I_2) = 2, \quad \Phi(J) = -2 \quad \text{et} \quad \Phi(K) = 0.$$

La forme quadratique n'est ni négative, ni positive, ni définie.

2. Raisonnons par l'absurde en supposant que la forme quadratique définie change de signe. Il existe donc $x, y \in E$ tels que

$$\Phi(x) < 0 \quad \text{et} \quad \Phi(y) > 0.$$

Considérons ensuite la fonction

$$f : t \in [0; 1] \mapsto \Phi(tx + (1-t)y).$$

Si on développe, on constate que f est polynomiale donc continue. De plus

$$f(1) = \Phi(x) < 0 \quad \text{et} \quad f(0) = \Phi(y) > 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois. Il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\Phi(t_0 x + (1-t_0)y) = f(t_0) = 0.$$

Or par hypothèse, Φ est définie, donc

$$t_0 x + (1-t_0)y = 0_E.$$

Comme x n'est pas le vecteur nul, y est colinéaire à x . Absurde car dans le cas de colinéarité

$$\Phi(y) = \Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x),$$

les réels $\Phi(x)$ et $\Phi(y)$ sont de même signe.

Exercice 18

- Soit $g \in A^\perp$. On a donc :

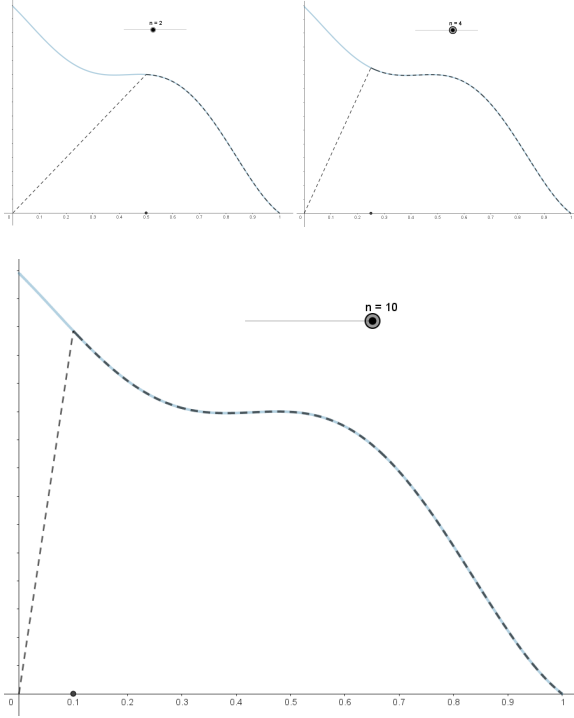
$$\forall f \in A, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt = 0.$$

→ Rédaction 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n par :

$$\begin{cases} \forall t \in \left[\frac{1}{n}; 1\right], & g_n(t) = g(t); \\ \text{la restriction de } g_n \text{ à } \left[0; \frac{1}{n}\right] \text{ est affine avec} \\ q_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad g_n(1/n) = f(1/n). \end{cases}$$

Ainsi $g_n \in A$.



D'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 g_n g = \int_0^{\frac{1}{n}} g_n g + \int_{\frac{1}{n}}^1 g_n g \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} g_n g + \int_{\frac{1}{n}}^1 g^2 \quad (\star) \end{aligned}$$

On a
$$\int_{\frac{1}{n}}^1 g^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g^2.$$

Et en remarquant que si M est un majorant de $|g|$ (qui est continue sur le segment $[0; 1]$), M est aussi un majorant de $|g_n|$, on a

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} g_n g \right| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |g_n| \cdot |g| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} M^2 = \frac{1}{n} M^2.$$

Par encadrement

$$\int_0^{\frac{1}{n}} g_n g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par passage à la limite dans $(\star)$, on obtient :

$$0 = \int_0^1 g^2.$$

Par positivité et continuité de g^2 , on a

$$\forall t \in [0; 1], \quad g(t)^2 = 0.$$

En conclusion, g est l'application nulle :

$$A^\perp = \{0\}.$$

•

Exercice 19

D'abord,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle,$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle,$$

donc

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) = 4\Re e \langle x, y \rangle.$$

Ensuite,

$$\|x + iy\|^2 = \langle x + iy, x + iy \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + i\langle x, y \rangle - i\langle y, x \rangle,$$

$$\|x - iy\|^2 = \langle x - iy, x - iy \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - i\langle x, y \rangle + i\langle y, x \rangle,$$

d'où

$$-i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2 = 2(\langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle) = 4i\Im m \langle x, y \rangle.$$

En additionnant et en divisant par 4, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2) \\ &= \Re e \langle x, y \rangle + i\Im m \langle x, y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Exercice 20

1. Voir le cas réel (exercice 2).

2. Si θ est un argument du complexe $\langle u, v \rangle$ alors en posant $\tilde{u} = e^{-i\theta}u$, on a

$$\langle \tilde{u}, v \rangle = e^{-i\theta} \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}.$$

On peut donc appliquer le premier point et

$$|\langle \tilde{u}, v \rangle| \leq \|\tilde{u}\| \cdot \|v\|$$

or $|\langle \tilde{u}, v \rangle| = |\langle u, v \rangle|$ et $\|\tilde{u}\| = \|e^{-i\theta}u\| = \|u\|$ Ce qui conclut :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Exercice 21

• En tant que combinaison linéaire de deux applications linéaires (l'application id et l'application transposée), p est

linéaire.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} p(p(M)) &= p\left(\frac{M + {}^tM}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}p(M) + p({}^tM) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{M + {}^tM}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{{}^tM + M}{2}\right) \\ &= p(M). \end{aligned}$$

L'application p est donc un projecteur.

- On vérifie que

$$\text{Ker}(p) = \mathcal{A}_n \quad \text{et} \quad \text{Im}(p) = \mathcal{S}_n$$

où $\mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{S}_n$) désigne l'ensemble des matrices antisymétriques (symétriques). De plus, pour $A \in \mathcal{A}_n, S \in \mathcal{S}_n$

$$\begin{aligned} \langle A, S \rangle &= \text{Tr}({}^tAS) \\ &= -\text{Tr}(AS) \\ \langle S, A \rangle &= \text{Tr}({}^tSA) \\ &= \text{Tr}(SA) \\ &= \text{Tr}(AS) \end{aligned}$$

Comme $\langle A, S \rangle = \langle S, A \rangle$, on a $\langle A, S \rangle = 0$. Ce résultat étant valable pour toutes matrices $A \in \mathcal{A}_n, S \in \mathcal{S}_n$, on en déduit que $\mathcal{A}_n, \mathcal{S}_n$ sont des sous-espaces orthogonaux. On a donc bien un projecteur orthogonal.

Exercice 22

La famille $(1, x)$ forme une base de F .

Comme le projeté orthogonal p_Q de Q sur F appartient à F . Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$p_Q(x) = \lambda + \mu x.$$

Or on a

$$\begin{cases} \langle Q - p_Q, 1 \rangle = 0 \\ \langle Q - p_Q, x \rangle = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \langle Q, 1 \rangle = \langle p_Q, 1 \rangle = \lambda \langle 1, 1 \rangle + \mu \langle x, 1 \rangle \\ \langle Q, x \rangle = \langle p_Q, x \rangle = \lambda \langle 1, x \rangle + \mu \langle x, x \rangle. \end{cases}$$

On explicite les produits scalaires pour obtenir le système :

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \lambda + \frac{1}{2}\mu \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}\mu \end{cases}$$

On trouve $\lambda = \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad \mu = 2.$

Conclusion : $Q(x) = \frac{5}{6} + 2x.$

Exercice 23

1. On a vu que si p est le projecteur orthogonal sur la droite vectorielle engendrée par u_0 , on a

$$p(u) = \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0.$$

puis par le théorème de minimisation,

$$\begin{aligned} d(u, F)^2 &= \|u - p(u)\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \|p(u)\|^2 \\ &= \|u\|^2 - \frac{\langle u, u_0 \rangle^2}{\|u_0\|^2}. \end{aligned}$$

Si u_0 est unitaire on a simplement

$$d(u, F)^2 = \|u\|^2 - \langle u, u_0 \rangle^2.$$

2. D'après les exemples page 22, on peut exprimer la projection orthogonale sur H à l'aide de u_0 , un vecteur normal à H par

$$\forall u \in E, \quad p_H(u) = u - \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0.$$

D'où

$$\begin{aligned} d(u, H) &= \|u - p_H(u)\| \\ &= \left\| \frac{\langle u, u_0 \rangle}{\|u_0\|^2} u_0 \right\| = \frac{|\langle u, u_0 \rangle|}{\|u_0\|}. \end{aligned}$$

Exercice 24

- Soit $E = \mathbb{R}_2[x], F = \mathbb{R}_1[x]$ et le produit scalaire

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

et $\|\cdot\|$, la norme associée. Dès lors, pour $P(t) = t^2$, on peut traduire le problème posé par

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (t^2 - at - b)^2 dt = \inf_{Q \in F} \|P - Q\|^2 = d(P, F)^2.$$

D'après le théorème précédent, on sait que cette quantité est bien définie, c'est même un minimum uniquement atteint pour $Q = p_F(P)$ au p_F est le projecteur orthogonal sur F .

- Calculons le projeté, puis la distance.

On a $F = \text{Vect}(1, x)$ et $Q(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$,

$$\begin{cases} \langle P - p_F(P), 1 \rangle = 0 \\ \langle P - p_F(P), x \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle P, 1 \rangle = \langle p_F(P), 1 \rangle \\ \langle P, x \rangle = \langle p_F(P), x \rangle \end{cases}$$

Or on a

$$\langle P, 1 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}, \quad \langle P, x \rangle = \int_{-1}^1 t^3 dt = 0$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 dt = 2, \quad \langle x, 1 \rangle = 0, \quad \langle x, x \rangle = \frac{2}{3}.$$

Pour $p_F(P)$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{2}{3} &= 2 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 \cdot 0 \\ 0 &= 0 \cdot \lambda_1 + \frac{2}{3} \lambda_2. \end{cases}$$

D'où $\lambda_1 = 1/3$ et $\lambda_2 = 0$. $p_F(P) = \frac{1}{3}$ (polynôme constant).

Dans ce cas

$$\begin{aligned} d(P, F)^2 &= \|P - p_F(P)\|^2 \\ &= \|P\|^2 - \|p_F(P)\|^2. \end{aligned}$$

Le calcul donne

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 (t^2 - at - b)^2 dt = d(P, F)^2 = \frac{8}{45}.$$

Exercice 25

Soient $x \in E$ et $N \in \mathbb{N}$. Posons

$$p_N = \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Comme (e_n) est orthonormée, pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$,

$$\langle x - p_N, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle = 0,$$

donc $x - p_N \perp p_N$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x - p_N\|^2 + \|p_N\|^2.$$

Or

$$\|p_N\|^2 = \left\langle \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n, \sum_{m=1}^N \langle x, e_m \rangle e_m \right\rangle = \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2$$

(car la famille est orthonormée). Ainsi

$$\left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2,$$

ce qui implique

$$\sum_{n=1}^N |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\forall N),$$

et en passant à la limite (somme croissante),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

c'est l'inégalité de Bessel.

Enfin, l'égalité a lieu ssi $\|x - p_N\| \rightarrow 0$, i.e. ssi $x \in \text{Vect}(e_n : n \geq 1)$ (équivalent x est limite des sommes partielles p_N).

Exercice 27

1.a) Soient $u, v \in E$. On a d'une part

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(u+v), u+v \rangle \\ &= \langle f(u), u \rangle + \langle f(u), v \rangle + \langle f(v), u \rangle + \langle f(v), v \rangle \\ &= \langle f(u), v \rangle + \langle f(v), u \rangle \quad (\star) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(u+iv), u+iv \rangle \\ &= \langle f(u), iv \rangle + \langle f(v), u \rangle \\ &= i\langle f(u), v \rangle + i\langle f(v), u \rangle. \end{aligned}$$

D'où $0 = -\langle f(u), v \rangle + \langle f(v), u \rangle.$

À l'aide de $(\star) - (\star\star)$, on obtient

$$\langle f(u), v \rangle = 0 \quad \text{soit} \quad f(u) \perp v.$$

2.b) En particulier pour $v = f(u)$, on a $f(u) \perp f(u)$ et le produit scalaire étant défini

$$f(u) = 0_E.$$

Le vecteur u étant arbitrairement choisi, f est l'application nulle.

2. En utilisant la représentation matricielle, pour $u \in E$ (dont U est la matrice dans la base)

$$\begin{aligned} \langle f(u), u \rangle &= {}^t(AU)U = {}^tU {}^tAU = -{}^tUAU \\ \text{et } \langle u, f(u) \rangle &= {}^tUAU. \end{aligned}$$

Comme $\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(u) \rangle$ par symétrie pour un produit scalaire euclidien, on obtient

$$\forall u \in E, \quad \langle f(u), u \rangle = 0.$$

On constate que le résultat de la question 1 ne tient plus si l'espace préhilbertien est réel.

On peut donner un contre-exemple plus explicite en considérant La rotation de centre l'origine et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 28

• *Unicité.*

Supposons l'existence de deux produits scalaires φ_1, φ_2 tels que la famille $(P_i)_i$ soit orthonormées.

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. La famille $(P_i)_{i \in [0; n]}$ est alors une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, elle est libre (argument 1 : elle est de degré échelonné, argument 2 : la famille est orthonormée). De plus, elle contient $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs. Il existe donc des réels $p_0, \dots, p_n, q_0, \dots, q_n$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^n p_i P_i, \quad Q = \sum_{j=0}^n q_j P_j.$$

Par bilinéarité des produits scalaires :

$$\begin{aligned} \varphi_1(P, Q) &= \varphi_1\left(\sum_{i=0}^n p_i P_i, \sum_{j=0}^n q_j P_j\right) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n p_i q_j \varphi_1(P_i, P_j) \end{aligned}$$

or

$$\varphi_1(P_i, P_j) = \delta_{ij} = \varphi_2(P_i, P_j),$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(P, Q) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n p_i q_j \varphi_2(P_i, P_j) \\ &= \varphi_2\left(\sum_{i=0}^n p_i P_i, \sum_{j=0}^n q_j P_j\right) \end{aligned}$$

$$\varphi_1(P, Q) = \varphi_2(P, Q).$$

Ce résultat étant vrai pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\varphi_1 = \varphi_2$. L'unicité du produit scalaire est établie.

• *Existence.*

La famille $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Si on note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, nulles à partir d'un certain rang, on a un isomorphisme

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow E \\ P = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i P_i \mapsto (p_i)_{i \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

Or on a un produit scalaire sur E

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

qui permet d'avoir un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ qui répond à la question :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P, Q) = \langle \psi(P), \psi(Q) \rangle.$$

Exercice 30

1. Comme les matrices ont même taille, il suffit de vérifier que les coefficients sont égaux. Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$

$$\begin{aligned} [{}^tMM]_{ij} &= \sum_{k=1}^n [{}^tM]_{ik} [M]_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle u_i, e_k \rangle \langle e_k, u_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = [G]_{ij}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Raisonnons par double inclusion.

$\Rightarrow$ Soit $X \in \text{Ker } M$.

$$GX = {}^tMMX = {}^tM0_{n,1} = 0_{n,1}$$

donc $X \in \text{Ker } G$.

$\Leftarrow$ Soit $X \in \text{Ker } G$.

$$\|MX\|^2 = {}^t(MX)(MX) = {}^tX {}^tMMX = {}^tXGX = 0.$$

Nécessairement $MX = 0_{n,1}$ et $X \in \text{Ker } M$.

On conclut par double inclusion.

- Par la formule du rang, $\text{rg}(G) = \text{rg}(M)$. Et on sait que le rang de M s'identifie au rang de la famille $(u_1, \dots, u_n)$.

3. Raisonnons par équivalence.

G est inversible

ssi $\text{rg } G = n$

ssi $\text{rg}(u_1, u_2, \dots, u_n) = n$

ssi $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est génératrice

ssi $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E .

car $\text{Card}(u_1, \dots, u_n) = \dim E$.

- 4.a) Soit X un vecteur propre de G associé à la valeur propre λ . On note x (resp. y) le vecteur de E dont X (resp. MX) est la matrice colonne dans la base $\mathcal{B}$. Par définition

$$X \neq 0_{n,1} \quad \text{et} \quad GX = \lambda X.$$

On en déduit

$${}^tXGX = \lambda {}^tXX = \lambda \|x\|^2$$

$$\text{et} \quad {}^tXGX = {}^tX {}^tMMX = {}^t(MX)(MX) = \|y\|^2.$$

Ainsi $\|y\|^2 = \lambda \|x\|^2$ avec $\|x\| \neq 0$. D'où $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Les valeurs propres de G sont positives ou nulles.

- 4.b) Comme G est diagonalisable

$$\text{Tr}(G) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(G)} \dim E_\lambda(G) \cdot \lambda$$

(si besoin, voir exercice ??, p. ??). Comme les valeurs propres sont positives, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(G)$

$$\lambda \leq \text{Tr}(G).$$

On conclut en remarquant que

$$\text{Tr}(G) = \sum_{i=1}^n \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2.$$

5.

Exercice 31

- 1.a) Il est clair que φ_ω est symétrique, bilinéaire.

De plus pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0; 1])$, on a par positivité de ω

$$\forall t \in [0; 1], \quad f(t)^2 \omega(t) \geq 0.$$

$$\text{D'où} \quad \varphi_\omega(f, f) = \int_0^1 f(t)^2 \omega(t) dt \geq 0.$$

L'application φ_ω est donc positive.

- Supposons maintenant que ω s'annule uniquement en $t_0 \in [0; 1]$. Soit f telle que $\varphi_\omega(f, f) = 0$. Comme la fonction $t \mapsto f(t)^2 \omega(t)$ est positive et continue, on sait que

$$\forall t \in [0; 1], \quad f(t)^2 \omega(t) = 0,$$

$$\text{puis} \quad \forall t \in [0; 1] \setminus \{t_0\}, \quad f(t) = 0.$$

Par continuité de f en t_0 , on a aussi

$$f(t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} f(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} 0 = 0.$$

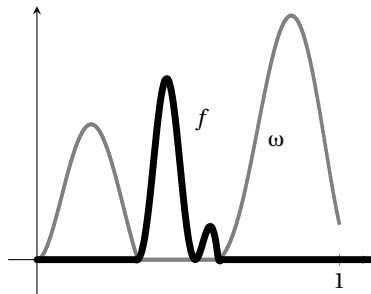
La fonction f est donc bien nulle sur $[0, 1]$ et l'application φ_ω est bien définie positive.

Résumons, lorsque l'application ω s'annule une fois, φ_ω est bien un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0; 1])$.

- L'argument précédent reste valable lorsque ω s'annule un nombre fini de fois et φ_ω reste un produit scalaire.

- Supposons maintenant que ω s'annule sur un intervalle $[a; b]$ strictement inclus dans $[0; 1]$.

Considérons f une fonction non nulle continue sur $[0; 1]$ qui s'annule en dehors de $[a; b]$ de sorte que pour tout $t \in [0; 1]$, $f(t)^2 \omega(t) = 0$. On a alors $\varphi_\omega(f, f) = 0$ sans que f soit nulle. L'application φ_ω n'est pas un produit scalaire.



1.b) Dans ce cas et par continuité de ω , il existe $a, b \in [0; 1]$ avec $a < b$ tels que ω est négative sur $[a; b]$. En reprenant l'exemple précédent, l'application φ_ω n'est pas un produit scalaire.

2. Les arguments de symétrie, bilinéarité et positivité restent valables dans le cadre de $\mathbb{R}[x]$, seul le caractère défini de l'application change.

Montrons que dans les trois cas, φ_ω est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$. Pour cela, on peut simplement supposer que ω est positive et ne s'annule pas sur un intervalle $[c, d]$ avec $0 \leq c < d \leq 1$.

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\varphi_\omega(P, P) = 0$. Comme l'intégrande est positive

$$0 = \int_0^1 P(t)^2 \omega(t) dt \geq \int_c^d P(t)^2 \omega(t) dt \geq 0.$$

La fonction $t \mapsto P(t)^2 \omega(t)$ est continue positive et d'intégrale nulle donc pour tout $t \in [c; d]$, $P(t)^2 \omega(t) = 0$. Comme ω ne s'annule pas sur $[c, d]$, pour tout $t \in [c; d]$, $P(t) = 0$. Dès lors, le polynôme P admet une infinité de racines (tous les réels de $[c; d]$). C'est donc le polynôme nul et l'application φ_ω est définie positive.

Dans tous les cas, φ_ω est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.